سلسلة ديماس

عبد السلام حقاني
محمد غزايلي

3

الرياضيات

الجبر والهندسة والاحتمالات

تمارين وحلول

السنة الثالثة الثانوية
علوم رياضية أ و ب

- ملخصات للدروس
- مسائل للبحث والتقوية

دار الثقافة

الفهرس

I الحسابيات 7
II الاعداد العقدية 137
III المخروطيات 226
IV الاحتمالات 268
V البنيات الجبرية 317
* قوانين التركيب الداخلية 318
* الزمرة 345
* الحلقة 379
* الجسم 379
* الفضاء المتجهي 422
* النظمات الخطية 444

الحسابيات

I - القسمة الإقليدية في $\mathbb{Z}$:

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2 \quad \exists!\,(q,r)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N} \mid a=bq+r \quad \text{و} \quad 0\le r<b$$

* عندما نحدد الزوج (q,r) نقول أننا أجرينا القسمة الإقليدية لـ a على b.
* a يسمى المقسوم و b المقسوم عليه و q الخارج و r الباقي.

قابلية القسمة في $\mathbb{Z}$: ليكن a و b في $\mathbb{Z}$.

$$a/b \ (a \text{ يقسم } b) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \mid b=ka$$

الموافقة بترديد :

$$a\equiv b\ [n] \Leftrightarrow a-b=kn\ (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow n\mid a-b$$

$$a\equiv b\ [n] \Leftrightarrow a+c\equiv b+c\ [n] \quad \text{و} \quad a\equiv b\,[n] \Rightarrow ac\equiv bc\ [n]$$

$$\begin{cases} a\equiv b\ [n] \\ c\equiv d\ [n]\end{cases} \Rightarrow a+c\equiv b+d\ [n] \quad \text{و} \quad \begin{cases} a\equiv b\ [n] \\ c\equiv d\ [n]\end{cases} \Rightarrow ac\equiv bd\ [n]$$

$$\forall a\in\mathbb{Z} : a\mid a$$

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2\ \forall n\in\mathbb{N}^* : a^n\mid b \Rightarrow a\mid b$$

$$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}^2 : a\mid b \text{ و } b\mid a \Rightarrow |a|=|b|$$

$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{Z}^3 : d\mid a \text{ و } d\mid b \Rightarrow \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2 : d\mid \alpha a+\beta b$$

II - القاسم المشترك الأكبر :

ليكن a و b و d في $\mathbb{Z}$.

* d قاسم مشترك لـ a و b يعني أن : $d\mid a$ و $d\mid b$.
* أكبر قاسم مشترك موجب للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر لـ a و b ويرمز له بـ : $a\wedge b$ (أو $\Delta(a,b)$ أو $pgdc(a,b)$)

خاصيات :

* $d=a\wedge b \Rightarrow d\mid a$ و $d\mid b$
* $\begin{cases} d'\mid a \\ d'\mid b\end{cases} \Rightarrow d'\mid a\wedge b$

* a و b أوليان فيما بينهما $\Leftrightarrow a\wedge b=1$
* $d=a\wedge b \Leftrightarrow \exists (a',b')\in\mathbb{Z}^2 : a'\wedge b'=1$ و $a=da'$ و $b=db'$
* $d=a\wedge b \Rightarrow \exists (u,v)\in\mathbb{Z}^2 : d=ua+vb$

مبرهنة (Bezout):

$$a\wedge b=1 \Leftrightarrow \exists (u,v)\in\mathbb{Z}^2 : ua+vb=1$$

III - المضاعف المشترك الأكبر :

ليكن a و b و m من $\mathbb{Z}$.

* m مضاعف مشترك لـ a و b $\Leftrightarrow$ $a|m$ و $b|m$.
* أصغر مضاعف مشترك موجب للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر لـ a و b ويرمز له بـ : $a \vee b$ (أو $ppcm(a;b)$)

خاصيات :

$m = a \vee b \Rightarrow a|m$ و $b|m$

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{cases} a|c \\ b|c \end{cases} \Rightarrow (a \vee b) | c$

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 : (a \vee b)(a \wedge b) = |ab|$

$\begin{cases} a|c \\ b|c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab|c$

IV - الأعداد الأولية :

* ليكن a و d في $\mathbb{Z}$. نقول إن d قاسم فعلي لـ a إذا كان d يقسم a و يخالفاً لكل من الأعداد : a ، $-a$ ، 1 ، -1 .
* نقول أن a أولي إذا كان مخالف لـ 1 و -1 و ليس له قواسم فعلية .

ملاحظة : * الأعداد : 0 ، 1 ، -1 ليست أولية .
* مجموعة الأعداد الأولية لا منتهية .

خاصيات : ليكن p عدد أولي .

$p|a^n \Rightarrow p|a$; $p|ab \Rightarrow p|a$ أو $p|b$

$p|a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \Rightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\} : p|a_i$

إذا كان : $p|a$ فإن : $p \wedge a = p$ ؛ إذا كان : $p \nmid a$ فإن : $p \wedge a = 1$

مبرهنة (Gauss) :

$\forall (a,b,d) \in \mathbb{Z}^3 : \begin{cases} d|ab \\ d \wedge a = 1 \end{cases} \Rightarrow d|b$

خاصيات : ليكن a و b و c في $\mathbb{Z}$.

$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \wedge bc = 1$

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \forall (n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a^n \wedge b^m = 1$

$a \wedge b = b \wedge r \Leftarrow (a = bq + r$ و $0 \leq r < b)$

خوارزمية إقليدس :

ليكن a و b في $\mathbb{N}$ بحيث : $a > b$.

نجز القسمة لـ a على b : $a=bq_0+r_0$ و $0\leq r_0<b$

* إذا كان: $r_0=0$ فإن: $b|a$ وبالتالي: $a\wedge b=b$

* إذا كان: $0<r_0<b$ ، نجري القسمة الاقليدية لـ b على r_0.

$b=r_0q_1+r_1$ و $0\leq r_1<r_0<b$

* إذا كان: $r_1=0$ فإن: $r_0|b$ وبالتالي: $a\wedge b=b\wedge r_0=r_0$

* إذا كان: $r_1\neq 0$ نجري القسمة لـ r_0 على r_1.

$r_0=r_1q_2+r_2$ و $0\leq r_2<r_1$

بعد إعادة نفس الطريقة عدة مرات سوف نحصل على باقٍ منعدم والقاسم المشترك لـ a و b يكون آخر باقي غير منعدم.

V - تفكيك عدد صحيح نسبي غير منعدم إلى جداء عوامل أولية:

كل عدد صحيح نسبي n غير منعدم مخالف لـ 1 و -1 يمكن أن يكتب بكيفية وحيدة على الشكل:

$$n=\varepsilon\, p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\cdots\times p_n^{\alpha_n}$$

حيث: p_1 ، p_2 ، .... ، p_n أعداد أولية موجبة ومختلفة مثنى مثنى.

α_1 و α_2 ، .... و α_n أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

$\varepsilon=1$ إذا كان $n>0$ و $\varepsilon=-1$ إذا كان $n<0$.

VI المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $(n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\})$

ليكن a و b في $\mathbb{Z}$: $a-b=kn\ (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow a\equiv b\,[n]$

* العلاقة " $\equiv$ " علاقة تكافؤ.

* صنف تكافؤ x ($x\in\mathbb{Z}$) : $\bar{x}=\{y\in\mathbb{Z}\ |\ y\equiv x\,[n]\}$

$\bar{x}=\{x+kn\ |\ k\in\mathbb{Z}\}$

* مجموعة أصناف التكافؤ بالنسبة للعلاقة " $\equiv$ " وتكتب: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\bar{0}\,;\bar{1}\,;\dots\,;\overline{(n-1)}\}$$

* الجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\bar{x}\,\bar{+}\,\bar{y}=\overline{x+y}$ $\quad\forall(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

* الضرب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\bar{x}\,\bar{\times}\,\bar{y}=\overline{xy}$

* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,;\bar{+})$ زمرة تبادلية. *

* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,;\bar{+},\bar{\times})$ حلقة تبادلية واحدية.

* n أولي $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,;\bar{+},\bar{\times})$ جسم

* $\bar{a}$ قابل للقلب في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow$ $a\wedge n=1$

VII - نظمات العد :

ليكن x من $\mathbb{N}$ بحيث : $x \geq 2$.

لكل عدد b من $\mathbb{N}$ يمكن أن يكتب على شكل :

$$b = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث : $a_n \neq 0$ و $a_i \in [\![0;n-1]\!]$: $\forall i \in [\![0,n]\!]$

ونكتب : $b = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}^{(x)}$

ونقول أن $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}^{(x)}$ هو التمثيل المختصر

للعدد b في نظمة العد ذات الأساس x .

تحديد : $a \wedge b$ و $a \vee b$:

إذا كان : $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ و $b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$ (p_i أعداد أولية مختلفة مثنى مثنى $\beta_i ; \alpha_i \in \mathbb{N}$ ، $1 \leq i \leq n$)

فإن : $a \wedge b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\inf(\alpha_i, \beta_i)}$ و $a \vee b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sup(\alpha_i, \beta_i)}$

الحسابيات

1

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $a \geq b$

وليكن r باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

بين أن : $a > 2r$.

<u>الجواب</u> : نعلم أنه : $\exists! q \in \mathbb{N} \quad / \quad a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

ولدينا : $a \geq b$ ، ومنه : $q \geq 1$ إذن : $bq \geq b$

ومنه : $bq + r \geq b + r$ وبما أن : $r < b$ فإن : $b + r > 2r$

وبالتالي : $a > 2r$.

2

لتكن a و b و c أعداد في $\mathbb{Z}$ بحيث :

q_1 هو خارج القسمة الإقليدية لـ a على bc .

q_2 هو خارج القسمة الإقليدية لـ a على b.

q_3 هو خارج القسمة الإقليدية لـ q_2 على c .

بين أن $q_1 = q_3$.

<u>الجواب</u> : لدينا حسب المعطيات : توجد r_1 و r_2 و r_3 من $\mathbb{N}$ بحيث :

(1) $\quad a = bcq_1 + r_1 \quad / \quad 0 \leq r_1 < bc$

(2) $\quad a = bq_2 + r_2 \quad / \quad 0 \leq r_2 < b$

(3) $\quad q_2 = cq_3 + r_3 \quad / \quad 0 \leq r_3 < c$

من (2) و (3) نستنتج أن : $a = bcq_3 + br_3 + r_2$

لكي نبين أن $q_1 = q_3$ يكفي أن نبين أن : $0 \leq br_3 + r_2 < bc$

(حسب وحدانية القسمة الإقليدية)

لدينا : $0 \leq r_3 < c \Rightarrow 0 \leq r_3 \leq c - 1$

إذن : $0 \leq br_3 \leq bc - b$

وبما أن : $0 \leq r_2 < b$ فإن : $0 \leq br_3 + r_2 < bc$ ومنه : $q_3 = q_1$

3

ليكن n من $\mathbb{Z}$ و a و b من $\mathbb{N}$.

q خارج القسمة الإقليدية لـ n على a.

q' خارج القسمة الإقليدية لـ q على b.

بين أن q' هو خارج القسمة الإقليدية لـ n على ab.

الجواب: ليكن r باقي القسمة الإقليدية لـ n على a و r' باقي القسمة الإقليدية لـ q على b لدينا:

$$\begin{cases} n = aq + r \\ 0 \leq r \leq a-1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} q = bq' + r' \\ 0 \leq r' \leq b-1 \end{cases}$$

ومنه نستنتج أن: $n = a(bq'+r')+r = abq' + ar'+r$

وبما أن: $0 \leq r' \leq b-1$ و $0 \leq r \leq a-1$ فإن: $ar'+r \leq ab-1$

ومنه: $n = abq' + ar' + r$ و $0 \leq ar'+r \leq ab-1$

أي: q' هو خارج القسمة الإقليدية لـ n على ab.

ملاحظة هامة: ليكن q خارج القسمة الإقليدية لـ a على b، و r هو باقي هذه القسمة لدينا: $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

إذن: $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ ومنه: $E\left(\frac{a}{b}\right) = q + E\left(\frac{r}{b}\right)$

وبما أن: $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ فإن: $q = E\left(\frac{a}{b}\right)$

باستعمال التمرين السابق يكون قد برهنا على: $E\left(\frac{n}{ab}\right) = E\left(\frac{E\left(\frac{n}{a}\right)}{b}\right)$

4

ليكن a و b من $\mathbb{N}$ بحيث: $a \geq 3$ و $b \geq 2$.

ليكن q خارج القسمة الإقليدية لـ $a-1$ على b.

حدد خارج القسمة الإقليدية لـ $ab^{1999} - 1$ على b^{2000}.

الجواب: ليكن r باقي القسمة الإقليدية لـ $a-1$ على b

لدينا: $a-1 = bq + r$ و $0 \leq r \leq b-1$

ومنه: $\begin{cases} ab^{1999} - b^{1999} = b^{2000}q + rb^{1999} \\ rb^{1999} \leq b^{2000} - b^{1999} \end{cases}$

أي: $\begin{cases} ab^{1999} = b^{2000}q + (rb^{1999} + b^{1999}) \\ rb^{1999} + b^{1999} \leq b^{2000} \end{cases}$

أي :
$$\begin{cases} ab^{1999}-1 = b^{2000}q + (rb^{1999}+b^{1999}-1) \\ rb^{1999}+b^{1999}-1 < b^{2000} \end{cases}$$

ومنه خارج القسمة الإقليدية لـ $ab^{1999}-1$ على b^{2000} هو q.

5 حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 100^{1000} على 13 .

الجواب: ملاحظة: إذا كان r هو باقي القسمة الإقليدية لـ a على n

فإن : $a \equiv r \quad [n] \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

لدينا: $100 \equiv 9 \quad [13]$ إذن : $100^2 \equiv 3 \quad [13]$

و $100^3 \equiv 9\times 3 \quad [13]$ إذن : $100^3 \equiv 1 \quad [13]$

ومنه: $100^{1000} \equiv 100^{999+1} \quad [13]$

$$100^{1000} \equiv (100^3)^{333} \times 100 \quad [13]$$

$$100^{1000} \equiv 9 \quad [13]$$

وبالتالي باقي القسمة الإقليدية لـ 100^{1000} على 13 هو 9 .

6 حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد $19^{52}\times 23^{41}$ على 7.

الجواب: لدينا : $19 \equiv 5 \quad [7]$ إذن : $19^4 \equiv (25)^2 \quad [7]$

ومنه: $19^4 \equiv 2 \quad [7]$ إذن : $19^{52} \equiv 2^{13} \quad [7]$

ولدينا: $23 \equiv 2 \quad [7]$ إذن : $23^{41} \equiv 2^{41} \quad [7]$

إذن :
$$19^{52}\times 23^{41} \equiv 2^{13}\times 2^{41} \quad [7]$$
$$19^{52}\times 23^{41} \equiv 2^{54} \quad [7]$$
$$19^{52}\times 23^{41} \equiv (2^3)^{18} \quad [7]$$
$$19^{52}\times 23^{41} \equiv 8^{18} \quad [7]$$
$$19^{52}\times 23^{41} \equiv 1 \quad [7] \qquad (\text{لأن}: 8\equiv 1 \; [7])$$

وبالتالي باقي القسمة الإقليدية لـ $19^{52}\times 23^{41}$ هو 1 .

