Chapitre 5

Lois de probabilités continues et lois usuelles

Introduction

On rencontre dans la pratique des phénomènes aléatoires dont les variables aléatoires associées peuvent prendre toute valeur de **R** ou d'un intervalle de **R**. (Revenus, Tailles, poids, …).

Donc les ensembles des valeurs possibles de telles v.a. sont infinis et non dénombrables, et ces variables sont dites variables aléatoires continues (v.a.c.).

Contrairement aux v.a.d., les lois des v.a.c. ne sont pas caractérisées par les probabilités discrètes des réalisations $P(X=x_i)$, mais elles sont définies par la donnée d'une fonction continue f, appelée densité de probabilité de la v.a.c.

Soit X une v.a.c., par la suite on note D_X l'ensemble des valeurs possibles de X. D_X peut être **R** tout entier, un intervalle de **R** ([a, b];]a, b];…) ou la réunion de quelques intervalles de **R**.

I) Densité de probabilité et fonction de répartition d'une v.a.c.

1) Densité de probabilité

Définition: Soit X une v.a.c., on appelle densité de probabilité (ou densité) de X, une fonction f, de **R** dans **R**, telle que:

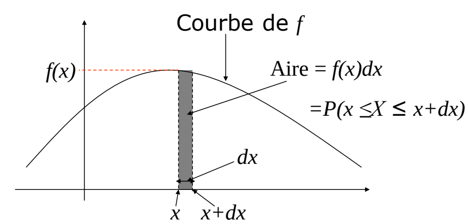
☞ f est positive ou nulle. $\begin{cases} f(x) \geq 0 & si\ x \in D_X \\ 0 & sinon \end{cases}$.

☞ f est continue sauf en un nombre fini de points.

☞ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

(Se lit somme ou intégrale de -∞ à +∞ de f).

Interprétation:

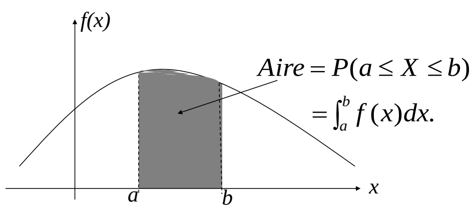


Ainsi on a:

i) Pour tout $x \in D_X$, $P(X=x)=0$

ii)Pour a et b dans D_X,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$



2) Calcul des intégrales (Rappel)

Soit f une fonction continue de **R** dans **R**, pour calculer l'intégrale, $\int_a^b f(x)dx,$

i) on détermine une primitive de f, c.à.d. une fonction F de **R** dans **R** telle que f est la dérivée de F ($f(x)=F'(x)$) et on note,

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

ii) On calcule:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

a) Propriétés des intégrales

Soient f et g deux fonctions réelles continues, a, b, c et λ des nombres réels, alors on a:

i) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

ii) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

iii) Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

iv) Intégration par parties *(si f et g sont dérivables)*

$$\int_a^b (f'(x)g(x))dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

b) Primitives de quelques fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x) = \int f(x)dx.$
$x^\alpha \quad \forall\ \alpha \neq -1$	$x^{(\alpha+1)}/(\alpha+1).$
$1/x$	$Ln(x)=Log(x)$
$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}/\alpha.$
a^x avec $a>0$ et $a\neq 1$	$a^x/Ln(a).$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$Ln(\alpha x)$ avec $\alpha \neq 0$	$xLn(\alpha x) - x$

c) Application aux calculs des probabilités

Soit X une v.a.c., de densité de probabilité f, alors si on a une primitive F de f, on calcule la probabilité de l'événement *"$X \in [a;b]$"* par:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exercice: Soit une v.a.c., de densité f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} kx & si\ x \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Déterminer k pour avoir une densité de probabilité et calculer P(1/4<X<1/2).

Solution: Pour avoir une densité de probabilité, il faut que $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in [0\ ;1]$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

On a, $f(x)=kx \geq 0$ si $k>0$. Et,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = k\int_0^1 xdx$$

$$= k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2} = 1,\ si\ \ k = 2.$$

$$P(1/4 < X < 1/2) = \int_{1/4}^{1/2} f(x)dx$$

$$= 2\int_{1/4}^{1/2} xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/4}^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

3) Caractéristiques d'une v.a.c.

