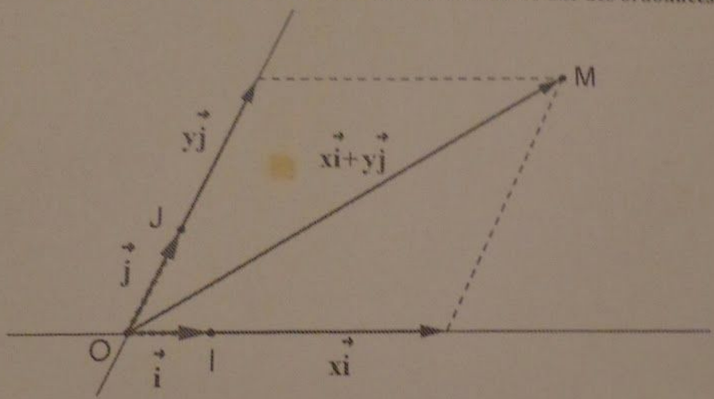
La droite dans le plan (étude analytique)

1) Repères du plan

- Soient O, I, J trois points non alignés du plan, alors les vecteurs $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires et le triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan ce qui signifie que pour tout point M du plan il existe un couple unique $(x;y)$ de nombre réels appelés **coordonnées** de M tel que :

$$\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$$

On note $M(x;y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, x est appelée **abscisse de M et y ordonnée** de M. La droite OI est appelée **axe des abscisses** et la droite OJ **axe des ordonnées**



- Si $OI\perp OJ$ et $OI=OJ=1$ on dit que $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un **repère orthonormé (R.O.N.)**
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un point unique M tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ ($\overrightarrow{OM}$ est le *représentant d'origine O* de $\vec{u}$). Si on connaît M, on connaît $\vec{u}$, il est donc naturel de dire que les coordonnées de M sont aussi les « coordonnées » de $\vec{u}$:

$$\text{si } M(x;y) \text{ et } \vec{u}=\overrightarrow{OM} \text{ alors } \vec{u}(x;y) \quad \text{ou} \quad \vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

2) Calcul vectoriel dans un repère du plan

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$, $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, rappelons qu'on a alors les formules suivantes :

a) **Formules valables dans** **tout repère**

- $\alpha \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x_u \\ \alpha y_u \end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x_u + x_v \\ y_u + y_v \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

- on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

c'est- à dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction ou s'ils sont nuls.

- $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ et sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0}$
- A, B, C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ colinéaires

$$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$$

b) **Formules valables uniquement dans un** **R.O.N.**

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$
- $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- *si I est le milieu de* $[AB]$ *alors* $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

3) Equations d'une droite

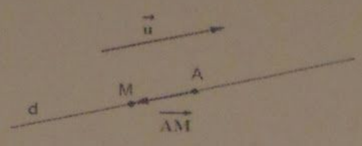
Une droite d du plan est entièrement déterminée si on connaît :

- deux points A et B de d

ou bien

- un point $A \in d$ et un **vecteur directeur** $\vec{u}$ de d (c'est-à-dire un vecteur non nul qui a même direction que d)

Remarquons que dans le premier cas on connaît également un vecteur directeur : $\overrightarrow{AB}$.



$$\boxed{\forall M \quad M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}\right) = 0}$$

Nous allons maintenant exprimer cette dernière propriété en utilisant les coordonnées dans un repère (en principe quelconque, en pratique orthonormé) :

$$A(x_A; y_A),\ M(x; y) \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

a) Système d'équations paramétriques de d

$$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x_u \\ k \cdot y_u \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x - x_A = k \cdot x_u \\ y - y_A = k \cdot y_u \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{M(x;y) \in d \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = x_A + k \cdot x_u \\ y = y_A + k \cdot y_u \end{cases}}$$

Ce système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et de **paramètre k** est appelé **système d'équations paramétriques** de d.

Exemple

Soit d la droite passant par $A(5;-2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, alors :

$$d \equiv \begin{cases} x = 5 - 3k \\ y = -2 + 7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

pour $k = 1$: $x = 2$ et $y = 5$ donc $B(2;5) \in d$,

pour $k = -4$: $x = 17$ et $y = -30$ donc $C(17;-30) \in d$, etc.

Pour voir si $D(8,3) \in d$ il faut voir s'il existe un réel k tel que $8 = 5 - 3k$ et $3 = -2 + 7k$. Or la première de ces équations donne $k = -1$ et la deuxième $k = \frac{5}{7}$, donc $D \notin d$!

b) Equation cartésienne de d

$$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overline{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\overline{AM}, \vec{u}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_u \\ y - y_A & y_u \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)y_u - (y - y_A)x_u = 0$$

$$\Leftrightarrow y_u x - y_u x_A - x_u y + x_u y_A = 0$$

En posant $a = y_u$, $b = -x_u$ et $c = x_u y_A - y_u x_A$, on obtient l'équation :

$$\boxed{M(x;y) \in d \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{avec } \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ v.d. de d}}$$

Cette équation linéaire à deux inconnues est appelée **équation cartésienne** de d.

Exemple

Pour $A(5;-2)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, on a :

$$M(x;y) \in d \Leftrightarrow \overline{AM}\begin{pmatrix} x - 5 \\ y + 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 5 & -3 \\ y + 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7(x - 5) + 3(y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 3y - 29 = 0$$

donc $d \equiv 7x + 3y - 29 = 0$. Cherchons quelques points de d :

pour $x = 2$, $14 + 3y - 29 = 0 \Leftrightarrow y = 5$, donc $B(2;5) \in d$

pour $y = -30$, $7x - 90 - 29 = 0 \Leftrightarrow x = 17$, donc $C(17;-30) \in d$, etc.

$D(8,3) \in d \Leftrightarrow 7 \cdot 8 + 3 \cdot 3 - 29 = 0$ ce qui est faux donc $D \notin d$.

5) Intersection de deux droites

Soient deux droites $d \equiv ax+by+c=0$ et $d' \equiv a'x+b'y+c'=0$ données par leurs équations cartésiennes, alors :

$$I(x;y) \in d \cap d' \Leftrightarrow (x;y) \text{ est solution du système } \begin{cases} ax+by+c=0 & (1) \\ a'x+b'y+c'=0 & (2) \end{cases}$$

Déterminer l'intersection de d et d' et résoudre ce système revient donc au même !

On a trois possibilités :

- si $d \cap d' = \{I\}$ (d et d' sécantes), le système a une seule solution : les coordonnées de I.
- si $d \cap d' = \varnothing$ (d et d' strictement parallèles), le système n'a pas de solution.
- si $d \cap d' = d = d'$ (d et d' confondues), le système a une infinité de solutions.

Remarque : $d \parallel d' \Leftrightarrow \Delta = 0$ et d et d' sécantes $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ avec $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Exemples

- $\begin{cases} 5x+17y=1 & (1) \\ x-2y=11 & (2) \end{cases}$, $S=\{(7;-2)\}$

  interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites sécantes qui se coupent en $I(7;-2)$.

- $\begin{cases} 7x-8y=11 & (1) \\ -21x+24y=-5 & (2) \end{cases}$, $S=\varnothing$

  interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites strictement parallèles (disjointes).

- $\begin{cases} 3x-5y=-4 & (1) \\ -6x+10y=8 & (2) \end{cases}$, $S=\left\{\left(\frac{5}{3}y-\frac{4}{3};y\right) / y \in \mathbb{R}\right\}$

  interprétation géométrique : les deux équations du système sont les équations de deux droites confondues.