

Ch. 4 : Calcul vectoriel dans le plan

Les vecteurs

Un vecteur (différent du vecteur nul) est caractérisé par : sa direction, son sens et sa longueur (appelée encore norme)

Le vecteur \overrightarrow{AB} (A et B deux points distincts du plan) a :

- a- Pour direction, celle de la droite (AB)
- b- Pour sens, celui de la demi-droite $[AB)$.
- c- Pour longueur, celle du segment $[AB]$.

Remarques

- 1) Le vecteur \overrightarrow{AA} , encore appelé vecteur nul et noté par $\vec{0}$, n'a pas de direction, pas de sens et a pour longueur 0.
- 2) La longueur, c'est-à-dire la norme, du vecteur \overrightarrow{AB} est AB .
- 3) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconque, $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, \vec{u} et \vec{v} ont même direction, même sens et même longueur.

Vecteur unitaire

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de longueur 1.

Soit \overrightarrow{AB} un vecteur non nul. Alors les deux vecteurs $\vec{x} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB}$ et $\vec{y} = -\frac{1}{AB} \overrightarrow{AB}$ sont les seuls vecteurs unitaires colinéaires à \vec{u} .

Mesure algébrique d'un vecteur.

Soit Δ une droite munie d'un repère (O, I) , soit A et B deux points de Δ , on appelle mesure algébrique du vecteur \overrightarrow{AB} et l'on note \overline{AB} la différence $x_B - x_A$ des abscisses x_B de B et x_A de A dans le repère (O, I) ; on a donc : $\overline{AB} = x_B - x_A$ et, en particulier $\overline{AA} = 0$.

Exemple : On a $x_A = 2$ et $x_B = -2$ alors $\overline{AB} = x_B - x_A = -2 - 2 = -4$

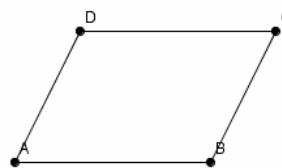


Remarques

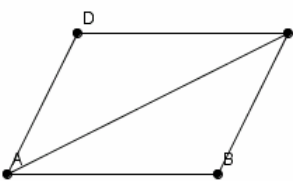
- 1) On a, pour tout point M de Δ , $\overline{OM} = x_M - x_O = x_M$. En particulier $\overline{AB} = x_B - x_A = \overline{OB} - \overline{OA}$
- 2) On a : $|\overline{AB}| = |x_B - x_A| = AB$
- 3) Relation de Chasles : Pour tout points A, B, C d'une droite Δ munie d'un repère (O, I) , on a l'égalité : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Parallélogramme

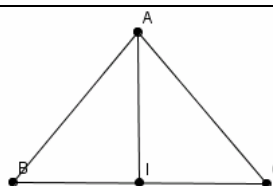
$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Soit I le milieu de segment $[BC]$ on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$



Milieu d'un segment

I est le milieu de segment $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
 I est le milieu de segment $[AB]$ équivaut à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$



Points alignés

Soient quatre points A, B, C et D tels que A, B et C sont alignés
Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $AB = CD$ et les points A, B, C et D sont alignés.



Relation de Chasles

Pour tout point A, B et C de plan on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dit colinéaires s'il existe un réel a tel que $\vec{u} = a\vec{v}$

Lorsque $\vec{u} = a\vec{v}$ et $a > 0$, alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens

Lorsque $\vec{u} = a\vec{v}$ et $a < 0$, alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires.

Lorsque $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $a > 0$, alors \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont de même sens

Lorsque $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $a < 0$, alors \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont de sens contraires.

Droites parallèle

$(AB) // (CD)$ si et seulement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires .

Translation

Soit \vec{u} un vecteur fixé. On appelle translation de vecteur \overrightarrow{AB} qu'on note $t_{\overrightarrow{AB}}$, l'application du plan dans lui-

même qui à tout point M on associe un point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

C'est-à-dire : $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

Remarque :

$$t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \quad ; \quad t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B' \text{ avec } B' = S_A(B)$$

Propriétés

*) la translation conserve les distances

*) L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

*) L'image d'un segment par une translation est un segment qui lui est isométrique.

*) L'image d'un cercle de centre I et de rayon r par $t_{\overrightarrow{AB}}$ est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AB}}(I)$ et de rayon r .

*) L'image d'un polygone par $t_{\overrightarrow{AB}}$ est un polygone qui lui est superposable.