7

حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها العدد 11 يقسم العدد 2.3^n+1 .

الجواب : ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}$ ، نضع : $u_n = 2.3^n+1$

إذا كان : $n=0$ فإن : $u_0 = 2.1+1 \equiv 3 \quad [11]$

إذا كان : $n=1$ فإن : $u_1 = 2.3+1 \equiv 7 \quad [11]$

إذا كان : $n=2$ فإن : $u_2 = 2.3^2+1 \equiv 8 \quad [11]$

إذا كان : $n=3$ فإن : $u_3 = 2.3^3+1 \equiv 0 \quad [11]$

إذا كان : $n=4$ فإن : $u_4 = 2.3^4+1 \equiv 9 \quad [11]$

إذا كان : $n=5$ فإن : $u_5 = 2.3^5+1 \equiv 3 \quad [11]$

بهذه الطريقة نتشئ متتالية (u_n) دورية ، دورها $T=5$ و منه لكل k من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$2.3^{5k}+1 \equiv 3 \quad [11]$$

$$2.3^{5k+1}+1 \equiv 7 \quad [11]$$

$$2.3^{5k+2}+1 \equiv 8 \quad [11]$$

$$2.3^{5k+3}+1 \equiv 0 \quad [11]$$

$$2.3^{5k+4}+1 \equiv 9 \quad [11]$$

وبالتالي 2.3^n+1 يقبل القسمة على 11 إذا وفقط إذا كان : $n=5k+3$ $(k\in\mathbb{N})$

8

ليكن n من $\mathbb{N}$.

1) بين أن 5 يقسم العدد $2^{2n+1}+3^{2n+1}$

2) بين أن 11 يقسم العدد $3^{n+3}-4^{4n+2}$

الجواب : 1) نضع : $u_n = 2^{2n+1}+3^{2n+1}$

لدينا : $u_n = 4^n\times 2 + 9^n\times 3$

بما أن : $9 \equiv 4 \quad [5]$ فإن : $9^n \equiv 4^n \quad [5]$

ومنه : $u_n \equiv 4^n \times 2 + 4^n \times 3 \quad [5]$

أي : $u_n \equiv 5 \times 4^n \quad [5]$

ومنه : $u_n \equiv 0 \quad [5]$ (لأن 5 يقسم 5×4^n)

وبالتالي 5 يقسم العدد $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$

2) نضع : $v_n = 3^{n+3} - 4^{4n+2}$

لدينا : $v_n = 27 \times 3^n - (256)^n \times 4^2$

بما أن : $27 \equiv 5 \quad [11]$ ؛ $4^2 \equiv 5 \quad [11]$ ؛ $256 \equiv 3 \quad [11]$

فإن : $v_n \equiv 5 \times 3^n - 3^n \times 5 \quad [11]$

أي : $v_n \equiv 0 \quad [11]$

وبالتالي : 11 يقسم العدد $3^{n+3} - 4^{4n+2}$

9 ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $u_n = 4^n - 1 - 3n$

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 4u_n + 9n$

2) استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$: $9 \mid 4^n - 1 - 3n$

الجواب : 1) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$u_{n+1} = 4^{n+1} - 1 - 3(n+1)$$

$$u_{n+1} = 4 \cdot 4^n - 1 - 3n - 3$$

بما أن : $u_n = 4^n - 1 - 3n$ فإن : $4^n = u_n + 1 + 3n$

ومنه : $u_{n+1} = 4u_n + 9n$

2) لنبين أن لكل n من $\mathbb{N}$ 9 يقسم $u_n = 4^n - 1 - 3n$

البرهان بالترجع ، من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 0$ ، ومنه 9 يقسم u_0

نفترض أن 9 يقسم u_n و نبين أن 9 يقسم u_{n+1} .

لدينا : $u_n \equiv 0 \quad [9]$ ، ومنه : $4u_n \equiv 0 \quad [9]$

وبما أن : $9 \equiv 0 \quad [9]$ فإن : $4u_n + 9 \equiv 0 \quad [9]$

ومنه : $u_{n+1} \equiv 0 \quad [9]$ أي 9 يقسم u_{n+1}

وبالتالي لكل n من $\mathbb{N}$: $9 \mid 4^n - 1 - 3n$

10

ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع :

$$u_n = 3(81)^{n+1} + (16n-54).9^{n+1} - 320n^2 - 144n + 243$$

1) بين أن 8 تقسم العدد $27(9^n-1)+40n$

2) بين أن 8 تقسم العدد $9(9^n-1)-8n$

3) نضع : $\alpha_n = \frac{1}{8}\left[27(9^n-1)+40n\right]$

$$\beta_n = \frac{1}{8}\left[9(9^n-1)-8n\right]$$

أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = 64\alpha_n.\beta_n$

ب - استنتج أن : $2^{12} \mid u_n$.

الجواب : 1) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا : $9^n \equiv 1\ [8]$ $\quad$ (لأن : $9 \equiv 1\ [8]$)

ومنه : $27(9^n-1) \equiv 0\ [8]$

وبما أن : $40n \equiv 0\ [8]$ فإن : $27(9^n-1)+40n \equiv 0\ [8]$

وبالتالي : $8 \mid 27(9^n-1)+40n$

2) بالمثل نبين أن : $8 \mid 9(9^n-1)-8n$

3) أ- ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$u_n = 3.9^{2n+2} + (16n-54)9^{n+1} - 320n^2 - 144n + 243$$

$$u_n = 3.(9^{n+1})^2 + (16n-54).9^{n+1} + (40n-27)(-8n-9)$$

$$u_n = (3.9^{n+1}+40n-27)(9^{n+1}-8n-9)$$

$$u_n = (27(9^n-1)+40n)(9(9^n-1)-8n)$$

$$u_n = 8\alpha_n \times 8\beta_n$$

وبالتالي : $u_n = 64\alpha_n.\beta_n$

ب- ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا : $\alpha_n = \frac{1}{8}(27(9^n-1)+40n)$

وبما أن : $\sum_{k=0}^{n-1} 9^k = \frac{9^n-1}{9-1} = \frac{1}{8}(9^n-1)$

فإن : $\alpha_n = 27\left(\frac{9^n-1}{8}\right) + 5n = 27\sum_{k=0}^{n-1} 9^k + 5n$

وبما أن : $9 \equiv 1 \quad [8]$ فإن : $\alpha_n \equiv 27\sum_{k=0}^{n-1} 1 + 5n \quad [8]$

أي : $\alpha_n \equiv 27n + 5n \quad [8]$

ومنه : $\alpha_n \equiv 0 \quad [8]$

إذن : 8 تقسم α_n .

ولدينا : $\beta_n = \frac{1}{8}\left(9.(9^n-1) - 8n\right)$

إذن : $\beta_n = 9\sum_{k=0}^{n-1} 9^k - n \equiv 9\sum_{k=0}^{n-1} 1 - n \quad [8]$

$\beta_n \equiv 9n - n \quad [8]$

أي : $\beta_n \equiv 0 \quad [8]$

ومنه 8 تقسم β_n

لدينا :

$$\begin{cases} 8 \mid \alpha_n \\ 8 \mid \beta_n \end{cases} \Rightarrow 64 \mid \alpha_n\beta_n$$

$$\Rightarrow (64)^2 \mid 64\alpha_n\beta_n$$

ومنه : $64 \mid u_n$

وبما أن : $64 = 2^{12}$ فإن : $2^{12} \mid u_n$

11

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$

1) بين أن : $\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)} \in \mathbb{N}$

2) بين أن : $A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{2n+1-k}$

3) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 2n+1 \mid A_n$

الجواب :

1) لدينا لكل k من $\{1, \dots, n\}$: $2k \neq 2n+1$

ومنه : $k \neq 2n+1-k$

ولدينا : $2n+1-k < 2n$ و $k < 2n$

ومنه : $\dfrac{(2n)!}{k(2n+1-k)} \in \mathbb{N}$

2) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$$A_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(2n)!}{2n+1-i} \quad (k = 2n+1-i \text{ بوضع})$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{2n+1-k}$$

3) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $A_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(2n)!}{k} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(2n)!}{2n+1-k}$

ومنه :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!\,(2n+1)}{k(2n+1-k)}$$

أي :

$$A_n = (2n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)}$$

وبما أن لكل k من $\{1, \dots, n\}$: $\dfrac{(2n)!}{k(2n+1-k)} \in \mathbb{N}$

فإن : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{k(2n+1-k)} \in \mathbb{N}$

ومنه A_n يقبل القسمة على $(2n+1)$.

12 ليكن a عدد فردي من $\mathbb{Z}$.

1) بين أن : $a^2 \equiv 1 \quad [8]$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 1 = y^2$.

الجواب : 1) a عدد فردي إذن : $\exists p \in \mathbb{Z} : \quad a = 2p+1$

ومنه : $a^2 = 4p(p+1) + 1$

ملاحظة هامة : جداء n أعداد متتابعة يقبل القسمة على n .

ومنه $p(p+1)$ يقبل القسمة على 2 أي : $\exists k \in \mathbb{Z} : \; p(p+1) = 2k$

ومنه : $a^2 \equiv 8k + 1$ أي $a^2 \equiv 1 \ [8]$

ج) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x + 1 = y^2$

لدينا $8x+1$ عدد فردي ومنه y^2 عدد فردي.

ملاحظة : a فردي $\Leftrightarrow$ a^2 فردي.

ومنه : $y = 2p+1$ $\exists p \in \mathbb{Z}$:

إذن : $x = \dfrac{y^2 - 1}{8} = \dfrac{(2p+1)^2 - 1}{8}$

إذن : $x = \dfrac{p(p+1)}{2}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي :

$$S = \left\{ \left(\frac{p(p+1)}{2} ; 2p+1 \right) \mid p \in \mathbb{Z} \right\}$$

13

ليكن n من $\mathbb{N}$ حيث : $n \geqslant 3$

بين أن 2^n لا يقسم العدد $3^n + 1$.

الجواب : لدينا : $3^0 \equiv 1 \ [8]$ و $3^1 \equiv 3 \ [8]$ و $3^2 \equiv 1 \ [8]$

ومنه لكل n من $\mathbb{N}$: $3^n \equiv 1 \ [8]$ أو $3^n \equiv 3 \ [8]$

ومنه لكل n من $\mathbb{N}$: $3^n + 1 \equiv 2 \ [8]$ أو $3^n + 1 \equiv 4 \ [8]$

إذن 8 لا تقسم $3^n + 1$

ومنه لكل n من $\mathbb{N}$ حيث : $n \geqslant 3$

$2^n = 8 . 2^{n-3}$ لا يقسم العدد $3^n + 1$.

14

بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \ 2^n \mid (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$

الجواب : نضع : $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $r_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

و $u_n = r_1^n + r_2^n$

لدينا (u_n) هي متتالية ترجعية خطية من الدرجة الثانية معاملاتها

ثابتة ومنه : $\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+2}-(r_1+r_2)u_{n+1}+r_1r_2u_n=0$

أي : $\forall n\in\mathbb{N} : \quad u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n=0$

لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N} : \quad u_n\in\mathbb{Z}$

لدينا : $u_0=2$ و $u_1=3$

نفترض أن لكل $k\leq n+1$: $u_k\in\mathbb{Z}$ ونبين أن : $u_{n+2}\in\mathbb{Z}$

لدينا : $u_{n+1}\in\mathbb{Z}$ و $u_n\in\mathbb{Z}$ ومنه : $3u_{n+1}-u\in\mathbb{Z}$

أي : $u_{n+2}\in\mathbb{Z}$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} : \quad u_n\in\mathbb{Z}$

$$\exists p\in\mathbb{Z} : \quad u_n=\frac{(3+\sqrt5)^n+(3-\sqrt5)^n}{2^n}=p$$

أي : $(3+\sqrt5)^n+(3-\sqrt5)^n=2^n.p$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} : \quad 2^n \mid (3+\sqrt5)^n+(3-\sqrt5)^n$

ملاحظة : هناك طريقة نستعمل فيها الصيغة الحدانية .

15 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) : \quad xy=2x+3y$

الجواب : لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E) .

لدينا :
$$(x,y)\in S \Leftrightarrow xy=2x+3y$$
$$\Leftrightarrow x(y-2)-3(y-2)-6=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(y-2)=6$$

$(x,y)\in S \Leftrightarrow$
$\begin{cases}x-3=1\\y-2=6\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-3=6\\y-2=1\end{cases}$
$\begin{cases}x-3=-1\\y-2=-6\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-3=-6\\y-2=-1\end{cases}$
$\begin{cases}x-3=3\\y-2=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-3=2\\y-2=3\end{cases}$
$\begin{cases}x-3=-3\\y-2=-2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x-3=-2\\y-2=-3\end{cases}$

$(x,y) \in S \Leftrightarrow (x,y) \in \{(9,3);(4;8);(-3,1);(2,-4);(5;5);(6;4);(1;-1);(0,0)\}$

وبالتالي: $S = \{(-3,1);(1,-1);(2,-4);(0,0);(4,8);(5,5);(6,4),(9,3)\}$

16

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(F): \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$

الجواب: لتكن S مجموعة حلول المعادلة (F).

لدينا: $(x,y) \in S \Leftrightarrow xy = 5(x+y)$

$(x,y) \in S \Leftrightarrow (x-5)(y-5) = 25$

$(x,y) \in S \Leftrightarrow (x,y) \in \{(-20,4);(4,-20);(6,30);(10,10);(30,6)\}$

ومنه: $S = \{(-20,4);(4,-20);(6,30);(10,10);(30,6)\}$

17

نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة: $(G): \; x^3 + xy + y^3 = 209$

ولتكن S مجموعة حلول المعادلة (G).

1) ليكن (x,y) عنصراً من S.

أ- بين أن: $y \leq 5$.

ب- بين أن: $y \geq 5$.

2) استنتج المجموعة S.

