القسم : الثانية من سلك الباكالوريا — فرض محروس رقم 1

الشعبة : العلوم الرياضية — مدة الإنجاز: ساعتان

التنقيط

مسألة : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = x\arctan\left(\sqrt{-x-2}\right) & ; x \le -2 \\ f(x) = \left(\dfrac{x^2+2x}{x^2+1}\right)\sqrt{x+2} & ; x > -2 \end{cases}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة في 2-.

1-1- بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=-2$. — 0,5

1-2- بين أن الدالة f غير قابلة للإشتقاق على اليسار في $x_0=-2$. — 1

1-3- أول النتائج المحصل عليها سابقا مبيانيا . — 0,5

2) دراسة منحى تغيرات الدالة .

2-1- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]-\infty,-2[$. — 1

2-2- بين أن : $\left(\forall x \in]-2,+\infty[: f'(x) = \dfrac{g(x)\sqrt{x+2}}{2(x^2+1)^2}\right)$ حيث : $g(x) = x^3-4x^2+5x+4$. — 1

2-3- ضع جدول تغيرات الدالة g على المجال $]-2,+\infty[$. — 1

2-4- بين أن المعادلة : $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-2,+\infty[$ وأن : $-0,6<\alpha<-0,5$. — 1

2-5- أدرس منحى تغيرات الدالة f على المجال $]-2,+\infty[$. — 1

2-6- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. — 1

2-7- ضع جدول تغيرات الدالة f على IR . — 1

3) دراسة الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة .

3-1- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ ، ثم أول النتيجة مبيانيا . — 1

3-2- بين أن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم الذي معادلته: $y=\dfrac{\pi}{2}x$ بجوار $(-\infty)$. — 1

4) رسم منحنى الدالة .

4-1- بين أن المعادلة : $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]3,4[$. — 1

4-2- بين أن : $\left(\exists c \in]-2,\alpha[\right) / f''(c)=0$. — 1

4-3- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0 . — 1

4-4- أنشئ المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ (نأخذ: $f(\alpha)\approx-0,75$ و $\beta\approx3,5$). — 1

تمرين

1) لتكن الدالة f المعرفة ب: $(\forall x \in IR^+) : f(x) = \pi - 2\arctan(x^2)$. — 1

بين أن : $(\exists! \alpha \in]1;2[) : f(\alpha)=\alpha$.

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ بحيث : — 1

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ;(\forall n \in IN) \end{cases}$$

بين أن: $(\forall n \in IN) : 0 \le u_n \le \pi$.

3) بين بالترجع أن: $(\forall n \in IN) : v_n < \alpha < w_n$ ، وأن : $(v_n)_{n\in IN}$ تزايدية و $(w_n)_{n\in IN}$ تناقصية. — 1,5

4) بيبن أنه يوجد a من $]0;1[$ بحيث : $(\forall x \in [0;\pi]) : |f'(x)| \le a$. — 1,5

بين أن : $(\forall n \in IN) : 0 < w_{n+1} - v_{n+1} \le a^2(w_n - v_n)$ و استنتج أن : $(v_n)_{n\in IN}$ و $(w_n)_{n\in IN}$ متحاديتان محددا نهايتهما المشتركة.