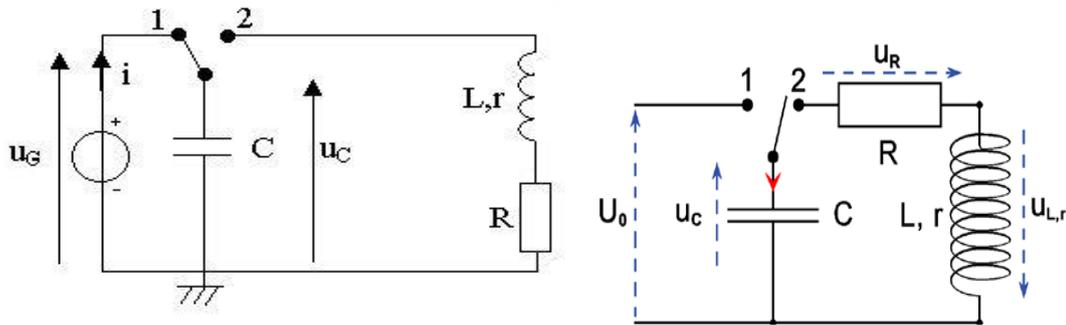


### Le circuit RLC libre et amorti

On dit qu'un circuit RLC série est en régime libre lorsqu'il ne subit aucun apport d'énergie après l'instant initial.

#### I- Etude expérimentale



- Quand l'interrupteur est en position 1, on charge le condensateur.
- Lorsqu'on bascule l'interrupteur en position 2, le condensateur se décharge dans la bobine.
- Lorsque l'on regarde l'évolution de  $u_C(t)$ , on observe alors l'apparition d'oscillations électriques amorties.

Equation différentielle :

$$u_{AB}(t) = u_{L,r}(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$$

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{R+r}{L} \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_C(t) = 0$$

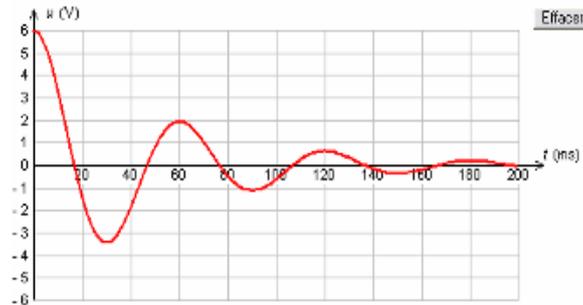
### Influence de l'amortissement : 4 régimes possibles

$\frac{R+r}{L} \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$  est le terme d'amortissement

L'amortissement, dans un circuit RLC série en régime libre (sans apport extérieur d'énergie), dépend de la résistance totale du circuit :  $R_t = R + r$ .

### a. Régime pseudo-périodique :

**valeur de  $R_t$  est petite** : On observe un **signal périodique** dont **l'amplitude des oscillations décroît** au cours du temps.



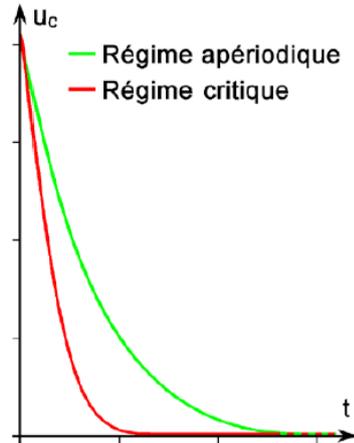
- On appelle la période d'un tel signal la **pseudo-période T**, temps qui s'écoule **entre deux valeurs maximales successives**, elle est constante.

### b. Régime apériodique :

Quand l'amortissement est trop fort (**valeur de  $R_t$  trop grande**) alors il n'y a plus d'oscillations

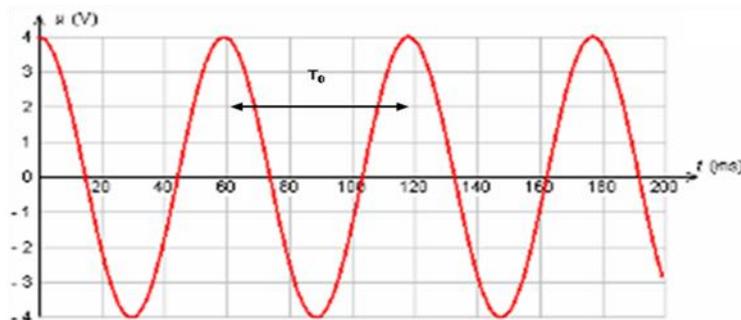
### c. Régime critique :

Il existe une **valeur de  $R_t$**  pour laquelle on passe du **régime pseudo-périodique au régime apériodique**. Cette valeur de résistance est nommée résistance critique et le régime correspondant s'appelle également le régime critique.