الجواب: 1) أ- لدينا: $(x,y) \in S \Leftrightarrow x^3 + xy + y^3 = 209$

$\Rightarrow y^3 \leq 209 \quad$ (لأن: $x \geq 0$ و $y \geq 0$)

$\Rightarrow y \leq 5 \quad$ (لأن: $209 \leq 5^3$)

ب- لدينا: $(x,y) \in S \Leftrightarrow (y,x) \in S$

ومنه يمكننا أن نفترض أن $x \leq y$

إذن: $(x,y) \in S \Rightarrow x^3 + xy + y^3 = 209$

$(x,y) \in S \Rightarrow 209 \leq y^3 + y^2 + y^3$ ($x \leq y$: لأنّ)

$(x,y) \in S \Rightarrow 209 \leq 3y^3$ ($y \geq 1$: لأنّ)

$(x,y) \in S \Rightarrow y^3 \geqslant \frac{209}{3}$

و منه : $(x,y) \in S \Rightarrow y \geqslant 5$

2) حسب السؤال 1) لدينا : $(x,y) \in S \Rightarrow y \leq 5$ و $y \geqslant 5$

$(x,y) \in S \Rightarrow y = 5$

$(x,y) \in S \Rightarrow x^3 + 5x + 5^3 = 209$

$(x,y) \in S \Rightarrow x = 4$

وبالتالي : $S = \{(4,5); (5,4)\}$

18

1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n(2n+1)(7n+1) \equiv 0 \quad [6]$

2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : n^2(n^2-1) \equiv 0 \quad [4]$

الجواب :

1) ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $u_n = n(2n+1)(7n+1)$

نلخص البرهان في الجدول التالي :

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2n+1 \equiv$	1	3	5	1	3	5	[6]
$7n+1 \equiv$	1	2	3	4	5	0	[6]
$u_n \equiv$	0	0	0	0	0	0	[6]

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \equiv 0 \quad [6]$

2) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $v_n = n^2(n^2-1)$

ومنه : $v_n = n(n-1).n(n+1)$

وبما أن : $n(n-1)$ و $n(n+1)$ يقبلان القسمة على 2

فإن : $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 : n(n+1) = 2\alpha$ و $n(n-1) = 2\beta$

ومنه : $v_n = 4\alpha\beta$

إذن : $4 \mid v_n$.

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad v_n \equiv 0 \quad [4]$

19 حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون

لدينا : 1) $2.3^n + 3 \equiv 0 \quad [11]$

2) $5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7]$

الجواب : 1) لدينا : $3^0 \equiv 1 \quad [11]$ ؛ $3 \equiv 3 \quad [11]$

$3^2 \equiv 9 \quad [11]$ ؛ $3^3 \equiv 5 \quad [11]$

$3^4 \equiv 4 \quad [11]$ ؛ $3^5 \equiv 1 \quad [11]$

ومنه لكل k من $\mathbb{N}$ لدينا : $3^{5k} \equiv 1 \quad [11]$ ؛ $3^{5k+1} \equiv 3 \quad [11]$

$3^{5k+2} \equiv 9 \quad [11]$ ؛ $3^{5k+3} \equiv 5 \quad [11]$

$3^{5k+4} \equiv 4 \quad [11]$

لدينا : $2.3^n + 3 \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow 2.3^n \equiv -3 \quad [11]$

$2.3^n + 3 \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow 2.3^n \equiv 8 \quad [11]$

(حسب ما سبق) $2.3^n + 3 \equiv 0 \quad [11] \Leftrightarrow n = 5k + 4 \ / \ k \in \mathbb{N}$

2) لدينا : $5^0 \equiv 1 \quad [7]$ ؛ $5^1 \equiv 5 \quad [7]$

$5^2 \equiv 4 \quad [7]$ ؛ $5^3 \equiv 6 \quad [7]$

$5^4 \equiv 2 \quad [7]$ ؛ $5^5 \equiv 3 \quad [7]$

$5^6 \equiv 1 \quad [7]$

ومنه لكل k من $\mathbb{N}$ لدينا : $5^{6k} \equiv 1 \quad [7]$ ؛ $5^{6k+1} \equiv 5 \quad [7]$

$5^{6k+2} \equiv 4 \quad [7]$ ؛ $5^{6k+3} \equiv 6 \quad [7]$

$5^{6k+4} \equiv 2 \quad [7]$ ؛ $5^{6k+5} \equiv 3 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow (5^6)^n + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7]$:

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow 1 + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow 5^n \equiv -3 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow 5^n \equiv 4 \quad [7]$

$5^{6n} + 5^n + 2 \equiv 0 \quad [7] \Leftrightarrow n = 6k + 2 \ / \ k \in \mathbb{N}$

20

حدد الأعداد الصحيحة النسبية n التي تحقق :

$$(n+1) \mid n^2-3n+1$$

الجواب : لدينا :

$(n+1) \mid n^2-3n+1 \Leftrightarrow n^2-3n+1 \equiv 0 \quad [n+1]$

$\Leftrightarrow n^2-3n-4+5 \equiv 0 \quad [n+1]$

$\Leftrightarrow (n+1)(n-4)+5 \equiv 0 \quad [n+1]$

$\Leftrightarrow 5 \equiv 0 \quad [n+1]$ (لأن : $n+1 \mid (n+1)(n-4)$)

$\Leftrightarrow n+1 \mid 5$

$\Leftrightarrow n+1 \in \{-5,-1,1,5\}$

$\Leftrightarrow n \in \{-6,-2,0,4\}$

21

1) حل في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E_1)\quad \bar{4}x-\bar{3}=\bar{0}$

2) حل في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ النظمة : $(S_2)\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}$

3) حل في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E_3)\ :\ x^2-x-\bar{2}=\bar{0}$

الجواب : 1) ندرج الجدول التالي لحل المعادلة (E_1).

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{4}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{4}x-\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$

ومن خلال الجدول نستنتج أن $\bar{2}$ هو الحل الوحيد للمعادلة (E_1).

إذن : $S_1=\{\bar{2}\}$

2) لدينا : $(x,y)\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\begin{cases}\bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\bar{3}+\bar{2})x+(\bar{2}+\bar{4})y=\bar{1}+\bar{3}\\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\bar{4}\\ \bar{2}x+\bar{1}=\bar{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\bar{1}\\ y=\bar{4}\end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول النظمة (S_2) هي : $S_2=\{(\bar{1},\bar{4})\}$

3) لدينا : $x\in\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ و $x^2-x-\bar{2}=\bar{0} \Leftrightarrow x^2-\bar{1}x-\bar{2}=\bar{0}$

$x^2 - x - \bar{2} = \bar{0} \Leftrightarrow x^2 + \bar{4}x - \bar{2} = \bar{0}$ (لأن: $-\bar{1} = \bar{4}$)

$\Leftrightarrow (x+\bar{2})^2 - \bar{1} = \bar{0}$

$\Leftrightarrow (x+\bar{1})(x+\bar{3}) = \bar{0}$

$\Leftrightarrow x+\bar{1} = \bar{0}$ أو $x+\bar{3} = \bar{0}$ (لأن 5 عدد أولي)

$\Leftrightarrow x = -\bar{1} = \bar{4}$ أو $x = -\bar{3} = \bar{2}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E_3) هي: $S_3 = \{\bar{4} ; \bar{2}\}$

22

1) بين أن: $\forall x \in \mathbb{Z} : \quad x^3 \equiv x \quad [3]$

2) استنتج أن: $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 : \quad xy(x^2 - y^2) \equiv 0 \quad [3]$

الجواب: 1) نستعمل الجدول التالي وذلك في المجموعة $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

$\bar{x}$	$\bar{x}^3$
$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{8} = \bar{2}$

ومنه نستنتج أن: $\forall x \in \mathbb{Z} \quad x^3 \equiv x \quad [3]$

2) لدينا لكل x و y من $\mathbb{Z}$: $xy(x^2 - y^2) \equiv x^3y - xy^3 \quad [3]$

$xy(x^2-y^2) \equiv xy - xy \quad [3]$ (لأن: $x^3 \equiv x \quad [3]$ ، $y^3 \equiv y \quad [3]$)

وبالتالي: $xy(x^2-y^2) \equiv 0 \quad [3]$

23

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع: $F_n = 2^{2^n} + 1$

بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad F_n \;/\; 2^{F_n} - 2$

الجواب: لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $F_n \equiv 0 \quad [F_n] \Leftrightarrow 2^{2^n} + 1 \equiv 0 \quad [F_n]$

$\Leftrightarrow 2^{2^n} \equiv -1 \quad [F_n]$

ولدينا: $2^{F_n} = 2^{2^{2^n}+1} = 2 . 2^{2^{2^n}} = 2\left(2^{2^n}\right)^{2^{2^n - n}}$

وبما أن: $2^{2^n} \equiv -1 \quad [F_n]$ فإن: $2^{F_n} \equiv 2(-1)^{2^{2^n - n}} \quad [F_n]$

ومنه: $2^{F_n} \equiv 2 \quad [F_n]$ (لأن: $2^{2^n - n}$ زوجي)

إذن: $2^{F_n} - 2 \equiv 0 \quad [F_n]$ وبالتالي: $F_n \mid 2^{F_n} - 2$

24

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E)\quad x^3-3y^3+6y^2-16x+8=0$

و لتكن S مجموعة حلولها .

1) بين أن : $\forall x\in\mathbb{Z}:\ x^3-x-1\equiv -1\quad [3]$

2) استنتج أن : $S=\phi$.

الجواب : 1) ليكن x من $\mathbb{Z}$ لدينا :

$$x^3-x-1\equiv -1\quad [3] \Leftrightarrow x^3-x\equiv 0\quad [3]$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\equiv 0\quad [3]$$

نعلم أن جداء ثلاثة أعداد متتابعة يقبل القسمة على 3

وبما أن $x-1$, x و $x+1$ اعداد متتابعة فإن : $x(x-1)(x+1)\equiv 0\ [3]$

ومنه : $x^3-x-1\equiv -1\quad [3]$.

2) نفترض أن : $S\neq\phi$ ، ومنه يوجد (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث :

$$x^3-3y^3+6y^2-16x+8=0$$

إذن : $x^3-3y^2+6y^2-16x+8\equiv 0\quad [3]$

أي : $x^3-x-1\equiv 0\quad [3]$ $(-3y^2\equiv 0\ [3]\ ;\ -16x\equiv -x\ [3]\ ,\ 8\equiv -1\ [3]$: لأن$)$

وهذا تناقض مع كون : $x^3-x-1\equiv -1\quad [3]$

وبالتالي : $S=\phi$

25

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E):\quad x^2+5y^2=3$

ولتكن S مجموعة حلول المعادلة (E).

1) بين أن : $(x,y)\in S \Rightarrow x^2=3$

2) استنتج المجموعة S.

الجواب : 1) لدينا :

$$(x,y)\in S \Leftrightarrow x^2+5y^2=3$$
$$\Leftrightarrow x^2=3-5y^2$$
$$\Rightarrow 3-5y^2\geq 0 \Leftrightarrow y^2\leq\frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow |y|<1 \Leftrightarrow y=0 \quad (y\in\mathbb{Z}\ \text{: لأن})$$

ومنه : $x^2=3$.

2) ليكن $(x,y)\in S$ إذن : $x^2=3$

وبما أن المعادلة : $x^2=3$ لا تقبل حلاً في $\mathbb{Z}$ فإن : $S=\phi$

26

نضع : $A=\mathbb{Z}/_{11}\mathbb{Z}$

1) ناقش حسب قيم a عدد حلول المعادلة : $x^2=a$; $x\in A$ (E)

حيث : $a\in A$.

2) ليكن p و q من A ، نعتبر المعادلة : $(F): x^2-\bar{2}px+q=0$

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا إذا وفقط إذا كان : p^2-q تنتمي إلى مجموعة B ضمن A يتم تحديدها.

3) تطبيق : أ- حل في A المعادلة : $(G): x^4+\bar{3}x^2+\bar{4}=\bar{0}$

ب- حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x بحيث :

11 يقسم $\overline{10304}^{(x)}$.

الجواب : 1) من خلال الجدول نعطي لائحة المربعات عناصر A .

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$

- المعادلة (E) تقبل حلاً وحيداً إذا كان : $a=\bar{0}$
- المعادلة (E) تقبل حلين مختلفين إذا كان : $a\in\{\bar{1},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{9}\}$
- المعادلة (E) لا تقبل حلاً إذا كان : $a\in\{\bar{2},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\overline{10}\}$

2) لكل x من A لدينا : $x^2-\bar{2}px=(x-p)^2-p^2$

لدينا : $x^2-\bar{2}px+q=0 \Leftrightarrow (x-p)^2=p^2-q$

إذن : المعادلة (F) تقبل حلاً في A إذا وفقط إذا كان : $p^2-q\in\{\bar{0},\bar{1},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{9}\}$

ومنه : $B=\{\bar{0},\bar{1},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{9}\}$

3) أ- لنحل المعادلة (G) : نضع : $X=x^2$

لدينا : $(G) \Leftrightarrow X^2+\bar{3}X+\bar{4}=\bar{0}$

$\Leftrightarrow (X-\bar{4})^2=\bar{1}$

$\Leftrightarrow X-\bar{4}=\bar{1}$ أو $X-\bar{4}=\overline{10} \Leftrightarrow X=\bar{5}$ أو $X=\bar{3}$

إذن : $(G) \Leftrightarrow x^2 = \bar{5}$ أو $x^2 = \bar{3}$

$\Leftrightarrow x = \bar{6}$ أو $x = \bar{5}$ أو $x = \bar{7}$ أو $x = \bar{4}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (G) هي : $S = \{\bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

ب - لدينا : $\overline{10304}^{(x)} = x^4 + 3x^2 + 4$

لدينا : $11 \mid \overline{10304}^{(x)} \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 + 4 \equiv 0 \quad [11]$

$\Leftrightarrow \bar{x}^4 + \bar{3}\bar{x}^2 + \bar{4} = \bar{0} \quad (\bar{x} \in A)$

$\Leftrightarrow \bar{x} \in \{\bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$

$11 \mid \overline{10304}^{(x)} \Leftrightarrow x = 4 + 11k$ أو $x = 5 + 11k$ أو $x = 6 + 11k$ أو $x = 7 + 11k$

حيث : $k \in \mathbb{N}$.

