Chapitre 4

Lois de probabilités discrètes usuelles

Introduction

Assez souvent on rencontre dans la pratique des expériences aléatoires qui ont deux résultats possibles (oui ou non; défectueux ou normal; …). Ces expériences peuvent être répétées un certain nombre de fois, indépendantes ou dépendantes entre elles

On considère aussi des expériences aléatoires relatives aux événements rares.

L'étude de ces expériences se fait par, la définition des variables aléatoires correspondantes et la détermination de leurs lois de probabilités et leurs propriétés.

1) Loi uniforme

Soit X une v.a.d qui a n valeurs possibles c.à.d. $D_X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on dit que la loi de probabilité de X est uniforme si,

Pour tout $x_i \in D_X$, on a: $P(x_i)=1/n$.

2) Loi de Bernoulli

Soit A un événement de probabilité p=P(A) connue, on définit la variable aléatoire X associée à la réalisation ou non de A, par:

$X=1$ *si A est réalisé (succès) et*

$X=0$ *sinon (échec)*

On a donc : $D_X=\{0, 1\}$, $P(X=1)=P(A)=p$ et $P(X=0)=1-p=q$.

On dit alors que la v.a. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X\sim B(p)$.

On montre que: $E(X)=p$ et $V(X)=p(1-p)=pq$.

Exemple: Un lot de pièces mécaniques contient 5% de pièces défectueuses. On tire au hasard une pièce dans ce lot et on définit la v.a.d. X par:

$$X=\begin{cases}0 & \text{si la pièce est défectueuse}\\ 1 & \text{si la pièce est normale}\end{cases}.$$

p=P(avoir une pièce normale)=0,95 et q=0,05.

On a donc, $X\sim B(0,95)$.

$E(X)=p=0,95$ et $VX)=0,95\times 0,05=0,0475$.

$$\sigma_X=\sqrt{0,0475}\approx 0,218.$$

Utilisation de la loi de Bernoulli

On utilise la loi de Bernoulli pour les v.a associées à des expériences aléatoires qui n'ont que deux issus:

Succès avec une probabilité p.

Échec avec une probabilité 1-p=q.

Ces expériences sont dites de Bernoulli ou bernoulliennes .

3) Loi binomiale

Soit A un événement de probabilité p=P(A) connue et n un entier$\neq$0.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer n expériences aléatoires indépendantes de Bernoulli associées à l'événement A.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisations de A, au cours des n expériences.

X est une v.a.d. telle que:

$D_X=\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ et pour tout $k \in D_X$ on a,

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

On dit alors que la v.a. X suit une loi Binomiale de paramètres n et p, et on note X~ B(n, p).

Remarques:

i) Si n=1 on retrouve B(1, p)= B(p).

ii) Si on définit n v.a X_1, X_2, …, X_n de Bernoulli indépendantes par:

$$X_i=\begin{cases}1 & si\ A\ est\ réalisé\ à\ l'expérience\ i\\ 0 & sinon\end{cases}.$$

alors on vérifie que la v.a. X s'écrit comme une somme des X_i:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n=\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Où, pour tout i, X_i~ B(p).

Propriétés:

1) D'après le résultats ii) de la remarque précédente, on montre que:

E(X) =np et V(X)=np(1-p)=npq.

2) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement B(n,p) et B(m,p), alors la variable aléatoire Z=X+Y suit aussi une loi binomiale B(n+m,p).

Exercice: Un lot de pièces mécaniques contient 5% de pièces défectueuses. On tire au hasard 7 pièces avec remise dans ce lot.

Calculer la probabilité d'avoir 2 pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées.

Solution: Soit A l'événement "avoir une pièce défectueuse lors d'un tirage", d'où, P(A)=p=0,05.

Tirer 7 pièces avec remise revient à effectuer 7 expériences de Bernoulli indépendantes.

Soit X la v.a. associée au nombre de pièces défectueuses parmi les 7 pièces tirées. D'où, X~ B(7; 0,05).

Donc, $D_X=\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$ et pour tout $k \in D_X$ on a, $P(X=k)=C_7^k 0,05^k 0,95^{7-k}$.

