# Série chute libre

**Exercice n°1 : RECHERCHE D'UN MODÈLE DE FORCE DE FROTTEMENT**

Données pour l'exercice :

- Volume de la bille en acier : $V = 0{,}52\ cm^3$
- Masse volumique de l'acier : $\rho_A = 7850\ kg/m^3$
- Masse volumique de l'huile : $\rho_H = 920\ kg/m^3$
- Accélération de la pesanteur au lieu de l'expérience : $g = 9{,}8\ m/s^2$

On réalise la chronophotographie de la chute d'une bille sphérique en acier dans l'huile. Pour ce faire, on filme la bille dans une éprouvette remplie d'huile, avec un caméscope numérique au rythme de 50 images par seconde. Grâce à un traitement adéquat des images, on obtient le document 1 (voir en fin de sujet). On repère ensuite la position, sur chaque image, du centre d'inertie de la bille : $M_0$ correspond à sa position initiale, celle-ci étant lâchée, à l'instant $t_0$ pris comme origine des dates, sans vitesse initiale.

## A. Exploitation de l'enregistrement

**A-1.** En vous aidant des documents 1 et 2 (en fin de sujet), préciser les caractéristiques du mouvement de la bille entre les positions $M_{15}$ et $M_{21}$. Quelle est la loi de Newton ainsi illustrée ?

**A-2.** A partir des conditions de prise de vue données ci-dessus, justifier les valeurs qui apparaissent dans la colonne temps **t (ms)** du tableau du document 2.

## B. Étude cinématique

Le point $M_0$ étant pris comme origine des espaces et des temps ($y = 0$ et $t = 0$), on repère les différentes hauteurs réelles de chute de la bille dans l'huile, notées **y**, aux dates **t** correspondantes. On calcule alors les vitesses correspondantes. Les différentes grandeurs sont notées dans le tableau du document 2.

**B-1.** Calculer la vitesse de la bille pour la position $M_6$.

**B-2.** Calculer l'accélération de la bille pour la position $M_{18}$**.** Le résultat obtenu est-il compatible avec celui obtenu au A-1 ? Argumenter la réponse.

***NB :*** *Pour les questions B-1 et B-2, on aura soin de préciser scrupuleusement la méthode employée pour déterminer les valeurs de la vitesse et de l'accélération aux points demandés.*

## C. Étude dynamique

**C-1.** Sur un schéma, faire figurer, sans souci d'échelle, toutes les forces s'exerçant au centre d'inertie G de la bille tombant dans l'huile.

**C-2.** Calculer la masse m de la bille.

**C-3.** Donner l'expression littérale de la poussée d'Archimède, $P_A$, s'exerçant sur la bille plongée dans l'huile. Calculer sa valeur.

## D. Équation différentielle du mouvement de la bille

Soit **f** l'intensité de la force de frottement à laquelle est soumise la bille en mouvement dans l'huile.

**D-1.** Par application du théorème du centre d'inertie que l'on énoncera, établir que le mouvement de la bille obéit à une équation différentielle du type : $\frac{dv}{dt} + \frac{f}{m} = A$, où A est une constante et v la vitesse de la bille.

**D-2.** Donner l'expression littérale de A puis calculer sa valeur. Préciser son unité.

## E. <u>Recherche de modèles pour la force de frottement</u>

On se propose de déterminer expérimentalement si l'intensité de la force de frottement **f** à laquelle est soumise la bille en mouvement dans l'huile est de la forme $\mathbf{f = k_1 \cdot v}$ ou $\mathbf{f = k_2 \cdot v^2}$, $k_1$ et $k_2$ étant des constantes et v la vitesse de la bille.
On utilise un tableur pour représenter la vitesse de la bille en fonction du temps. On obtient le graphe du document 3 (en fin de sujet) : les points expérimentaux obtenus y sont représentés sous forme de losange. On détermine ainsi la valeur de la vitesse limite de chute de la bille : $v_{lim} = 0,95$ m/s.

**E-1.** Première hypothèse : $\mathbf{f = k_1 \cdot v}$

**E-1.a)** Montrer que l'équation différentielle précédente peut alors se mettre sous la forme **:** $\frac{dv}{dt} + B_1.v = A$ où A est la constante déterminée dans la partie D.