27

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $6x - 13y = 5 \quad (1)$

2) استنتج في $\mathbb{Z}$ حلول النظمة : $\begin{cases} z \equiv 2 & [6] \\ z \equiv 7 & [13] \end{cases} \quad (2)$

3) حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} z \equiv 2 & [6] \\ z \equiv 7 & [13] \\ z \equiv 1 & [7] \end{cases} \quad (3)$

الجواب : 1) لدينا : $(3,1)$ حلا بديهيا للمعادلة : $6x - 13y = 5$

ومنه : $\begin{cases} 6x - 13y = 5 \\ 6.3 - 13.1 = 5 \end{cases}$

إذن : $6(x-3) = 13(y-1)$ ومنه : $6 \mid 13(y-1)$

وبما أن : $6 \wedge 13 = 1$ فإنه حسب مبرهنة كوص : $6 \mid y - 1$

إذن : $y = 1 + 6k \quad : \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

وبتعويض نحصل على : $x = 3 + 13k$

عكسيا يمكننا أن نتحقق من أن الزوج $(3+13k, 1+6k)$ للمعادلة (1)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي :

$$S_1 = \{(3+13k, 1+6k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

c) لدينا : $\begin{cases} z \equiv 2 & [6] \\ z \equiv 7 & [13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + 6x \\ z = 7 + 13y \end{cases} \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

إذن : $2 + 6x = 7 + 13y$

ومنه : $6x - 13y = 5$

$\Leftrightarrow x = 3 + 13k \ ; \ y = 1 + 6k \quad \mid k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $z = 20 + 78k \quad \mid k \in \mathbb{Z}$

وعكسياً : $z = 20 + 78k \quad (k \in \mathbb{Z})$

إذن : $20 + 78k \equiv 2 \ [6] \quad ; \quad 20 + 78k \equiv 7 \ [13]$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (2) هي : $S_2 = \{20 + 78k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3) لنحل النظمة (3) :

لدينا : $\begin{cases} z \equiv 2 & [6] \\ z \equiv 7 & [13] \\ z \equiv 1 & [7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 20 + 78k & (k \in \mathbb{Z}) \\ 20 + 78k \equiv 1 & [7] \end{cases}$

لأن : $\begin{pmatrix} 20 \equiv 6 \ [7] \\ 78 \equiv 1 \ [7] \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z = 20 + 78k & (k \in \mathbb{Z}) \\ k \equiv 2 & [7] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 20 + 78k \\ k = 2 + 7\alpha \end{cases} \mid (\alpha \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow z = 176 + 546\alpha \quad \mid (\alpha \in \mathbb{Z})$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (3) هي : $S_3 = \{176 + 546\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$

28

بين أن العدد $a = 2^{18} + 1$ عدد غير أولي .

الجواب : لدينا : $a = 2^{18} + 1 = (2^6)^3 + 1 = (2^6 + 1)(2^{12} - 2^6 + 1)$

ومنه $2^{18} + 1$ يقبل القسمة على $2^6 + 1 \neq 1$ فإن $a = 2^{18} + 1$ غير أولي .

29

ليكن n من $\mathbb{Z}$ ؛ نضع : $a_n = n^4 - n^2 + 16$

1) بين أن : $n^2 - 3n + 4$ و $n^2 + 3n + 4$ عددان زوجيان .

2) استنتج أن a_n عدد غير أولي .

الجواب : 1) ليكن n من $\mathbb{Z}$ لدينا :

$n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n \quad [2]$

$\equiv n(n-1) \quad [2]$

بما أن جداء عددين متتابعين قابل للقسمة على 2 فإن : $n(n-1) \equiv 0 \quad [2]$

ومنه : $n^2-3n+4 \equiv 0 \quad [2]$ أي n^2-3n+4 قابل للقسمة على 2

إذن : n^2-3n+4 عدد زوجي .

لدينا :

$$n^2+3n+4 \equiv n^2+n \quad [2]$$

$$n^2+3n+4 \equiv n(n+1) \quad [2]$$

$$n^2+3n+4 \equiv 0 \quad [2]$$

ومنه : n^2+3n+4 عدد زوجي .

2) لدينا : $a_n = n^4-n^2+16 = (n^2+4)^2-9n^2$

$$a_n = (n^2-3n+4)(n^2+3n+4)$$

بما أن : n^2-3n+4 و n^2+3n+4 زوجيان فإن :

$n^2-3n+4 \neq 1$ و $n^2+3n+4 \neq 1$

وبالتالي : a_n عدد غير أولي .

30 ليكن n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

بين الاستلزام التالي : n عدد أولي $\Rightarrow$ 5^n-3^n عدد أولي

<u>الجواب :</u> ليكن n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

لنبرهن عن ذلك باستعمال الاستلزام المضاد للعكس

أي : 5^n-3^n عدد غير أولي $\Rightarrow$ n عدد غير أولي

n عدد غير أولي إذن : $n = p \cdot q$: $\exists (p,q) \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2$

إذن :

$$5^n-3^n = 5^{pq}-3^{pq} = (5^p)^q-(3^p)^q$$

$$= (5^p-3^p)\left(\sum_{k=0}^{q-1}(5^p)^k(3^p)^{(q-1-k)}\right)$$

بما أن : $5^p-3^p \geq 2$ و $\sum_{k=0}^{q-1}(5^p)^k(3^p)^{(q-1-k)} \geq 2$

ومنه 5^n-3^n عدد غير أولي

وبالتالي :

n عدد أولي $\Rightarrow$ 5^n-3^n عدد أولي

31 ليكن p عددا أوليا بحيث : $p \geq 5$

1) بين أن : $3 \mid p^2-1$

2) بين أن : $8 \mid p^2-1$

3) استنتج أن : $24 \mid p^2-1$

الجواب : 1) نضع : $a = p(p^2-1)$

لدينا : $a = p(p-1)(p+1)$

بما أن a هو جداء ثلاث أعداد متتابعة فإن : $3 \mid a$ أي $3 \mid p(p^2-1)$

وبما أن p أولي و $p > 3$ فإن $3 \nmid p$ تقسم p ومنه : $p \wedge 3 = 1$

إذن :
$$\begin{cases} 3 \mid p(p^2-1) \\ p \wedge 3 = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{گوص}} 3 \mid p^2-1$$

2) لدينا p أولي إذن يكتب على أحد الشكلين : $p = 4k+1$ أو $p = 4k+3$ $(k \in \mathbb{N})$

الحالة 1 : إذا كان : $p = 4k+1$ فإن : $p^2-1 = (p-1)(p+1)$

إذن : $p^2-1 = 8k(2k+1)$ ومنه : $8 \mid p^2-1$

الحالة 2 : إذا كان : $p = 4k+3$ فإن : $p^2-1 = 8(k+1)(2k+1)$

ومنه : $8 \mid p^2-1$

وبالتالي : $8 \mid p^2-1$ لكل p أولي حيث $p \geq 5$.

3)

بما أن : $\begin{cases} 3 \mid p^2-1 \\ 8 \mid p^2-1 \\ 3 \wedge 8 = 1 \end{cases}$ فإن : $24 \mid p^2-1$.

32 ليكن a و n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

1) بين أن : a^n-1 أولي $\Rightarrow$ $a=2$.

2) بين أن : a^n-1 أولي $\Rightarrow$ n أولي .

3) بين أن : a^n+1 أولي $\Rightarrow$ a زوجي .

الجواب : 1) لنبين أن : $a \neq 2 \Rightarrow$ a^n-1 غير أولي

لدينا : $a^n-1 = (a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\dots+a+1)$

بما أن : $a \neq 2$ فإن : $a-1 \neq 1$ إذن : $a-1 \mid a^n-1$

ومنه a^n-1 غير أولي .

وبالتالي : a^n-1 أولي $\Rightarrow a=2$

2) لنبين أن : a^n-1 غير أولي $\Rightarrow$ n غير أولي

n غير أولي $\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2 : \; n=\alpha\beta$ و $1<\beta<n$ و $1<\alpha<n$

إذن : $a^n-1 = a^{\alpha\beta}-1 = (a^\alpha)^\beta - 1$

ومنه : $a^\alpha-1 \mid a^n-1$ و $a^\alpha-1 \neq 1$

إذن : a^n-1 غير أولي .

وبالتالي : n أولي $\Rightarrow$ a^n-1 أولي

3) لنبين أن : a^n+1 غير أولي $\Rightarrow$ a فردي .

لدينا a فردي ومنه a^n فردي وبالتالي a^n+1 عدد زوجي

وبما أن $a^n+1 \neq 2$ (لأن : $a>1$)

فإن a^n+1 يقبل القسمة على 2 ومنه a^n+1 غير أولي .

33 ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$.

1) بين أن : $a^n \wedge b^n = (a\wedge b)^n$

2) استنتج أن : $a^n \mid b^n \Leftrightarrow a \mid b$

3) بين أن : $\forall x\in\mathbb{Q}^* : \; (x^n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z})$

الجواب : 1) نضع : $d=a\wedge b$

ومنه : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2 : \; a=d\alpha$ و $b=d\beta$ و $\alpha\wedge\beta=1$

لدينا : $a^n\wedge b^n = d^n\alpha^n \wedge d^n\beta^n = d^n(\alpha^n\wedge\beta^n)$

بما أن : $\alpha\wedge\beta=1 \Leftrightarrow \alpha^n\wedge\beta^n=1$

فإن : $a^n\wedge b^n = d^n$ أي : $a^n\wedge b^n=(a\wedge b)^n$

2) لدينا : $a^n \mid b^n \Leftrightarrow a^n\wedge b^n = |a^n| \Leftrightarrow (a\wedge b)^n = |a|^n$

$a^n \mid b^n \Leftrightarrow a\wedge b = |a| \Leftrightarrow a\mid b$

3) ليكن x من $\mathbb{Q}^*$ إذن : $\exists(a,b)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^* : \; x=\frac{b}{a}$

لدينا : $x^n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{b^n}{a^n}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow a^n\mid b^n \Leftrightarrow a\mid b$

$x^n\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{b}{a}\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$

34

ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، نضع : $u_n = n^3+n^2+11n+2$

1) بين أن : $u_n \equiv 0 \ [3]$ أو $u_n \equiv 2 \ [3]$

2) استنتج جميع الأعداد n التي من أجلها يكون لدينا :

n عدد أولي و u_n عدد أولي .

الجواب : 1) لدينا :

$n \equiv$	-1	0	1	$[3]$
$n^3 \equiv$	-1	0	1	$[3]$
$n^2 \equiv$	1	0	1	$[3]$
$11n \equiv$	1	0	-1	$[3]$
$u_n \equiv$	0	2	0	$[3]$

من هذا الجدول نستنتج أن :

$u_n \equiv 0 \ [3]$ أو $u_n \equiv 2 \ [3]$

2) n عدد أولي و لكي يكون u_n عدد أولي و حسب الـ السابق

u_n عدد أولي يجب أن يكون $u_n \equiv 2 \ [3]$ و بما أن $u_n > 3$

فإن : $p \equiv 0 \ [3]$ و p عدد أولي و منه : $p = 3$.

35

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $A = \frac{1}{2}(a^3+b^3)$

نفترض أن A عدد أولي .

1) بين أن : $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{N}$ و $a^2-ab+b^2 \in \mathbb{N}$

2) استنتج أن : $a+b=2$ أو $a^2-ab+b^2=1$

3) بين أن : $a=b=1$.

الجواب : 1) بما أن A عدد أولي فإن : $A \in \mathbb{N}$

- إذا كان a و b زوجيان فإن : $b=2\beta$ و $a=2\alpha$: $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^2$

إذن : $A = 4(\alpha^3+\beta^3)$

ومنه : $4 \mid A$ غير ممكن لأن : A عدد أولي ، إذن : a و b غير زوجيان.

- إذا كان a زوجي و b فردي فإن : a^3+b^3 عدد فردي

إذن : a^3+b^3 لا يقبل القسمة على A

إذن : $A = \frac{1}{2}(a^3+b^3) \notin \mathbb{N}$ تناقض مع كون A عدد أولي .

وبالمثل إذا كان a فردي و b زوجي فإن $A \notin \mathbb{N}$ تناقض مع كون A أولي.

وبالتالي فإن: a و b فرديان ومنه $a+b$ زوجي إذن: $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{N}$

لدينا: $a^2-ab+b^2 = a^2+b(b-a) = a(a-b)+b^2$

بما أن a و b يلعبان دوراً مماثلاً يمكن أن نفترض أن: $a \geq b$

ومنه: $a(a-b)+b^2 \geq 0$ وبالتالي: $a^2-ab+b^2 \in \mathbb{N}$

2) لدينا: $A = \frac{1}{2}(a^3+b^3) = \frac{1}{2}(a+b)(a^2-ab+b^2)$

بما أن: $\frac{1}{2}(a+b) \in \mathbb{N}$ و $a^2-ab+b^2 \in \mathbb{N}$ و A عدد أولي

فإن: $\frac{1}{2}(a+b)=1$ أو $a^2-ab+b^2=1$

أي: $a+b=2$ أو $a^2-ab+b^2=1$

3) بما أن A عدد أولي فإن: $a+b=2$ أو $a^2-ab+b^2=1$

* إذا كان: $a+b=2$ فإن: $(a-1)+(b-1)=0$

وبما أن: $a-1 \geq 0$ و $b-1 \geq 0$ فإن: $a-1=0$ و $b-1=0$

أي: $a=1$ و $b=1$.

ملاحظة: ليكن α و β من $\mathbb{R}^+$ لدينا التكافؤ التالي: $\alpha=\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=0$

* إذا كان: $a^2-ab+b^2=1$ فإن: $4a^2-4ab+4b^2=4$

$\Leftrightarrow 4a^2-4ab+b^2+3b^2=4 \Leftrightarrow (2a-b)^2+3b^2=4$

$\Leftrightarrow [(2a-b)^2-1]+3(b^2-1)=0$

$\Leftrightarrow (2a-b)^2-1=0$ و $3(b^2-1)=0$ (لأن: $(2a-1)^2-1 \geq 0$ و $3(b^2-1) \geq 0$)

$\Leftrightarrow |2a-b|=1$ و $b^2=1$ (لأن: $a \in \mathbb{N}^*$ و $b \in \mathbb{N}^*$)

$\Leftrightarrow (b=1$ و $2a-1=1)$ أو $(b=1$ و $2a-1=-1)$

$\Leftrightarrow (b=1$ و $a=1)$ أو $(b=1$ و $a=0)$ غير ممكن لأن $a \neq 0$

$\Leftrightarrow a=b=1$

36 ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث: $n \geq 4$.

نفترض أن: n و $n+2$ عددان أوليان.

1) بين أن العدد $n-1$ لا يقبل القسمة على 3.

2) استنتج أن العدد $n+1$ يقبل القسمة على 6.

الجواب : 1) لدينا : n و $n+2$ عددان أوليان .
وبما أن $n \geq 4$ فإن : n و $n+2$ لا يقبلان القسمة على 3.
وإذا كان : $n \equiv 1\ [3]$ فإن : $n+2 \equiv 0\ [3]$ وهذا تناقض مع كون $n+2$ لا يقبل القسمة على 3 . ومنه : $n-1 \not\equiv 0\ [3]$.
وبالتالي 3 لا تقسم $n-1$.
2) حسب السؤال 1) لدينا : $n \not\equiv 0\ [3]$ و $n \not\equiv 1\ [3]$
فإن : $n \equiv 2\ [3]$ أي : $n \equiv -1\ [3]$
ومنه : $3 \mid n+1$.
وبما أن n عدد أولي و $n \geq 4$ فإن : n عدد فردي .
ومنه : $2 \mid n+1$
بما أن : $\begin{cases} 3 \mid n+1 \\ 2 \mid n+1 \\ 2 \wedge 3 = 1 \end{cases}$ فإن : $2.3 \mid n+1$ أي : $6 \mid n+1$

37
ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث : $n \geq 11$.
نضع : $a_n = n-10$ ؛ $b_n = n+10$
$c_n = n+60$ ؛ $d_n = n+90$
بين أنه إذا كانت a_n و b_n و c_n أعداد أولية فإن d_n عدد أولي .
(يمكنك استعمال الموافقة بترديد 3)

الجواب : لدينا : $a_n \equiv n-10\ [3]$
إذن : $a_n \equiv n+2\ [3]$ (لأن : $-10 \equiv 2\ [3]$)
لدينا : $b_n \equiv n+10\ [3]$
إذن : $b_n \equiv n+1\ [3]$ (لأن : $10 \equiv 1\ [3]$)
لدينا : $c_n \equiv n+60\ [3]$
إذن : $c_n \equiv n\ [3]$ (لأن : $60 \equiv 0\ [3]$)
لدينا n و $n+1$ و $n+2$ أعداد متتابعة ومنه أحد هذه الأعداد يقبل القسمة على 3 .
وبما أن a_n و b_n و c_n أعداد أولية فإن أحد أصغرها يساوي 3 .

