فرض محروس

ثانوية أنيس

2SM
2 heure

التمرين الأول : 4pt

E مجموعة الحدوديات درجتها أصغر أو تساوي 2 والتي تحقق $P(0)=0$

1 - بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي 2

2 - حدد أساسا لـ E واستنتج $\dim E$ 2

التمرين الثاني 16pt

1 - ليكن α عدد عقدي حل للمعادلة: $z^2+z+1=0$

تحقق أن: $\alpha\times\bar{\alpha}=1$ و $\alpha+\bar{\alpha}=-1$

2 - نعتبر المجموعة

$$\mathbb{Z}[\alpha]=\{a+b\alpha \,/\, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$$

أ - بين أن: $(\mathbb{Z}[\alpha],+)$ زمرة تبادلية

ب - بين أن : $\mathbb{Z}[\alpha]$ جزء مستقر في $(\mathbb{C},\times)$

ج - بين أن : $(\mathbb{Z}[\alpha],+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

د - بين أن : $\mathbb{Z}[\alpha]=\mathbb{Z}[\bar{\alpha}]$

3 - نعتبر التطبيق f المعرف بمايلي :

$$f:\ \mathbb{Z}[\alpha]\longrightarrow\mathbb{Z}$$
$$a+b\alpha\longmapsto a^2+b^2-ab$$

أ - بين أن : $f(z)=|z|^2$ ، $\forall z\in\mathbb{Z}[\alpha]$

ب - استنتج أن : $f(z)=0 \Leftrightarrow z=0$

ج - بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Z}[\alpha],\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\times)$

4 - لتكن G المجموعة المكونة من عناصر $\mathbb{Z}[\alpha]$ التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(\mathbb{Z}[\alpha],+,\times)$

أ - بين أن : $f(G)=\{1\}$

ب - استنتج أن: $G=\{\alpha,-\alpha,1,-1,1+\alpha,-1-\alpha\}$

ج - بين $(\mathbb{Q}[\alpha],+)$ زمرة تبادلية

د - بين أن $(\mathbb{Q}[\alpha]^*,\times)$ زمرة تبادلية

ه - استنتج أن $(\mathbb{Q}[\alpha],+,\times)$ جسم تبادلي

Bonne chance