Le produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$

I Première expression du produit scalaire

définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On appelle produit scalaire

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$

. Si $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$) est nul

$\vec{u}.\vec{v} = 0$

exemple :

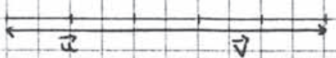
①

$\|\vec{u}\| = 2$ ici $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(0) = 1$

$\|\vec{v}\| = 3$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= 2 \times 3 \times 1$$
$$= 6$$

②

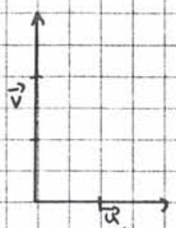


$\|\vec{u}\| = 2$ ici $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -1$

$\|\vec{v}\| = 3$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= 2 \times 3 \times (-1)$$
$$= -6$$

③



$\|\vec{u}\| = 2$ ici $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$

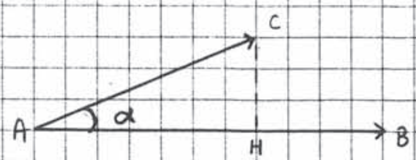
$\|\vec{v}\| = 3$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= 2 \times 3 \times 0$$
$$= 0$$

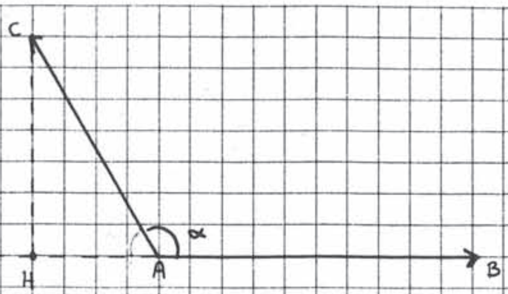
$$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\cos(AB,AC)$$
$$= AB \cdot \cancel{AC} \cdot \frac{AH}{\cancel{AC}}$$
$$= AB.AH$$

II Deuxième expression : projection

$\vec{u} = \vec{AB}$ $\vec{v} = \vec{AC}$



$$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\cos(\vec{AB},\vec{AC})$$
$$= AB.AC.\frac{AH}{AC}$$
$$= AB.AH$$



$\vec{AB}.\vec{AC} = AB\ AC \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

dans AHC

$\frac{AH}{AC} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\left(-\frac{AH}{AC}\right)$

$= -AB.AH$

Bilan :

. $\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AH$ si C et H sont du même côté que B.

. $\vec{AB}.\vec{AC} = -AB.AH$ si C et H sont du même côté que B.

H étant le projeté orthogonal de C sur (AB).

III Propriétés du produit scalaire

carré scalaire :

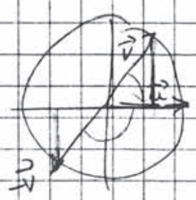
$(\vec{u})^2 = \vec{u}.\vec{u}$

$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u})$

$= \|\vec{u}\|^2 . 1$

$= \|\vec{u}\|^2$

$\hookrightarrow (\vec{AB})^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$



propriété 1 :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

preuve : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos(\vec{v}, \vec{u})$

et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$

propriété 2 :

$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}\vec{a} + \vec{k}\vec{b}$

propriété 3 :

$\vec{u}(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

preuve :

. si $k > 0$

$\vec{u}.(k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times k . \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times (\vec{u}.\vec{v})$

. si $k < 0$

$\vec{u}.(k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times \cos(\vec{u}, -\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times (-\cos(\vec{u}, \vec{v}))$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

$= AB.AC.\left(-\frac{AH}{AC}\right)$

$= -AB.AH$

$\frac{AH}{AC} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$(\vec{AB})^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}\vec{a} + \vec{k}\vec{b}$

$\vec{u}(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

preuve :

. si $k > 0$:

$\vec{u} \times (k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times k \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

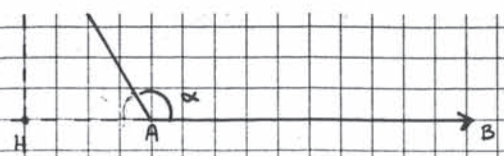
$= k \times (\vec{u}.\vec{v})$

. si $k < 0$:

$\vec{u} \times (k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times \cos(\vec{u}, -\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times (-\cos(\vec{u}, \vec{v}))$



$\vec{AB}.\vec{AC} = AB . AC . \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

dans AHC

$\frac{AH}{AC} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\left(-\frac{AH}{AC}\right)$

$= -AB.AH$

$\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

$= AB.AC.\left(-\frac{AH}{AC}\right)$

$= -AB.AH$

$\frac{AH}{AC} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Bilan :

. $\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AH$ si C et H sont du même côté que B.

