Chapitre II :

Translations, homothéties, rotations : des transformations du plan et de l'espace

I des transformations du plan et de l'espace

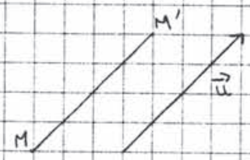
1) définition

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application qui à tout point M associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow t_{\vec{u}}(M) = M'$

exemple :

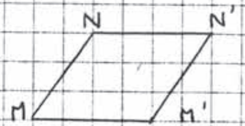


Si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{u}}(M) = M$
tous les points du plan sont invariants.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, il n'y a aucun point invariant.

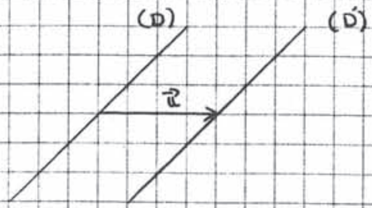
2) propriété fondamentale

Si : $\begin{cases} t_{\vec{u}}(M) = M' \\ t_{\vec{u}}(N) = N' \end{cases}$ alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

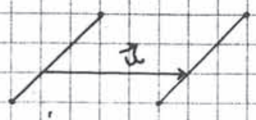


preuve : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$
$= -\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$
$= \cancel{-\vec{u}} + \overrightarrow{MN} + \cancel{\vec{u}}$
$= \overrightarrow{MN}$

3) image par une translation



. L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.



. L'image d'un segment par une translation est un segment de même longueur qui lui est parallèle.

. Les angles orientés sont conservés :

$t_{\vec{u}}(A) = A'$
$t_{\vec{u}}(B) = B'$
$t_{\vec{u}}(C) = C'$

$(\vec{AB}, \vec{AC}) = (\vec{A'B'}, \vec{A'C'}) + 2k.\pi$ où $k \in \mathbb{R}$

. Les angles droits sont conservés.

4) avec des coordonnées

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{u} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ $\quad M \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ $\quad M' \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$

$t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \vec{MM'} = \vec{u}$

$\vec{MM'} \begin{vmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{vmatrix}$ donc : $\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \\ z' - z = c \end{cases}$ $\begin{cases} x' = a + x \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

Avec les coordonnées de $\vec{u}$ et M, on a les coordonnées de l'image.

II Homothéties

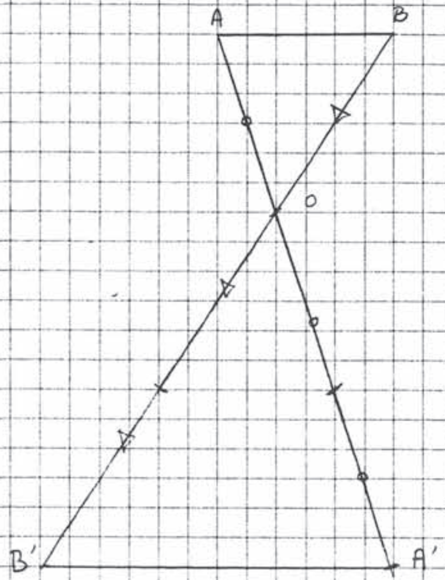
1) définition

L'homothétie de centre O et de rapport k, $H(O, k)$ est l'application du plan qui à M associe M' tel que

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

on note $H(O,k)\ (M) = M'$ ou encore $H(O,k) : M \rightarrow M'$

exemple :



$\overrightarrow{OA'} = -2\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB'} = -2\overrightarrow{OB}$

$H(O, -2)$

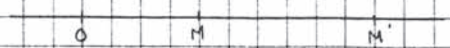
cas particuliers :

Si $k = 0$ tous les points ont pour image O.

$k = 1$ chaque point reste à sa place (on ne bouge pas).

$k = -1$ symétrie centrale

$k > 1$



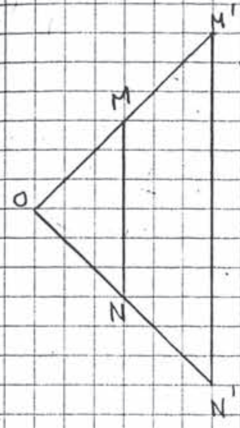
le schéma est agrandi dans le même sens.

$0 < k < 1$ le schéma est diminué dans le même sens

$k < 0$ le schéma change de sens.

points invariants :

② propriétés fondamentales



$H(O,k) : O \to O$

$M \to M'$ i.e $\overrightarrow{OM'} = k \times \overrightarrow{OM}$

$N \to N'$ i.e $\overrightarrow{ON'} = k \times \overrightarrow{ON}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} \\ &= -\overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} \\ &= -k\overrightarrow{OM} + k\overrightarrow{ON} \\ &= k\,\overrightarrow{MO} + k\,\overrightarrow{ON} \\ &= k\,(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}) \\ &= k\,(\overrightarrow{MN})\end{aligned}$$

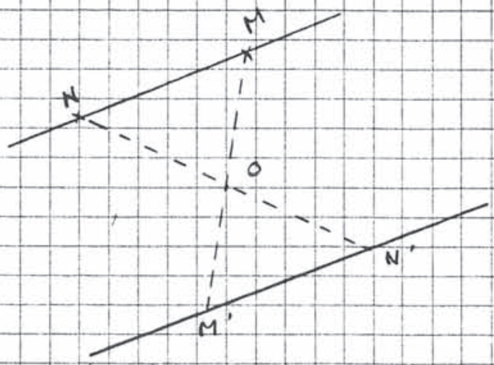
<u>propriété</u> : considérons l'homothétie de centre O et de rapport k.

si $H(O,k)(M) = M'$
$H(O,k)(N) = N'$

alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$

③ image d'une figure par une homothétie

. L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle (si O est sur la droite, les droites sont confondues).