**E-1.b)** Lorsque la vitesse de la bille atteint la vitesse limite $v_{lim}$, que devient le terme $\frac{dv}{dt}$ de l'équation différentielle précédente ? En déduire l'expression littérale de $B_1$ en fonction de A et $v_{lim}$ . Calculer alors la valeur de la constante $k_1$ et préciser son unité.

**E-2.** Deuxième hypothèse : $\mathbf{f = k_2 \cdot v^2}$

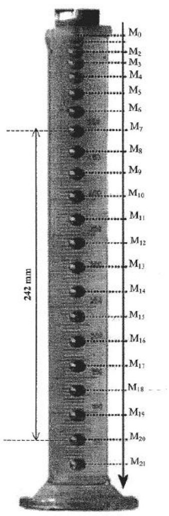
Dans ce cas, l'équation différentielle se met sous la forme : $\frac{dv}{dt} + B_2.v^2 = A$

Déterminer l'expression littérale de $B_2$ en fonction de A et $v_{lim}$. Calculer alors la valeur de la constante $k_2$ et préciser son unité.

**E-3.** Comparaison des deux modèles précédents :

Grâce au tableur et à la méthode d'Euler, on détermine les courbes théoriques correspondant aux deux modèles précédents. Le premier modèle sera noté **« modèle n°1 »** sur le document 3 (en fin de sujet) correspond à l'hypothèse d'une force de frottement du type $\mathbf{f = k_1 \cdot v}$. Le second modèle noté **« modèle n°2 »** correspond à l'hypothèse d'une force de frottement du type $\mathbf{f = k_2 \cdot v^2}$.

En vous aidant du document 3, préciser les domaines de vitesse, sous forme d'un encadrement, pour lesquels chacun des deux modèles précédents semble coïncider le mieux avec les points expérimentaux.

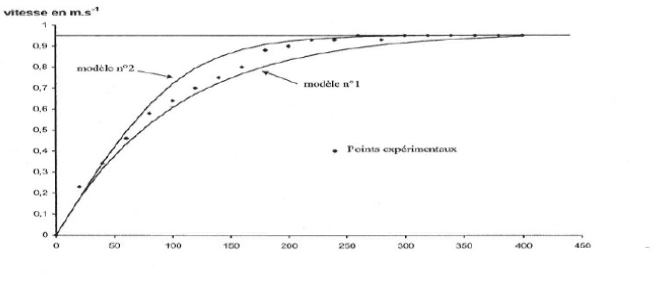


**Document 1** : chronophotographie de la chute d'une bille d'acier dans l'huile

| **Positions** | **t** | **y** | **v** |
|---|---|---|---|

| de la bille | (ms) | (mm) | (m/s) |
|---|---|---|---|
| M0 | 0 | 0,0 | 0,00 |
| M1 | 20 | 4,5 | 0,23 |
| M2 | 40 | 9,0 | 0,34 |
| M3 | 60 | 18,0 | 0,46 |
| M4 | 80 | 27,5 | 0,58 |
| M5 | 100 | 41,0 | 0,64 |
| M6 | 120 | 53,0 | |
| M7 | 140 | 69,0 | 0,75 |
| M8 | 160 | 83,0 | 0,80 |
| M9 | 180 | 101,0 | 0,88 |
| M10 | 200 | 118,0 | 0,90 |
| M11 | 220 | 137,0 | 0,93 |
| M12 | 240 | 155,0 | 0,93 |
| M13 | 260 | 174,0 | 0,95 |
| M14 | 280 | 193,0 | 0,93 |
| M15 | 300 | 211,0 | 0,95 |
| M16 | 320 | 231,0 | 0,95 |
| M17 | 340 | 249,0 | 0,95 |
| M18 | 360 | 269,0 | 0,95 |
| M19 | 380 | 287,0 | 0,95 |
| M20 | 400 | 307,0 | 0,95 |
| M21 | 420 | 325,0 | |

**Document 2 :** tableau donnant la vitesse de la bille suivant sa position




**Document 3 :** Courbes théoriques et points expérimentaux

## EXERCICE 2

*Une éprouvette contenant un liquide visqueux sert de support à l'étude de la chute d'une bille d'acier. Le schéma ci-dessous, qui donne une idée du montage, n'est qu'indicatif. En particulier, il ne respecte pas d'échelle et ne peut pas servir de support pour des mesures.*

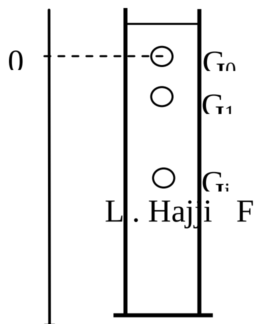


Figure1

La bille, qui constitue le système étudié, est lâchée sans vitesse initiale à l'instant t = 0 (voir figure 1). Au même instant, une acquisition vidéo assurée par une webcam couplée à un ordinateur est déclenchée de manière à enregistrer 25 images par seconde.