وبما أن : $a_n < b_n < c_n$ فإن : $a_n = 3$ أي : $n-10=3$

ومنه : $n=13$ إذن : $d_n = 13+90=103$ عدد أولي .

38 ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $\sigma_n = 2^{2^n}+5$

1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\sigma_n \geq 9$.

2) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$: $2^{2^n} \equiv 1 \ [3]$.

3) استنتج جميع الأعداد الأولية التي تكتب على شكل σ_n .

الجواب : 1) ليكن n من $\mathbb{N}^*$ إذن : $n \geq 1$ ومنه : $2^n \geq 2$

إذن : $2^{2^n} \geq 2^2 = 4$ ومنه : $\sigma_n \geq 9$.

2) لدينا : $2 \equiv -1 \ [3]$ وبما أن 2^n عدد زوجي

فإن : $2^{2^n} \equiv (-1)^{2^n} \ [3]$ أي : $2^{2^n} \equiv 1 \ [3]$

3) لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $2^{2^n} \equiv 1 \ [3]$.

إذن : $\sigma_n \equiv 1+5 \ [3]$ أي : $\sigma_n \equiv 0 \ [3]$

ومنه σ_n ليس أولياً إذا كان n من $\mathbb{N}^*$ ،

ويكون σ_n أولياً إذا كان : $n=0$ أي : $\sigma_0 = 2^{2^0}+5 = 7$ أولي

وبالتالي σ_n عدد أولي إذا وفقط إذا كان : $n=0$

39 ليكن n من $\mathbb{Z}$ ؛ نضع : $u_n = n^3 - n^2 - 2n + 1$

الهدف من هذا التمرين أن نبين أنه لكل n من $\mathbb{Z}$ ، u_n لا يقبل القسمة على 49

1) نفترض أنه يوجد n_0 من $\mathbb{Z}$ بحيث : $49 \mid u_{n_0}$.

أ- بين أن : $7 \mid n_0+2$.

ب- استنتج أنه يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث : $u_{n_0} = 49(7k^3-7k^2+2k)-7$

2) استنتج أن u_n لا يقبل القسمة على 49 ، لكل n من $\mathbb{Z}$.

الجواب : 1) أ- لدينا : $49 \mid u_{n_0}$

وبما أن : $u_{n_0} = n_0^3 - n_0^2 - 2n_0 + 1 = (n_0+2)^3 - 7n_0^2 - 14n_0 - 7$ و $49 \mid u_{n_0}$

فإن : $7 \mid u_{n_0}$ أي : $7 \mid (n_0+2)^3 - 7n_0^3 - 14n_0 - 7$

إذن : $7 \mid (n_0+2)^3$ وبما أن : 7 عدد أولي فإن : $7 \mid n_0+2$

ب - لدينا : $7 \mid n_0+2$ إذن يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث : $n_0 = 7k-2$

وبتعويضها في u_{n_0} نحصل على : $u_{n_0} = 49(7k^3-7k^2+2k)-7$

ج) لدينا : $u_{n_0} = 49(7k^3-7k^2+2k)-7$

وبما أن : $49 \mid 49(7k^3-7k^2+2k)$ و $49 \mid u_{n_0}$

فإن : $49 \mid 7$ وهذا تناقض إذن الافتراض خاطئ

وبالتالي لا يوجد n_0 من $\mathbb{Z}$ بحيث : $49 \mid u_{n_0}$

ومنه لكل n من $\mathbb{Z}$ ، u_n لا يقبل القسمة على 49 .

40 ليكن n من $\mathbb{N}$. نضع : $\alpha_n = 2n^7+1$ و $\beta_n = 3n^2+2$

نريد تحديد المجموعة : $H = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha_n \wedge \beta_n \neq 1\}$

نضع : $\sigma = \alpha_n \wedge \beta_n$.

1) بين أن : $\sigma / 8n+9$ و $\sigma / 1163$.

2) استنتج أنه يوجد a من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $8n+9 = 1163a$

3) بين أن : $a \equiv 3 \ [8]$.

4) استنتج أنه يوجد b من $\mathbb{N}$ بحيث : $n = 1163b+435$

5) حدد عناصر المجموعة H .

الجواب : 1) لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ ، وباستعمال القسمة الاقليدية لـ α_n على β_n :

$$9(2n^7+1) = (3n^2+2)(6n^4-4n)+8n+9$$

إذن : $9\alpha_n = (6n^4-4n)\beta_n + 8n+9$

بما أن : σ / α_n و σ / β_n فإن : $\sigma / 8n+9$

ولدينا : $512(3n^2+2) = (192n^2-216n+243)(8n+9) - 1163$

إذن : $512\beta_n = (192n^2-216n+243)(8n+9) - 1163$

بما أن : σ / β_n و $\sigma / 8n+9$ فإن : $\sigma / 1163$

2) بما أن : $\sigma / 1163$ و $\sigma \neq 1$ و 1163 عدد أولي (تحقق من ذلك)

فإن : $\sigma = 1163$

ومنه : $1163 \mid 8n+9$ أي : $8n+9=1163a$: $\exists a \in \mathbb{N}$

3) لدينا : $8n+9=1163a$ حيث : $a \in \mathbb{N}$

إذن : $1163a \equiv 9 \quad [8]$

$3a \equiv 1 \quad [8]$ $\quad (1163 \equiv 3 \quad [8]$: لأن$)$

$9a \equiv 3 \quad [8]$

ومنه : $a \equiv 3 \quad [8]$ $\quad (9 \equiv 1 \quad [8]$: لأن$)$

4) لدينا : $a \equiv 3 \quad [8]$ أي $a=3+8b$: $\exists b \in \mathbb{N}$

ومنه : $8n+9=1163(3+8b)$

$8n+9=3489+8.1163b$

$8n=8(1163b+435)$

وبالتالي : $n=435+1163b$.

5) إذا كان : $n \in H$ فإن : $n=435+1163b$ $\quad (b \in \mathbb{N})$

عكسيا إذا كان : $n=435+1163b$ $\quad (b \in \mathbb{N})$

فإن $1163 \mid \alpha_n$ و $1163 \mid \beta_n$

ومنه : $\alpha_n \wedge \beta_n \neq 1$

وبالتالي : $H=\{435+1163b \mid b \in \mathbb{N}\}$.

41

لتكن a و b و c و d أعداداً من $\mathbb{Z}$ بحيث : $a=bc+d$

1) بين أن : $a \wedge b = b \wedge d$

2) استنتج أن : $a \wedge b = b \wedge (a-bc)$

الجواب : 1) نضع : $\Delta_1 = a \wedge b$ و $\Delta_2 = b \wedge d$

لدينا : $\Delta_1 \mid a$ و Δ_1 / b إذن : $\Delta_1 \mid a$ و Δ_1 / bc

ومنه : $\Delta_1 \mid b$ و $\Delta_1 \mid a-bc=d$ إذن : $\Delta_1 \mid b \wedge d$

أي : $\Delta_1 \mid \Delta_2$

لدينا : Δ_2 / b و $\Delta_2 \mid d$ إذن : $\Delta_2 \mid bc$ و $\Delta_2 \mid d$

ومنه : $\Delta_2 / bc+d=a$ و $\Delta_2 \mid b$ إذن : $\Delta_2 \mid a \wedge b$

أي : Δ_2 / Δ_1

بما أن : $\begin{cases} \Delta_1 / \Delta_2 \\ \Delta_2 / \Delta_1 \\ (\Delta_1, \Delta_2) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$ فإن : $\Delta_1 = \Delta_2$ ، ومنه : $a \wedge b = b \wedge d$

2) لدينا : $a = bc + (a - bc)$ وبأخذ $d = a - bc$ وحسب السؤال (1)

نحصل على : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

42

ليكن n من $\mathbb{Z}$ ، نضع : $d_n = (5n^3 - n) \wedge (n+2)$

1) بين أن : $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$

2) ما هي القيم الممكنة للعدد d_n ؟

3) حدد عناصر المجموعة : $A = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n+2 / 5n^3 - n \}$

الجواب : 1) لدينا باستعمال القسمة الاقليدية نحصل على :

$$5n^3 - n = (n+2)(5n^2 - 10n + 9) - 38$$

ومنه حسب التمرين السابق (41).

$$(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$$

ومنه : $d_n = (n+2) \wedge 38$

2) لدينا : $d_n = (n+2) \wedge 38$ إذن : $d_n / 38$

إذن : $d_n \in \{1, 2, 19, 38\}$

3) لدينا :
$$n \in A \Leftrightarrow n+2 / 5n^3 - n$$
$$\Leftrightarrow (5n^3 - n) \wedge (n+2) = |n+2|$$

ملاحظة : $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 : \quad a \wedge b = |a| \Leftrightarrow a / b$

وبما أن : $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$ فإن :

$$n \in A \Leftrightarrow (n+2) \wedge 38 = |n+2|$$
$$\Leftrightarrow |n+2| / 38$$
$$\Leftrightarrow n+2 \in \{-38; -19, -2, -1, 1, 2, 19, 38\}$$
$$\Leftrightarrow n \in \{-40; -21; -4; -3; -1, 0; 17, 36\}$$

وبالتالي : $A = \{-40; -21; -4; -3; -1; 17, 36\}$

43 ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و n من $\mathbb{N}^*$.

1) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b) \wedge a = 1$

2) بين أن : $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^n+b^n) \wedge a^n b^n = 1$

الجواب : 1) **الطريقة الأولى :** لدينا : $a+b = 1\times a + b$

حسب التعريف (قسم) لدينا : $(a+b)\wedge a = a\wedge b$

ومنه : $a\wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b)\wedge a = 1$

الطريقة الثانية : نفترض أن : $a\wedge b=1$ و نبين أن : $(a+b)\wedge a = 1$

نضع : $d=(a+b)\wedge a$ ؛

لدينا : $\begin{cases} d\mid a \\ d\mid a+b \end{cases} \Rightarrow d\mid b$ إذن : $\begin{cases} d\mid a \\ d\mid b \end{cases} \Rightarrow d\mid a\wedge b$

وبما أن : $a\wedge b=1$ و $d\in\mathbb{N}^*$ فإن : $d=1$.

ومنه : $(a+b)\wedge a = 1$

عكسيا : نفترض أن : $(a+b)\wedge a=1$ و لنبين أن : $a\wedge b=1$

نضع : $d = a\wedge b$

لدينا : $\begin{cases} d\mid a \\ d\mid b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\mid a \\ d\mid a+b \end{cases}$ إذن : $d\mid (a+b)\wedge a$

وبما أن : $(a+b)\wedge a = 1$ و $d\in\mathbb{N}^*$ فإن : $d=1$

ومنه : $a\wedge b = 1$

وبالتالي : $a\wedge b = 1 \Leftrightarrow (a+b)\wedge a = 1$

الطريقة الثالثة : (يمكن استعمال خاصية بوزو)

2) لدينا : $a\wedge b=1 \Leftrightarrow a^n \wedge b^n = 1$ (حسب الدرس) .

إذن : $a^n\wedge b^n = 1 \Leftrightarrow a^n\wedge(a^n+b^n) = 1$

$a^n\wedge b^n = 1 \Leftrightarrow b^n\wedge(a^n+b^n) = 1$

(حسب السؤال 1)

ومنه : $(a^n+b^n)\wedge a^n b^n = 1$

وبالتالي : $a\wedge b = 1 \Leftrightarrow (a^n+b^n)\wedge a^n b^n = 1$

44

ليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$.

1) بين أنه إذا كان : $a \wedge b = 1$ فإن : $(a^2+b^2) \wedge ab = 1$

2) استنتج أن : $(a^2+b^2) \wedge ab = (a \wedge b)^2$

الجواب : 1) نضع : $d = (a^2+b^2) \wedge ab$

لدينا : $\begin{cases} d \mid a^2+b^2 \\ d \mid ab \end{cases}$ إذن : $d \mid a(a^2+b^2) - b(ab)$

أي : $d \mid a^3$

و بالمثل نبين أن : $d \mid b^3$

بما أن : $d \mid a^3$ و $d \mid b^3$ فإن : $d \mid a^3 \wedge b^3$

و بما أن : $a^3 \wedge b^3 = 1 \Leftrightarrow a \wedge b = 1$ فإن : $d \mid 1$

أي : $d = 1$ (لأن : $d \in \mathbb{N}$)

و منه : $(a^2+b^2) \wedge ab = 1$

2) لدينا : $d = a \wedge b \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{*2} : a = d\alpha$ و $b = d\beta$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

و منه : $(a^2+b^2) \wedge ab = d^2 \left[(\alpha^2+\beta^2) \wedge \alpha\beta \right]$

و بما أن : $\alpha \wedge \beta = 1$ فإن : $(\alpha^2+\beta^2) \wedge \alpha\beta = 1$ (حسب السؤال 1)

و منه : $(a^2+b^2) \wedge ab = d^2$

أي : $(a^2+b^2) \wedge ab = (a \wedge b)^2$

45

لتكن a و b و c أعداداً من $\mathbb{Z}^*$.

بين أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c$

الجواب : نضع : $d_1 = a \wedge c$ و $d_2 = a \wedge bc$

لدينا : $\begin{cases} d_1 \mid a \\ d_1 \mid c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \mid a \\ d_1 \mid bc \end{cases} \Rightarrow d_1 \mid a \wedge bc = d_2$

لدينا : $a \wedge b = 1$ إذن حسب مبرهنة Bezout :

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 : \quad au + bv = 1$

و منه : $acu + bcv = c$

لدينا : $\begin{cases} d_2 \mid a \\ d_2 \mid bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 \mid a \\ d_2 \mid acu + bcv = c \end{cases} \Rightarrow d_2 \mid a \wedge c = d_1$

بما أن : $\begin{cases} d_1 \mid d_2 \\ d_2 \mid d_1 \\ (d_1, d_2) \in \mathbb{N}^2 \end{cases}$ فإن : $d_1 = d_2$

وبالتالي : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c$

46

لتكن a و b و c أعدادا من $\mathbb{Z}$.