. L'image d'un segment $[MN]$ par une homothétie est un segment $[M'N']$ tel q

$(MN) \parallel (M'N')$

et $M'N' = |k|\,MN$.

. les angles orientés sont conservés et en particulier l'orthogonalité

. L'image d'un cercle de rayon R est un cercle de rayon $|k|R$.

. les aires sont multipliées par k^2.

. les volumes sont multipliés par k^3.

4) forme analytique

$$M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right. \qquad I\left|\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right. \qquad M'\left|\begin{matrix}x'\\y'\\z'\end{matrix}\right.$$

On cherche à identifier $H(I,k)$

$$\vec{IM'} = k.\vec{IM}$$

$$\begin{pmatrix}x'-a\\y'-b\\z'-c\end{pmatrix} = k \begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$$

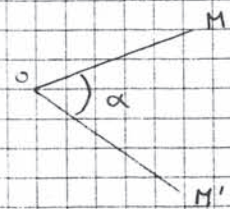
$$\begin{cases}x'-a = k\times(x-a)\\y'-b = k(y-b)\\z'-c = k(z-c)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x' = a+k\ (x-a)\\y' = b+k(y-b)\\z' = c+k(z-c).\end{cases}$$

II Rotations du plan

1) définition

La rotation de centre O et d'angle α est l'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :



$$\begin{cases}\text{si } M \neq O\\OM = OM'\\(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \alpha + 2k\pi\end{cases}$$

si $M = O$, $M' = O$

rotation pour $M \neq O$

$R(O,\alpha)(M) = M'$

$\Leftrightarrow \begin{cases}MO = M'O\\(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \alpha + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\end{cases}$

points invariants :

Si $\alpha = 0 + 2k\pi$, alors $M = M'$

Si $\alpha \neq 0 + 2k\pi$, le seul point invariant est O.

2) configurations particulières

carré direct : ↻

$R(A, \frac{\pi}{2})(B) = D$

On cherche à identifier $H(I, k)$

$$\vec{IM'} = k . \vec{IM}$$

$$\begin{pmatrix} x'-a \\ y'-b \\ z'-c \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}$$

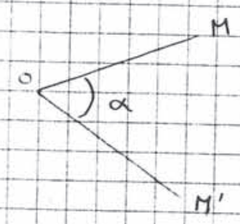
$$\begin{cases} x'-a = k \times (x-a) \\ y'-b = k(y-b) \\ z'-c = k(z-c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = a + k(x-a) \\ y' = b + k(y-b) \\ z' = c + k(z-c) \end{cases}$$

II Rotations du plan

1) définition

La rotation de centre O et d'angle α est l'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :



$$\begin{cases} \text{si } M \neq O \\ OM = OM' \\ (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

si $M = O$, $M' = O$

rotation pour $M \neq O$

$R(O, \alpha)(M) = M'$

$\Leftrightarrow \begin{cases} MO = M'O \\ (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \alpha + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

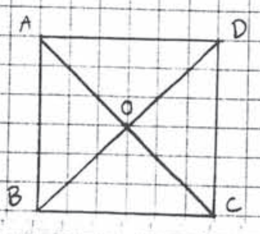
points invariants :

Si $\alpha = 0 + 2k\pi$, alors $M = M'$

Si $\alpha \neq 0 + 2k\pi$, le seul point invariant est O.

2) configurations particulières

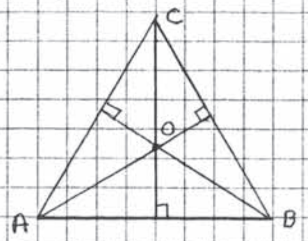
carré direct : ↺



$R(A, \frac{\pi}{2})(B) = D$

$R(O, \frac{\pi}{2})$ $A \longmapsto B$, $B \longmapsto C$

triangle équilatéral direct :

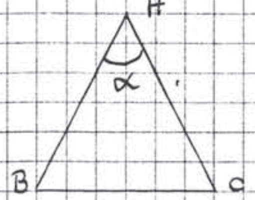


$R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(B) = C$

$R\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)(A) = B$

$R\left(O, -\frac{2\pi}{3}\right)(C) = B$

triangle isocèle direct :



$R(A, \alpha)(B) = C$

$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

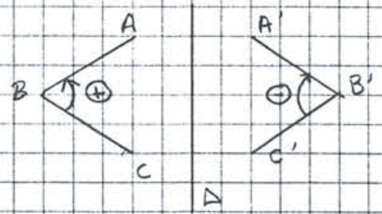
L'image d'une droite par une rotation est une droite.

L'image d'un segment est un segment est un segment de même longueur.

L'image d'un cercle est un cercle.

L'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu du segment image.

IV Symétrie axiale ou réflexion



définition :

La symétrie axiale S_Δ de droite Δ est la transformation qui envoie A sur A' de façon à ce que Δ soit la médiatrice de $[AA']$

La symétrie axiale transforme un angle orienté en son opposé

$-(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$