2ع د / Le : 06-03-2010 فرض محروس رقم 1 الأسدس الثاني

التمرين الأول: المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

(A) ليكن z من $\mathbb{C}-\{i\}$ ونضع: $z' = z\dfrac{z+i}{\bar{z}-i}$. ولتكن النقط A و M و N و M' صور الأعداد العقدية على التوالي: $-i$ و z و $\bar{z}$ و z'.

1) أ) حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق f الذي يربط النقطة M بالنقطة M'.

ب) بين أن $|z'|=|z|$ ثم استنتج صورة الدائرة $\mathcal{C}(O,1)$ بالتطبيق f

2) أ) تحقق أن: $(z'-\bar{z})(\bar{z}-i)=(z+\bar{z})(z-\bar{z}+i)$ ثم استنتج أن: $\dfrac{z'-\bar{z}}{z+i} \in i\mathbb{R}$

ب) استنتج أن المستقيمين (AM) و (NM') متعامدان ثم انشئ M' إذا كانت M نقطة معلومة من $\mathcal{C}(O,1)$ مع $z \in \mathbb{C}-\{1,\pm i\}$.

3) بين أنه إذا كان $|z|=1$ فإن: $z'=iz^2$ ثم حدد معيار z' وعمدة z' بدلالة عمدة z.

4) ليكن $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$. ونعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: (E) : $(z')^n=1$.

أ) بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $|z|=1$، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

(B) نعتبر التطبيق g المعرف على $\mathbb{C}-\{i\}$ ب: $g(z)=-i+\dfrac{2}{\bar{z}-i}$

1) اكتب $g(\sqrt{3})$ على الشكل المثلثي.

2) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $g(z)=z$.

3) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $g(z)\in\mathbb{R}$.

4) أ) تحقق أن: $g(z)=\dfrac{-i\bar{z}+1}{\bar{z}-i}$: $\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}$

ب) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $|g(z)|=1$.

ج) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $\arg(g(z))\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

التمرين الثاني

1- بين 2003 عدد أوليا

2- حدد u و v من $\mathbb{Z}$ بحيث: $123u+2003v=1$

3- إستنتج عدد نسبي k_0 بحيث: $123k_0\equiv 1\ [2003]$

4- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$: $123x\equiv 456\ [2003] \Leftrightarrow x\equiv 456k_0$

5- بين أنه يوجد عدد طبيعي وحيد x بحيث $1\le x\le 2002$ و $123x\equiv 456\ [2003]$

6- ليكن a من $\mathbb{N}$ بحيث $1\le a\le 2002$

أ- حدد $a\wedge 2003$

ب- إستنتج أنه يوجد m بحيث: $am\equiv 1\ [2003]$

ج- بين أنه يوجد x وحيد بحيث $0\le x\le 2002$ و $ax\equiv b\ [2003]$