. $\vec{AB}.\vec{AC} = -AB.AH$ si C et H sont du même côté que B.

H étant le projeté orthogonal de C sur (AB).

II Propriétés du produit scalaire

carré scalaire :

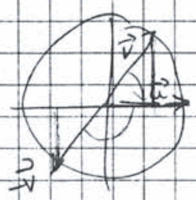
$(\vec{u})^2 = \vec{u}.\vec{u}$

$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{u})$

$= \|\vec{u}\|^2 . 1$

$= \|\vec{u}\|^2$

$\hookrightarrow (\vec{AB})^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$



$(\vec{AB})^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$

propriété 1 :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

preuve : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{v}, \vec{u})$

et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$

. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

propriété 2 :

$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}\vec{a} + \vec{k}\vec{b}$

$\vec{k}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{k}\vec{a} + \vec{k}\vec{b}$

propriété 3 :

$\vec{u}(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

$\vec{u}(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

preuve :

. si $k \geq 0$

$\vec{u}.(k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times k.\|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times \|\vec{u}\| . \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times (\vec{u}.\vec{v})$

. si $k < 0$

$\vec{u}.(k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times \cos(\vec{u}, -\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times (-\cos(\vec{u}, \vec{v}))$

$= k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times (\vec{u}.\vec{v})$

preuve :

. si $k > 0$:

$\vec{u} \times (k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times k \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times (\vec{u}.\vec{v})$

. si $k < 0$:

$\vec{u} \times (k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, k\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times \cos(\vec{u}, -\vec{v})$

$= \|\vec{u}\| \times (-k\|\vec{v}\|) \times (-\cos(\vec{u}, \vec{v}))$

$= \|\vec{u}\| \times k \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$= k \times (\vec{u}.\vec{v})$

propriété 4 :

$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$

preuve :

$(k\vec{u}) \cdot (\vec{v}) = \vec{v} \cdot (k\vec{u})$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$= k(\vec{v} \cdot \vec{u})$ d'après la propriété 3

$= k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

exemple :

ⓐ $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = -15 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$

ⓑ $2\vec{u} \cdot (3\vec{v} - 4\vec{u}) = 6\vec{u} \cdot \vec{v} - 8\vec{u}^2$

ⓒ $(\vec{AB} + \vec{AC})^2 = (\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{AC})$

$= \vec{AB} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC}) + \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{AC})$ (distributivité)

$= \vec{AB}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AB} + \vec{AC}^2$

$= \vec{AB}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2$

$= \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2$

identités remarquables :

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$

$= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

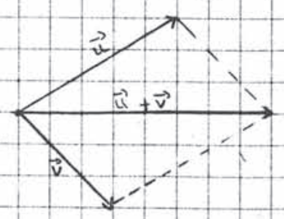
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

remarque :

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.



$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

IV Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\vec{u} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$

$= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + \underbrace{x\vec{i} \cdot y'\vec{j}}_{0} + \underbrace{y\vec{j} \cdot x'\vec{i}}_{0} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j}$ $\quad$ ici : $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ car $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un RON.

