S. BENHMIDA F.S.J.E.S

Année universitaire 2014/2015
2ème semestre

Calcul des Probabilités

Filière: Economie et Gestion

Module: Probabilités

Sections C & D

1

Introduction générale

Actuellement on fait recours au calcul des probabilités dans plusieurs domaines, notamment dans le domaine des sciences économiques et sociales, et cela pour la simple raison, qu'on y est confronté à des phénomènes aléatoires, c.à.d des phénomènes dont on ne peut pas connaître ou prévoir avec certitude les résultats.

2

Cet aléa ou hasard est dû généralement à la complexité du phénomène étudié (ou /et) à un manque d'informations.

Exemples :

- Prévoir, le temps qui fera demain, ou le prix d'une action boursière.
- Estimer la proportion des boîtes de conserves abîmées dans un grand lot de boîtes de conserves.

3

L'étude de chaque phénomène commence par La collecte des informations et se termine par sa modélisation, afin de tirer des conclusions et prendre des décisions.

la modélisation du phénomène étudié, qui consiste à déterminer un modèle qui explique le mieux possible ce phénomène, en se basant sur les résultats de la statistique descriptive, et la théorie des probabilités.

D'où, l'intérêt d'un cours de calcul des probabilités

4

Programme

Chapitre 1: Outils mathématiques
- Théorie élémentaire des ensembles
- Analyse combinatoire

Chapitre 2: Notion de probabilité et généralités
- Définitions et vocabulaire
- Propriétés d'une loi de probabilité

5

Chapitre 3 : Variables aléatoires
- Définition
- Loi d'une variable aléatoire
- Caractéristiques d'une variable aléatoire
- Couple de variables aléatoires

Chapitre 4 : Lois de probabilité discrètes usuelles

Chapitre 5 : Lois de probabilité continues et lois usuelles

6

Bibliographie

- C. ATLAN & G. TRIGANO (Math 108)
  Mathématiques appliquées à la gestion : Exercices corrigés (Chap. de 1 à 5)
- M. N. BOULIF (Stat 9)
  Calcul des probabilités
  (50 épreuves d'examens corrigées)
- Cyrille CRAPSKY (Stat 88)
  Probabilités pour l'économie
  (Cours avec exercices corrigés)
- A. GAGOU (Stat 114)
  Introduction aux probabilités
  (Cours avec exercices corrigés)

- B. GOLDFARB & C. PARDOUX (Stat 111)
  Introduction à la méthode statistique
  (Chap. 5, 6 et 7)
- Bernard GRAIS (Stat 22)
  Méthodes statistiques (Chap. I, II et III).
- A. ELMARHOUM & M. DIOURI (Stat 122)
  Probabilités (Cours + exercices corrigés)
- K. MESLOUHI (Stat 81)
  Calcul des probabilités
  (Cours + exercices corrigées)
- R. SANDRETTO (Stat 113)
  Probabilités (Chap. 2 – 5)
  (Rappels de cours + exercices corrigés)

Chapitre 1

Outils mathématiques

Historiquement, on a considéré la probabilité d'un événement, comme le rapport du nombre de cas favorables à sa réalisation sur le nombre de tous les cas possibles pour l'expérience aléatoire étudiée, et cela suppose que tous les cas possibles ont la même probabilité (équiprobabilité) et que leur nombre est fini. Car parfois l'une (ou/et) l'autre de ces deux hypothèses ne sont pas vérifiées.

Mais, dans la pratique on rencontre des expériences où ces hypothèses sont bien vérifiées. D'où, pour calculer les probabilités, dans de telles situations, on a besoin de deux outils, la *théorie des ensembles* et *l'analyse combinatoire*, le premier pour la formulation des événements et le deuxième pour calculer leurs probabilités.

I) Théorie élémentaire des ensembles

1) Définitions, vocabulaire et notations

- ☞ Ensemble : groupe d'individus appelés *éléments*.
- ☞ Pour un élément e d'un ensemble E, on dit que , « e appartient à E », et on note : $e \in E$.
- ☞ Pour un ensemble E de n éléments e_1, e_2, …, e_n, on écrit: $E = \{e_1, e_2, …, e_n\}$.

Parfois les éléments sont définis par une formule ou une expression.

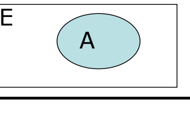
Exemples :

- $E = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 4n-1 > 15\}$
- $F = \{(m, n)$, m et n entiers $/ 1 \leq m \leq 6$ et $1 \leq n \leq 6\}$
- G= {Tous les étudiants inscrits dans le module M.Q II en 2013 }.