La position instantanée x du centre G de la bille est repérée par l'axe vertical orienté vers le bas $\overrightarrow{Ox}$, de vecteur unitaire $\vec{i}$ . A t = 0, G est en $G_0$.

Le vecteur-vitesse de G est noté $\vec{v} = v.\vec{i}$ .

La vidéo est ensuite analysée à l'aide d'un logiciel approprié qui permet de repérer aux dates $t_i$ les positions successives $x_i$ de G lors de son mouvement descendant et de calculer approximativement la vitesse moyenne $v_i$ entre les dates $t_{i-1}$ et $t_{i+1}$.

La détermination des vitesses $v_i$ aux instants $t_i$ donne l'***<u>ENREGISTREMENT 1.</u>***

**3.1. Exploitation de l'enregistrement**

**3.1.a** Expliquer comment le logiciel permet de déterminer les vitesses $v_i$ à partir des positions $x_i$ aux instants $t_i$.

**3.1.b** Mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite $V_L$ dont on donnera la valeur.

**3.2. Equation du mouvement**

On considère comme système la bille plongée dans le liquide et en mouvement par rapport à celui-ci.

**3.2.a** Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le système. Les représenter sur un schéma.

**3.2.b** On note m et V la masse et le volume de la bille, ρ et ρ' les masses volumiques respectives de l'acier qui constitue la bille et du liquide dans laquelle celle-ci est plongée. $\vec{g} = g.\vec{i}$ est l'accélération de la pesanteur.

On suppose que la force (« résistance ») exercée par le fluide sur la bille en mouvement est de la forme $\vec{F} = -k.\vec{v}$ , k étant une constante positive.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction v(t). Montrer qu'elle est de la forme :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-k.v}{m} + \alpha.g$$

**3.2.c** Vérifier que la fonction $v(t) = \alpha.g.\frac{m}{k}.\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}.t\right)\right]$ est solution de l'équation précédente et vérifie la condition initiale : à t = 0, v = 0.

On prend dorénavant les valeurs suivantes, données dans le système international S.I. :

$m = 5{,}00.10^{-3}$ kg ; $g = 9{,}81$ m.s$^{-2}$ ; $k = 7{,}60.10^{-2}$ kg.s$^{-1}$ ; $\alpha = 0{,}906$.

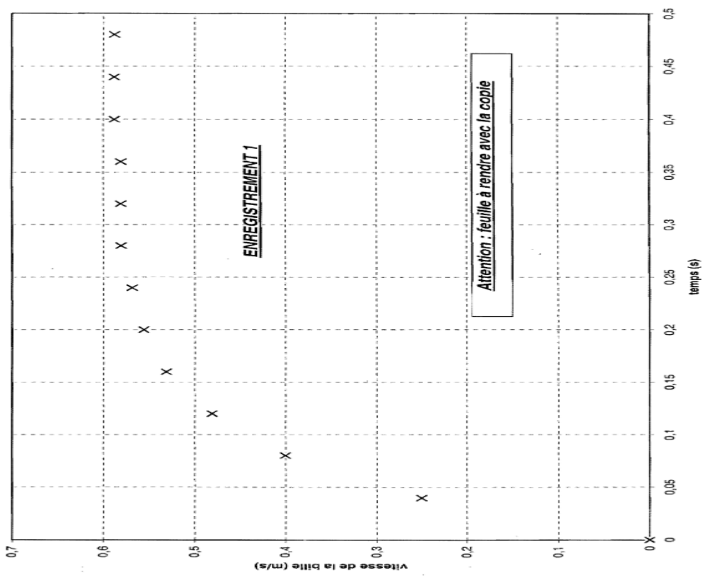
**3.2.d** Dans l'équation différentielle ou dans l'expression de la solution, mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite. Calculer sa valeur et la comparer à celle trouvée en 3.1.b.

Utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer l'unité de $\frac{m}{k}$ .

Calculer numériquement ce rapport.
Quelle interprétation peut-on donner de cette grandeur ?

**3.3. Détermination du temps caractéristique sur l'enregistrement**

Par une méthode de votre choix et que vous expliciterez, déterminez sur l'enregistrement la valeur du temps $\tau$ caractéristique du phénomène. Conclusion.




## *Exercice3*

La grêle se forme dans les cumulo-nimbus situés entre 1000 m et 10000 m d'altitude où la température est très basse, jusqu'à – 40 °C. Le grêlon tombe lorsqu'il n'est plus maintenu au sein du nuage. Au sol sa vitesse peut atteindre 160 km/h.
On étudie un grêlon de masse 13 g qui tombe d'un point O d'altitude 1500 m sans vitesse initiale. Il peut être assimilé à une sphère de diamètre 3,0 cm.
Le point O sera pris comme origine d'un axe Oz orienté positivement vers le bas. L'intensité de la pesanteur sera considérée comme constante et de valeur $g_o = 9{,}80\ m.s^{-2}$.

**Données :** volume d'une sphère $V = \frac{4}{3}\pi \times r^3$ ; masse volumique de l'air $\rho = 1{,}3\ kg.m^{-3}$

**A – CHUTE LIBRE**

On admettra que le grêlon tombe en chute libre

1. En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer les équations horaires donnant la vitesse et la position du centre d'inertie G du grêlon en fonction de la durée t de la chute.

2. Calculer la valeur de la vitesse lorsqu'il atteint le sol, ce résultat est-il vraisemblable ? Justifier.

**B – CHUTE REELLE**

En réalité le grêlon est soumis à deux autres forces, la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ et la force de frottement fluide $\vec{F}$ proportionnelle au carré de la vitesse telle que $F = K \times v^2$.

1. Par une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité du coefficient K dans le Système International.

2. Donner l'expression de la valeur de la poussée d'Archimède ; la calculer et la comparer à celle du poids. Conclure.

3. On néglige la poussée d'Archimède.

**a)** Établir l'équation différentielle du mouvement.

Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$

**b)** On veut résoudre cette équation différentielle par une méthode numérique : la méthode d'Euler.

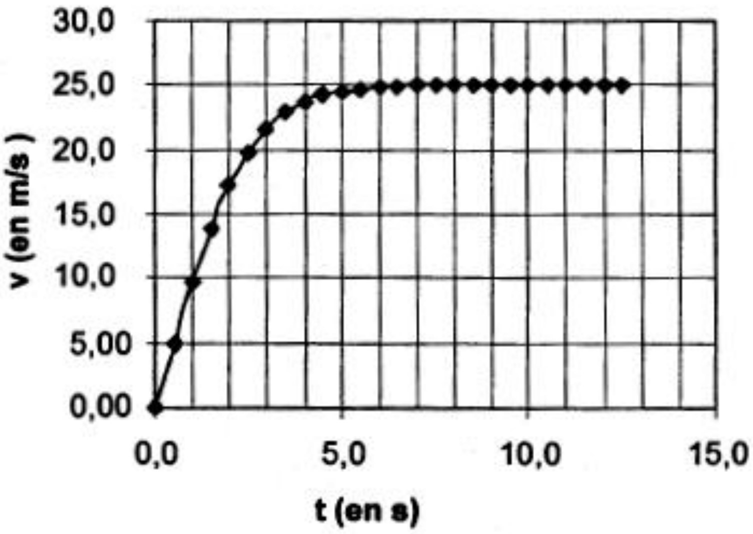
Le tableau suivant est un extrait d'une feuille de calcul des valeurs de la vitesse (v) et de l'accélération (a) en fonction du temps (t). Il correspond aux valeurs $A = 9{,}80\ m.s^{-2}$ et $B = 1{,}56 \times 10^{-2}\ m^{-1}$, pas de variation $\Delta t = 0{,}5$ s.

| t (s) | v(m.s$^{-1}$) | a (m.s$^{-2}$) |
|---|---|---|
| 0,00 | 0,00 | 9,80 |
| 0,50 | 4,90 | 9,43 |
| 1,00 | 9,61 | 8,36 |
| 1,50 | 13,8 | 6,83 |
| 2,00 | 17,2 | $a_4$ |
| 2,50 | $v_5$ | 3,69 |
| 3,00 | 21,6 | 2,49 |

Déterminer $a_4$ et $v_5$ en détaillant les calculs.