بين أن : $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ b \wedge c = 1 \end{cases} \Longrightarrow (ab+bc+ca) \wedge abc = 1$

الجواب : نضع : $d = (ab+bc+ca) \wedge a$ و $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \\ b \wedge c = 1 \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge bc = 1$

ولدينا : $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid ab+bc+ca \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid a(b+c) = ab+ac \\ d \mid ab+bc+ca \end{cases}$

ومنه : $\begin{cases} d \mid a \\ d \mid bc \end{cases} \Rightarrow d \mid a \wedge bc$

وبما أن : $a \wedge bc = 1$ فإن : $d = 1$ (لأن : $d \in \mathbb{N}$)

بالمثل نبين أن : $(ab+bc+ca) \wedge b = 1$

و $(ab+bc+ca) \wedge c = 1$

وبالتالي : $(ab+bc+ca) \wedge abc = 1$

47

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \quad \text{و} \quad u_1 = 5 \\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \wedge u_n = 1$

2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \wedge u_{n+2} \in \{1, 5\}$

3) حدد حسب قيم n العدد $u_n \wedge u_{n+2}$

الجواب : 1) نضع : $d_n = u_{n+1} \wedge u_n$

لدينا : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

ومنه : $u_{n+2} \wedge u_{n+1} = u_{n+1} \wedge u_n$ (حسب التمرين رقم 41)

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad d_{n+1} = d_n$

أي : (d_n) متتالية ثابتة ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad d_n = d_0 = u_0 \wedge u_1$

وبما أن : $u_0 \wedge u_1 = 5 \wedge 1 = 1$ فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_n = 1$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+1} \wedge u_n = 1$

2) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+2} = -6u_n + 5u_{n+1}$

ومنه : $u_{n+2} \wedge u_n = u_n \wedge 5u_{n+1}$

نضع : $d = u_{n+2} \wedge u_n = u_n \wedge 5u_{n+1}$

لدينا : $\begin{cases} d \mid u_n \\ d \mid 5u_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 5u_n \\ d \mid 5u_{n+1} \end{cases} \Rightarrow d \mid 5u_n \wedge 5u_{n+1}$

إذن : $d \mid 5(u_n \wedge u_{n+1})$

وبما أن : $u_n \wedge u_{n+1} = 1$ فإن : $\begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ d \mid 5 \end{cases}$ أي : $d \in \{1, 5\}$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_{n+2} \wedge u_n \in \{1, 5\}$

(ملاحظة : يمكن حل هذا التمرين باستعمال الحد العام للمتتالية (u_n) ($u_n = 2^n + 3^n$

3) لنحدد قيم n التي من أجلها يكون لدينا : $u_{n+2} \wedge u_n = 5$

لدينا : $u_{n+2} \wedge u_n = 5 \Rightarrow 5 \mid u_{n+2}$ و $5 \mid u_n$

$\Rightarrow 5 \mid 2^{n+2} + 3^{n+2}$ و $5 \mid 2^n + 3^n$

لدينا باستعمال الموافقة بترديد 5 نحصل على : $(k \in \mathbb{N})$

$2^{4k} \equiv 1 \quad [5]$ ، $3^{4k} \equiv 1 \quad [5]$

$2^{4k+1} \equiv 2 \quad [5]$ ، $3^{4k+1} \equiv 3 \quad [5]$

$2^{4k+2} \equiv 4 \quad [5]$ ، $3^{4k+2} \equiv 4 \quad [5]$

$2^{4k+3} \equiv 3 \quad [5]$ ، $3^{4k+3} \equiv 2 \quad [5]$

ومنه : $u_{n+2} \wedge u_n = 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \in \{4k+1 \,;\, 4k+3 \mid k \in \mathbb{N}\}$

$u_{n+2} \wedge u_n = 1 \Leftrightarrow n \in \{4k \,;\, 4k+2 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ملاحظة : n زوجي $\Leftrightarrow u_{n+2} \wedge u_n = 1$

n فردي $\Leftrightarrow u_{n+2} \wedge u_n = 5$

48

ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $m \leq n$

1) بين أن : $m \wedge n = 1 \Rightarrow n \mid C_n^m$

2) بين أن : $n+1 \mid C_{2n}^n$

الجواب : 1) لدينا : $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$

$$C_n^m = \frac{n}{m} \times \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \frac{n}{m} \times C_{n-1}^{m-1}$$

إذن : $m \times C_n^m = n \times C_{n-1}^{m-1}$

إذن : $n \mid m \times C_n^m$

وبما أن : $m \wedge n = 1$ فإنه حسب مبرهنة كوص لدينا : $n \mid C_n^m$

2) لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(n+1) \times C_{2n}^{n+1} = n \times C_{2n}^n$

إذن : $n+1 \mid n \times C_{2n}^n$

وبما أن $(n+1) \wedge n = 1$ فإنه حسب مبرهنة كوص : $(n+1) \mid C_{2n}^n$

49

لتكن a و b و c أعداداً من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $\begin{cases} ab = c^2 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$

بين أن : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a = \alpha^2$ و $b = \beta^2$

الجواب : نضع : $d = a \wedge c$

ومنه : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a = d\alpha$ و $c = d\beta$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

إذن : $ab = c^2 \Leftrightarrow bd\alpha = d^2\beta^2 \Leftrightarrow b\alpha = d\beta^2$

لدينا : $\alpha \wedge \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta^2 = 1$

وبما أن : $b\alpha = d\beta^2$ فإن : $\begin{cases} \beta^2 \mid b\alpha \\ \beta^2 \wedge \alpha = 1 \end{cases} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \beta^2 \mid b$

لنبين أن : $b \mid \beta^2$.

لدينا : $b\alpha = \beta^2 d$ إذن : $b \mid d\beta^2$.

لكي نبين أن $b \mid \beta^2$ يكفي أن نبين أن : $b \wedge d = 1$

نضع : $\Delta = b \wedge d$.

لدينا : $\begin{cases} \Delta \mid b \\ \Delta \mid d \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \Delta \mid b \\ \Delta \mid d\alpha = a \end{cases}$ إذن : $\Delta \mid a \wedge b$

وبما أن : $a \wedge b = 1$ فإن : $\Delta \mid 1$ ومنه : $\Delta = 1$

إذن : $b \wedge d = 1$ إذن : $\begin{cases} b \mid d\beta^2 \\ b \wedge d = 1 \end{cases} \Rightarrow b \mid \beta^2$

إذن : $\begin{cases} b \mid \beta^2 \\ \beta^2 \mid b \end{cases} \Rightarrow |b| = \beta^2 = b$ ($b \in \mathbb{N}^*$: لأن)

ولدينا : $b\alpha = d\beta^2$ إذن : $\beta^2 \alpha = d\beta^2$ ومنه : $\alpha = d$

وبما أن : $a = \alpha d$ فإن : $a = \alpha^2$

وبالتالي : $a = \alpha^2$ و $b = \beta^2$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

50 ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $a \geq 3$ و a عدد فردي .

نضع : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) بين أن : أ- $2^{ab} \equiv 1 \quad [d]$

ب- $2^{ab} \equiv -1 \quad [d]$

2) استنتج أن : $d \in \{1, 2\}$

3) بين أن : $d = 1$.

الجواب : 1) أ- لدينا : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$ ومنه :

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \; 2^a - 1 = d\alpha$ و $2^b + 1 = d\beta$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

ومنه : $2^{ab} = (2^a)^b = (\alpha d + 1)^b$

ولدينا : $\alpha d + 1 \equiv 1 \quad [d]$ ومنه : $(\alpha d + 1)^b \equiv 1 \quad [d]$

وبالتالي : $2^{ab} \equiv 1 \quad [d]$

ب- لدينا : $2^{ab} = (2^b)^a = (d\beta - 1)^a$

ولدينا : $d\beta - 1 \equiv -1 \quad [d]$ ومنه : $(\beta d - 1)^a \equiv (-1)^a \quad [d]$

وبما أن a عدد فردي فإن : $(\beta d - 1)^a \equiv -1 \quad [d]$

وبالتالي : $2^{ab} \equiv -1 \quad [d]$

2) لدينا : $2^{ab} \equiv 1 \quad [d]$ و $2^{ab} \equiv -1 \quad [d]$

إذن : $0 \equiv 2 \quad [d]$ ومنه : $d \mid 2$

وبالتالي : $d \in \{1, 2\}$.

3) لدينا : $2^b + 1$ و $2^a - 1$ عددان فرديان فإن d عدد فردي

وبما أن : $d \in \{1, 2\}$ فإن : $d = 1$.

51

ليكن n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

نرمز بـ $S(n)$ لمجموع القواسم الموجبة للعدد n .

1) بين أنه إذا كان n غير أولي فإن n يقبل قاسم a بحيث : $a \geq \sqrt{n}$

2) استنتج أن : أ- إذا كان n غير أولي فإن : $S(n) > n + \sqrt{n}$

ب- إذا كان n أولي فإن : $S(n) < n + \sqrt{n}$

الجواب : 1) لدينا n عدد غير أولي إذن : $\exists (a,b) \in \mathbb{N}^{*2}$: $n = ab$

بحيث : $1 < a < n$ و $1 < b < n$ و $a \geq b$

بما أن : $a \geq b$ فإن : $a^2 \geq ab$ أي : $a^2 \geq n$

ومنه : $a \geq \sqrt{n}$.

2) * إذا كان n غير أولي فإن : 1 و a و n قواسم موجبة للعدد n ،

ومختلفة مثنى ، مثنى إذن : $S(n) \geq 1 + a + n$

وبما أن : $a \geq \sqrt{n}$ (حسب السؤال 1) فإن : $1 + a + n > \sqrt{n} + n$

ومنه : $S(n) > n + \sqrt{n}$

* إذا كان n أولي فإن القواسم الموجبة للعدد n هي : 1 و n .

ومنه : $S(n) = 1 + n < n + \sqrt{n}$. (لأن : $1 < \sqrt{n}$)

52

(مبرهنة Fermat) ليكن p عدد أولي موجب .

1) بين أن : $p \mid C_p^k$: $\forall k \in \{1, \dots, k-1\}$

2) استنتج أن : $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \quad [p]$: $\forall n \in \mathbb{N}$

3) أ- بين أن : $n^p \equiv n \quad [p]$: $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- استنتج أن : $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $n \wedge p = 1$

4) تطبيق : أ - بين أن : $2^{349} \equiv 2 \quad [7]$

ب - بين أن العدد $A = 2^{70} + 3^{70}$ يقبل القسمة على 13 .

الجواب : 1) ليكن k من $\{1, \dots, p-1\}$ لدينا : $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$

إذن : $p! = k!(p-k)!\, C_p^k$

لدينا : $p \mid p!$ إذن : $p \mid k!(p-k)!\, C_p^k$

ملاحظة : إذا كان : p عدد أولي و p لا يقسم a فإن : $a \wedge p = 1$

لدينا لكل k من $\{1, \dots, p-1\}$: $p \wedge k = 1$ و $p \wedge p-k = 1$

ومنه : $p \wedge (p-k)! = 1$ و $p \wedge k! = 1$

بما أن : $p \mid k!(p-k)!\, C_p^k$ و $p \wedge k!(p-k)! = 1$

فإنه حسب مبرهنة كوص : $p \mid C_p^k$.

2) لدينا : $(n+1)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k n^k$

إذن : $(n+1)^p = n^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k + 1$

لدينا لكل k من $\{1, \dots, p-1\}$: $p \mid C_p^k$ أي : $C_p^k \equiv 0 \quad [p]$

إذن : $\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k n^k \equiv 0 \quad [p]$

ومنه : $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \quad [p]$

3) لنبين بالترجع أن : $n^p \equiv n \quad [p] \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

- من أجل $n = 0$ لدينا : $0^p \equiv 0 \quad [p]$ (صحيحة)

- نفترض أن : $n^p \equiv n \quad [p]$ ونبين أن : $(n+1)^p \equiv n+1 \quad [p]$

لدينا حسب السؤال 2) : $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \quad [p]$ و $n^p \equiv n \quad [p]$

ومنه : $(n+1)^p \equiv n+1 \quad [p]$

وبالتالي : $n^p \equiv n \quad [p] \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ملاحظة : الخاصية تبقى صالحة في $\mathbb{Z}$ أي : $n^p \equiv n \quad [p] \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

ب - لدينا : $n^p \equiv n \quad [p] \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

إذن : $n(n^{p-1} - 1) \equiv 0 \quad [p] \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ومنه : $p \mid n(n^{p-1} - 1)$ و $n \wedge p = 1$ إذن حسب مبرهنة كوص :

$p \mid n^{p-1} - 1$ أي : $n^{p-1} - 1 \equiv 0 \quad [p]$

وبالتالي : $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ مع $n \wedge p = 1$

4) أ- بما أن : 7 عدد أولي و $7 \wedge 2 = 1$ فإن : $2^6 \equiv 1 \quad [7]$

ولدينا : $2^{349} = (2^6)^{58} \times 2$

إذن : $2^{349} \equiv 2 \quad [7]$ (لأن : $2^6 \equiv 1 \ [7]$)

ب - لدينا : $A = 2^{70} + 3^{70}$

لدينا : 13 عدد أولي و $2 \wedge 13 = 1$ و $3 \wedge 13 = 1$

إذن : $2^{12} \equiv 1 \quad [13]$ و $3^{12} \equiv 1 \quad [13]$

لدينا : $A = (2^{12})^5 \times 2^{10} + (3^{12})^5 \times 3^{10}$

$A \equiv 2^{10} + 3^{10} \quad [13]$

لدينا : $2^{10} = (2^5)^2 \equiv 6^2 \quad [13]$ (لأن : $2^5 \equiv 6 \ [13]$)

$2^{10} \equiv 10 \quad [13]$ (لأن : $6^2 \equiv 10 \ [13]$)

ولدينا : $3^{10} = (3^5)^2 \equiv (-9)^2 \quad [13]$ (لأن : $3^5 \equiv -9 \ [13]$)

$3^{10} \equiv 3 \quad [13]$ (لأن : $(-9)^2 \equiv 3 \ [13]$)

ومنه : $A \equiv 10 + 3 \quad [13]$ أي $A \equiv 0 \quad [13]$

وبالتالي : $A = 2^{70} + 3^{70}$ يقبل القسمة على 13.

تطبيقات مبرهنة Fermat

53 ليكن n من $\mathbb{Z}$ و p عدد أولي موجب فردي.

1) بين أن : $n^p \equiv n \quad [2]$.

2) استنتج أن : $(n+1)^p - (n^p + 1) \equiv 0 \quad [2p]$.

الجواب : 1) ليكن n من $\mathbb{Z}$ إذن : n و n^p لهما نفس الزوجية

ومنه : $n^p \equiv n \quad [2]$ لكل n من $\mathbb{Z}$.

2) لدينا حسب السؤال 1) لكل n من $\mathbb{Z}$: $n^p \equiv n \quad [2]$

إذن : $(n+1)^p \equiv n+1 \quad [2]$ ومنه : $(n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \quad [2]$

وحسب مبرهنة Fermat : $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \quad [p]$

إذن : $(n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \quad [p]$.

