

التعريف 1

نضع $f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$ حيث $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

1- أ- حدد b من \mathbb{R} بحيث $f(ib) = -ib$

ب- استنتج حلول المعادلة $(E): f(z) = z$ في \mathbb{C}

2- نرهن z_0, z_1, z_2 لحلول (E) حيث $\text{Re } z_0 = 0$ و $\text{Re } z_1 > \text{Re } z_2$

أ- تحقق أن $z_1 = -1 + e^{i\frac{4\pi}{6}}$ و $z_2 = -1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

ب- استنتج الشكل المتكافئ لـ z_1 و z_2

3- نضع $z = e^{i\alpha}$ حيث $0 < \alpha < \pi$

أ- بين أن $\overline{f(z)} = z f(z)$

ب- حدد α بحيث $f(z) + \overline{f(z)} = 0$

ج- أكتب $f(z)$ على شكل $r e^{i\varphi}$ حيث $r > 0$ و $\varphi \in \mathbb{R}$

4- حدد z بحيث $|z| = 1$ و $\text{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}$

التعريف 2

نضع $A = \{a + b e^{i\frac{2\pi}{3}} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$

1- بين أن $e^{i\frac{4\pi}{3}} \in A$ و استنتج أن "x" وارد في A

2- بين أن $(A, +, \cdot)$ حلقة تبادلية وواحدية

3- أ- أثبت أن z يقبل مقلوبا في A $\Leftrightarrow |z| = 1$

ب- استنتج جميع عناصر A التي تقبل مقلوبا

التعريف 3

D_2 مجموعة الدوال القابلة للإشتقاق مرتين على $]\sigma, \omega[$

والتي تحقق

$$x f''(x) - (x+1) f'(x) + f(x) = 0$$

1- بين أن $(\cdot, +)$ فضاء متجهي حقيقي

2- بين أنه، كذا كان $f \in D_2$ فلنكون $f'''(x) - f''(x) = 0$

3- أ- استنتج أنه، يوجد a, b و c من \mathbb{R} بحيث

$$f(x) = a e^x + b x + c$$

ب- بين أن $b = c$

ج- استنتج أن $\dim D_2 = 2$