Si X est une v.a.c., de densité de probabilité f, alors l'espérance E(X) et la variance V(X) de X sont données respectivement par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \ \ si\ cette\ intégrale\ existe.$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X]^2 f(x)dx \ \ si\ cette\ intégrale\ existe.$$

On a aussi:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= [\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx] - [E(X)]^2.$$

Remarque: Si X une v.a.c., de densité f et g une fonction réelle de D_X dans **R**, alors l'espérance de la v.a.c. g(X) est donnée par:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

Exemple: Calculer E(X) et V(X) pour la v.a.c. de densité.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in [0;1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$$
$$=2\int_0^1 x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$
$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2;\ or$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2 f(x)dx$$
$$=2\int_0^1 x^3dx=2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$
$$donc\ \ V(X)=(1/2)-(2/3)^2=1/18$$
$$et\ \ \sigma_X=\sqrt{1/18}\approx 0{,}236.$$

4) Fonction de répartition d'une v.a.c.

a) Définition : Soit X une v.a.c. de densité de probabilité f, la fonction de répartition de X est l' application, F_X (ou F) de **R** dans [0, 1], définie par:

$$F_X(x)=P[X<x]=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

b) Propriétés :

La fonction de répartition F d'une v.a.c. X vérifie les propriétés suivantes :

i) Par définition on a , $0\leq F(x)\leq 1$, $\forall x\in$ **R**.

ii) $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ et $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$

iii) F est continue et croissante, donc F est bijective si elle est en plus strictement croissante.

iv) F est dérivable sauf en un nombre fini de points, et $F'(x)=f(x)$.

Remarque: F est une primitive de f, donc, la loi de probabilité d'une v.a.c. est déterminée soit par la densité f ou par la fonction de répartition F.

c) Application aux calculs des probabilités

Soit X une v.a.c., de densité de probabilité f, et de fonction de répartition F, alors on calcule les probabilités des intervalles, [a; b],]-∞; b] et [a; +∞[, par:

i) $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a).$

ii) $P(X\leq b)=P(X<b)=\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=F(b).$

iii) $P(X\geq a)=\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=1-F(a).$

Exemple: Déterminer la fonction de répartition F. de la v.a.c. de l'exemple précédent. Calculer P(X<1/4) et P(X<1/2) en déduire P(1/4<X<1/2).

On a: $f(x)=2x\ \ si\ x\in[0;1];\ \ f(x)=0\ \ sinon$

Donc, $\forall\ x\in$ **R**,

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0\ si\ x\leq 0\\ x^2\ \ si\ x\in[0;1]\\ 1\ \ si\ x>1\end{cases}$$

D'où:

P(X<1/4)=F(1/4)=1/16 et P(X<1/2)=F(1/2)=1/4;

donc, P(1/4<X<1/2)=F(1/2)-F(1/4)=3/16.

5) Densité d'une fonction de v.a.c.

Si X une v.a.c., de densité f_X et de fonction de répartition F_X, soit g une fonction réelle continue de D_X dans **R**, alors pour déterminer le densité de probabilité f_Y de la v.a.c. $Y=g(X)$ on détermine d'abord la fonction de répartition F_Y de Y, puis on obtient f_Y par dérivation de F_Y

$$f_Y(y)=F'_Y(y).$$

Ainsi, si g est strictement croissante donc elle admet une fonction réciproque g^{-1}, alors on a:

$$F_Y(y)=P(Y<y)=P(g(X)<y)=P(X<g^{-1}(y))=F_X(g^{-1}(y)).$$

Exemple: On considère la v.a.c. X de l'exemple précédent. Soit $g(x)=x^2$. Déterminer la fonction densité de $Y=g(X)=X^2$.

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ *et* $g^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

$F_Y(y)=P(Y<y)=P(X^2<y) \quad \forall y \in \mathbf{R}$.

Or $X^2 \geq 0$, *donc* $P(X^2<y)=0$ *si* $y<0$.