☞ Si E est vide on note $E = \emptyset$.

☞ Un ensemble A est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de E, si tous les éléments de A appartiennent à E. On note $A \subset E$ (ou $E \supset A$) et on dit que A est *inclus* dans E.

Par un diagramme de Venn on a:



☞ Pour un ensemble E non vide, on note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Si A est un sous ensemble de E, on écrit,

$A \subset E$ mais $A \in \mathcal{P}(E)$

Exemple:

Si E = {a, b, c}, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$.

$A=\{a, b\} \subset E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.

13

☞ L'intersection de deux sous ensembles A et B de E, que l'on note $A\cap B$ (ou AB), est un sous ensemble de E formé des éléments appartenant à A et à B.

☞La réunion de A et B, que l'on note $A\cup B$, est un sous-ensemble de E formé des éléments appartenant à A ou à B.

Exemple:

Si E={1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {2, 4, 5} et B = {1, 4}, alors:

$A\cap B = \{4\}$ et $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$.

14

☞Si $A\cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints*.

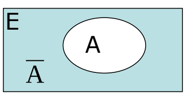
Remarque :

On a toujours,

$A\cap B \subset A$ et $A\cap B \subset B$

$A \subset A\cup B$ et $B \subset A\cup B$

☞ Si $A \subset E$, on appelle *complémentaire* de A dans E, le sou ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$ ou A^c.



15

☞ La *différence* de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B

On le note $A\cap\overline{B}$.

Mais, la différence de B et A s'écrit $\overline{A}\cap B$.

☞ La *différence symétrique* de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou bien dans B mais pas dans $A\cap B$ On le note $A\Delta B$.

On remarque que: $A\Delta B = (A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

16

☞ On appelle *partition* de E, toute famille $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sous ensembles de E, tels que :

- $A_i\cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
- $A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n = E$

☞ Le *produit cartésien* de deux ensembles E et F est l'ensemble de tous les couples ordonnés (x, y), où $x\in E$ et $y\in F$. On le note $E\times F=\{(x, y)/ x\in E \text{ et } y\in F\}$.

Si E=F, alors on note $E\times E=E^2$.

Attention: généralement $E\times F \neq F\times E$.

17

☞ Plus généralement, pour n entier, on écrit:

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ tel que: $e_1\in E_1, e_2\in E_2, \ldots$ et $e_n\in E_n\}$.

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ s'appelle un multiplet de n éléments (ou un n-uplet).

et on écrit: $E^n = E \times E \times \ldots \times E$ (n fois).

☞ Pour un ensemble E fini, de p éléments, on appelle cardinal de E le nombre de ses éléments. On note card(E)=p.

18

2) Opérations et propriétés

a) Opérateurs $\cap$, $\cup$ et ^{c}

Soient A, B et C trois sous ensembles d'un ensemble E, alors on a:

$A\cap B= B\cap A$,	$A\cup B= B\cup A$,	$A\cap \emptyset= \emptyset$,	$A\cup \emptyset= A$
$A\cap E= A$,	$A\cup E= E$,	$A\cap A^c= \emptyset$,	$A\cup A^c= E$
$(A\cap B)\cap C = A\cap (B\cap C) = A\cap B\cap C$ $(A\cup B)\cup C = A\cup (B\cup C) = A\cup B\cup C$ $A\cap (B\cup C) = (AB)\cup (AC)$, $A\cup (BC) = (A\cup B)\cap (A\cup C)$			
$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$,	$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$,	$(A^c)^c = A$	

19

b) Opérations sur les cardinaux

- $card(\emptyset)=0$, et $card(A^c)=card(E)-card(A)$.
- Si $A\subset B$ alors $card(A)\leq card(B)$.
- $card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(AB)$.

Mais si, $A\cap B=\emptyset$, alors

$card(A\cup B)=card(A)+card(B)$.

- Plus généralement, pour une famille de n ensembles A_1, A_2, …, A_n on a la formule de Poincaré:

20

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} card(A_i A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} card(A_i A_j A_k) - \ldots\ldots (-1)^{n+1} card(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n).$$

- Mais, si les A_i sont disjoints deux à deux, c.à.d. $A_i\cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, alors on a:

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i).$$

21

- En particulier, si A_1, A_2, …, A_n forment une partition de E, alors on a :

$$card(E) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i).$$

- $card(A\cap \bar{B})=card(A) - card(AB)$.
- $card(\bar{A}\cap B)=card(B) - card(AB)$.
- $card(E_1\times E_2\times \ldots \times E_n)$

$= card(E_1)\times card(E_2)\times \ldots \times card(E_n)$.