$= \vec{i}^2 (x \cdot x') + \vec{j}^2 (y \cdot y')$ $\quad$ ici $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$

$= (x \cdot x') + (y \cdot y')$

Dans un repère orthonormé :

$\vec{u} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v} \begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$

conséquence :

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

preuve :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j})(x'\vec{i} + y'\vec{j})$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos \hat{A}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \times a \times c \times \cos \hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \hat{C}$

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - IA^2$

$= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI} \cdot \vec{BA}$

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

$a^2 = BC^2 = \vec{BC}^2$

$= (\vec{BA} + \vec{AC})^2$

$= BA^2 + AC^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC}$

$= c^2 + b^2 - 2 \times \vec{AB} \cdot \vec{AC}$

$= c^2 + b^2 - 2 \times \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos$

$= c^2 + b^2 + 2cb \times \cos$

$= k(\vec{v}.\vec{u})$ d'après la propriété 3

$= k(\vec{u}.\vec{v})$ car $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

exemple :

ⓐ $(3\vec{u}).(-5\vec{v}) = -15.\vec{u}.\vec{v}$

ⓑ $2\vec{u}.(3\vec{v}-4\vec{u}) = 6\vec{u}.\vec{v} - 8\vec{u}^2$

ⓒ $(\vec{AB}+\vec{AC})^2 = (\vec{AB}+\vec{AC}).(\vec{AB}+\vec{AC})$

$= \vec{AB}.(\vec{AB}+\vec{AC}) + \vec{AC}.(\vec{AB}+\vec{AC})$ (distributivité)

$= \vec{AB}^2 + \vec{AB}.\vec{AC} + \vec{AC}.\vec{AB} + \vec{AC}^2$

$= \vec{AB}^2 + \vec{AB}.\vec{AC} + \vec{AB}.\vec{AC} + \vec{AC}^2$

$= \vec{AB}^2 + 2\vec{AB}.\vec{AC} + \vec{AC}^2$

identités remarquables :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2$

$= \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

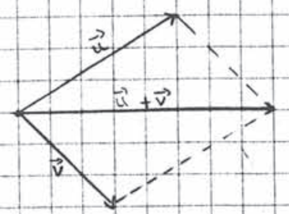
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$

$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$

$(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

remarque :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$.



$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

IV Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i}+y\vec{j}).(x'\vec{i}+y'\vec{j})$

$= x\vec{i}.x'\vec{i} + \underbrace{x\vec{i}.y'\vec{j}}_{0} + \underbrace{y\vec{j}.x'\vec{i}}_{0} + y\vec{j}.y'\vec{j}$ ici : $\vec{i}.\vec{j} = 0$ car $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un RON.

$= \vec{i}^2(x.x') + \vec{j}^2(y.y')$ ici $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$

$= (x.x') + (y.y')$

Dans un repère orthonormé :

$\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

conséquence :

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

preuve :

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i}+y\vec{j})(x'\vec{i}+y'\vec{j})$

$= xx'\vec{i}.\vec{i} + \underbrace{xy'\vec{i}\vec{j}}_{=0} + \underbrace{yx'\vec{j}\vec{i}}_{=0} + yy'\vec{j}\vec{j}$

$= xx'\vec{i}^2 + yy'\vec{j}^2$

$= xx' + yy'$

$c^2 = a$

$\vec{MA}.\vec{MB} = MI^2 - IA^2$

$= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI}.\vec{BA}$

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

$a^2 = BC^2 = \vec{BC}^2$

$= (\vec{BA}+\vec{AC})^2$

$= BA^2 + AC^2 + 2\times\vec{BA}\times\vec{AC}$

$= c^2 + b^2 - 2\times\vec{AB}.\vec{AC}$

$= c^2 + b^2 - 2\times\|\vec{AB}\|\times\|\vec{AC}\|\times\cos\hat{A}$

$= c^2 + b^2 - 2cb\times\cos\hat{A}$

exemple :

$\vec{u}\begin{vmatrix}3\\-1\end{vmatrix}$ $\quad \vec{v}\begin{vmatrix}5\\8\end{vmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v} = 3.5 + (-1).8$
$= 7$

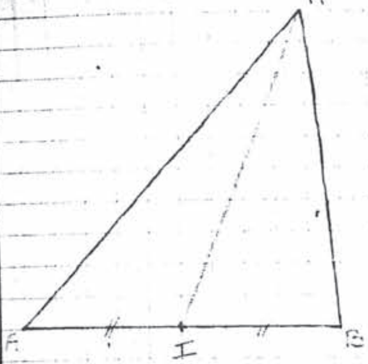
$\vec{MA}.\vec{MB} = MI^2 - IA^2$

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI}.\vec{BA}$

VI. Produit scalaire et applications

1) théorème de la médiane



[AB] segment donné

I milieu de [AB]

