Chapitre 3

Variables aléatoires

1

I) Généralités

Introduction

Généralement l'espace fondamental associé à une expérience aléatoire est un ensemble "abstrait", sur lequel on ne peut pas effectuer des opérations et faire des comparaisons. D'où il est intéressant de pouvoir passer d'un espace fondamental quelconque à l'ensemble **R** des nombres réels. Ce passage est assuré par les variables aléatoires.

2

Définition 1:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire sur Ω toute application X de Ω dans **R**.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)=x.$$

On note: $D_X= X(\Omega)=\{x=X(\omega) \in \mathbf{R}: \omega \in \Omega\}$; l'ensemble de toutes les réalisations possibles de X.

☞ On dit qu'une variable aléatoire X est discrète (v.a.d.) si D_X est fini ou infini dénombrable.

3

☞ On dit qu'une variable aléatoire X est continue (v.a.c.) si D_X est infini non dénombrable (**R** ou un intervalle de **R**).

Remarque : Sur un même espace fondamental on peut définir plusieurs variables aléatoires selon les objectifs de l'expérience aléatoire.

Exemple: On lance deux fois un dé équilibré.

$\Omega=\{\omega=(i, j): 1 \le i \le 6 \text{ et } 1 \le j \le 6\}$ $(\mathrm{card}(\Omega)=36)$.

$X(\omega)=X(i, j)=i+j, \forall \omega\in\Omega,$

$D_X=\{n\in\mathbf{N} : 2 \le n \le 12\}$ $(\mathrm{card}(D_X)=11)$.

4

☞ Pour toute partie I de D_X, on note $X^{-1}(I)$ l'événement de Ω défini par.

$X^{-1}(I)=\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in I\}$ (Image réciproque de I).

Ainsi:

- Pour $I=\{x\}$ on a $X^{-1}(I)=\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x\}$.
- Pour $I=[a,b]$ on a,

$$X^{-1}([a, b])=\{\omega\in\Omega : a\le X(\omega)\le b\}.$$

Exemple: Pour l'exemple précédent.

Si, $I=\{4\}$ alors, $X^{-1}(I)=\{(1, 3); (3, 1); (2, 2)\}$.

5

Définition 2:

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire sur Ω et $\mathcal{A}_X$ une tribu de parties de D_X. On appelle loi de probabilité de X, l'application P_X définie par:

$$P_X : \mathcal{A}_X \longrightarrow [0 , 1]$$
$$I \longmapsto P_X(I)=P[X^{-1}(I)].$$

On montre que P_X est une loi de probabilité sur D_X. Ainsi on a un espace probabilisé $(D_X, \mathcal{A}_X, P_X)$.

En particulier, pour $x\in D_X$ on a:

$$P_X(x) =P[X^{-1}(x)]. = P\{\omega \in \Omega: X(\omega)=x\}.$$

6

II) Variables aléatoires discrètes

1) Loi de probabilité d'une v.a.d.

Soient (Ω, ***A***, P) un espace probabilisé et X une v.a.d. sur Ω.

La loi de probabilité de X est définie comme une application de D_X dans [0, 1] par:

$$P_X : D_X \longrightarrow [0\,,\,1]$$
$$x \longmapsto P_X(x) = P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}] = P[X^{-1}(x)].$$

7

On peut présenter la loi de probabilité d'une v.a.d. X comme un ensemble de couples, $\{(x_i, p_i) : x_i \in D_X\}$, où $p_i = P(x_i)$ et tels que :

$$\sum_{x_i \in D_X} p_i = 1.$$

Si D_X est fini (card D_X =n), on peut présenter la loi de probabilité de X par un tableau:

$x_i \in D_X$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$p_i = P(x_i)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

8

Exemple: On lance deux fois un dé équilibré.

$\Omega = \{\omega = (i, j) : 1 \le i \le 6$ et $1 \le j \le 6\}$ (card(Ω)=36).

$$X(\omega) = \mathrm{Sup}(i, j) = \begin{cases} i & si \quad i \ge j \\ j & si \quad j \ge i \end{cases} \quad , \forall \omega \in \Omega.$$

$D_X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, (card($D_X$)=6).

La loi de probabilité de X est donnée par :

$x_i \in D_X$	1	2	3	4	5	6
$p_i = P(x_i)$	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

9

2) Fonction de répartition d'une v.a.d.