Ainsi, $card(E^n)=[card(E)]^n$.

- Si $card(E) = n$ alors $card(\mathscr{P}(E)) = 2^n$

22

II) Analyse combinatoire

On considère un ensemble de *n* éléments et on cherche à étudier les différentes possibilités de regrouper ou de choisir *p* éléments parmi les *n*.

Selon le mode de choix ou de tirage des éléments et leur ordre, on distingue 4 situations.

23

1) Tirage avec remise (répétition) et avec ordre

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, ordonnés et avec répétition, parmi n éléments, est égal à n^p.

C'est le nombre d'arrangements avec répétition.

Remarque:

Dans ce cas p peut être supérieur à n.

24

Exemple: Combien de façons a-t-on pour composer le code secret, d'un coffre-fort, de 6 chiffres?

Réponse: On a (10^6 = 1 million) façons de le composer.

25

2) Tirage sans remise et avec ordre

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, ordonnés et sans répétition, parmi n éléments, est égal à:

$$n(n-1)(n-2)\times\ldots\ldots\times(n-p+1),$$

c'est le nombre d'arrangements sans répétition, que l'on note A_n^p.

Si on pose:

$n(n-1)(n-2)\times\ldots\times2\times1=n!$ (factorielle n),

alors on a: $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$

26

Remarques:

1) Dans ce cas il faut que p ≤ n.

2) Par convention on a $0! = 1$

3) Si p=n, alors on a, $A_n^n = n!$, qui est le nombre de permutations de n éléments différents.

Exemple: Combien de façons a-t-on pour composer le code secret, d'un coffre-fort, de 6 chiffres différents?

Réponse: On a ($A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 151200$) façons de le composer.

27

3) Tirage sans remise et sans ordre (p ≤ n)

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, sans ordre et sans répétition, parmi n éléments, est égal à: $\frac{A_n^p}{p!}$

c'est le nombre de combinaisons, que l'on note: $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$

28

Exemple: Combien de façons a-t-on pour élire un bureau de 5 membres, dans une assemblée générale de 40 membres?

Réponse: On a ($C_{40}^5 = \frac{40!}{5!\times35!} = 658008$) façons de l'élire.

29

4) Tirage avec remise et sans ordre

Le nombre de possibilités pour choisir p éléments, sans ordre et avec répétition, parmi n éléments, est égal à C_{n+p-1}^p ,

c'est le nombre de combinaisons avec répétition, que l'on note:

$$\boxed{K_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}}$$

Dans ce cas p peut être supérieur à n.

30

Pour établir ce résultat on utilise la notion de permutation avec répétition.

On considère n éléments (ou objets), dont n_1 sont de type 1, n_2 sont de type 2, . . . et n_k sont de type k, avec $n_1+n_2+...+n_k=n$.

Des éléments sont d'un même type soit parce qu'ils sont identiques soit qu'ils sont donnés dans un ordre fixé, c.à.d, qu'on ne peut pas toucher à leur ordre mais on peut placer d'autres éléments parmi eux.

31

Le nombre de permutations de ses éléments est appelé nombre de permutations avec répétition, que l'on note $p_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, et il est donné par :

$$\boxed{p_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}}$$

Remarque: Si k=2, on a $n_2=n-n_1$ et

$$p_n(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = C_n^{n_1}$$

32

Exemple: de combien de façons peut on distribuer p lettres identiques dans n boîtes aux lettres avec la possibilité de mettre plusieurs lettres dans la même boîte ?

Réponse: Distribuer les p lettres revient à choisir les p boîtes aux lettres (qui vont recevoir les lettres) parmi les n boîtes, sans ordre (lettres identiques) et avec répétition (la possibilité de choisir la même boîte plusieurs fois).

33

Donc le nombre de façons que l'on a est égal au nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n, ce qui est égal aussi au nombre de permutations avec répétition de n+p-1 objets dont (n-1) sont de type 1 (les séparateurs des boîtes) et p sont de type 2 (les lettres).

$$\boxed{K_n^p = p_{n+p-1}(n-1, p) = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = C_{n+p-1}^p}$$

A.N: Pour, n=3 et p=2, on a,

$$K_3^2 = C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

34

5) Propriétés de A_n^p et C_n^p (avec p ≤ n)

1) $A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$	2) $A_n^p = p!C_n^p$	3) $C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1}$
4) $C_n^p = C_n^{n-p}$	5) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$	6) $\sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$

35

6) Tableau récapitulatif

On considère le tirage de p éléments parmi n

Tirage / Ordre	Avec remise (p quelconque)	Sans remise (p ≤ n)
Avec ordre	n^p	A_n^p
Sans ordre	K_n^p	C_n^p

36

Chapitre 2

Notion de probabilité

et généralités

37

I) Définitions et vocabulaire

On donne les définitions et le vocabulaire de bases qui seront utilisés dans les paragraphes et les chapitres suivants.

