يسمح باستعمال الآلة الحاسبة الغير مبرمجة

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا.

لكل x من $\mathbb{R}$، نرمز ب $A(x)$ للمصفوفة المربعة التالية: $A(x)=\begin{pmatrix}a^x&-xa^x\\0&a^x\end{pmatrix}$ و لتكن المجموعة:

$$E=\{A(x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$$

1) أ- بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن $\times$ تبادلي في E. — 0.5

ب- بين أن التطبيق : $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}&\to&E\\ x&\mapsto&A(x)\end{array}$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$. — 0.5

ج- استنتج بنية $(E,\times)$. — 0.5

2) نعتبر المجموعة التالية: $F=\{A(n)\ /\ n\in\mathbb{Z}\}$.

بين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$. — 0.5

3) لكل n من $\mathbb{N}$ و لكل x من $\mathbb{R}$ نضع: $A^0(x)=I$ و $A^{n+1}(x)=A^n(x)\times A(x)$.

نرمزب $A^{-n}(x)$ لمقلوب المصفوفة $A^n(x)$ في $(E,\times)$.

أ- حدد $A^p(x)$ ؛ $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall p\in\mathbb{Z})$. — 0.5

ب- ليكن (α,β) من $\mathbb{Z}^2$. نعتبر المجموعة: $G=\{A^p(\alpha)\times A^q(\beta)\ /\ (p,q)\in\mathbb{Z}^2\}$.

بين أن $(G,\times)$ زمرة تبادلية. — 0.5

ج- بين أن $F=G \iff \alpha\wedge\beta=1$. — 0.5

التمرين الثاني (3 نقط)

الجزء I

ليكن a عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث : $a\wedge 10=1$ ($a\wedge 10$ يرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و 10)

1) أ - بين أن a عدد فردي و استنتج أن : $a^8\equiv 1\ [2]$. — 0,25 ن

ب - بين أن a غير قابل للقسمة على 5 و أن $a^4\equiv 1\ [5]$. — 0,25 ن

ج - استنتج أن $a^8\equiv 1\ [10]$. — 0,25 ن

2) أ- بين أن : $\forall k\in\mathbb{N}$ $a^{8\times 10^k}\equiv 1\ [10^{k+1}]$ و استنتج أن : $a^{800000001}\equiv a\ [10^9]$. — 0,75 ن

ب. باستعمال نتيجة السؤال السابق ، أثبت وجود عدد صحيح طبيعي x بحيث الكتابة العشرية للعدد x^3 تنتهي بالعدد 123456789 — 0,5 ن

الجزء II

نضع $E=\{0,1,2,\dots,30\}$ ونعتبر التطبيق f من E نحو E والذي يربط كل عنصر n من E بباقي القسمة ل $27n+4$ على 31 بين أن f تقابل من E نحو E و حدد f^{-1} — 1 ن

ص $\frac{2}{3}$

التمرين الثالث (10 ن)

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x)=\ln(1+e^{-x})$ و $g(x)=\ln(1+x)$.

نعتبر $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء I

1. احسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,25

2. أ- تحقق من أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ f(x)=-x+\ln(1+e^{x})$. 0,25

ب- استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ينبغي تحديده. 0,25

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم (Δ). 0,25

3. أ- ضع جدول تغيرات الدالة f. 0,50

ب- أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. 0,50

4. أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ) والمماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الأفصول 0. 0,50

5. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال I ينبغي تحديده ، ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x\in I$. 0,50

الجزء II

1. بين أن : $\forall t\geq 0\ ;\ t-\frac{t^2}{2}\leq g(t)\leq t$ 0,50

ثم استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ e^{-x}-\frac{e^{-2x}}{2}\leq f(x)\leq e^{-x}$. 0,25

2. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $a_n=\int_0^n f(x)\,dx$.

أ- بين أن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة. نضع : $a=\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. أعط تأويلا هندسيا للعدد a. 0,50

ب- بين أن : $\frac{3}{4}\leq a\leq 1$. 0,50

3. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$. 0,75

احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

الجزء III

لكل $x\in]-1,1[$ و لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع :

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k=x+\frac{(-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

1. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ g(x)=g_n(x)+\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\,dt$. 0,75

2. نضع : $R_n(x)=g(x)-g_n(x)$.

بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x)=0$ ، ثم استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)=g(x)$. 0,75

3. نضع : $x=-\frac{1}{2}$. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث : 0,75

$$n\geq n_0\ \Rightarrow\ \left|g\left(-\frac{1}{2}\right)-g_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right|<10^{-2}$$

4. ليكن $p\in\mathbb{N}^*$ وليكن $x\in\left[\frac{1}{p},p\right]$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ g_n(e^{-x})-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\leq f(x)\leq g_n(e^{-x})+\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$. 0,75

ب- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=1+\frac{(-1)}{2^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. 0,75

بين أن : $u_n-\frac{1}{(n+1)^2}\leq a_n\leq u_n+\frac{1}{(n+1)^2}$.

بين أن : $a=\lim\limits_{p\to+\infty}\int_{\frac{1}{p}}^{p} f(x)\,dx$ ، ثم استنتج أن : $a=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. 0,75

3/3

التمرين الرابع (3.5 نقط)

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية: $P(z)=z^3-(1+2i)z^2+(-1+9i)z-2(1+5i)$.	
1) حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $-7-24i$.	0.25
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$. (يمكنك حساب $P(2)$)	0,75
II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر A و B و C التي ألحاقها على التوالي 2 و $1-i$ و $-2+3i$ وليكن θ القياس الرئيسي للزاوية $(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ و r الدوران الذي مركزه C و زاويته θ	
1) نعتبر المجموعة التالية: $(\Delta)=\{M(z)\in(P)/\|2-z\|=\|\bar{z}-1-i\|\}$.	
أ- تحقق أن $C\in(\Delta)$.	0.25
ب- حدد طبيعة المجموعة (Δ) و استنتج صورة النقطة A بالدوران r.	0.5
2) أ- تحقق أن $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=i\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2$ ثم استنتج أن: $4\arg(2-i)+\frac{\pi}{2}\equiv\theta[2\pi]$	0.5
ب- نضع: $\beta=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. بين أن $\arg(2-i)\equiv-\beta[2\pi]$.	0.5
ج- استنتج أن: $\theta\equiv\frac{\pi}{2}-4\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.	0.25