M point quelconque

$\vec{MA}.\vec{MB} = (\vec{MI}+\vec{IA}).(\vec{MI}+\vec{IB})$
$= (\vec{MI}+\vec{IA}).(\vec{MI}-\vec{IA})$
$= \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2$
$= MI^2 - IA^2$

$MA^2 - MB^2 = (\vec{MA}+\vec{MB})(\vec{MA}-\vec{MB})$
$= (\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{MI}+\vec{IB})(\vec{MA}+\vec{BM})$
$= 2\vec{MI}.\vec{BA}$

$MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2$
$= (\vec{MI}+\vec{IA})^2 + (\vec{MI}+\vec{IB})^2$
$= MI^2 + 2\vec{MI}.\vec{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\vec{MI}.\vec{IB} + IB^2$
$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\vec{MI}(\underbrace{\vec{IA}+\vec{IB}}_{=\vec{0}})$

$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2$

$IA^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$ de même : $IB^2 = \frac{AB^2}{4}$

Finalement :
$\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

$\vec{MA}.\vec{MB} = (\vec{MI}+\vec{IA}).(\vec{MI}+\vec{IB})$
$= (\vec{MI}+\vec{IA}).(\vec{MI}-\vec{IA})$
$= \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2$
$= MI^2 - IA^2$

$MA^2 - MB^2 = (\vec{MA}+\vec{MB})(\vec{MA}-\vec{MB})$
$= (\vec{MI}+\vec{IA}+\vec{MI}+\vec{IB}).(\vec{MA}+\vec{BM})$
$= 2\vec{MI}.\vec{BA}$

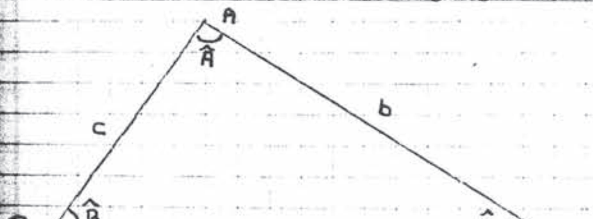
$MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2$
$= (\vec{MI}+\vec{IA})^2 + (\vec{MI}+\vec{IB})^2$
$= MI^2 + IA^2 + 2\vec{MI}.\vec{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\vec{MI}.\vec{IB}$
$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\vec{MI}(\vec{IA}+\vec{IB})$
$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2$

$IA^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

$IB^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

2) théorème d'Al-Kashi (Pythagore généralisé)



$MA^2 + MB^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2$
$= (\vec{MI}+\vec{IA})^2 + (\vec{MI}+\vec{IB})^2$
$= (\vec{MI}+\vec{IA})^2 + (\vec{MI}+\vec{IB})^2$
$= MI^2 + IA^2 + 2\vec{MI}.\vec{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\vec{MI}.\vec{IB}$
$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\vec{MI}(\underbrace{\vec{IA}+\vec{IB}}_{=0})$
$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2$
$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

$a^2 = BC^2 = \vec{BC}^2$
$= (\vec{BA}+\vec{AC})^2$

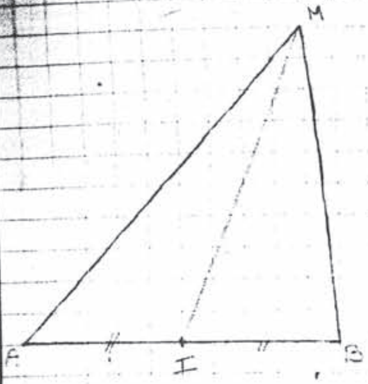
règle à connaître :

$\vec{u}.\vec{v} = 3.5 + (-1).8$
$= 7$

$MA^2 - MB^2 = 2\vec{MI}.\vec{BA}$

Produit scalaire et applications

1) théorème de la médiane



[AB] segment donné

I milieu de [AB]

M point quelconque

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$
$$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2$$
$$= MI^2 - IA^2$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM})$$
$$= 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$
$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$$
$$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}}$$
$$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2$$