Si $y \geq 0$, *on a:* $F_Y(y)=P(X^2<y)=P(X<\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})$. *Or,*

$$F_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sqrt{y}=0, (\text{si } y=0) \\ (\sqrt{y})^2 \quad \text{si } \sqrt{y} \in [0;1] \quad , (\text{si } y \in [0;1]) \\ 1 \text{ si } \sqrt{y}>1, \ (\text{si } \ y>1) \end{cases}$$

D'où,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } y \leq 0 \\ y \quad \text{si } y \in [0;1] \\ 1 \ \text{ si } \ y>1 \end{cases}$$

Donc,

$$f_Y(y) = F_Y^{'}(y) = \begin{cases} 1 \quad \text{si } y \in [0;1] \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

C'est la densité de la variable aléatoire continue uniforme sur l'intervalle [0; 1].

II) Lois continues usuelles

1) Loi uniforme

Soit [a; b] un intervalle de **R** (a<b), une v.a.v. X suit une loi uniforme continue sur [a;b] si sa densité de probabilité est donnée par:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) \quad \text{si } x \in [a;b] \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x \leq a \\ (x-a)/(b-a) \quad \text{si } x \in [a;b] \\ 1 \ \text{ si } \ x>b \end{cases}$$

On montre que:

$E(X)=(a+b)/2$ et $V(X)=(b-a)^2/12$.

2) Loi normale centrée et réduite

a) Définition: On dit qu'une v.a.c. U suit une loi normale centrée et réduite si sa densité de probabilité est donnée par:

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad \forall u \in \mathbf{R}$$

On montre que, $\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\frac{u^2}{2}}) du = \sqrt{2\pi}$.

et on vérifie que :

$E(U)=0$ et $V(U)=1$, donc $\sigma_U=1$.

On note alors $U \sim N(0;1)$.

b) Fonction de répartition de U:

La fonction de répartition de la v.a. U~N(0; 1), que l'on note π est donnée par:

$$\forall u \in \mathbf{R}, \quad \pi(u) = P(U<u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} (e^{-\frac{x^2}{2}}) dx \,.$$

D'où on calcule les probabilités par:

$P(a \leq U \leq b)= \pi(b)- \pi(a)$ et $P(U>a)=1- \pi(a)$.

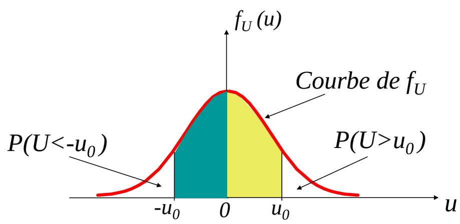
Mais le calcul de $\pi(u)$, pour u donnée, se fait par des méthodes numériques. D'où on a des tables statistiques qui donnent $\pi(u)$, pour différentes valeurs de u et inversement.

Remarque:

La densité f_U est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc il suffit de connaître les valeurs de $\pi(u)$ pour $u \geq 0$, et en déduire $\pi(u)$ pour $u \leq 0$ par symétrie.(voir graphique ci-dessous)

D'où la table statistique de la loi N(0;1), donne $\pi(u)$ pour $u \geq 0$.



$\pi(0)=P(U<0)=P(U>0)=0{,}5$.

Si $u>0$, on: $\pi(u)>0{,}5$ et $\pi(-u)<0{,}5$, avec

$\pi(-u)=P(U<-u)=P(U>u)=1-P(U<u)=1-\pi(u)$.