**c)** Exprimer littéralement la vitesse limite atteinte par le grêlon en fonction de A et B puis calculer sa valeur numérique.

**d)** La courbe d'évolution de la vitesse en fonction du temps est donnée ci-dessous. Retrouver graphiquement la valeur de la vitesse calculée au paragraphe précédent.



## *Exercice4*

Selon la légende, Galilée (1564-1642) aurait étudié la chute des corps en lâchant divers objets du sommet de la tour de Pise (Italie). Il y fait référence dans deux ouvrages : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* et *Discours concernant deux sciences nouvelles* dans lesquels il remet notamment en question les idées d'Aristote.

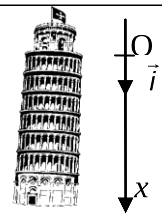



**Figure 1. Représentation de la tour penchée de Pise.**

Dans cet exercice, on présente trois courts extraits de ces deux livres.
Il s'agit de retrouver certains résultats avancés par Galilée concernant la chute verticale dans l'air d'un boulet sphérique en fer, lâché sans vitesse initiale.
Pour cette étude, on choisit le référentiel terrestre, supposé galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace (O$x$) vertical orienté vers le bas (**figure 1**).

**Donnée :**

- intensité du champ de pesanteur, supposé uniforme : $g$ = 9,8 m.s$^{-2}$ ;

***Modélisation par une chute libre***

**Étude des hauteurs de chute**

Extrait n°1 :
« Avant tout, il faut considérer que le mouvement des corps lourds n'est pas uniforme : partant du repos, ils accélèrent continuellement (…). Si on définit des temps égaux quelconques, aussi nombreux qu'on veut, et si on suppose que, dans le premier temps, le mobile, partant du repos, a parcouru tel espace, par exemple une aune*, pendant le second temps, il en parcourra trois, puis cinq pendant le troisième (…) et ainsi de suite, selon la suite des nombres impairs ».
* une aune = 1,14 m

Le boulet est lâché au point O, d'abscisse $x_0$ = 0 à la date $t_0$ = 0. On suppose l'action de l'air négligeable ; dans ce cas, l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du boulet est : $x(t) = \frac{1}{2}g.t^2$.

**Soient $x_1$ la distance parcourue au bout de la durée $\tau$, $x_2$ la distance parcourue au bout de la durée $2\tau$ et ainsi de suite, exprimer $x_1$, $x_2$, $x_3$ en fonction de $g$ et de $\tau$.**

**Exprimer la différence $h_1 = x_1 - x_0$ en fonction de $g$ et de $\tau$ puis les différences $h_2 = x_2 - x_1$ et $h_3 = x_3 - x_2$ en fonction de $h_1$.**

**Retrouve-t-on la suite des hauteurs de chute annoncée par Galilée dans l'extrait n°1 ? Justifier.**

**Étude de la durée de la chute**

Les points de vue d'Aristote et de Galilée, au sujet de l'influence de la masse $m$ du boulet sur la durée totale $\Delta t$ de sa chute, diffèrent.

Extrait n°2 :
« Cherchons à savoir combien de temps un boulet, de fer par exemple, met pour arriver sur la Terre d'une hauteur de cent coudées*.
Aristote dit qu'une « boule de fer de cent livres**, tombant de cent coudées, touche terre avant qu'une boule d'une livre ait parcouru une seule coudée », et je vous dis, moi, qu'elles arrivent en même temps.
Des expériences répétées montrent qu'un boulet de cent livres met cinq secondes pour descendre de cent coudées ».
* une coudée correspond à une distance de 57 cm ;  ** une livre est une unité de masse

**Parmi les propositions ci-dessous, attribuer celle qui correspond à la théorie d'Aristote et celle qui correspond à la théorie de Galilée :**

a) La durée de chute augmente quand la masse du boulet augmente ;
b) La durée de chute diminue quand la masse du boulet augmente ;
c) La durée de chute est indépendante de la masse.