On calcule alors:

$$P(X=2)=C_7^2 0,05^2 0,95^5 \approx 0,041$$

Utilisation de la loi binomiale

On utilise cette loi dans la pratique pour calculer la probabilité d'avoir k succès dans n expériences de Bernoulli répétées indépendamment les une des autres, quand la probabilité de succès p est connue.

La probabilité d'échec est donc q=1-p.

4) Loi hypergéométrique

Soit une population de taille N, que l'on partage en deux catégories selon que les individus possèdent (ou vérifient) une certaine propriété A ou non.

Si on pose,

N_1=nombre d'individus ayant A.

N_2=nombre d'individus n'ayant pas A.

On a $N=N_1+N_2$

Si on tire au hasard un individu de la population, on a:

P(avoir un individu ayant A)=N_1/N=p

Soit n un entier (0<n≤N). On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard et sans remise n individus parmi les N.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'individus ayant A, parmi les n tirés. Alors :

$$D_X=\{ k \in \mathbf{N}:\ sup(0; n-N_2) \leq k \leq inf(n; N_1)\}$$

et pour tout $k \in D_X$ on a,

$$P(X=k)=\frac{C_{N_1}^k \times C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}.$$

On dit alors que la v.a. X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n et p.

On note $X \sim H(N; n; p)$.

On montre que:

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq \times \frac{N-n}{N-1} \ .$$

Remarques:

i) On peut écrire X comme une somme de n v.a. de Bernoulli de paramètre p et dépendantes

ii) si X~ B(n; p) et Y~ H(N; n; p) on a:

E(X)=E(Y), mais,

V(Y) ≤ V(X), car le rapport (N-n)/(N-1) ≤1.

Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

On montre que lorsque N tend vers l'infini, la loi hypergéométrique H(N; n; p) converge vers la loi binomiale B(n; p).

$$\lim_{N \to +\infty} H(N; n; p) = B(n; p).$$

Dans la pratique on utilise l'approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale dès que le taux de sondage n/N est inférieur à 0,1 (ou 10%). C'est-à-dire,

si n/N ≤ 0,1 on a H(N; n; p) ≈ B(n; p).

Exercice: On sait que 4% d'une population de 1000 personnes ont une maladie M. On choisit au hasard et sans remise un échantillon de 10 personnes dans cette population.

Calculer la probabilité d'avoir une seule personne malade dans l'échantillon.

Solution:

On a, N=1000 et p=0,04, donc N_1=pN=40 et N_2=N-N_1=960.

Soit X la v.a. associée au nombre de personnes malades parmi les 10 choisies. D'où, X~ H(1000; 10; 0,04).

Donc,

D_X={k∈**N**: sup(0; 10-960) ≤ k ≤ inf(10; 40)}

D_X={k∈**N**: 0 ≤ k ≤ 10}

et pour tout k∈D_X on a,

$$P(X = k) = \frac{C_{40}^{k} \times C_{960}^{10-k}}{C_{1000}^{10}}.$$

i) Avec la loi exacte de X on a:

$$P(X = 1) = \frac{C_{40}^{1} \times C_{960}^{9}}{C_{1000}^{10}} \approx 0{,}2791.$$

ii) Le taux de sondage 10/1000=0,01<0,1, donc on peut utiliser l'approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale .

H(1000; 10; 0,04) ≈ B(10; 0,04).

D'où, on calcule une valeur approchée de P(x=1), par:

$$P(X = 1) = C_{10}^{1} 0{,}04^{1} 0{,}96^{9} \approx 0{,}2770$$

Remarque:

Plus le taux de sondage n/N est faible plus l'approximation est meilleure.

5) Loi de Poisson

Soit un nombre réel λ>0, on dit qu'une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note X~ $\boldsymbol{P}(\lambda)$, si:

D_X=**N** (ensemble des entiers naturels) et pour tout k∈**N**, on a,

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^{k}}{k!}.$$

*En statistique , la **loi de Poisson** de paramètre λ , ou **loi des événements rares**, correspond au modèle suivant:*
Sur une période T, un événement arrive en moyenne λ fois.
On appelle X la v.a déterminant le nombre de fois où l'événement se produit dans la période T. X prend des valeurs entières : 0, 1, 2, ...

