المتميز

رقم 21

بطاقات منهجية

في

الرياضيات

الأعداد المركبة

وفق البرنامج الرسمي

3 AS

Mathématique

BAC

دار الكتب العلمية
للطباعة والنشر والتوزيع

الأعداد المركبة

1 - تعريف : نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z = x + iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$.

ملاحظات :

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بـ : C .
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z و نرمز له بالرمز $Re(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z و نرمز له بالرمز $Im(z)$.
- إذا كان $y = 0$ نقول أن العدد المركب z حقيقي .
- إذا كان $x = 0$ نقول أن العدد المركب z تخيلي صرف (بحت).
- يكون العدد المركب z معدوما جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما أي $z = 0$ يعني أن $x = 0$ و $y = 0$.
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z

2 - تساوي عددين مركبين :

يكون عددان مركبان z و z' متساويان إذا و فقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي .

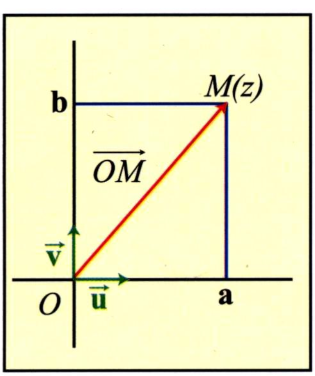
لدينا : $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

$z = z'$ يعني أن : $x = x'$ و $y = y'$.

التمثيل الهندسي لعدد مركب :

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

كل عدد مركب $z = x + iy$ مع x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ يرفق بالنقطة M إحداثياتها $(x\,;\,y)$، النقطة M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة العدد المركب z .



- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z = x + iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هي لاحقة نقطة من محور التراتيب.
- المستوي يسمى المستوي المركب.

3 - العمليات في مجموعة الأعداد المركبة :

- **مجموع و جداء عددين مركبين :**

z عدد مركب حيث : $z = x + iy$ مع x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ و z' عدد مركب حيث : $z' = x' + iy'$ مع x' و y' عددان حقيقيان و $i^2 = -1$.

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z + z' = x + x' + (y + y')\,i$

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z \times z' = xx' - yy' + (xy' + x'y)\,i$

أمثلـة : $(3+2i)+(-5-3i)=(3-5)+(2-3)i=-2-i$

$(3+2i)\times(-5-3i)=-15-9i-10i+6=-9-19i$

التفسير الهندسي لمجموع عددين مركبين :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعـامد و متجـانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

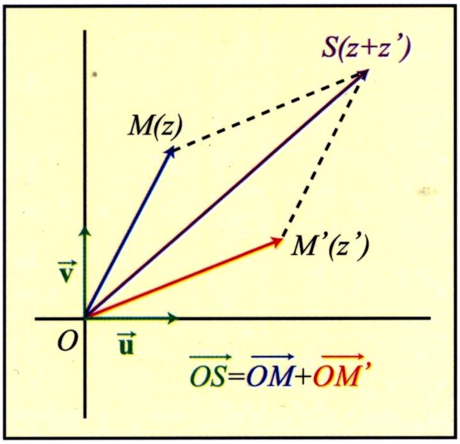
z عدد مركب حيث : $z = x + iy$

و z' عدد مركب. حيث : $z' = x' + iy'$

مجموع العددين z و z' هو لاحقة النقطة S حيث :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

$\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعـاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$.



لاحقة شعاع ، لاحقة مرجح :

خاصية : المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

A و B نقطتان من المستوي، Z_A لاحقة A و Z_B لاحقة B.

$Z_A\,Z_B$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$.

α و β عددان حقيقيان حيث $\alpha + \beta \neq 0$ ، G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

$\dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$ هي لاحقة النقطة G.

ملاحظة : تستعمل نفس الطريقة في حساب لاحقة مرجح عدة نقط.

4 - مقلوب عدد مركب :

مبرهنـة : كل عـدد مركب غير معدوم z له مقلوب في C يرمز له $\dfrac{1}{z}$.

مرافق عدد مركب :

تعريف :

z عدد مركب حيث $z = x + iy$ مع x و y عددان حقيقيـان و $i^2 = -1$.

العدد المركب $x - iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z .

أمثلـة : $\overline{5+4i}=5-4i$ ، $\overline{-2-3i}=-2+3i$ ، $\overline{-4i}=4i$

خـواص مرافق عـدد مركب :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\bar{z}=2i\,lm(z)$
- $z+\bar{z}=(\mathrm{Re}(z))^2+(lm(z))^2$

المرافق و العمليات :

z عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$.