$IA^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$ de même : $IB^2 = \frac{AB^2}{4}$

Finalement :
$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$
$$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2$$
$$= MI^2 - IA^2$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM})$$
$$= 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$

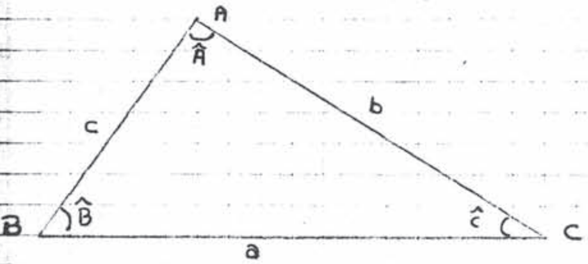
$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$
$$= MI^2 + IA^2 + 2.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + MI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$
$$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$$
$$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2$$

$IA^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

$IB^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$

$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

2) théorème d'Al-Kashé (Pythagore généralisé)



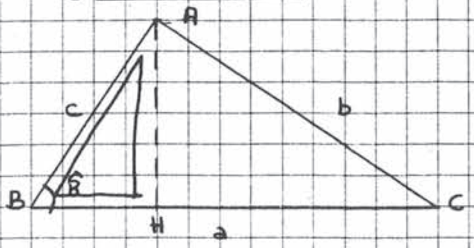
$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$
$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2$$
$$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$
$$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{=\vec{0}}$$
$$= 2MI^2 + IA^2 + IB^2$$
$$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2$$
$$= (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2$$
$$= BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$$
$$= c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$= c^2 + b^2 - 2c.b.\cos\hat{A}$$

règle à connaître :

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= c^2 + b^2 - 2c.b.\cos\hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac.\cos\hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a.b.\cos\hat{C} \end{aligned}}$$

3) surfaces et sinus



S aire du triangle ABC

$$S = \frac{BC \times AH}{2}$$

$\sin \widehat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{c}$ donc $AH = c \sin \widehat{B}$

$$S = \frac{BC \times c \sin \widehat{B}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B}$$

On a :

$$S = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$$

$$2S = ac \sin \widehat{B} = ab \sin \widehat{C} = bc \sin \widehat{A}$$

$$\frac{2S}{abc} = \frac{ac}{abc} \sin \widehat{B} = \frac{ab}{abc} \sin \widehat{C} = \frac{bc}{abc} \sin \widehat{A}$$

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{\sin \widehat{A}}{a}$$

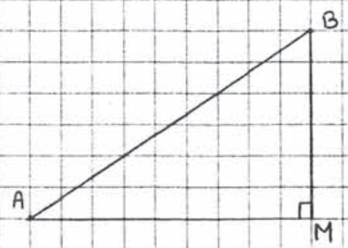
$S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$

$2S = ab \sin \widehat{C} = ac \sin \widehat{B} = bc \sin \widehat{A}$

$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \widehat{C}}{c} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{A}}{a}$

4) ensemble de points : lieux géométriques

A et B sont 2 points donnés du plan.
Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$?



$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow$ (MA) est perpendiculaire à (MB)
$\Leftrightarrow$ M est sur le cercle de diamètre [A

autre preuve possible :
On a vu que d'après le théorème de la médiane :
$MI^2 - IA^2 = \vec{MA} \cdot \vec{MB}$
Comme $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ on a
$MI^2 - IA^2 = 0$
$(MI + IA)(MI - IA) = 0$
Il y a 2 solutions :
$MI - IA = 0$ ou $MI + IA = 0$
$MI = IA$ ou $MI \cancel{=} IA$
impossible car MI et IA st des longueurs positives.
↳ $MI = IA$
M est situé sur le cercle de centre I et de rayon IA.

