فرض محروس رقم	الموسم الدراسي	2013-14
في مادة الرياضيات	مدة الإنجاز	ساعتان
	المستوى الدراسي	2 ع ر

مسألة (10 ن):

- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=x^2+\ln\frac{x}{2}$.

1)- ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$.

2)-أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على كل من المجالين $]0,\alpha[$ و $]\alpha,+\infty[$.

لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{1}{x^2-2\ln x},x>0$ و $f(0)=0$.

1)-أ- بين أن الدالة f متصلة في الصفر على اليمين.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في الصفر على اليمين ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

ج- أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

2)-أ- بين أن: $\forall x>0, f'(x)=\frac{2(1-x^2)}{x}(f(x))^2$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f، و استنتج أن $\forall x\in[0,+\infty[, 0\leq f(x)\leq 1$.

3)- أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt, x>0$ و $F(0)=0$.

1)- بين أن $\forall x>0, 0\leq F(x)\leq x$، و استنتج أن F متصلة في الصفر على اليمين.

2)-أ- بين أن $\forall x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[, \frac{x}{x^2-2\ln x}\leq F(x)\leq\frac{x}{4x^2-2\ln 2x}$.

ب- استنتج أن F قابلة للاشتقاق في الصفر على اليمين و أن $F_d'(0)=0$.

3)-أ- بين أن $\forall x\geq 1, \frac{x}{4x^2-2\ln 2x}\leq F(x)\leq\frac{x}{x^2-2\ln x}$.

ب- استنتج أن $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.

4)-أ- بين أن $\forall x>0, F'(x)=-2g(x)f(x)f(2x)$.

ب-ضع جدول تغيرات الدالة F.

التمرين 1 : 6 ن

- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 21u-52v=1$

1)- باستعمال خوارزمية إقليدس،حدد حل خاص للمعادلة (E).

2)- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

3)- نعتبر في $\mathbb{N}$ المعادلة: $(F): x^{17}\equiv 2\,[53]$.

4)- ليكن x حلا للمعادلة (F).

أ- بين أن 53 أولي و أن x و 53 أوليان فيما بينهما .

ب- بين أن $x^{52}\equiv 1\,[53]$ و أن $x\equiv 2^5\,[53]$

5)- بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x\equiv 2^5\,[53]$ فإن x حل للمعادلة (F).

6)- بين أن حلول المعادلة (F) هي الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على الشكل $-21+53k$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

التمرين: 4 ن

نعتبر في $\mathbb{Z}^3$ المعادلة : $(E): x^2+y^2=pz^2$

حيث p عدد صحيح طبيعي أولي يحقق: $p\equiv 3[4]$

1. أ- بين أن المعادلة : $x^2+1\equiv 0[p]$ لا تقبل أي حل في $\mathbb{Z}$.

ب- استنتج أن: $(\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2);\ \ (p/(x^2+y^2)\ \Leftrightarrow\ p/x$ و $p/y)$

2. أ- بين أن المعادلة : $x^2+y^2=pz^2$ مع $x\wedge y\wedge z=1$ لا تقبل أي حل في $(\mathbb{N}^*)^3$.

ب- بوضع $x\wedge y\wedge z=d$ حل في $(\mathbb{N}^*)^3$ المعادلة (E).

ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^3$.