Définition:

Soit X une v.a.d. sur Ω. On appelle fonction de répartition de X l' application, F_X (ou F) de **R** dans [0, 1], définie par:

$$F_X : \mathbf{R} \longrightarrow [0, 1]$$
$$x \longmapsto F_X(x) = P[X < x] = \sum_{\substack{x_i \in D_X : \\ x_i < x}} P(X = x_i).$$

10

Propriétés :

La fonction de répartition F d'une v.a. X vérifie les propriétés suivantes :

i) Par définition on a , $0 \le F(x) \le 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

iv) F est croissante, c.à.d., si $x \le y$ alors $F(x) \le F(y)$.

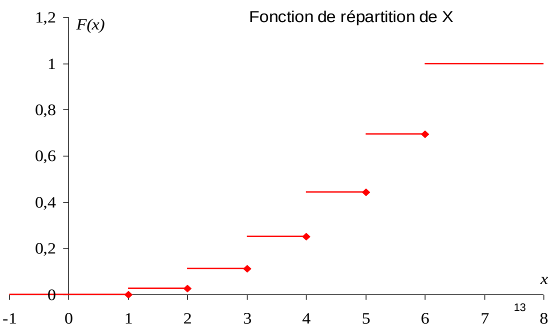
11

Exemple: On détermine la fonction de répartition de la v.a.d. X(ω)=Sup(i,j) (l'exemple précédent) et on trace sa représentation graphique. $\forall\, x \in \mathbf{R}$, on a:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \le 1 \\ P(1) = 1/36 & si \quad 1 < x \le 2 \\ P(1) + P(2) = 4/36 & si\ 2 < x \le 3 \\ P(1) + P(2) + P(3) = 9/36 & si\ 3 < x \le 4 \\ P(1) + \ldots + P(4) = 16/36 & si\ 4 < x \le 5 \\ P(1) + \ldots + P(5) = 25/36 & si\ 5 < x \le 6 \\ P(1) + \ldots + P(6) = 1 & si\ 6 < x. \end{cases}$$

12

$x \in \mathbf{R}$	$]-\infty, 1]$	$]1, 2]$	$]2, 3]$	$]3, 4]$	$]4, 5]$	$]5, 6]$	$]6, +\infty[$
F(x)	0	1/36	4/36	9/36	16/36	25/36	1



13

3) Caractéristiques d'une v.a.d.

a) Espérance mathématique :

Si X est une v.a.d. de loi de probabilité, $\{(x_i, p_i): x_i \in D_X\}$, alors l'espérance mathématique de X, que l'on note E(X), est le nombre réel donné par :

$$E(X) = \sum_{x_i \in D_X} x_i \times P(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_X} p_i \times x_i.$$

14

Propriétés :

i) On a toujours: $\inf(x_i) \leq E(X) \leq \sup(x_i)$

ii) Soient X et Y deux v.a., a et b deux nombres réels, alors on a:

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

iii) Si f est une fonction de D_X dans $\mathbf{R}$, alors,

$$E[f(X)] = \sum_{x_i \in D_X} f(x_i) \times P(X = x_i).$$

15

b) Variance et écart-type :

Si X est une v.a.d. de loi de probabilité, $\{(x_i, p_i): x_i \in D_X\}$ et d'espérance E(X), alors la variance de X que l'on note V(X) est le nombre réel positif donné par :

$$V(X) = \sum_{x_i \in D_X} p_i \times (x_i - E(X))^2.$$

Et l'écart-type de X que l'on note σ_X (ou σ) est donné par:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

16

Propriétés :

i) On montre que V(X) s'écrit :

$$V(X) = [\sum_{x_i \in D_X} p_i \times x_i^2] - [E(X)]^2$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2.$$

ii) V(X)=0 si et seulement si, $x_i = E(X)\ \forall\ x_i \in D_X$,

c.à.d. la variable aléatoire X est constante.

iii) Si a et b sont 2 nombres réels, alors on a:

$$V(aX+b)=a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma_{(aX+b)} = |a|\ \sigma_X$$

17

Exemple: On calcule l'espérance et l'écart type de la v.a.d. $X(\omega)$=Sup(i,j) (l'exemple précédent).

$$E(X) = \sum_{x_i=1}^{6} p_i \times x_i = 4{,}472.$$

$$V(X) = [\sum_{x_i=1}^{6} p_i \times x_i^2] - [E(X)]^2$$
$$= 21{,}972 - (4{,}472)^2 = 1{,}97.$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}97} = 1{,}403.$$

18

Définition:

Une v.a. X est dite centrée si E(X)=0 et elle est réduite si V(X)=1(ou σ_X =1).