بما أن : $p \mid (n+1)^p - (n^p+1)$ و $2 \mid (n+1)^p - (n^p+1)$ و $2 \wedge p = 1$

(لأن : p عدد فردي) فإن : $2p \mid (n+1)^p - (n^p+1)$

وبالتالي : $(n+1)^p - (n^p+1) \equiv 0 \quad [2p] \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

54

لتكن a و b و c و d أعداداً من $\mathbb{N}^*$

بين أن : $30 \mid a^{4b+d} - a^{4c+d}$

الجواب : لدينا : $30 = 2 \times 3 \times 5$

* إذا كان : 5 لا يقسم a فإن : $5 \wedge a = 1$ (لأن : 5 عدد أولي)

ومنه حسب مبرهنة Fermat : $a^4 \equiv 1 \quad [5]$

إذن : $a^{4b+d} \equiv a^d \quad [5]$ و $a^{4c+d} \equiv a^d \quad [5]$

ومنه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0 \quad [5]$

* إذا كان : 5 يقسم a فإن : $a^{5b+d} \equiv 0 \quad [5]$ و $a^{5c+d} \equiv 0 \quad [5]$

ومنه : $a^{5b+d} - a^{5c+d} \equiv 0 \quad [5]$

إذن لكل a من $\mathbb{N}^*$: $5 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$

بالمثل نبين أن : $3 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$ و $2 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$

وبما أن : 2 و 3 و 5 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى

فإن : $2 \times 3 \times 5 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$

أي : $30 \mid a^{5b+d} - a^{5c+d}$

55

ليكن n من $\mathbb{Z}$ ، نضع : $u_n = 5n^7 + 7n^5 + 23n$

1) بين أن : $u_n \equiv 0 \quad [5]$

2) بين أن : $u_n \equiv 0 \quad [7]$

3) استنتج أن : $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$.

الجواب : 1) لدينا : 5 عدد أولي حسب مبرهنة Fermat : $n^5 \equiv n \ [5]$

ولدينا : $5n^7 \equiv 0 \quad [5]$ و $7n^5 \equiv 2n \quad [5]$ و $23n \equiv 3n \quad [5]$

ومنه : $u_n \equiv 5n \quad [5]$ أي : $u_n \equiv 0 \quad [5]$

2) لدينا : 7 عدد أولي ، ومنه : $n^7 \equiv n \quad [7]$

ولدينا : $5n^7 \equiv 5n \quad [7]$ و $7n^5 \equiv 0 \quad [7]$ و $23n \equiv 2n \quad [7]$

إذن : $u_n \equiv 7n \quad [7]$ أي : $u_n \equiv 0 \quad [7]$

3) لدينا :

$$\begin{cases} u_n \equiv 0 & [5] \\ u_n \equiv 0 & [7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \mid u_n \\ 7 \mid u_n \end{cases}$$

بما أن : $5 \wedge 7 = 1$ فإن : $35 \mid u_n$

ومنه : $\frac{u_n}{35} \in \mathbb{Z}$ أي : $\frac{5n^7+7n^5+23n}{35} \in \mathbb{Z}$

وبالتالي : $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{Z}$

56

بين أن لكل n من $\mathbb{Z}$ لدينا : $42 \mid n^7 - n$

الجواب : لدينا 2 عدد أولي حسب مبرهنة Fermat

$n^2 \equiv n \quad [2]$ ومنه : $n^7 \equiv n^6 \quad [2]$

ولدينا : $n^6 \equiv n^3 \quad [2]$ و $n^3 \equiv n^2 \quad [2]$

إذن : $n^3 \equiv n \quad [2]$ ومنه : $n^7 \equiv n \quad [2]$

وبالتالي : $2 \mid n^7 - n$.

لدينا : 3 عدد أولي إذن : $n^3 \equiv n \quad [3]$ ومنه : $n^7 \equiv n^5 \quad [3]$

إذن : $n^7 \equiv n \quad [3]$ ومنه : $3 \mid n^7 - n$

لدينا : 7 عدد أولي إذن : $n^7 \equiv n \quad [7]$ ومنه : $7 \mid n^7 - n$

و بما أن 2 و 3 و 7 أعداد أولية فيما بينها مثنى ، مثنى فإن :

$$2 \times 3 \times 7 \mid n^7 - n$$

وبالتالي : $42 \mid n^7 - n$ لكل n من $\mathbb{Z}$.

57

ليكن p عدد أولي موجب و n من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $n \wedge p = 1$

1) بين أنه إذا كان p فردي فإن : $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ أو $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

2) بين أن : $n^{p(p-1)} \equiv 1 \quad [p^2]$.

الجواب :

1) لدينا : p عدد فردي إذن : $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$

بما أن : p عدد أولي و $p \wedge n = 1$ فإنه حسب مبرهنة Fermat

$$n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$$

لدينا :

$$n^{p-1} - 1 = \left(n^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1^2$$
$$= \left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$$

بما أن : $p \mid n^{p-1} - 1$ فإن : $p \mid \left(n^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(n^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)$

و بما أن p عدد أولي فإن : $p \mid n^{\frac{p-1}{2}} - 1$ أو $p \mid n^{\frac{p+1}{2}} + 1$

ومنه : $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ أو $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

2) لدينا : $n^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ ومنه يوجد λ من $\mathbb{N}$ بحيث : $n^{p-1} = 1 + \lambda p$

إذن :

$$n^{p(p-1)} = (1+\lambda p)^p = \sum_{k=0}^{p} C_k^p (\lambda p)^k$$
$$n^{p(p-1)} = 1 + C_p^1 \lambda p + \sum_{k=2}^{p} C_p^k \lambda^k . p^k$$

بما أن : $\sum_{k=2}^{p} C_p^k \lambda^k p^k \equiv 0 \quad [p^2]$ (لأن : $p^k \equiv 0 \quad [p]$: $2 \leq k \leq p$)

و $C_p^1 \lambda p = \lambda p^2 \equiv 0 \quad [p^2]$ فإن : $n^{p(p-1)} \equiv 1 \quad [p^2]$

58

ليكن p عدد أولي موجب، و a و b من $\mathbb{Z}$ بحيث :

$$a^p \equiv b^p \quad [p]$$

بين أن : $a^p \equiv b^p \quad [p^2]$

الجواب : بما أن p عدد أولي فإنه حسب مبرهنة Fermat :

$$a^p \equiv a \quad [p] \quad \text{و} \quad b^p \equiv b \quad [p]$$

إذن : $a^p - b^p \equiv a - b \quad [p]$

أي : $a - b \equiv 0 \quad [p]$ (لأن : $a^p \equiv b^p \quad [p]$)

ومنه : $a = b + kp \quad \exists k \in \mathbb{Z} :$

إذن :

$$a^p = (b+kp)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i b^{p-i} (kp)^i$$
$$a^p = b^p + C_p^1 b^{p-1} \lambda p + \sum_{i=2}^{p} C_p^i b^{p-i} (\lambda p)^i$$
$$a^p - b^p = b^{p-1} \lambda . p^2 + \sum_{i=2}^{p} C_p^i b^{p-i} (\lambda p)^i$$

بما أن : $b^{p-1}\lambda p^2 \equiv 0 \quad [p^2]$ و $C_p^i b^{p-i}(kp)^i \equiv 0 \ [p^2]$ لكل $2 \leq i \leq p$

فإن : $a^p - b^p \equiv 0 \quad [p^2]$.

59

ليكن p و q عددين أوليين مختلفين .

بين أن : $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv -1 \quad [pq]$

الجواب : بما أن p و q عددين أوليين مختلفين فإن : $p \wedge q = 1$

حسب مبرهنة Fermat : $p^{q-1} \equiv 1 \ [q]$ و $q^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

لدينا : $p-1 \geq 1$ و $q-1 \geq 1$

إذن : $q^{p-1} \equiv 0 \quad [q]$ و $p^{q-1} \equiv 0 \quad [p]$

إذن :

$$\begin{cases} p^{q-1} \equiv 1 & [q] \\ q^{p-1} \equiv 0 & [q] \end{cases} \Rightarrow p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \quad [q]$$

$$\begin{cases} q^{p-1} \equiv 1 & [p] \\ p^{q-1} \equiv 0 & [p] \end{cases} \Rightarrow q^{p-1} + p^{q-1} \equiv 1 \quad [p]$$

ومنه : $q \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ و $p \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$

وبما أن : $p \wedge q = 1$ فإن : $pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$

وبالتالي : $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \quad [pq]$.

60

ليكن p عددا أوليا موجبا و a من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $p \wedge a = 1$

نضع : $F_p(a) = \dfrac{a^{p-1} - 1}{p}$

1) تحقق من أن : $F_p(a) \in \mathbb{N}$.

2) ليكن b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $b \wedge p = 1$.

بين أن : $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b) \quad [p]$.

الجواب : 1) بما أن p عدد أولي و $p \wedge a = 1$ فإنه حسب مبرهنة Famat : $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$ أي : $p \mid a^{p-1} - 1$

ومنه : $\dfrac{a^{p-1} - 1}{p} \in \mathbb{N}$ أي : $F_p(a) \in \mathbb{N}$

2) لدينا حسب مبرهنة Fermat :

$$\begin{cases} a^{p-1} \equiv 1 \quad [p] \\ b^{p-1} \equiv 1 \quad [p] \end{cases} \Rightarrow (a^{p-1}-1)(b^{p-1}-1) \equiv 0 \quad [p^2]$$

ومنه : $(ab)^{p-1} - a^{p-1} - b^{p-1} + 1 \equiv 0 \quad [p^2]$

$(ab)^{p-1} - 1 \equiv (a^{p-1}-1) + (b^{p-1}-1) \quad [p^2]$

ومنه : $\dfrac{(ab)^{p-1}-1}{p} \equiv \dfrac{a^{p-1}-1}{p} + \dfrac{b^{p-1}-1}{p} \quad [p]$

وبالتالي : $F_p(ab) \equiv F_p(a) + F_p(b) \quad [p]$

61 نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $x^4 + 781 = 3y^4 \quad (E)$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E)

1) بين أن : $x^4 \equiv 1 \quad [5]$ أو $x^4 \equiv 0 \quad [5]$: $\forall x \in \mathbb{Z}$

2) بين أن : $x^4+781 \equiv 2 \quad [5]$ أو $x^4+781 \equiv 1 \quad [5]$: $\forall x \in \mathbb{Z}$

3) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

<u>الجواب</u> : 1) لدينا 5 عدد أولي.

* إذا كان 5 يقسم x فإن : $x^4 \equiv 0 \quad [5]$

* إذا كان 5 لا يقسم x فإن : $x \wedge 5 = 1$

حسب مبرهنة Fermat $x^4 \equiv 1 \quad [5]$

2) لدينا : $781 \equiv 1 \quad [5]$ وبما أن : $x^4 \equiv 0 \; [5]$ أو $x^4 \equiv 1 \; [5]$

فإن : $x^4+781 \equiv 1 \quad [5]$ أو $x^4+781 \equiv 2 \quad [5]$

3) لدينا : $y^4 \equiv 0 \quad [5]$ أو $y^4 \equiv 1 \quad [5]$

ومنه : $3y^4 \equiv 0 \quad [5]$ أو $3y^4 \equiv 3 \quad [5]$

إذن : $\begin{cases} x^4+781 \equiv 2 \quad [5] \text{ أو } x^4+781 \equiv 1 \quad [5] \\ 3y^4 \equiv 3 \quad [5] \text{ أو } 3y^4 \equiv 0 \quad [5] \end{cases}$

ومنه : $x^4 + 781 \neq 3y^4$ لكل x و y من $\mathbb{Z}$

وبالتالي : $S = \phi$.

62

ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و a و b من $\mathbb{N}^*$ حيث : $a \neq b$

1) بين أن : $\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right) \wedge (a-b) = (na^{n-1}) \wedge (a-b)$

2) بين أن : $\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right) \wedge (a-b) = \left(n(a\wedge b)^{n-1}\right) \wedge (a-b)$

الجواب : 1) لدينا : $\frac{a^n-b^n}{a-b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k . b^{n-1-k}$

وبما أن : $a \equiv b \quad [a-b]$ فإن : $a^{n-1-k} \equiv b^{n-1-k}$

ومنه : $\frac{a^n-b^n}{a-b} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} a^k . a^{n-1-k} \quad [a-b]$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} \quad [a-b]$$

$$\equiv na^{n-1} \quad [a-b]$$

ومنه يوجد k من $\mathbb{Z}$ بحيث : $\frac{a^n-b^n}{a-b} = na^{n-1} + k(a-b)$

(ونعلم حسب التمرين رقم 41 : $x = \beta y + \gamma \Rightarrow x \wedge y = y \wedge \gamma$)

ومنه : $\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right) \wedge (a-b) = (a-b) \wedge na^{n-1}$

2) نضع : $d = a \wedge b$

و $d_1 = n(a\wedge b)^{n-1} \wedge (a-b)$ و $d_2 = na^{n-1} \wedge (a-b)$

إذن : $d_1 = nd^{n-1} \wedge (a-b)$ و $d_2 = na^{n-1} \wedge (a-b)$

لدينا : $d_1 \mid nd^{n-1}$ و $d_1 \mid a-b$

و بما أن : $d \mid a$ فإن : $d^{n-1} \mid a^{n-1}$ إذن : $nd^{n-1} \mid na^{n-1}$

و بما أن : $d_1 \mid nd^{n-1}$ فإن : $d_1 \mid na^{n-1}$

ومنه : $d_1 \mid na^{n-1} \wedge (a-b)$ أي : $d_1 \mid d_2$

لدينا : $d_2 \mid a-b$ و $d_2 \mid na^{n-1}$

ومنه : $a \equiv b \quad [d_2]$ و $na^{n-1} \equiv 0 \quad [d_2]$

و بما أن : $d = a \wedge b$ فإن : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2 : d = \alpha a + \beta b$

ومنه : $d \equiv \alpha a + \beta b \quad [d_2]$

$$d \equiv \alpha a + \beta a \quad [d_2]$$

إذن : $d \equiv (\alpha+\beta) a \quad [d_2]$

ومنه : $n d^{n-1} \equiv n(\alpha+\beta)^{n-1} \cdot \alpha^{n-1} \quad [d_2]$

وبما أن : $n\alpha^{n-1} \equiv 0 \quad [d_2]$ فإن : $n d^{n-1} \equiv 0 \quad [d_2]$

إذن : $d_2 \mid n d^{n-1}$ و $d_2 \mid a-b$

ومنه : $d_2 \mid n d^{n-1} \wedge (a-b)$ أي : $d_2 \mid n(a\wedge b)^{n-1} \wedge (a-b)$

وبالتالي : $d_2 \mid d_1$

بما أن : $d_1 \mid d_2$ و $d_2 \mid d_1$ و $d_1 > 0$ و $d_2 > 0$.