Bilan :
. Le lieu géométrique des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB]
. L'ensemble des points M qui vérifie la relation $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB]

propriété :
A est un point donné. L'ensemble des points M vérifiant
$\vec{MA}^2 = k$
ou $\|MA\|^2 = k$ $(k > 0)$

$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{c}$ donc $AH = c \sin \hat{B}$

$S = \frac{BC \times c \sin \hat{B}}{2}$

$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$

On a :

$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

$2S = ac \sin \hat{B} = ab \sin \hat{C} = bc \sin \hat{A}$

$\frac{2S}{abc} = \frac{ac}{abc} \sin \hat{B} = \frac{ab}{abc} \sin \hat{C} = \frac{bc}{abc} \sin \hat{A}$

$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$

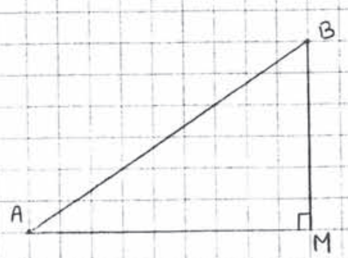
$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

$2S = ab \sin \hat{C} = ac \sin \hat{B} = bc \sin \hat{A}$

$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{A}}{a}$

4) ensemble de points : lieux géométriques

A et B sont 2 points donnés du plan.
Quel est l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$?

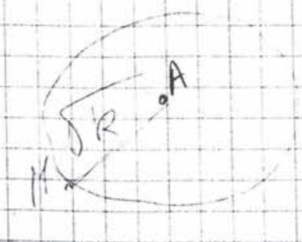


$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \iff$ (MA) est perpendiculaire à (MB)
$\iff$ M est sur le cercle de diamètre [AB].

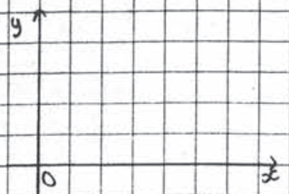
autre preuve possible :
On a vu que d'après le théorème de la médiane :
$MI^2 - IA^2 = \vec{MA} \cdot \vec{MB}$
Comme $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ on a
$MI^2 - IA^2 = 0$
$(MI + IA)(MI - IA) = 0$
Il y a 2 solutions :
$MI - IA = 0$ ou $MI + IA = 0$
$MI = IA$ ou $MI \cancel{=} IA$
impossible car MI et IA st des longueurs positives.
↳ $MI = IA$
M est situé sur le cercle de centre I et de rayon IA.

Bilan :
- Le lieu géométrique des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB]
- L'ensemble des points M qui vérifie la relation $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

propriété :
A est un point donné. L'ensemble des points M vérifiant
$\vec{MA}^2 = k$
ou $\|MA\|^2 = k$ $(k > 0)$
ou $MA^2 = k$
est le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{k}$.



1) Équations de droites



. Une droite non parallèle à (Oy) a comme équation :

$$y = mx + p$$

. Une droite parallèle à (Oy) a comme équation :

$$x = k$$

<u>théorème :</u>

Toute droite du plan a une équation du type :

$$ax + by + c = 0 \qquad (a, b) \neq (0, 0)$$

<u>pourquoi ?</u>

. si $b \neq 0$:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

. si $b = 0$

$$x = -\frac{c}{a}$$

<u>exemples :</u>

. $3x - 2y + 7 = 0$ <u>ou</u> $6x - 4y + 14 = 0$

$$y = -\frac{3}{(-2)}x - \frac{7}{(-2)}$$

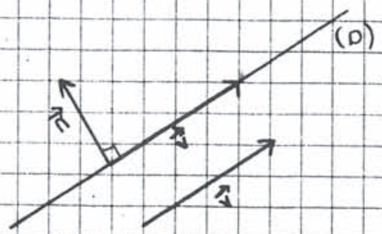
. $3y - 7 = 0$

$$y = \frac{7}{3}$$

. $7x + 8 = 0$

$$x = -\frac{8}{7}$$

2) équations de droite par un vecteur normal



. <u>vecteur directeur $\vec{v}$</u>
même direction que (D)

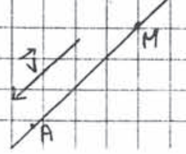
. <u>vecteur normal $\vec{n}$</u>
vecteur perpendiculaire à la direc° de (D)

$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$
$\vec{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

<u>remarque 1 :</u>
A un point donné
$\vec{v}$ un vecteur donné
$\Rightarrow$ il existe une seule droite qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{v}$