Pour toute v.a. X d'espérance E(X)≠0 et d'écart type $\sigma_X \neq 1$, on définit la v.a. Y centrée et réduite correspondante par :

$$Y=(X-E(X))/\sigma_X.$$

19

d) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.T)

Théorème: Soit X une v.a. d'espérance E(X) et d'écart type $\sigma_X \neq 0$, alors pour tout réel $\varepsilon>0$, on a:

$$P\left(\frac{|X-E(X)|}{\sigma}\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Ou bien,

$$P\left(|X-E(X)|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

20

Interprétation :

i) L'I.B.T permet de calculer un majorant de la probabilité pour que l'écart absolu entre la v.a. X et son espérance soit supérieur à $\sigma\times\varepsilon$.

$$P\left(\frac{|X-E(X)|}{\sigma}\geq\varepsilon\right)=P\left(|X-E(X)|\geq\sigma\varepsilon\right)\leq\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

ii) L'I.B.T permet de calculer un minorant de la probabilité pour que l'écart absolu entre la v.a. X et son espérance soit inférieur à $\sigma\times\varepsilon$.

$$P\left(\frac{|X-E(X)|}{\sigma}<\varepsilon\right)=P\left(|X-E(X)|<\sigma\varepsilon\right)\geq1-\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

21

iii) L'I.B.T montre que pour les v.a. on ne peut pas avoir simultanément une grande précision sur les valeurs avec une grande certitude (ou probabilité), c.à.d. si on cherche à augmenter la précision on diminue la certitude et inversement.

Exemple:

Pour l'exemple précédent, on a E(X)=4,472 et σ=1,403 (σ^2=1,97).

22

i) Si on prend ε=1,5, on a:

$$P\left(|X-4{,}472|\geq1{,}5\right)\leq\frac{1{,}97}{(1{,}5)^2}=0{,}875\ \ et$$

$$P\left(|X-4{,}472|<1{,}5\right)\geq1-0{,}875=0{,}125.$$

On a remarque que:

$$P\left(|X-4{,}472|\geq1{,}5\right)=0{,}4167$$

$$et$$

$$P\left(|X-4{,}472|<1{,}5\right)=0{,}5833.$$

23

ii) Si on prend ε=2, on a :

$$P\left(|X-4{,}472|\geq2\right)\leq\frac{1{,}97}{2^2}=0{,}493\ \ et$$

$$P\left(|X-4{,}472|<2\right)\geq1-0{,}493=0{,}507.$$

On a remarque que :

$$P\left(|X-4{,}472|\geq2\right)=0{,}1111$$

$$et$$

$$P\left(|X-4{,}472|<2\right)=0{,}8889.$$

24

4) Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux v.a.d. sur un même espace fondamental Ω, le couple aléatoire (X,Y) est une application de Ω dans $\mathbf{R}^2$.

$$(X,Y) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^2$$
$$\omega \longmapsto (X(\omega),Y(\omega))=(x,y)$$

On note:
$D_{XY}=\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in D_X \text{ et } y \in D_Y\} = D_X \times D_Y$; l'ensemble de toutes les réalisations possibles du couple alétoire (X,Y). Où D_X et D_Y sont les domaines respectifs de X et de Y.

25

a) Loi conjointe :

La loi de probabilité du couple aléatoire (X,Y) est appelée loi conjointe de X et de Y. Cette loi est définie de D_{XY} dans [0, 1] par:

Pour tout $(x,y) \in D_{XY}$,

$$P(x,y)=P(X=x \text{ et } Y=y) = P(\{X=x\} \cap \{Y=y\})$$

Avec,

$$\sum_{x \in D_X} \sum_{y \in D_Y} P(x,y)=1.$$

26

Remarque :

Si D_X et D_Y sont finis et de cardinaux respectifs m et n, alors on peut donner la loi conjointe:

- soit par un ensemble de m×n triplés (x_i, y_j, p_{ij}) tels que:

$$x_i \in D_X,\ y_j \in D_Y,\ p_{ij} = P(x_i, y_j) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

- soit par un tableau de contingence

27

$x_i \in D_X$ \ $y_j \in D_Y$	y_1	...	y_j	...	y_n
x_1	p_{11}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
:	:	:	:		:
x_i	p_{i1}	...	p_{ij}	...	p_{in}
:	:	:	:		:
x_m	p_{m1}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

28

Exercice: Dans une urne il y a des boules de même couleur dont ¾ portent le numéro 1 et ¼ portent le numéro 0. On tire 2 boules avec remise et on pose:

X= "le produit des 2 numéros obtenus"

Y="la somme des 2 numéros obtenus"

Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

Solution: On a d'abord,

$D_X=\{0, 1\}$ et $D_Y=\{0, 1, 2\}$

29

$D_{XY}=\{(0,0); (0,1); (0,2); (1,0); (1,1); (1,2)\}$

$Card(D_{XY})=2\times 3=6$

P(0,0)=P(X=0 et Y=0)=1/16.