On montre que:

E(X)=V(X)= λ, donc $\sigma_X = \sqrt{\lambda}$.

Remarque:

Le paramètre λ peut s'interpréter comme le nombre (ou le taux) moyen d'observer un certain événement de probabilité très faible (événement rare).

Propriétés:

i) Soient X_1, X_2, …, X_n, n v.a mutuellement indépendantes, telles que pour tout i, $X_i \sim \boldsymbol{P}(\lambda_i)$

Alors la v.a $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

ii) Soient *X* une *v.a.d.* qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et *Y* une *v.a.d.* dont la loi conditionnelle est binomiale, c.à.d.,

$(Y / X = n) \sim B(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$.

Alors la loi de Y (loi marginale) est une loi de Poisson de paramètre λp.

Utilisation de la loi de Poisson

Dans la pratique on utilise la loi de Poisson pour étudier le nombre d'apparitions d'un événement rare pendant une période donnée (l'arrivée d'un client à un guichet, panne d'une machine, appel téléphonique, …). Pour cela on fait les hypothèses suivantes:

i) Il existe un réel $\lambda>0$, tel que au cours d'un intervalle de temps Δt suffisamment petit, la probabilité d'avoir l'événement une seule fois est approximativement égale à $\lambda\Delta t$.

ii) La probabilité d'avoir au moins deux événements au cours de Δt est presque nulle.

iii) Si on considère des intervalles de temps différents, alors le nombre de réalisations dans un intervalle est indépendant des nombres de réalisations dans les autres intervalles.

Sous ces hypothèses on montre que la v.a.d. X associée au nombre de réalisations de l'événement dans l'intervalle de temps [0, t], suit une loi de Poisson de paramètre λt.

D'où, E(X)= λt est le nombre moyen de réalisations de l'événement pendant le temps t.

Ainsi, si on prend t=1, on a, E(X)= λ est le nombre moyen de réalisations de l'événement par unité de temps.

Exercice: Le nombre de pannes d'une machine sur une période donnée suit une loi de Poisson. Sachant qu'en moyenne la machine fait 2 pannes par trimestre.

1) Calculer la probabilité de n'avoir aucune panne à un mois donné.

2) Calculer la probabilité d'avoir 4 pannes pendant une année.

Solution: Si l'unité de temps est le trimestre.

Soient les v.a. X, Y et Z associées respectivement au nombre de pannes de la machine pendant, un trimestre, un mois et une année. Donc,

$X \sim \boldsymbol{P}(2)$; $Y \sim \boldsymbol{P}(2/3)$ et $Z \sim \boldsymbol{P}(2\times 4) = \boldsymbol{P}(8)$.

1) $$P(Y=0) = \frac{e^{-(2/3)} \times (2/3)^0}{0!} = e^{-(2/3)} = 0{,}513.$$

2) $$P(Z=4) = \frac{e^{-8} \times 8^4}{4!} \approx 0{,}0573.$$

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On montre que lorsque n tend vers l'infini, p tend vers 0 et np tend vers $\lambda>0$, alors la loi binomiale B(n; p) converge vers la loi de Poisson $\boldsymbol{P}(\lambda)$.

$$Si \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} np=\lambda \quad alors \quad \lim_{\substack{n\to+\infty \\ p\to 0}} B(n;\, p)=\boldsymbol{P}(\lambda).$$

Dans la pratique on utilise l'approximation d'une loi binomiale par une loi Poisson quand n est grand ($n\geq 50$) et p est petit ($p\leq 0{,}1$). Ainsi,

si $n\geq 50$ et $p\leq 0{,}1$; on a, $B(n;\, p) \approx \boldsymbol{P}(np)$.

Exercice: A l'entrée d'une station de train un marchand de journaux remarque qu'entre 8h et 9h en moyenne, une personne sur 10 achète un journal.

Sachant qu'ils passent 120 personnes entre 8h et 9h, et soit *X* la v.a. définie par :

X = « nombre de journaux vendus pendant cette période ».

1) Indiquer la loi de probabilité exacte de *X*.

2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de *X*
3) Calculer *P(X = 15)* par la loi exacte puis par la loi approximative.