**En utilisant l'expression $x(t) = \frac{1}{2} g.t^2$, calculer la durée $\Delta t$ de la chute d'un boulet qui tombe d'une hauteur totale $H$ = 57 m (100 coudées). Ce résultat est différent de la valeur annoncée dans l'extrait n°2. Proposer une explication à l'écart constaté.**

***Chute réelle***

Galilée admet plus loin que les deux boules, de masses respectives une et cent livres, arrivent au sol avec un léger écart.

| |
|---|
| Extrait n°3 :<br>« Vous constatez, en faisant l'expérience, que la plus grande précède la plus petite de deux doigts, c'est à dire que quand celle-là frappe le sol, celle-ci s'en trouve encore à deux doigts. Or, derrière ces deux doigts, vous ne retrouverez pas les quatre-vingt-dix-neuf coudées d'Aristote. » |

On considère que trois forces s'exercent sur un boulet pendant sa chute verticale : son poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottement $\vec{f}$.

La norme de la force de frottement a pour expression : $f = \frac{1}{2} \pi.R^2.\rho_{\text{air}}.C.v^2$

où $v$ est la vitesse du centre d'inertie du boulet, $R$ est le rayon du boulet et $C$ est une constante sans unité.

**Données :**

- masse volumique de l'air : $\rho_{\text{air}}$ = 1,29 kg.m$^{-3}$ ;
- masse volumique du fer : $\rho_{\text{fer}} = 7{,}87\times10^3$ kg.m$^{-3}$ ;
- volume d'une sphère : $V_S = \frac{4}{3}\pi.R^3$.

Lors de la chute, représenter ces trois forces sur un schéma sans souci d'échelle.
Le poids et la poussée d'Archimède sont constants pendant la chute d'un boulet. Établir le rapport de leurs expressions et en déduire que la poussée d'Archimède est négligeable.
Étude dynamique

Appliquer la deuxième loi de Newton. Projeter les forces sur l'axe (O$x$) vertical orienté vers le bas (figure 1). Déterminer l'expression de la dérivée par rapport au temps de la vitesse $\frac{dv}{dt}$.

En déduire que l'expression de la vitesse limite $v_\ell$ est : $v_\ell = \sqrt{\frac{8\rho_{\text{fer}}R.g}{3\rho_{\text{air}}.C}}$.

Vérifier, en effectuant une analyse dimensionnelle, que l'expression de $v_\ell$ est bien homogène à une vitesse.

On considère deux boulets sphériques $B_1$ et $B_2$ en fer de masses respectives $m_1$ = 1 livre et $m_2$ = 100 livres et de rayons respectifs $R_1$ = 2,2 cm et $R_2$ = 10,1 cm. On note $v_{1\ell}$ et $v_{2\ell}$ les vitesses limites respectives des boulets $B_1$ et $B_2$. Exprimer le rapport $\frac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}}$ en fonction des seuls rayons $R_1$ et $R_2$ et en déduire le boulet qui a la vitesse limite la plus élevée.

Un logiciel permet de simuler les évolutions de la vitesse $v(t)$ (figure 2) et de la position $x(t)$ du boulet pendant sa chute (figure 3 et zoom de la figure 3 sur la figure 4). Ces courbes sont obtenues pour les trois situations suivantes :

- la chute du boulet $B_1$ dans l'air (courbes c et c'),
- la chute du boulet $B_2$ dans l'air (courbes b et b'),
- la chute libre (courbes a et a').

Expliquer l'attribution des courbes b et c aux boulets $B_1$ et $B_2$.

La hauteur de chute est de 57 m. Déterminer graphiquement la date $t_{\text{sol}}$ à laquelle le premier boulet touche le sol. S'agit-il de $B_1$ ou de $B_2$ ?

À quelle distance du sol se trouve l'autre boulet à cette date ? Ce résultat est-il en accord avec l'extrait n°3