<u>remarque 2 :</u>
A donné et $\vec{n}$ donné
$\Rightarrow$ il suffit à déterminer une et une seule droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

<u>exemple 1 :</u>
$A(1 ; 3)$ $\quad \vec{v}(-1 ; 3)$ $\quad D(A, \vec{v})$
vecteur directeur



$M \in (D)$
$\Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{AM}$ st colinéaires
$\Leftrightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \vec{AM} \begin{vmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{vmatrix}$

Or, rappel :

$\vec{v}(x;y)$ et $\vec{v}'(x';y')$ st colinéaires

ssi $x'y = xy'$

$xy' - x'y = 0$

$\hookrightarrow -1(y-3) - 3(-x-1) = 0$

$-y + 3 - 3x + 3 = 0$

$-y - 3x + 6 = 0$

$y + 3x - 6 = 0$ équation de (D)

$y = -3x + 6$

exemple 2 :

$A(5;-3)$ $\vec{n}(2;3)$ $D(A, \vec{n})$

vecteur normal

$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{n} = 0$

$\vec{MA}(5-x;-3-y)$ $\vec{n}(2;3)$

$2 \times (5-x) + 3 \times (-3-y) = 0$

$10 - 2x - 9 - 3y = 0$

$-2x - 3y + 1 = 0$

$2x + 3y - 1 = 0$

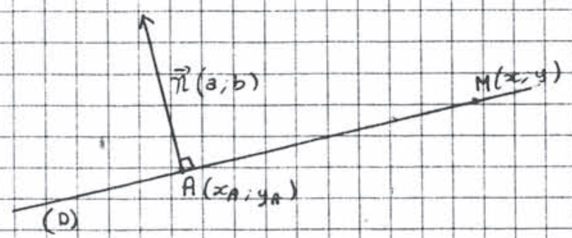
(-3)

théorème :

Soit (D) une droite qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ dans un repère orthonormé

une équation de D est

$ax + by + c = 0$



$M \in (D) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AM}(x - x_A; y - y_A) \cdot \vec{n}(a;b) = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A)a + (y - y_A)b = 0$

$\Leftrightarrow ax - ax_A + by - by_A = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + \underbrace{(-ax_A - by_A)}_{c} = 0$

$\vec{n}(a,b)$ $M(x;y$

$A(x_A, x_B)$ $\vec{AM}(x - x_A$

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$(x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b$

$ax - ax_A + by - by_A =$

$ax + by \underbrace{- ax_A - b}_{= c}$

exemple :

$A(-3;7)$ $\vec{n}(1;-8)$

D a pour équation $x - 8y + c = 0$

c ?

comme $A \left| \begin{array}{l} -3 \\ 7 \end{array} \right. \in D$

$-3 - 8 \cdot 7 + c = 0$

$c = 59$

$D : x - 8y + 59 = 0$

Soit $\Omega(a;b)$ un point dans un repère orthonormé direct, et R un nombre strictement positif :

$M(x;y) \in \mathscr{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Omega M^2 = R^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$$

$A(x_A, y_A)$
$B(x_B, y_B)$
$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

L'équation du cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R est $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$

exemple : L'équation du cercle de centre $\Omega(3,-15)$ et de rayon 6 est :

$$(x-3)^2+(y+15)^2 = 36$$

exemple 2 : Quel est l'ensemble des points $M(x,y)$ qui vérifient :

$$x^2+y^2-14x-6y+33=0$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$$

$$x^2+a^2-2xa+y^2+b^2-2yb-R^2=0$$

$$x^2+y^2-2xa-2yb+a^2+b^2-R^2=0$$

$a=7 \qquad b=3$

$$x^2+y^2-14x-6y+\underbrace{49+9}_{58}-R^2=0$$

donc $R=5$

c'est un cercle de centre $\Omega(7,3)$ de rayon 5

exemple 3 : Quelle est l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ $A(1,-5)$ et $B(2,3)$?