P(0,1)=P(X=0 et Y=1)=6/16.

P(0,2)=P(X=0 et Y=2)=0 (impossible).

P(1,0)=P(X=1 et Y=0)=0 (impossible).

P(1,1)=P(X=1 et Y=1)=0 (impossible).

P(1,2)=P(X=1 et Y=2)=9/16.

30

Tableau de contingence

$y_j \in D_Y$ / $x_i \in D_X$	0	1	2	Loi marginale de X
0	1/16	6/16	0	7/16
1	0	0	9/16	9/16
Loi marginale de Y	1/16	6/16	9/16	1

31

b) Lois marginales :

La loi marginale est la loi de probabilité de chacune des deux variables. Ainsi pour un couple aléatoire (X,Y), on détermine les deux lois marginales à partir de la loi conjointe par:

- Pour tout $x \in D_X$, $P(X=x)=\sum_{y\in D_Y} P(x,y).$
- Pour tout $y \in D_Y$, $P(Y=y)=\sum_{x\in D_X} P(x,y).$

32

c) Lois conditionnelles :

Lorsqu'on fixe une valeur d'une variable du couple aléatoire (X,Y), on détermine une loi conditionnelle de l'autre variable. Ainsi on a:

- Si on fixe $y \in D_Y$, alors pour tout $x \in D_X$,

$$P(X=x/Y=y)=\frac{P(x,y)}{P(Y=y)}.$$

- Si on fixe $x \in D_X$, alors pour tout $y \in D_Y$,

$$P(Y=y/X=x)=\frac{P(x,y)}{P(X=x)}.$$

33

Exemple: Dans l'exemple précédent,

- si on fixe y =1, alors la loi conditionnelle de X sachant que Y=1, est donnée par:

P(X=0/Y=1)=1 et P(X=1/Y=1)=0.

- si on fixe x =0, alors la loi conditionnelle de Y sachant que X=0, est donnée par:

P(Y=0/X=0)=1/7 ; P(Y=1/X=0)=6/7

et P(Y=2/X=0)=0.

34

d) Indépendance entre deux variables :

Deux variables X et Y sont indépendantes si, pour tout $x \in D_X$ et tout $y \in D_Y$ on a:

P(X=x/Y=y)=P(X=x) ou P(Y=y/X=x)=P(Y=y).

Ce qui est équivalent à:

P(X=x, Y=y) = P(X=x)×P(Y=y).

Remarque: Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un seul couple (x,y) tel que:

P(X=x, Y=y) ≠ P(X=x)×P(Y=y).

35

5) Caractéristiques d'un couple aléatoire

a) Caractéristiques marginales :

Ce sont l'espérance et la variance marginales de chacune des deux variables, calculées à partir de la loi marginale correspondante. Ainsi on a:

$$E(X)=\sum_{x\in D_X} xP(X=x)=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y} xP(x,y).$$

$$V(X)=\sum_{x\in D_X}[x-E(X)]^2P(X=x)$$

$$=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y}[x-E(X)]^2P(x,y).$$

36

b) Caractéristiques conditionnelles :

Ce sont les espérances et les variances conditionnelles de chacune des deux variables, calculées à partir des lois conditionnelles correspondantes. Ainsi on :

$$E(X/Y=y)=\sum_{x\in D_X} xP(X=x/Y=y)=\sum_{x\in D_X} x\frac{P(x,y)}{P(Y=y)}.$$

$$V(X/Y=y)=\sum_{x\in D_X}[x-E(X/Y=y)]^2P(X=x/Y=y)$$

$$=\sum_{x\in D_X}[x-E(X/Y=y)]^2\frac{P(x,y)}{P(Y=y)}.$$

37

Remarque: Si card(D_X)=m et card(D_Y)=n, alors on a n moyennes et n variances conditionnelles de X, ainsi que m moyennes et m variances conditionnelles de Y.