☞ Expérience (ou épreuve) aléatoire : C'est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat avec certitude.
Cependant les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont connus a priori.

Exemples: - Jeter un dé à six faces.
- Tirer une boule dans un urne.

38

☞ Espace (ou ensemble) fondamental : C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Généralement on le note Ω (oméga).

☞ Un élément de Ω est appelé événement élémentaire (ou éventualité), on le note ω.

☞ Une partie de Ω est appelée événement.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, on a,

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3 est un événement élémentaire.

E= $\{3, 6\}$ est un événement.

39

☞ Ω est appelé événement certain.

☞ Ø est appelé événement impossible.

☞ Deux événements A et B sont dites incompatibles s'ils ne se réalisent pas simultanément c.à.d $A \cap B = \emptyset$.

Exemple: Pour le jet d'un dé à six faces, les événements A=« avoir un nombre pair » et

B=« avoir un nombre impair » sont incompatibles

Remarque: Ω peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

40

☞ On appelle tribu d'événements sur Ω toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant :

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) Si $E \in \mathcal{A}$, alors $E^c \in \mathcal{A}$

iii) Si $(E_i)_{i\in N}$ est une suite dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i\in N} E_i \in \mathcal{A}$.

($\mathcal{A}$ est stable par les opérateurs $\cup$ et ^{c})

Remarque: Généralement, si Ω est fini on prend $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et dans ce cas, la condition iii) se réduit à,

si $E_1 \in \mathcal{A}$ et $E_2 \in \mathcal{A}$, alors $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

41

☞ Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

☞ On appelle probabilité (ou lois de probabilité) sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application P de $\mathcal{A}$ dans $[0\ ,\ 1]$ vérifiant:

i) $P(\Omega) = 1$ (axiome de normalisation)

ii) Pour toute suite $(E_i)_{i\in N}$ d'événements de $\mathcal{A}$ incompatibles deux à deux, on a:

$$P(\bigcup_{i\in N} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

(axiome complet des probabilités totales).

42

En particulier si E_1 et E_2 sont deux événements incompatibles on a:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Où P(E) désigne la probabilité de l'événement E.

☞ Le triplet (Ω, ***A***, P) est appelé espace probabilisé.

Remarque : Pour tout E ∈ ***A***, on a toujours,

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

☞ Si Ω est fini ou infini dénombrable, on définit une lois de probabilité comme une

43

application P de Ω dans [0 , 1] vérifiant :

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

Ainsi, pour déterminer la loi de probabilité, il suffit de connaître les probabilités de tous les événements élémentaires.
Et pour tout événement E⊂ Ω, on a:

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} P(\omega)$$

44

Exemple: Soit une expérience aléatoire qui a 7 résultats possibles dont les probabilités sont les suivantes:

Evénement élémentaire ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7
$P(\omega_i)$	0,2	0,1	0,1	0,3	0,15	0,05	0,1

Pour A={ω_2, ω_4, ω_5}, on a:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) = P(\omega_2) + P(\omega_4) + P(\omega_5)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}55.$$

45

☞ Si Ω est fini et si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité de ces événements et que la loi de probabilité est uniforme. On montre alors que la loi de probabilité est définie par :

$$P : \Omega \longrightarrow [0\ ,\ 1]$$
$$\omega \longmapsto P(\omega) = 1/\mathrm{card}(\Omega)$$

Ainsi, pour tout événement E⊂ Ω, on a:

$$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

46

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soit A=« avoir un multiple de 3 » ={3; 6}.
La loi est uniforme et on a card(Ω)=6 et card(A)=2. Donc P(A)=2/6 =1/3=0,3333.

☞ Si A est un événement d'un espace fondamental Ω tel que P(A) ≠ 0, et B un événement quelconque de Ω, la probabilité de B sachant que A est réalisé est appelée la probabilité conditionnelle de B sachant A. On la note P(B/A) et elle est définie par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

47

Exemple: Pour le jet d'un dé équilibré, soient
A =« avoir un multiple de 3 » ={3; 6} ,
B = «avoir un six »= {6}.
C = «avoir un as »= {1}.
D = «avoir un nombre impair »= {1, 3, 5}.

i) A∩B = {6}, P(A)= 2/6 et P(A∩B)=1/6, donc, P(B/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5.

ii) A∩C =Ø donc P(A∩C)=0 d'où, P(C/A)=0/(2/6) =0.

iii) A∩D = {3}, P(D)= 3/6 et P(A∩D)=1/6, donc, P(D/A)=(1/6)/(2/6) =1/2=0,5=P(D).