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. $(n \in N^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ مع $z \neq 0$.
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ مع $z' \neq 0$.

طويلة و عمدة عدد مركب :

1 - طويلة عدد مركب :

تعريف : عدد مركب حيث : $z = x + iy$ (x و y عددان حقيقيان).

نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

أمثلة :

- $|2-5i| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$
- $|-8-6i| = \sqrt{64+36} = 10$
- $|-7i| = \sqrt{49} = 7$

ملاحظات : إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z.

- $z = 0$ يعني $|z| = 0$
- $|z|^2 = x^2 + y^2$

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$.

z عدد مركب حيث $z = x + iy$ إذا كانت M صورة z فإن : $OM = |z|$

خواص طويلة عدد مركب :

خواص : من أجل كل عددين مركبين z و z' .

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.(المتباينة الثلاثية).

ملاحظة : A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب : $AB = |z_B - z_A|$.

2 - عمدة عدد مركب غير معدوم :

تعريف : z عدد مركب غير معدوم حيث : $z = x + iy$ (x و y عددان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ لتكن M صورة z .

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg(z)$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$.

ملاحظات :

كل عدد مركب غير معدوم z له عدد غير منته من العمد.

إذا كان θ عمدة لـ z فإن $\theta + 2k\pi\,(k \in Z)$ عمدة لـ z .

و نكتب $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$.

A و B نقطتان لاحقتاهما Z_A و Z_B على الترتيب.

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = arg\,(Z_B) - arg\,(Z_A)$ أي $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$

$$arg\,(Z_B - Z_A) = (\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$$

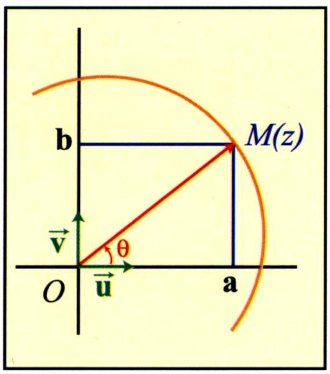
الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم :

1 - تعريف و خواص :

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ تعلم نقطة M بإحداثييها الديكارتية $(x;y)$ أو بإحداثييها القطبية $(r;\theta)$. حيث : $OM = r$ و $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = \theta\,[\text{lr}]$

و لدينا $x = r\cos(\theta)$

و $y = r\sin(\theta)$.



تعريف :

z عدد مركب غير معدوم ، العدد Z يكتب على الشكل :

$$z = (cos(\theta) + i\,sin(\theta))$$

حيث : $r = |z|$ و $\theta = \arg(z)$ ،

هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لـ : z.

ملاحظة : إذا كان $z = x + iy$

$\cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$ و $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r}$.

خاصية -1- : يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطرويلة و عمدتان متوفقتان بترديد 2π .

خاصية -2- : إذا كان $z = \lambda(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ و كان $\lambda > 0$ فإن $|z| = \lambda$ و $\arg(z) = \theta$.

2 - خواص عمدة عدد مركب غير معدوم :

خواص : z و z' عددان مركبان غير معدومين.

- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$ * $n \in N^*$.

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم :

1 - الشكل الأسي لعدد مركب طويلته 1 :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$. z_0 عدد مركب طويلته 1 و M_0 صورته، لتكن θ عمدة لـ z_0 .

$z_0 = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$، لتكن f الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي θ العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة ، أي $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

θ و θ' عددان حقيقيان لنحسب $f(\theta+\theta')$ و $f(\theta).f(\theta')$.

أي : $f(\theta+\theta') = (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta))$

$$f(\theta).f(\theta') = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\ (\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$$

أي : $f(\theta).f(\theta') = (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + i(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta))$

و نستنتج أن : $f(\theta+\theta') = f(\theta).f(\theta')$

بما أن الدالة الأسية تحول مجموع عددين إلى جداء صورتيهما تم التفكير في الترميز الأسي للعدد z_0 .

نضع : $z_0 = e^{i\theta}$.

تعريف : العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$. حيث $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

هذا الرمز يسمى ترميز أولر.

2 - الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم :

تعريف : العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z = re^{i\theta}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z .

3 - قواعد الحساب على الشكل الأسي :

خواص : θ و θ' عددان حقيقيان.

- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

4 - دستور موافر :

خواص : عدد مركب طويلته 1 و θ عمدة له من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

المعادلات من الدرجة الثانية

1 - تساوي عددين مركبين :

مبرهنة : يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الطويلة ، نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$z = z'$ معناه $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ lm(z) = lm(z') \end{cases}$

2 - الجذران التربيعيان لعدد مركب :

تعريف : w عدد مركب يسمى حلا المعادلة $z^2 = w$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعي للعدد w.

أمثلة : – الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.

– الجذران التربيعيان للعدد 9- هما $3i$ و $-3i$.

ملاحظة : كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربيعيين متناظرين.

3 - المعادلات من الدرجة الثانية :

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$.......(1) حيث c,b,a أعداد مركبة و $a\neq 0$

بوضع $\Delta = b^2-4ac$ نحصل على $az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

حل المعادلة (1) يؤول إلى حل المعادلة $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.

حل المعادلة (1) يؤول إلى تعيين الجذرين التربيعيين للعدد Δ .

مبرهنة : لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$ حيث c,b,a أعداد مركبة و $a\neq 0$ ، $\Delta = b^2-4ac$ مميزها.

- إذا كان $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z = -\frac{b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta \neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين : $z' = \frac{-b-w}{2a}$ و $z'' = \frac{-b+w}{2a}$

حيث w جذر تربيعي لـ Δ .

ملاحظة : إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2+bz+c = a(z-z')(z-z'')$$

مثال : حلا المعادلة $z^2-z+1=0$ هما : $z' = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z'' = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

التحويلات النقطية

تذكير حول التحويلات النقطية المألوفة :

1 - الانسحاب :

تعريف : الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

خواص : الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو الانسحاب الذي شعاعه $(-\vec{u})$ الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل أية نقطة صامدة و الانسحاب الذي شعاعه $\vec{0}$ هو التحويل الثابت.

الخاصة المميزة : صورة ثنائية (A , B) هي ثنائية (A' , B') تحقق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

الانسحاب تقايس.

2 - التحاكي :

تعريف : Ω نقطة ثابتة و k عدد حقيقي غير معدوم التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. $k \in R^* - \{1\}$

خـواص :

إذا اختلفت M عن Ω فإن M′ تختلف عن Ω و النقط M ، Ω و M′ على استقامة واحدة.

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ يعني $\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'}$ و نستنتج أن : التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هو تحويل نقطي تقابلي و تحويله العكسي هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته $\frac{1}{k}$.

الخاصة المميزة : صورة ثنائية (A , B) بالتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هي الثنائية (A′ , B′) التي تحقق : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

نلاحظ أنه إذا كان $|k| \neq 1$ فإن $A'B' \neq AB$ و بالتالي فإن التحاكي ليس تقايسا.

3 - الدوران :

تعريف : w نقطة من المستوي الموجه و θ عدد حقيقي.

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هو التحويل النقطي الذي يرفق النقطة Ω بنفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن Ω النقطة M′ حيث : $\Omega M' = \Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$

خـواص :

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ غير معدومة له نقطة صامدة و حيدة هي المركز Ω.

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ تحويل تقابلي و تحويله العكسي هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $(-\theta)$.

الخاصة المميزة : صورة كل ثنائية (A , B) بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هي ثنائية (A′ , B′) تحقق ما يلي : $A'B' = AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \theta$ تبين هذه النتيجة أن الدوران تقايس.

الأعـداد المركبة و التحويلات النقطيـة

في كل ما يأتي المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$ مع $a \in R^*$ أو $a \in C$ و $|a| = 1$ ونكتب $f(M) = M'$ يعني $z' = az + b$.

1 - الحالة الأولى $a = 1$:

$f(M) = M'$ يعني $z' = z + b$ ، و بالتالي $z' - z = b$ و بما أن $z' - z$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ فإن $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{U}$ حيث $\overrightarrow{U}$ صورة العدد المركب b و بالتالي التحويل f هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{U}$ ذو اللاحقة b.

خاصيـة : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = z + b$ (b عدد مركب) هو انسحاب شعاعه $\overrightarrow{U}$ صورة b .

2 - الحالة الثانية $a \in R^* - \{1\}$.

خاصيـة : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$ مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو التحاكي الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ و نسبته a.

3 - الحالة الثالثة $a \in C$ و $|a| = 1$.

خاصيـة : التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z' = az + b$ مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو الدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ، و زاويته $\arg(a)$.