Série 2 Circuit RLC

EXERCICE. SYSTEME D'ALLUMAGE CLASSIQUE DANS UN MOTEUR A ESSENCE

L'inflammation du mélange air-essence dans le moteur d'une voiture est provoquée par une étincelle qui jaillit entre les bornes d'une bougie d'allumage. Cette étincelle apparaît lorsque la valeur absolue de la tension aux bornes de la bougie est ***supérieure à 10 000 volts****.*
On peut modéliser le circuit électrique par le schéma figure 3 :

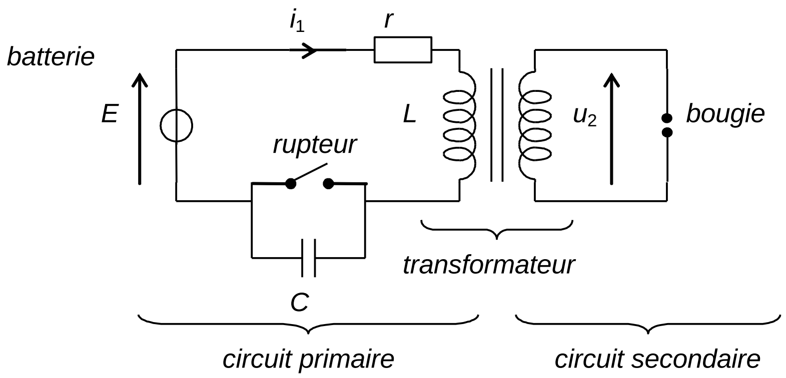

Figure 3

Avec :
E = 12 V, tension aux bornes de la batterie, considérée comme un générateur idéal de tension.
La bobine du circuit primaire est modélisée par une inductance pure L en série avec une résistance r = 6,0 Ω.
Le rupteur est un interrupteur commandé par le mouvement mécanique du moteur.
Le rôle du transformateur est d'obtenir une tension de sortie u_2 aux bornes de la bougie très élevée. Les propriétés du transformateur sont telles que les grandeurs u_2 et i_1 sont liées par la relation : $u_2 = \alpha \dfrac{di_1}{dt}$, où i_1 est l'intensité du courant dans le circuit primaire et α une constante indépendante du temps, positive. Aucune autre connaissance concernant le fonctionnement du transformateur n'est nécessaire pour résoudre l'exercice.

L'objectif de l'exercice est de montrer que des étincelles se produisent aux bornes de la bougie lorsque le rupteur est ouvert.

1. Étude du circuit primaire sans condensateur.
1.1. Rupteur fermé
Le circuit primaire peut être alors modélisé selon le schéma figure 4 :

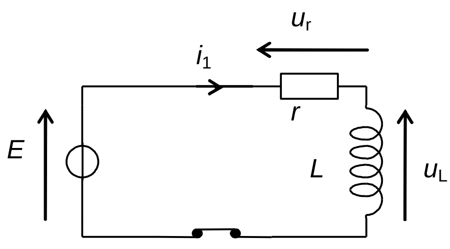

Figure 4

1.1.1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i_1 s'écrit : $\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{r}{L} i_1 = \dfrac{E}{L}$

1.1.2. Que devient cette équation différentielle en régime permanent ?
1.1.3. En déduire la valeur de l'intensité I_1 du courant dans le circuit primaire en régime permanent.
1.1.4. Peut-il y avoir une étincelle aux bornes de la bougie en régime permanent ? Justifier.

1.2. Rupteur ouvert

Lorsque le rupteur s'ouvre (à une date choisie pour origine des dates), il se produit une étincelle à ses bornes. L'air devient alors conducteur et le rupteur se comporte comme un conducteur ohmique de résistance de plusieurs mégaohms. Le circuit primaire peut alors être modélisé selon le schéma figure 5 :

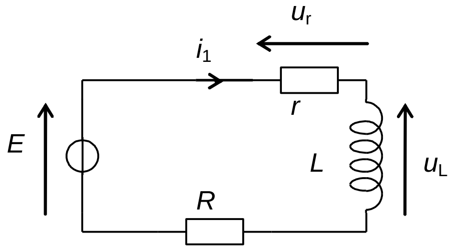

Figure 5

1.2.1. Quelle est l'effet de la bobine sur la rupture du courant ?

1.2.2. *On donne l'expression temporelle de l'intensité $i_1(t)$ pour $t \geq 0$:*

$$i_1(t) = \frac{E}{R+r} + \left(I_1 - \frac{E}{R+r}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{avec } \tau = \frac{L}{R+r}$$

Les trois courbes ci-dessous, représentent des allures possibles de l'évolution de l'intensité i_1 du courant en fonction du temps.

