التمرين الثالث: 12ن

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & , \quad x\geq 2 \\ f(x)=\frac{2}{\pi}Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & , \quad x<2 \end{cases}$$

A. 1. حدد $\mathscr{D}_f$ ، حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=2$.

3. أحسب نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$ ؛ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في النقطة $x_0=2$.

5. أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]-\infty,2[$ ولكل x من المجال $]2,+\infty[$ ؛ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

6. ليكن g قصور الدالة f على المجال $]-\infty,2[$. بين أن g تقابل من المجال $]-\infty,2[$ نحو مجال يجب تحديده. حدد g^{-1} ثم مثل منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B. 1. أ. بين أنه يوجد عدد حقيقي k من $]0,1[$ بحيث : $\forall x\in]0,1[\ :\ 0<g'(x)<k$ ؛ ثم استنتج رتابة الدالة h على المجال $]0,1[$ حيث : $h(x)=g(x)-x$.

ب. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1[$ بحيث : $g(\alpha)=\alpha$.

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{4} \\ u_{n+1}=g(u_n) & , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 0<u_n<1$.

ب. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ |u_{n+1}-\alpha|<k|u_n-\alpha|$.

جـ. استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

التمرين الثاني: 8ن

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=Arc\tan(x)+2x-1$$

1. اثبت أن : $\forall x\in\mathbb{R}:\ f'(x)>2$.

2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

3. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α وأن $\alpha\in]0,1[$.

4. بين أن : $\forall x>\alpha\ :\ f(x)>x$.

II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=b & , \quad (b>\alpha) \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) & , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n>\alpha$.

2. أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة .

III-

1. بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ u_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$$

2. استنتج : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ ، معللا جوابك.

04-11-2009

ثانوية أنيس — فرض محروس رقم 1 — الثانية علوم رياضية "ب"

ساعتان

التمرين الثالث : 12 ن

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & , \quad x\geq 2 \\ f(x)=\dfrac{2}{\pi}Arc\tan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & , \quad x<2 \end{cases}$$

A. 1. حدد $\mathcal{D}_f$ ، حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=2$.

3. أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$ ؛ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في النقطة $x_0=2$.

5. أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]-\infty,2[$ ولكل x من المجال $]2,+\infty[$ ؛ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

6. ليكن g قصور الدالة f على المجال $]-\infty,2[$. بين أن g تقابل من المجال $]-\infty,2[$ نحو مجال يجب تحديده. حدد g^{-1} ثم مثل منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B. 1. أ. بين أنه يوجد عدد حقيقي k من $]0,1[$ بحيث : $\forall x\in]0,1[: 0<g'(x)<k$ ؛ ثم استنتج رتابة الدالة h على المجال $]0,1[$ حيث : $h(x)=g(x)-x$.

ب. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1[$ بحيث : $g(\alpha)=\alpha$.

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{4} \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ 0<u_n<1$.

ب. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ |u_{n+1}-\alpha|<k\,|u_n-\alpha|$.

جـ. استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

التمرين الثاني : 8 ن

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=Arc\tan(x)+2x-1$$

1. أثبت أن : $\forall x\in\mathbb{R}: \ f'(x)>2$.

2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

3. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α وأن $\alpha\in]0,1[$.

4. بين أن : $\forall x>\alpha \ : \ f(x)>x$.

II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=b & , \quad (b>\alpha) \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) & , \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \ : \ u_n>\alpha$.

2. أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة .

-III

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: \ u_{n+1}-\alpha<\dfrac{1}{2}(u_n-\alpha)$

2. استنتج : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ ، معللا جوابك.