النقطة النهائية	على	
20,00	20	
عشرون	بالحروف	

مادة : الرياضيات

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

177818

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

(ص 1)

- التمرين الأول :

1- لدينا $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$.

0,5

2- لنبين أن : لكل n من $\mathbb{N}$ $U_n > \frac{1}{2}$

• لدينا من أجل $n=0$ $U_0 = 1$ إذن $U_0 > \frac{1}{2}$

• نفترض أن : $U_n > \frac{1}{2}$

• ثم نبين أن : $U_{n+1} > \frac{1}{2}$

لدينا : حسب الافتراض : $U_n > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n > \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow U_{n+1} > \frac{1}{2}$

1

وبالتالي وحسب برهان الترجع لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} ;\ U_n > \frac{1}{2}$

3- أ- لدينا $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{4} - U_n$

$= -\frac{1}{2}U_n + \frac{1}{4}$

$= -\frac{1}{2}\left(U_n - \frac{1}{2}\right)$

0,75

- ب- لدينا $U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{2}\left(U_n - \frac{1}{2}\right)$

ولدينا حسب السؤال 2 $U_n > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow U_n - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(U_n - \frac{1}{2}\right) < 0$

وبالتالي فإن : $U_{n+1} - U_n < 0$

ومنه فالمتتالية تناقصية.

0,5

وبما أنها مصغورة بالعدد $\frac{1}{2}$ وتناقصية فإنها متقاربة

4- أ- لدينا : $V_0 = U_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

0,25

- ب- لنبين أن V_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

لدينا:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}$$

ونعلم أن: $u_n = v_n + \frac{1}{2}$

وبالتالي: 0,5

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

b- لدينا:

$$v_n = v_p \times q^{n-p}$$
$$= v_0 \times q^n$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- نستنتج أن: $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

لدينا:

$$u_n = v_n + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right)$$

1

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

c- لدينا:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1$$
$$= \frac{1}{2}$$

0,5

(لأن: $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

التمرين الثالث:

1- عدد حالات السحب الممكنة هو $\text{Card}\,\Omega = A_9^2 = 72$ 0,5

2- أ- لدينا $P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{A_2^1 \times A_3^1 + A_2^1 \times A_4^1 + A_2^2}{A_9^2}$

$$= \frac{2 \times 3 + 2 \times 4 + 2}{72} = \frac{2}{9}$$ 0,5

2 - ب - لدينا: $P(B) = \frac{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2}{A_9^2}$

$= \frac{2 + 6 + 12}{72}$

$= \frac{5}{18}$

- لدينا: $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{5}{18}$

$= \frac{13}{18}$

3- نعتبر الحدث C سحب كرتين من لونين مختلفين:

ومنه: $P_A(C) = \frac{\text{Card } C \cap A}{\text{Card } A} = \frac{A_2^1 \times A_3^1 + A_2^1 \times A_4^1}{A_2^1 \times A_3^1 + A_2^1 \times A_4^1 + A_2^2}$

$= \frac{6 + 8}{6 + 8 + 2}$

$= \frac{7}{8}$

4- لدينا أولا $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

لأنه يمكن عدم سحب أي كرة بيضاء وفي هذه الحالة $X = 0$

أو سحب كرة بيضاء وكرة من لون آخر وفي هذه الحالة $X = 1$

أو يمكن سحب كرتين كلاهما بيضاوين وفي هذه الحالة $X = 2$

ولدينا:

- $P(X = 0) = \frac{A_4^2 + A_3^2 + 2 \times A_3^1 \times A_4^1}{A_9^2} = \frac{12 + 6 + 24}{72} = \boxed{\frac{7}{12}}$

- $P(X = 1) = \frac{2(A_2^1 \times A_3^1) + 2(A_2^1 \times A_4^1)}{A_9^2}$

$= \frac{12 + 16}{72} = \boxed{\frac{7}{18}}$

- $P(X = 2) = \frac{A_2^2}{A_9^2} = \frac{2}{72} = \boxed{\frac{1}{36}}$

Note définitive sur 20

COMPOSITION DE : ....

Appréciations expliquant la note chiffrée :

RESERVE AU SECRETARIAT

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : ....

وبالتالي:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$

- التمرين الثاني:

1 - أ - لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 e^x = (+\infty)^2 \times +\infty = +\infty$$

ب - نحسب:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2 e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 \times \frac{e^x}{x} = +\infty \times +\infty = +\infty$$

- التأويل الهندسي:

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنه فالمنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو $+\infty$

ج - لدينا:

$$* \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x = \frac{(x-1)^2}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x^2} e^x = (x-1)^2 \cdot e^x = f(x)$$

د -

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 x^2 e^x = 1^2 \times 0 = 0$$

20	
بالحروف	

مادة : الرياضيات

التقدير المفسر للنقطة

خاص بكتابة الإمتحان

اسم المصحح(ة) و توقيعه(ها)

ص 5

تتمة التمرين 2 :

د- التأويل الهندسي: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ يعني أن (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$

0,5

3- أ- لدينا: $f'(x) = \left[(x-1)^2 e^x\right]'$

$$= \left((x-1)^2\right)' e^x + (x-1)^2 (e^x)'$$

$$= 2\times(x-1)(x-1)' e^x + (x-1)^2 \times e^x$$

$$= 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x$$

$$= e^x\left(2x-2+x^2-2x+1\right)$$

$$= e^x\left(x^2-1\right)$$

1

لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x^2-1)e^x$

ب- ندرس إشارة $f'(x)$:

لدينا: $e^x>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2-1

نحل المعادلة $x^2-1=0$

$$\Leftrightarrow x^2=1$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad \text{أو} \quad x=-1$$

0,5

ومنه:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,5

وبالتالي فإن: $f'(x)>0$ إذا كان $x\in]-\infty,-1[$ أو $x\in]1,+\infty[$

و $f'(x)<0$ إذا كان $x\in]-1;1[$

نحسب:

$$f(-1) = (-1-1)^2 e^{-1}$$

$$= 4e^{-1}$$

$$= 4\times\frac{1}{e^1}$$

$$= \frac{4}{e}$$

0,25

0,25

$= 0^2 \times e$

$= 0$

- جدول تغيرات الدالة f :

0,1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3- لدينا : $F'(x) = \left[(x^2 - 4x + 5)e^x\right]'$

$= (x^2 - 4x + 5)'e^x + (x^2 - 4x + 5)e^{x'}$

$= (2x - 4 + 0)e^x + (x^2 - 4x + 5)e^x$

$= 2xe^x - 4e^x + x^2e^x - 4xe^x + 5e^x$

$= -2xe^x + e^x + x^2e^x.$

$= e^x(-2x + 1 + x^2)$ < متطابقة هامة

1

$F'(x) = (x-1)^2 e^x$

$= f(x)$

وبالتالي فإن $F(x)$ هي الدالة الأصلية لـ $f(x)$ على $\mathbb{R}$

4- أ- لنحسب مساحة الجزء المخدش.

لدينا : $\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx \ (Ua)$

$= \int_{-1}^{1} (x-1)^2 e^x\, dx \ (Ua)$

$= \left[(x^2 - 4x + 5)e^x\right]_{-1}^{1}$

$= (1^2 - 4\times 1 + 5)e^1 - \left[((-1)^2 - 4\times -1 + 5)e^{-1}\right]$

$= 2e - 10 \times \frac{1}{e}$

$= 2e - \frac{10}{e} \ (Ua)$

1

ب- انطلاقا من المبيان عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$

هو 3 حلول.

1