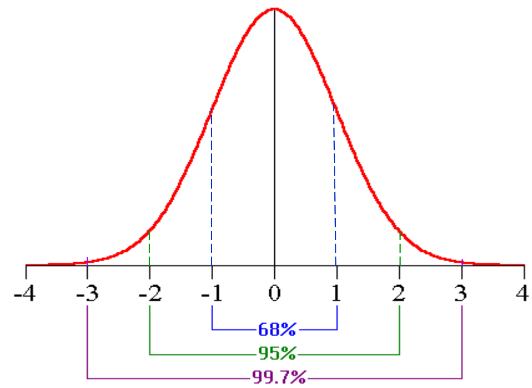
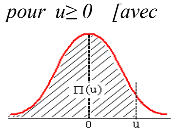


Table de la loi normale centrée réduite qui donne
$\pi(u)=P(U<u)$ pour $u\geq 0$ [avec $\pi(-u)=1-\pi(u)$]

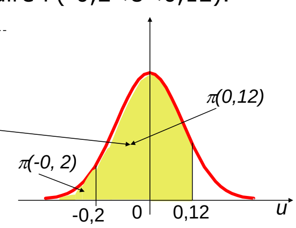


u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214

Exemples: Soit $U\sim N(0;1)$. Calculer $P(U<0{,}12)$ et $P(U<-0{,}2)$, en déduire $P(-0{,}2<U<0{,}12)$.

u	0,00	0,01	**0,02**
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255

Probabilité



On a: $P(U<0{,}12)=\pi(0{,}12)=0{,}5478$ et

$P(U<-0{,}2)=1-\pi(0{,}2)=1-0{,}5793=0{,}4207$, donc

$P(-0{,}2<U<0{,}12)=\pi(0{,}12)-\pi(-0{,}2)=0{,}1271$.

3) Loi normale générale

a) Définition: Soient m et σ deux nombres réels avec ($\sigma>0$). On dit qu'une v.a.c. X suit une loi normale générale de paramètres m et σ si sa densité de probabilité est donnée par:

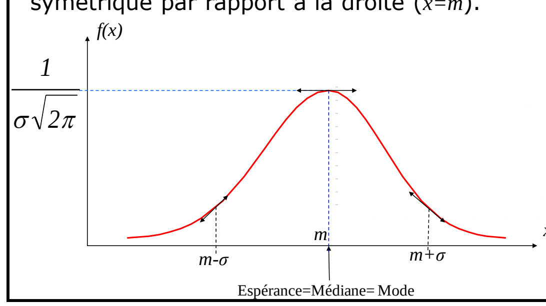
$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad \forall\, x\in \boldsymbol{R}$$

On montre que : $E(X)=m$ et $V(X)=\sigma^2$.

On note alors: $X\sim N(m;\sigma)$.

Remarque:

La courbe de la densité f_X a la même forme (en cloche) que la loi $N(0;1)$, mais elle est symétrique par rapport à la droite ($x=m$).



b) Relation entre N(m;σ) et N(0;1):

i) Soit X une v.a.c. de loi $N(m;\sigma)$, alors la v.a. U centrée et réduite associée à X suit une loi $N(0;1)$.

Si $X \sim N(m;\sigma)$, alors, $U = \dfrac{X-m}{\sigma} \sim N(0;1)$.

ii) Mais attention! Si a et b sont deux nombres réels (avec $a \neq 0$) et $U \sim N(0;1)$, alors la v.a. $X=aU+b$ suit une loi normale générale de paramètres $m=b$ et $\sigma=|a|$.

Si $U \sim N(0;1)$, alors, $X=aU+b \sim N(b; |a|)$,

c) Application aux calculs des probabilités

Soit X une v.a.c. de loi $N(m;\sigma)$, alors pour calculer les probabilités, $P(a<X<b)$, $P(X<a)$ ou $P(X>a)$, on procède comme suit:

i) On centre et on réduit la v.a. X, par,

$$U = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0;1).$$

ii) On utilise le fonction de répartition $\pi(u)$ de U pour calculer les probabilité à partir de la table de la loi $N(0;1)$.

☞ $$P(a < X < b) = P(\frac{a-m}{\sigma} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{b-m}{\sigma})$$
$$= P(\frac{a-m}{\sigma} < U < \frac{b-m}{\sigma})$$
$$= \pi(\frac{b-m}{\sigma}) - \pi(\frac{a-m}{\sigma}).$$

☞ $$P(X < a) = P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{a-m}{\sigma}) = \pi(\frac{a-m}{\sigma}).$$

☞ $$P(X > a) = P(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{a-m}{\sigma}) = 1 - \pi(\frac{a-m}{\sigma}).$$

Exercice: On suppose que la durée de vie des ampoules électriques est une v.a.c. X de loi normale d'espérance m = 1000 heures et de variance σ^2 =10000.