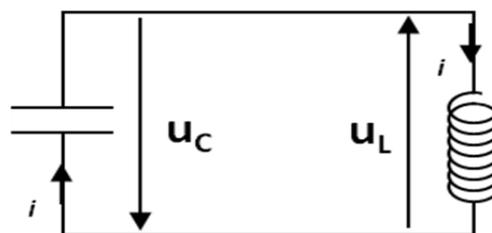
### d. Régime périodique :

Si l'amortissement est négligeable (ce qui ne peut exister en pratique pour un circuit libre), le système est le siège d'oscillations non amorties, le régime est alors périodique. Les oscillations sont de périodes  $T_0$ .



Doc n°4

## II Etude de l'oscillateur non amorti



Doc n°6

a. Etablissement de l'équation différentielle :

La charge du condensateur initiale est  $q_0$  et la bobine a une résistance négligeable

D'après la loi des tensions (mailles) :  $u_C + u_L = 0$

• Or  $u_L = L \times \frac{di}{dt}$  avec  $i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt}$

d'où  $u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$

• Ainsi :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \times u_C = 0$$

Soit une solution de la forme :  $u_C = U_m \times \cos(\omega_0 t + \phi)$

Avec  $U_m$ ,  $\omega_0$  et  $\phi$  sont trois constantes à déterminer.

Vérifions qu'elle satisfait bien à l'équation différentielle :

•  $\frac{du_C}{dt} = -\omega_0 \times U_m \times \sin(\omega_0 t + \phi)$

Puis  $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\omega_0^2 \times U_m \times \cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 \times u_C$

• En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$\left( \frac{1}{LC} - \omega_0^2 \right) \times u_C = \left( \frac{1}{LC} - \omega_0^2 \right) \times U_m \times \cos(\omega_0 t + \phi) = 0$$

• Cette relation doit être vraie quelque soit  $t$  ce qui impose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

On appelle  $\omega_0$  la **pulsation propre des oscillations électriques**. Elle s'exprime en **rad.s<sup>-1</sup>**.

Période propre des oscillations

Elle est liée à la pulsation propre par la relation :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{d'où} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Unité de  $T_0$ :  $LC = L/R \times RC$  or  $L/R$  et  $RC$  sont homogènes à des temps donc  $LC$  est homogène à un temps<sup>2</sup>. et  $T_0$  homogène à temps. **Donc  $T_0$  s'exprime en s.**

### Détermination des deux autres constantes $U_m$ et $\phi$

$$u_C = U_m \times \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Ainsi  $U_m$  **est appelée amplitude de la tension  $u_C$** , elle sera la tension maximale atteinte par  $u_C$

Et à  $t = 0$  on a  $u_C(0) = U_m \times \cos(\phi)$  ;

**$\phi$  est appelée phase à l'origine des dates, elle s'exprime en radian**

#### ➤ Expression de l'intensité du courant :

$$\text{On sait que : } i = \frac{dq}{dt} = C \times \frac{du_C}{dt} \quad \longrightarrow \quad \boxed{i = - \underbrace{C \times \omega_0 \times U_m}_{I_m} \times \sin(\omega_0 t + \phi)}$$

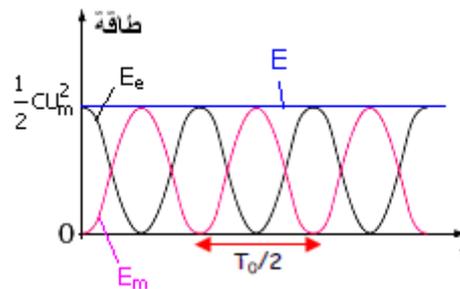
#### ➤ Etude énergétique d'un circuit LC

L'énergie emmagasinée par un condensateur est :  $E_e = \frac{1}{2} C u_c^2$

L'énergie emmagasinée par la bobine est :  $E_m = \frac{1}{2} L i^2$

L'énergie totale est :

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2 = \frac{1}{2} L(C\omega_0 U_m)^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} CU_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} CU_m^2 = \frac{1}{2} LI_m^2$$



**l'énergie totale est constante et il y a un perpétuel transfert d'énergie entre le condensateur et la bobine.**

➤ **Etude énergétique : Régime pseudo-périodique :**

**Equation différentielle :**  $u_C + u_L + u_R = 0$

**On pose  $R' = R + r$**

$$u_R = Ri \quad u_L = ri + L \frac{di}{dt} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\text{Donc : } u_L = rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