**DOCUMENTS DE L'EXERCICE**

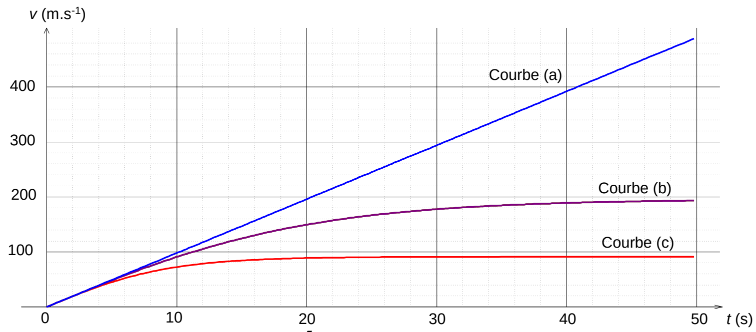



**Figure 2. Évolution des vitesses**

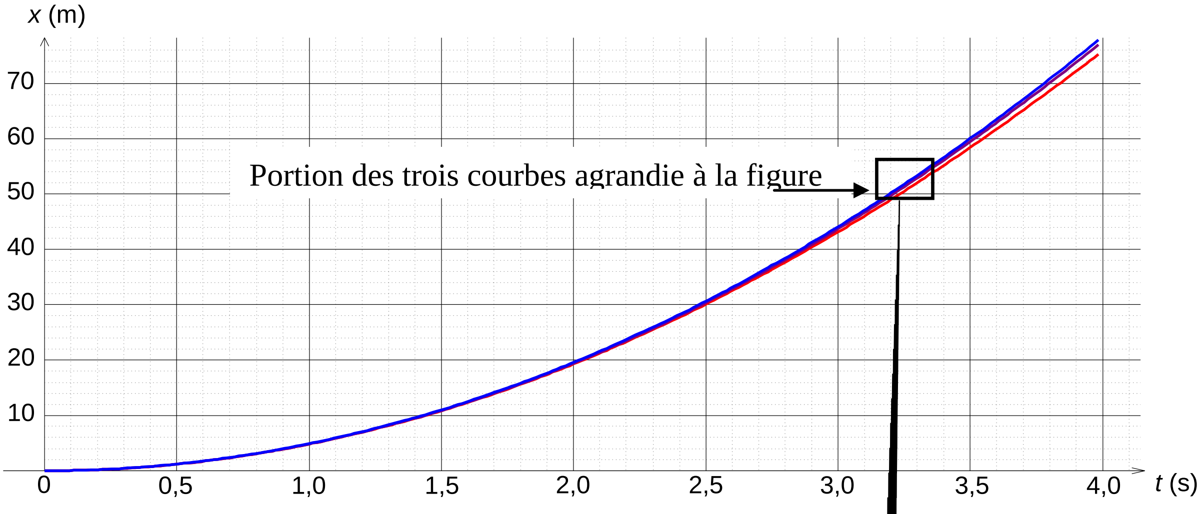



**Figure 3. Évolution des positions**

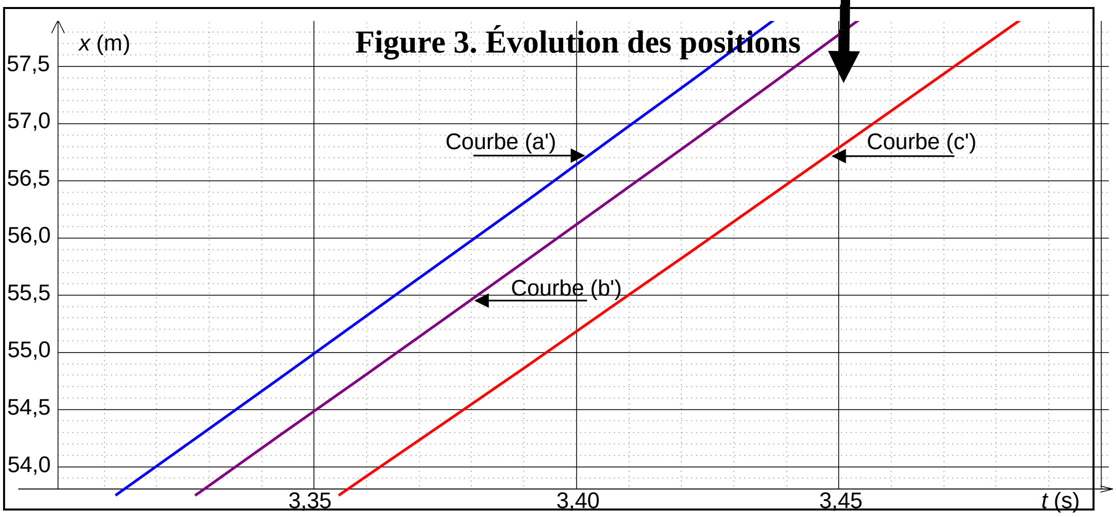



**Figure 4. Zoom sur l'évolution des positions**