Calculer probabilité qu'une ampoule fonctionne:

1) entre 1000 et 1200 heures?

2) moins que 750 heures?

Solution: On a, $X \sim N(1000; 100)$, car $\sigma=100$,

donc $U=(X-1000)/100 \sim N(0; 1)$,

1) $P(1000 \leq X \leq 1200) =$

$$\pi(\frac{1200-1000}{100}) - \pi(\frac{1000-1000}{100}) = \pi(2) - \pi(0).$$

Or, $\pi(2)$= 0,9772 et $\pi(0)$=0,5, donc

P(1000≤ X≤1200)= 0,9772-0,5=0,4772.

2) $$P(X \leq 750) = \pi(\frac{750-1000}{100}) = \pi(-2,5).$$

Or, $\pi(-2,5)$= 1- $\underbrace{\pi(2,5)}_{\text{par la table de } N(0;1)}$ = 1- 0,9938=0,0062.

Donc, P(X≤750)= 0,0062.

Propriété:

Soient X_1, X_2, …, X_n, n v.a.c mutuellement indépendantes, telles que pour tout i, $X_i \sim N(m_i;\sigma_i)$. Alors la v.a Y= X_1+ X_2+ …+ X_n suit une loi normale générale de paramètres:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad et \quad \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}.$$

4) Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Soit X une v.a.d. de loi binomiale B(n; p), si n est grand ($n \geq 30$) et p voisin de 0,5 ($0,4 \leq p \leq 0,6$), alors on utilise l'approximation de la loi binomiale par une loi normale générale de paramètres, $m = np \ \ et \ \ \sigma = \sqrt{npq}$.

Dans la pratique, si $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $npq \geq 5$ on a:

$$B(n;\ p) \approx N(np;\ \sqrt{npq}).$$

Exemple: Soit X une v.a.d. de loi binomiale B(100; 0,2). Calculer P(X=25) et P(10≤X≤30).

i) Avec la loi exacte on a:

P(X=25)= 0,0438 et P(10≤X≤30)= 0,9916.

ii) Par l'approximation, on a, $n=100 \geq 30$, $np=20 \geq 15$ et $npq=16 \geq 5$; donc on peut utiliser l'approximation de cette loi binomiale par une loi normale N(20;4). D'où,

$$P(X = 25) \approx \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{25-20}{4}\right)^2} = \underline{0,0457}.$$

$$P(10 \leq X \leq 30) = P(-2,5 \leq \frac{X-20}{4} \leq 2,5)$$

$$\approx \pi(2,5) - \pi(-2,5) = 2\pi(2,5) - 1 = \underline{0,9876}.$$

5) Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Soit X une v.a.d. qui suit une loi de Poisson $\boldsymbol{P}(\lambda)$, avec λ suffisamment grand, alors on utilise l'approximation de la loi de Poisson par une loi normale générale de paramètres,

$$m = \lambda \ \ et \ \ \sigma = \sqrt{\lambda}.$$

Dans la pratique, si $\lambda > 15$ on a:

$$\boldsymbol{P}(\lambda) \approx N(\lambda; \sqrt{\lambda}).$$

Exemple: Soit X une v.a.d. qui suit une loi de Poisson ***P**(100)*, Calculer P(X=80) et P(90≤X≤110).

i) Avec la loi exacte on a:

P(X=80)= 0,0052 et P(90≤X≤110)= 0,7065.

ii) Par l'approximation, on a, $\lambda = 100 > 15$, donc on peut utiliser l'approximation de cette loi de Poisson par une loi normale N(100; 10). D'où,

$$P(X = 80) \approx \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{80-100}{10}\right)^2} = \underline{0,0054}.$$

$$P(90 \leq X \leq 110) = P(-1 \leq \frac{X-100}{10} \leq 1)$$

$$\approx \pi(1) - \pi(-1) = 2\pi(1) - 1 = \underline{0,6826}.$$