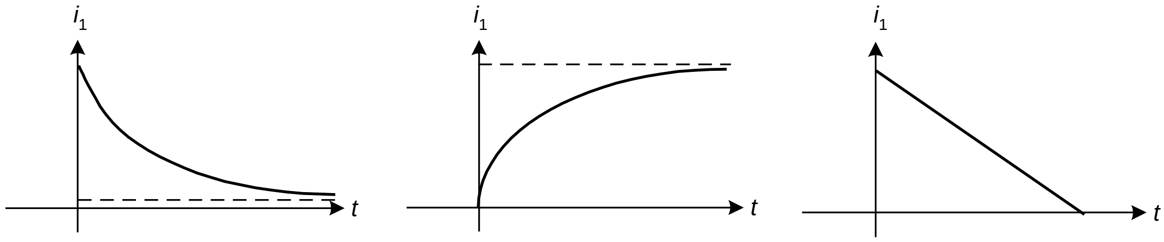

Figure 6.a **Figure 6.b** **Figure 6.c**

En justifiant, choisir la seule compatible avec l'expression de $i_1(t)$.

1.2.3. *On donne en* ***FIGURE 7 DE L'ANNEXE PAGE 12*** *l'allure de l'évolution de la valeur absolue de la tension $u_2(t)$ définie dans l'introduction.*

À partir de cette courbe, déterminer la valeur de la constante de temps τ.

1.2.4. À partir de quelle date peut-on considérer qu'il n'y a plus d'étincelle aux bornes de la bougie ?

2. Étude du circuit primaire avec condensateur et rupteur ouvert.

Pour que l'étincelle n'endommage pas le rupteur au moment de son ouverture, un condensateur est branché en dérivation aux bornes du rupteur. Lorsque le rupteur s'ouvre, le circuit primaire peut alors être modélisé selon le schéma de la figure 8 :

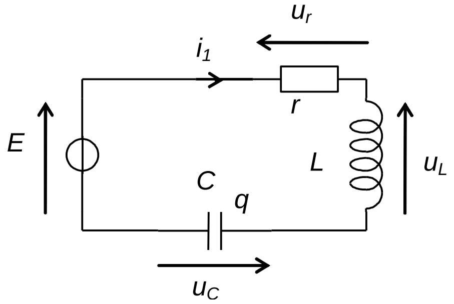

Figure 8

L'équation différentielle vérifiée par la charge q du condensateur est : $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{r}{L}\cdot\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=\frac{E}{L}$ *(1)*

2.1. Cas où r = 0

On considère le cas d'une bobine idéale. L'équation différentielle correspondante est alors $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{LC}=\frac{E}{L}$ *(2). On propose l'expression temporelle de la charge :* $q(t)=Q_0.cos\left(\frac{2.\pi}{\gamma}t\right)+C.E$ *.*

On prendra comme origine des dates, l'instant t = 0 s pour lequel q(t = 0 s) = $Q_0 + C.E$ *avec* $Q_0 > 0$*.*

2.1.1. Donner l'expression littérale de l'intensité $i_1=\frac{dq(t)}{dt}$.

2.1.2. Donner l'expression littérale de $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$.

2.1.3. En remplaçant dans l'équation (2) $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ et $q(t)$, montrer que la fonction $q(t)$ proposée est une solution de l'équation différentielle (2) si et seulement si $\gamma=2.\pi.\sqrt{L.C}$.

2.1.4. Que représente γ pour ce circuit ?

2.1.5. En utilisant la réponse à la question 2.1.2., montrer que $u_2(t)=-Acos(\frac{2\pi}{\gamma}t)$ où A est une constante positive.

2.1.6. Tracer l'allure de la variation de la tension $u_2(t)$ en fonction du temps et qualifier le régime observé.

2.2. Cas où r ≠ 0

L'allure de la variation temporelle de la tension $u_2(t)$ *réellement observée est représentée sur la figure 9 ci-dessous :*