I milieu de $[AB]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$$I\left(\frac{1+2}{2}, \frac{-5+3}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

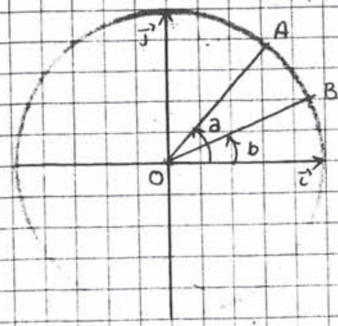
R rayon du cercle : $R = \frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}$

$$R = \frac{\sqrt{(2-1)^2+(3+5)^2}}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{1+64}}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

L'équation du cercle : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2 = \frac{65}{4}$



On va calculer $\vec{OA}.\vec{OB}$ de 2 manières :

- $\|\vec{OA}\| . \|\vec{OB}\| . \cos(\vec{OA}, \vec{OB})$
- $xx' + yy'$

$A(\cos a, \sin a)$ $\quad B(\cos b, \sin b)$

$\vec{OA}(\cos a, \sin a)$ $\quad \vec{OB}(\cos b, \sin b)$

$\vec{OA}.\vec{OB} = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b \rightarrow 2^{ème}$ méthode

$= 1 \times 1 \times \cos(a-b) \rightarrow 1^{ère}$ méthode

donc on a $\Rightarrow \cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$ $\quad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$\cos(a+b) = \cos(a-(-b))$
$= \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$
$= \cos a \cos b - \sin a \sin b$
car $\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$

$\Rightarrow \cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$

$\sin(a+b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a+b))$

$= \cos((\frac{\pi}{2} - a) - b)$

$= \cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(b) + \sin(\frac{\pi}{2} - a)\sin b$

$= \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\Rightarrow \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin(a + (-b))$
$= \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$
$= \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Bilan :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

et aussi :
$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

Linéarisation :

$$\begin{array}{rl} & \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \\ + & \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \hline & 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \end{array}$$

$\hookrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{\ldots}$ $\quad$ et $\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$
$+ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$
$\hookrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos \ldots$
$- \cos^2 x + \sin^2 x = \ldots$
$-2\sin^2 x = \cos \ldots$
$\sin^2 x = \ldots$
$\cos^2 x = 1 + \cos \ldots$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$
$$+ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$-2\sin^2 x = \cos 2x - 1$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$$
$$\boxed{\cos 2x = -2\sin^2 x + 1}$$

ex 95 p 216

$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos$
$= \cos$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$, \sin b)$
$\cos b, \sin b)$
$2^{ème}$ méthode
$1^{ère}$ méthode

$\boxed{\sin^2 x = 1}$

$\cos^2 a - \sin^2 a$
$2\sin a \cos a$
$= \cos(2x)$
$\sin^2 x = 1$
$= \frac{1+\cos(2x)}{2}$
$= 1 + \frac{\cos 2x}{2}$
$- \sin^2 x = \cos(2x)$
$+ \sin^2 x = 1$
$-2\sin^2 x = \cos 2x - 1$
$\sin^2 x = \frac{-\cos 2x + 1}{2}$
$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

$A(\cos a, \sin a)$ $B(\cos b, \sin$
$\vec{OA}(\cos a, \sin a)$ $\vec{OB}(\cos b, \sin$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \cos b \sin a$
$\sin(a-b) = \cos b \sin a - \cos a \sin b$

$\hookrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times 1 \times \cos(\vec{OA}, \vec{OB})$
$= \cancel{1 \times 1} \times \cos(a - b)$

ms aussi : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos a \cos b + \sin$

$\hookrightarrow \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin$

$\cos(a+b) = \cos(a - (-b))$
$= \cos a \cos(-b) +$
$= \cos a \cos b -$
car $\cos(-x$
$\sin(-x)$

$\Rightarrow \cos(a+b) = \cos a \cos b$

$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$
$= \cos^2 a - \sin^2 a$
$\sin(a+a) = \cos a \sin a + \cos a \sin a$
$= 2\cos a + 2\sin a$

$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right)$
$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \times \cos b + \sin$
$= \sin a \times \cos b + \cos$

$\Rightarrow \sin(a+b) = \sin a \times \cos b$

$\sin(a-b) = \sin(a + (-b))$
$= \sin a \times \cos(-b) + \cos$
$= \sin a \times \cos b - \cos$