48

On remarque que : P(B/A) =0,5>P(B)=1/6, P(C/A)=0<P(C)=1/6 et P(D/A)=P(D)=0,5.
On vérifie aussi que P(A/D)=P(A)=1/3.
On dit que les probabilités conditionnelles de B et C dépendent de la réalisation de A, alors que la probabilité conditionnelle de D est indépendante de la réalisation de A.

49

☞ Soient A et B deux événements d'un espace fondamental Ω tels que, P(A) ≠ 0 et P(B) ≠ 0, on dit que A et B sont indépendants si:

P(B/A)=P(B) ou P(A/B)=P(A).

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que A et B soient indépendants est donnée par:

P(AB)=P(A)×P(B).

50

II) Propriétés d'une loi de probabilité

1) Propriétés générales

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, ***A***, P). Alors on a:

☞ P(A^c^)=P(Ω)-P(A) = 1-P(A).

☞ Si A⊂B alors P(A)≤P(B).

☞ P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(AB).

Mais si, A et B sont incompatibles (A∩B=Ø), on a: P(A∪B)=P(A)+P(B).

51

☞ Plus généralement, pour une famille de n événements A_1, A_2, …, A_n on a la formule de Poincaré: (théorème des probabilités totales)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k) - \ldots\ldots (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots\ldots A_n).$$

52

☞ Mais, si les A_i sont incompatibles deux à deux, c.à.d. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour i ≠ j , alors on a:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

☞ En particulier, si A_1, A_2, …, A_n forment un système complet d'événements de Ω, c.à.d. ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour i ≠ j et $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) alors on a :

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

53

☞ $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$ ou $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$.

☞ $P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$ ou $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$.

☞ Soit C est un événements de Ω tel que P(C)≠0, alors on a:

- $P(\bar{A}/C)=1-P(A/C)$.
- P[(A∪B)/C]=P(A/C)+P(B/C)-P[(AB)/C].

Exercice: Montrer que si A et B sont indépendants alors, A et B^c, A^c et B, A^c et B^c sont aussi indépendants.

54

2) Théorème des probabilités composées

Soient A_1, A_2, …, A_n n événements de Ω tels que $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \neq 0$, alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\times P(A_2/A_1)\times P(A_3/A_1A_2)\times\ldots$$
$$\times P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}).$$

En particulier pour n=2 , on retrouve:

$P(A_1A_2)=P(A_1)\,P(A_2/A_1)$.

55

☞ Indépendance totale et deux à deux

Soient A_1, A_2, …, A_n n événements de Ω.

- On dit que ces événements sont totalement (ou mutuellement) indépendants si pour tout entier k ($2\leq k \leq n$), on considère k événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.
- On dit que ces événements sont deux à deux indépendants si, on considère 2 événements distincts parmi les n, alors ils sont indépendants.

56

Remarques :

i) Des événements qui sont mutuellement indépendants sont en particulier deux à deux indépendants mais la réciproque n'est pas vraie.

ii) D'après le théorème des probabilités composées, si les événements A_1, A_2, …, A_n sont mutuellement indépendants , alors on a:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\times P(A_2)\times P(A_3)\times\ldots\times P(A_n).$$

57

Exercice d'application: Soit une boîte contenant 20 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On y tire au hasard et successivement 3 composants, avec remise si le composant est normal, sinon on le garde.

1) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants défectueux.
2) Calculer la probabilité d'avoir les trois composants normaux.

58

Solution: Si on note les événements,

D^i =« avoir un cp. défectueux au $i^{ème}$ tirage ».

N^i =« avoir un cp. normal au $i^{ème}$ tirage ».

1) $P(D^1D^2D^3)= P(D^1)P(D^2/D^1)P(D^3/D^1D^2)$

$= (4/20)\times(3/19)\times(2/18)=0{,}0035.$

2) $P(N^1N^2N^3) = P(N^1)P(N^2/N^1)P(N^3/N^1N^2)$

$=P(N^1)P(N^2)P(N^3)=(16/20)\times(16/20)\times(16/20)$

$=(4/5)^3 = 0{,}512.$

59