L'équation différentielle devient :  $u_C + R'i + L \frac{di}{dt} = 0$  (\*)

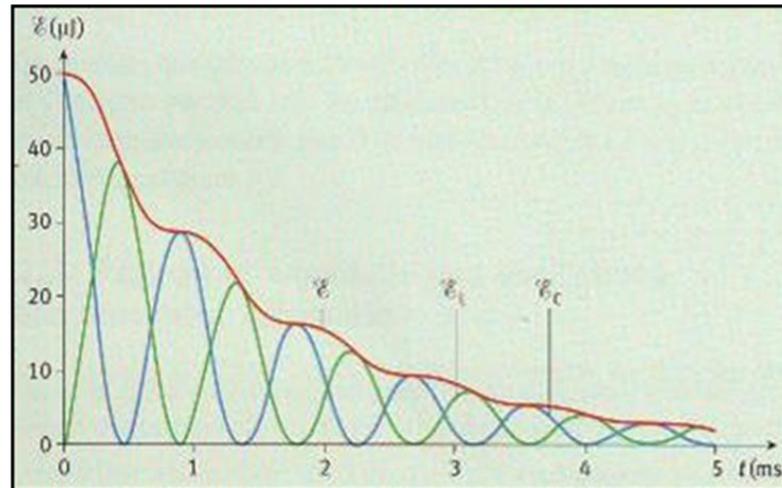
$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R'}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

L'énergie totale est  $E = \frac{1}{2} Cu_c^2 + \frac{1}{2} Li^2$  soit  $\frac{dE}{dt} = Cu_c \frac{du_c}{dt} + Li \frac{di}{dt} = i(u_c + L \frac{di}{dt})$

D'après (\*) on a donc  $\frac{dE}{dt} = -R'i^2$

➤ **L'énergie totale** ( $E_C + E_L$ ) **décroit** au cours du temps, cette énergie étant progressivement **dissipée par effet joules** dans la résistance.

- Il s'effectue un **transfert d'énergie du condensateur dans la bobine puis de la bobine dans le condensateur** et ainsi de suite. Quand  $E_C$  est max alors  $E_L$  est nulle et quand  $E_C$  est nulle  $E_L$  est max.



Doc n°5

- **Etude de l'oscillateur amorti : entretien des oscillations**

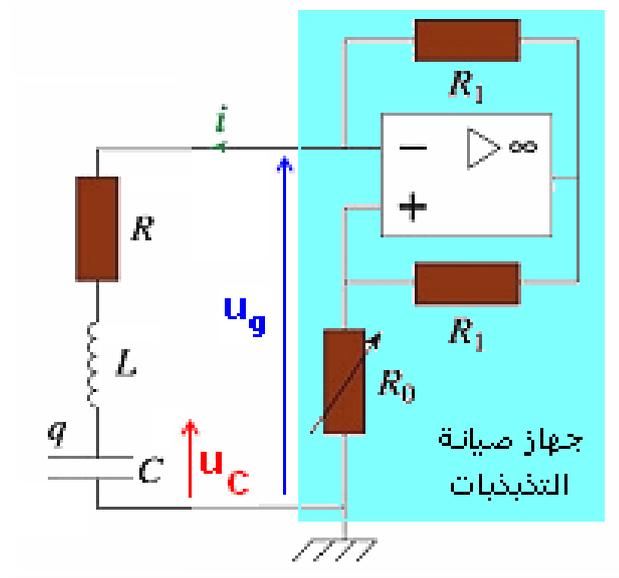
Pour entretenir les oscillations d'un circuit RLC libre, il faut apporter au circuit, par l'intermédiaire d'un dispositif, la même quantité d'énergie qui a été perdue. C'est le rôle du dispositif d'entretien (générateur  $u_g$ ).

- **L'énergie perdue correspond à une puissance  $P_J = R' \times i^2$ .**

Pour entretenir les oscillations, on doit alors insérer une source d'énergie qui fournisse la tension  $u_S$  vérifiant :

$$\underline{P_S = u_S \times i = P_J = R' \times i^2}$$

Ainsi la source doit fournir :  $u_S = R' \times i$



L'équation différentielle devient :  $u_c + R'i + L\frac{di}{dt} = u_s = R'i$

Soit :  $u_c + L\frac{di}{dt} = 0$  soit

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} \times u_c = 0$$

On retrouve le régime sans amortissement. On crée une tension

sinusoïdale de période :  $T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$