التمرين الأول: (3ن) (1 و2) مستقلان

1) أ- حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $7x-4y=4$ — 0.5

ب- ليكن A عددا صحيحا طبيعيا بحيث $A=\overline{75}$ في نظمة العد ذات الاساس x و $A=\overline{49}$ في نظمة العد ذات الاساس y. حدد القيم الممكنة للعددين x و y. — 0.5

ج- حدد x و y إذا علمت أنه يوجد عدد B بحيث $B=\overline{125}_{(y)}$ و $B=\overline{310}_{(x)}$. — 0.5

د- اكتب A و B في نظمة العد العشري. — 0.25

2) أ- أعط بكل دقة نص مبرهنة فيرما الصغرى — 0.5

ب- باستعمال مبرهنة فيرما بين أن العدد $n(n^6-1)$ يقبل القسمة على 42 مهما يكن n من $\mathbb{N}$. — 0.75

التمرين الثاني : (3.5 ن)الجزءان (1 و2) مستقلان

1)لكل x و y من $\mathbb{R}^+$ نضع: $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$

أ- ادرس تبادلية وتجميعية القانون *. — 0.5

ب- بين أن $(\mathbb{R}^+,*)$ يقبل عنصرا محايدا وحدد العناصر التي تقبل مماثلا في $(\mathbb{R}^+,*)$ ؟ — 0.5

ج - بين أن كل الأعداد الحقيقية الموجبة منتظمة بالنسبة للقانون * — 0.75

2) نعتبر المجموعة $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x\in\mathbb{R}\right\}$

أ -بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$ — 0.5

ب -بين أن التطبيق φ من $\mathbb{R}$ نحو E والذي يربط كل عدد حقيقي x بالمصفوفة $M(x)$ هو تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$ — 0.75

ج-استنتج بنية $(E,\times)$. — 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية: $P(z)=z^3-(1+2i)z^2+(-1+9i)z-2(1+5i)$.

1) حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-7-24i$. — 0.25

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$. (يمكنك حساب $P(2)$) — 0.75

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر A و B و C التي ألحاقها على التوالي 2 و $1-i$ و $-2+3i$ وليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $\left(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$ و r الدوران الذي مركزه C و زاويته θ

1) نعتبرالمجموعة التالية: $(\Delta)=\{M(z)\in(P) / |2-z|=|\bar{z}-1-i|\}$.

أ- تحقق أن $C\in(\Delta)$. — 0.25

ب- حدد طبيعة المجموعة (Δ) و استنتج صورة النقطة A بالدوران r. — 0.5

2) أ- تحقق أن $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\left(\dfrac{2-i}{2+i}\right)^2$ ثم استنتج أن: $4\arg(2-i)+\dfrac{\pi}{2}\equiv\theta[2\pi]$ — 0.5

ب- نضع: $\beta=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$. بين أن $\arg(2-i)\equiv-\beta[2\pi]$ ، — 0.5

ج- استنتج أن: $\theta=\dfrac{\pi}{2}-4\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$ — 0.25

3) ليكن h التحاكي الذي مركزه C و نسبته -1.

باستعمال الصيغة العقدية لكل من h و r ، حدد طبيعة التحويل $r\circ h$ و عناصره المميزة. 0.5

التمرين الرابع: (10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $[0,1[\cup]1,+\infty[$ بمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{\ln x} \quad ; \quad x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

0.5 — 1) أدرس اتصال و قابلية اشتقاق f على اليمين في 0.

0.75 — 2) أعط جدول تغيرات الدالة f (مع تحديد نهايات الدالة f عند D_f).

3) ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.75 — أ- بين أن: $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[)\ f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$ ثم أدرس تقعر المنحنى (C).

0.25 — ب- حدد الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$ للمنحنى (C).

0.5 — ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم الذي معادلته $y=x$.

0.75 — د- أنشئ (C).

II نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} u_0=3 \\ (\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

0.25 — 1) أ- بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n\geq e$.

0.25 — ب- أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

0.5 — ج- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

0.25 — 2) أ- بين أن: $(\forall x\geq e)\quad 0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{4}$

0.75 — ب- استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_n-e|\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

0.25 — ج- حدد أصغر عنصر n_0 من $\mathbb{N}$ بحيث تكون u_{n_0} قيمة مقربة للعدد e بالدقة 10^{-20}.

III- لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بمايلي: $F(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt$

0.25 — 1) تحقق أن F معرفة على $]1,+\infty[$.

0.5 — 2) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

0.5 — 3) أ- بين أن: $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad \ln x\leq x-1$.

1.25 — ب- بين أن: $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad F(x)\geq 1+\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ ، ثم حدد $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)$.

0.25 — 4) أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$.

0.25 — ب- أدرس تغيرات F على $]e,+\infty[$.

5) لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 3$. نعتبر المعادلة: $(E_n):\ f(x)=F(n)$

0.5 — أ- بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[n,n+1]$.

0.25 — ب- أدرس رتابة المتتالية (α_n).

0.5 — ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n}$.