تمرين 1

I) نضع $g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ و $g(0) = 1$

1 - بين أن $e^{x} \geq x+1$ ، $\forall x \in \mathbb{R}$ — 1

2 - استنتج تغيرات g على $\mathbb{R}$ — 1

3 نضع : $h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$ ، $\forall x \geq 0$

أ - بين أن : $0 \leq h''(x) \leq x$ ، $\forall x \geq 0$ — 1

ب - استنتج أن $0 \leq h(x) \leq \frac{x^3}{6}$ ، $\forall x \geq 0$ — 1

ج - استنتج قابلية اشتقاق g على اليمين في 0 — 1

II) نضع : $f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$, $x > 0$ و $f(0) = 1$

1 - بين أن f متصلة في 0 — 1

2 - أ - تحقق أن : $f(x) = 2g(2x) - g(x)$ ، $\forall x > 0$ — 1

ب - أدرس قابلية اشتقاق f في 0 على اليمين — 1,5

3 - أ - بين أن : $f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}(2x+1-(x+1)e^{x})$ ، $\forall x > 0$ — 1

ب - أعط جدول تغيرات f . — 1

4 - أنشئ C_f — 1,5

التمرين 2 :

نضع $f(z) = \frac{z}{1+iz}$ ، $\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}$

1 - أ - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = \frac{1}{z}$: (E) — 1

نرمز لحلي (E) ب z_1 و z_2 بحيث $Re(z_1) < 0$

ب - أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي وأحسب : $z_1^{2013} + z_2^{2013}$ — 1+1

2 - بين أن : $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) \in i\mathbb{R}$ ، $\forall z \neq i$ — 1

3 - نضع $z = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ أكتب $f(z)$ على الشكل المثلثي — 1

4 - حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $\arg f(z) = 0 [2\pi]$ — 1

5 - نعتبر المعادلة $(1+i)z^3 + 3z^2 - 3iz - 1 = 0$ (E')

أ - بين أن : $(f(z))^3 = 1 \Leftrightarrow (E')$ — 1

ب - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E') وأكتب حلولها على الشكل المثلثي — 1