c) Relations entre caractéristiques marginales conditionnelles

On montre que :

$$E(X)=\sum_{y\in D_Y} P(Y=y)E(X/Y=y)$$

$$E(Y)=\sum_{x\in D_X} P(X=x)E(Y/X=x).$$

38

$$V(X)=\sum_{y\in D_Y} P(Y=y)V(X/Y=y)$$

$$+\sum_{y\in D_Y} P(Y=y)[E(X/Y=y)-E(X)]^2.$$

$$V(Y)=\sum_{x\in D_X} P(X=x)V(Y/X=x)$$

$$+\sum_{x\in D_X} P(X=x)[E(Y/X=x)-E(Y)]^2.$$

On dit que la variance marginale est égale à la somme de l'espérance des variances conditionnelles et la variance des espérances conditionnelles

39

Exemple: D'après l'exemple précédent on a,

$$E(X)=0\times\frac{7}{16}+1\times\frac{9}{16}=\frac{9}{16}.$$

$$E(X/Y=0)=0\times\frac{1/16}{1/16}+1\times 0=0.$$

$$E(X/Y=1)=0\times\frac{6/16}{6/16}+1\times 0=0.$$

$$E(X/Y=2)=0\times 0+1\times\frac{9/16}{9/16}=1.$$

$$E(X)=\frac{1}{16}\times 0+\frac{6}{16}\times 0+\frac{9}{16}\times 1=\frac{9}{16}.$$

40

$$V(X)=\sum_{x\in D_X} x^2P(X=x)-[E(X)]^2$$

$$=9/16-(9/16)^2=\frac{63}{16^2}=0{,}2461$$

$$V(X/Y=0)=0. \quad V(X/Y=1)=0.$$

$$V(X/Y=2)=0.$$

$$V(X)=0+\left\{\frac{1}{16}\times[E(X)]^2+\frac{6}{16}\times[E(X)]^2+\frac{9}{16}\times[1-E(X)]^2\right\}=\frac{63}{16^2}=0{,}2461.$$

41

d) Espérance d'une fonction de (X,Y)

Soit f une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, l'espérance de la v.a f(X,Y) est donnée par:

$$E[f(X,Y)]=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y} f(x,y)P(x,y).$$

e) Covariance

Définition :

La covariance entre deux v.a.d X et Y est le nombre réel donné par:

$$Cov(X,Y)=\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y}[x-E(X)]\times[y-E(Y)]P(x,y).$$

42

Propriétés :

i) La covariance entre X et Y se calcule par :

$$Cov(X,Y)=[\sum_{x\in D_X}\sum_{y\in D_Y} xyP(x,y)]-[E(X)E(Y)]$$
$$=[E(XY)]-[E(X)E(Y)].$$

ii) Soient a, b, c et d 4 nombres réels, alors on a: $Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y).$

iii) Si X et Y sont indépendantes on a:

E(XY)=E(X)E(Y), donc Cov(X,Y)=0

43

Remarque: Il se peut que Cov(X,Y)=0, sans que X et Y soient indépendantes, car Cov(X,Y)=0 est une condition nécessaire pour l'indépendance mais elle n'est pas suffisante.

f) Variance de la somme de deux v.a.

Soient X et Y deux v.a., alors pour a et b deux nombres réels, on a:

$V(aX+bY)= a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov(X,Y).$

En particulier on a:

$V(X+Y)= V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y).$

$V(X-Y)= V(X)+V(Y)-2Cov(X,Y).$

44

Remarque: Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X,Y)=0 et par conséquent on a:

$V(X+Y)= V(X-Y)= V(X)+V(Y).$

Exemple: on calcule la covariance de X et Y dans l'exemple précédent.

$$Cov(X,Y)=[\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} xyP(x,y)]-[E(X)E(Y)]$$
$$=[1\times 2\times \frac{9}{16}]-[\frac{9}{16}\times\frac{3}{2}]=\frac{9}{32}.$$

45

c) Moments d'une v.a.d. :

Soient X une v.a.d. de loi de probabilité, $\{(x_i, p_i): x_i \in D_X\}$ et r un entier>0, on distingue deux types de moments de X :

i) Les moments (ou moments non centrés) d'ordre r, notés $m_r(X)$ et donnés par :

$$m_r(X)=E[X^r]=\sum_{x_i\in D_X} x_i^r\times p_i.$$

ii) Les moments centrés d'ordre r, notés $\mu_r(X)$ et donnés par :

$$\mu_r(X)=E[(X-E(X))^r]=\sum_{x_i\in D_X}(x_i-E(X))^r\times p_i.$$

46

Remarques: On a,

i) $E(X)=m_1(X)$.

ii) $V(X) = \mu_2(X) = m_2(X) - [m_1(X)]^2$.

47