Solution:

1) Les personnes achètent les journaux indépendamment les unes des autres. Donc d'après la définition de X on a:

$X\sim B(120;\, 0{,}1)$.

2) On a $n=120\geq 50$ et $p=0{,}1\leq 0{,}1$; donc on peut utiliser l'approximation d'une loi binomiale par une loi Poisson:

$B(120;\, 0{,}1) \approx \boldsymbol{P}(120\times 0{,}1) = \boldsymbol{P}(12)$.

3) Par la loi exacte on a:

$$P(X=15)=C_{120}^{15}(0{,}1)^{15}(0{,}9)^{105}\approx 0{,}0742$$

Par la loi approximative on a:

$$P(X=15)\approx \frac{e^{-12}\times 12^{15}}{15!}\approx 0{,}07239.$$

Remarques:

i) Plus n est grand et p est petit plus l'approximation est meilleure.

ii) Si on a $n\geq 50$ et $p\geq 0{,}9$; alors $q=1-p\leq 0{,}1$. Donc, on considère la v.a. $Y=n-X \sim B(n;\, q)$.

On applique l'approximation à Y:

$B(n;\, q) \approx \boldsymbol{P}(nq)$

$P(X=k)=P(n-Y=k)=P(Y=n-k)\approx e^{-nq}(nq)^{n-k}/(n-k)!$

6) Loi binomiale négative (ou de Pascal)

Soit A un événement de probabilité $p=P(A)$ connue et m un entier$\neq 0$.

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à effectuer des expériences aléatoires indépendantes de Bernoulli associées à A, jusqu'à avoir m fois l'événement A.

Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'expériences nécessaires pour avoir m fois l'événement A.

X est une v.a.d. telle que:

$D_X=\{k\in \boldsymbol{N} : k\geq m\}$ et pour tout $k\in D_X$ on a,

$$P(X=k)=C_{k-1}^{m-1}p^m q^{k-m}.$$

On dit alors que la v.a. X suit une loi Binomiale négative ou de Pascal de paramètres m et p, et on note $X\sim G(m,\, p)$.

On montre que :

$$E(X)=\frac{m}{p} \quad et \quad V(X)=\frac{mq}{p^2},$$

$$donc \quad \sigma_X=\frac{\sqrt{mq}}{p}.$$

Cas particulier (la loi géomètrique)

Si on prend m=1, alors:

X= "nombre d'expériences nécessaires pour avoir l'événement A pour la $1^{ère}$ fois"

$D_X=\{k\in \boldsymbol{N} : k\geq 1\} = \boldsymbol{N}^*$ et pour tout $k\in D_X$ on a,

$$P(X=k)=pq^{k-1}.$$

On dit alors que. X suit une loi géométrique de paramètres p, et on note X~ G(1, p)=G(p).

On vérifie que :

$$E(X)=\frac{1}{p};\quad V(X)=\frac{q}{p^2}\quad et\quad \sigma_X=\frac{\sqrt{q}}{p}.$$

Exercice: Une urne contient une proportion $p = 3/5$ de boules blanches et une proportion $q=1-p$ de boules noires.

On considère un tirage avec remise et on pose X : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir une boule blanche » et Y : « le nombre de tirages nécessaires pour avoir 3 boules blanches ».

1) Quelle est la loi de X ? Calculer P(X=2).

2) Quelle est la loi de Y ? Calculer P(Y=5).

Solution: On a p=3/5=0,6 et q=0,4.

Le tirage étant avec remise, donc les tirages successifs sont indépendants.

D'où, d'après les définitions de X et Y on a:

1) X~ G(0,6). $D_X= \boldsymbol{N}^*$ et pour tout $k\in D_X$,

$$P(X=k)=0{,}6\times(0{,}4)^{k-1}$$

Donc, $P(X=2)=0{,}6\times(0{,}4)^1=0{,}24.$

2) Y~ G(3; 0,6), (m=3),

$D_Y=\{k\in \boldsymbol{N} : k\geq 3\}$ et pour tout $k\in D_Y$,

$$P(Y=k)=C_{k-1}^{2}(0{,}6)^3(0{,}4)^{k-3}.$$

Donc,

$$P(Y=5)=C_4^2(0{,}6)^3(0{,}4)^2\approx 0{,}2074.$$