فإن : $d_1 = d_2$

وبالتالي : $\left(\dfrac{a^n-b^n}{a-b}\right) \wedge (a-b) = n(a\wedge b)^{n-1} \wedge (a-b)$

63 حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظمة : $(S) \begin{cases} x+y=1008 \\ x\wedge y=24 \end{cases}$

الجواب : نضع : $d = x\wedge y$ ، ومنه :

$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \; : \; x = d\alpha$ و $y = d\beta$ و $\alpha\wedge\beta = 1$

إذن النظمة (S) تكافئ : $\begin{cases} d(\alpha+\beta) = 1008 \\ d = 24 \\ \alpha\wedge\beta = 1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} \alpha+\beta = 42 \\ \alpha\wedge\beta = 1 \\ d = 24 \end{cases}$

نلخص الحالات الممكنة لـ α و β ثم لـ x و y في الجدول التالي :

α	1	5	11	13	17	19
β	41	37	31	29	25	23
x	24	120	264	312	408	456
y	984	888	744	696	600	552

ملاحظة :
إذا كان $(x,y) \in S$
فإن : $(y,x) \in S$

ومنه مجموعة حلول النظمة (S) هي :

$S = \{(24;984) ; (984;24) ; (120;888) ; (888;120) ; (264;744) ;$
$(744;264) ; (312;696) ; (696,312) ; (408,600) ; (600,408) ;$
$(456,552) ; (552,456)\}$

64 حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ النظمة التالية :

$$(S)\ \begin{cases} x^2+y^2=19476 \\ x\vee y=1260 \end{cases}$$

الجواب : نضع : $d=x\wedge y$ ومنه :

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$: $x=d\alpha$ و $y=d\beta$ و $\alpha\wedge\beta=1$

إذن النظمة (S) تكافئ :

$$\begin{cases} d^2(\alpha^2+\beta^2)=19476 \\ \dfrac{d^2\alpha\beta}{d}=1260 \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases}$$

(لأن : $x\vee y=\dfrac{|xy|}{d}$)

ومنه :

$$\begin{cases} d^2(\alpha^2+\beta^2)=19476 \\ \alpha\beta=\dfrac{1260}{d} \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases}$$

بما أن : $d^2(\alpha^2+\beta^2)=19476$ فإن : $d^2\mid 19476$

وبما أن : $19476=2^2\times3^2\times541$ فإن : $d^2\in\{1;2^2;3^2;6^2\}$

وبما أن : $d\in\mathbb{N}^*$ فإن : $d\in\{1;2,3,6\}$

لدينا :

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=\dfrac{19476}{d^2} \\ \alpha\beta=\dfrac{1260}{d} \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\dfrac{19476}{d^2} \\ \alpha\beta=\dfrac{1260}{d} \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)^2=\dfrac{19476}{d^2}+\dfrac{2520}{d} \\ \alpha\beta=\dfrac{1260}{d} \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases}$$

نلخص الحالات الممكنة في الجدول التالي :

$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=6$
لا توجد α	لا توجد α	لا توجد α	$\alpha=10$
لا توجد β	لا توجد β	لا توجد β	$\beta=21$
لا توجد x	لا توجد x	لا توجد x	$x=60$
لا توجد y	لا توجد y	لا توجد y	$y=126$

ملاحظة : إذا كان $(x,y)\in S$ فإن : $(y,x)\in S$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي :

$$S=\{(60;126);(126;60)\}$$

65

حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ النظمة :
$$(S)\quad \begin{cases} x \vee y - x \wedge y = 77 \\ 0 < x < y \end{cases}$$

الجواب : نضع : $d = x \wedge y$ ، ومنه :

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \; : \; x = d\alpha$ و $y = d\beta$ و $\alpha\wedge\beta = 1$

إذن النظمة (S) تكافئ :
$$\begin{cases} \dfrac{d^2\alpha\beta}{d} - d = 77 \\ 0 < \alpha < \beta \\ \alpha\wedge\beta = 1 \end{cases}$$

أي :
$$\begin{cases} d(\alpha\beta - 1) = 77 \\ 0 < \alpha < \beta \\ \alpha\wedge\beta = 1 \end{cases}$$

بما أن : $d \mid 77$ فإن : $d \in \{1, 7, 11, 77\}$

نلخص الحالات الممكنة في الجدول التالي :

	$d=1$				$d=7$		$d=11$	$d=77$
النظمة (S)	$\alpha\beta-1=77$; $0<\alpha<\beta$; $\alpha\wedge\beta=1$				$\alpha\beta-1=11$; $0<\alpha<\beta$; $\alpha\wedge\beta=1$		$\alpha\beta-1=7$; $0<\alpha<\beta$; $\alpha\wedge\beta=1$	$\alpha\beta-1=1$; $0<\alpha<\beta$; $\alpha\wedge\beta=1$
α	1	2	3	6	1	3	1	1
β	78	39	26	13	12	4	8	2
x	1	2	3	6	7	21	88	77
y	78	39	26	13	84	28	88	144

ومنه مجموعة حلول النظمة (S) هي :

$$S = \{(1,78) ; (2,39) ; (3,26) ; (6,13) ; (7,84) ; (21,28) ; (11,88) ; (77,144)\}$$

66

1) بين أن لكل n من $\mathbb{Z}$: $(2n+1)\wedge(9n+4) = 1$

2) ليكن n من $\mathbb{Z}$ نضع : $d_n = (2n-1)\wedge(9n+4)$

حدد حسب قيم n قيمة d_n .

الجواب : 1) لدينا لكل n من $\mathbb{Z}$: $9(2n+1) - 2(9n+4) = 1$

ومنه حسب مبرهنة Bezout : $(2n+1)\wedge(9n+4) = 1$

2) باستعمال القسمة الاقليدية لـ $9n+4$ على $2n-1$ نحصل على :

$$9n+4 = 4(2n-1) + (n+8)$$

ولدينا كذلك : $2n-1 = 2(n+8) - 17$

ومنه : $d_n = (9n+4) \wedge (2n-1)$

$$d_n = (2n-1) \wedge (n+8)$$

$$d_n = (n+8) \wedge 17$$

الحالة 1 : إذا كان : $n \equiv 9 \ [17]$ فإن : $d_n = 17$

الحالة 2 : إذا كان : $n \not\equiv 9 \ [17]$ و 17 عدد أولي

فإن : $17 \nmid$ يقسم $n+8$ ومنه : $(n+8) \wedge 17 = 1$

أي : $d_n = 1$

67

حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظمة التالية : $(S) \begin{cases} a \wedge b = 12 \\ b \wedge c = 18 \\ a+b+c = 102 \end{cases}$

الجواب : بما أن : $a \wedge b = 12$ و $b \wedge c = 18$

فإن : $a \wedge b \wedge c = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = 12 \wedge 18 = 6$

إذن : $\exists (a', b', c') \in \mathbb{N}^{*3}$: $a = 6a'$ و $b = 6b'$ و $c = 6c'$ و $a' \wedge b' \wedge c' = 1$

إذن النظمة (S) تكافئ : $\begin{cases} a' \wedge b' = 2 \\ b' \wedge c' = 3 \\ a'+b'+c' = 17 \\ (a', b', c') \in \mathbb{N}^{*3} \end{cases}$

ومنه : $b' \in \{6, 12\}$

(لأن : $2 \mid b'$ و $3 \mid b'$ ، $2 \wedge 3 = 1$ ، $6 \mid b'$ و $b' \leq 12$)

نلخص الحالات الممكنة في الجدول التالي :

b'	a'	c'	b	a	c
12	2	3	72	12	18
6	3	8	36	18	48
	2	9		12	54

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي :

$$S = \{ (12 ; 72 ; 18) ; (18, 36 ; 48) ; (12 ; 36, 54) \}$$

68 نعتبر في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة : $x^3 - y^3 = 999$

و ليكن S مجموعة حلولها .

1) ليكن (x,y) عنصراً من S .

أ - بين أن : $x > y > 1$.

ب - بين أن : $x \geq y+3$.

2) استنتج أن : $y \leq 10$.

3) حدد x إذا كان : $y=1$.

4) نفترض أن : $y \neq 1$.

أ- بين أن : $(x;y) \in S \Rightarrow y \geq 7$ و $x \geq 11$

ب- استنتج مجموعة حلول المعادلة المقترحة .

الجواب : 1) أ- ليكن (x,y) من S إذن : $x^3 - y^3 = 999 > 0$

ومنه : $x^3 > y^3$ أي : $x > y$ (لأن : $\begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$)

وبما أن : $y \in \mathbb{N}^*$ فإن : $y \geq 1$.

وبالتالي : $x > y > 1$.

ب- لدينا 3 عدد أولي، ومنه حسب مبرهنة Fermat :

$x^3 \equiv x \quad [3]$ و $y^3 \equiv y \quad [3]$

ومنه : $x - y \equiv x^3 - y^3 \quad [3]$

أي : $x - y \equiv 999 \quad [3]$ (لأن : $x^3 - y^3 = 999$)

إذن : $x - y \equiv 0 \quad [3]$

ومنه : $x - y = 3\alpha \mid \alpha \geq 1$ (لأن : $x > y$)

إذن : $x - y \geq 3$. (لأن : $3\alpha \geq 3$)

وبالتالي : $x \geq y+3$.

2) ليكن (x,y) من S ، لدينا : $999 = x^3 - y^3$

وبما أن : $x \geq y+3$ فإن : $999 \geq (y+3)^3 - y^3$

أي : $999 \geq 9y^2 + 27y + 27 > 9y^2$

إذن : $111 > y^2$

وبما أن : $y \in \mathbb{N}$ فإن : $y \leq 10$.

3) لنحدد $\mathcal{S}$ إذا كان : $y=1$

لدينا : $(x,1)\in\mathcal{S} \Leftrightarrow x^3-1=999$

$\Leftrightarrow x^3=1000 \Leftrightarrow x=10$

ومنه : $(10,1)\in\mathcal{S}$

4) إذا كان : $y\neq 1$ فإن : $y\geqslant 2$

أ- ليكن $(x;y)$ من $\mathcal{S}$ لدينا : $x^3=999+y^3$

وبما أن : $y^3\geqslant 8$ فإن : $x^3\geqslant 999+8$ أي : $x^3\geqslant 1007$

ومنه : $x\geqslant 11$

ولدينا : $y^3=x^3-999$ إذن : $y^3\geqslant 11^3-999=332$

ومنه : $y\geqslant 7$.

ب- لدينا إذا كان (x,y) من $\mathcal{S}$ و $y\neq 1$ فإن : $x\geqslant 11$ و $7\leqslant y\leqslant 10$

بأخذ : $y=7$ لا يوجد حلاً لـ x .

بأخذ : $y=8$ لا يوجد حلاً لـ x .

بأخذ : $y=9$ يوجد حلا $x=12$.

بأخذ : $y=10$ لا يوجد حلاً لـ x .

وبما أن : $(10,1)\in\mathcal{S}$ فإن مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي :

$$\mathcal{S}=\{(10;1)\ ;\ (12;9)\}$$

69

ليكن p عدداً أولياً و $p\geqslant 5$ وليكن a و b من $\mathbb{Z}^*$.

1) بين أن : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [6]$

2) استنتج أن : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [6p]$

الجواب :

1) * إذا كان : $a\equiv 0\ [2]$ فإن : $ab^p\equiv 0\ [2]$ و $a^pb\equiv 0\ [2]$

ومنه : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [2]$

* إذا كان : $a\equiv 1\ [2]$ فإن : $ab^p\equiv b^p\ [2]$ و $a^pb\equiv b\ [2]$

ومنه : $ab^p-a^pb\equiv b^p-b\ [2]$

وبما أن : $b^p-b=b(b^{p-1}-1)=b(b-1)(b^{p-2}+b^{p-3}+\dots+b+1)$

و $2\,|\,(b-1)$ فإن : $b^p-b\equiv 0\ [2]$

ومنه : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [2]$ وبالتالي : $2\,|\,ab^p-ba^p$ لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$

* إذا كان : $a\equiv 0\ [3]$ فإن : $a^pb\equiv 0\ [3]$ و $ab^p\equiv 0\ [3]$

ومنه : $ab^p - a^pb \equiv 0\ [3]$

* إذا كان : $a\equiv 1\ [3]$ فإن : $ab^p-ba^p\equiv b^p-b\ [3]$

$b\equiv$	0	1	-1	$[3]$
$b^p\equiv$	0	1	-1	$[3]$
$b^p-b\equiv$	0	0	0	$[3]$

من خلال هذا الجدول

نستنتج أن : $b^p-b\equiv 0\ [3]$

وبالتالي : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [3]$

* إذا كان : $a\equiv -1\ [3]$ فإن : $ab^p-ba^p\equiv -b^p+b\ [3]$

ومنه : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [3]$

وبالتالي $ab^p-ba^p\equiv 0\ [3]$ لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$

$$\begin{cases} 3\mid ab^p-ba^p \\ 2\mid ab^p-ba^p \\ 2\wedge 3=1 \end{cases}$$ فإن : $6\mid ab^p-ba^p$

وبالتالي : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [6]$

ج) حسب مبرهنة Fermat لدينا : $a^p\equiv a\ [p]$ و $b^p\equiv b\ [p]$

ومنه : $ab^p-ba^p\equiv ab-ab\ [p]$

أي : $ab^p-ba^p\equiv 0\ [p]$

إذن : $p\mid ab^p-ba^p$

بما أن ، $$\begin{cases} p\mid ab^p-ba^p \\ 6\mid ab^p-ba^p \\ p\wedge 6=1 \end{cases}$$ فإن : $6p\mid ab^p-ba^p$

وبالتالي لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$: $ab^p-ba^p\equiv 0\ [6p]$

70 (مبرهنة Wilson)

1) ليكن p من $\mathbb{N}^*$ حيث : $p \geq 2$ و $(p-1)!+1 \equiv 0 \quad [p]$

بين أن : p عدد أولي .

2) ليكن p عدداً أولياً من $\mathbb{N}$. $[\![1,p]\!]=\{1,2,\dots;p-1\}$

أ- بين أن : $\forall x\in [\![1,p-1]\!] \quad \exists! \, r \in [\![1;p-1]\!] \ : \quad xr \equiv 1 \quad [p]$

ب - حل في $[\![1;p-1]\!]$ المعادلة : $x^2 \equiv 1 \quad [p]$

ج - استنتج أن : $(p-1)!+1 \equiv 0 \quad [p]$

الجواب : 1) لدينا p من $\mathbb{N}$ و $p \geq 2$.

بما أن : $(p-1)!+1 \equiv 0 \quad [p]$ فإن : $\exists k\in \mathbb{Z} : \ (p-1)!+1 = kp$

أي : $\exists k\in\mathbb{Z} : \quad kp-(p-1)! = 1$

ومنه حسب مبرهنة Bezout : $p \wedge (p-1)! = 1$

إذن : $p\wedge 2 = 1$ ، $p \wedge 3 = 1$ ، .... ، $p\wedge p-1 = 1$

لكل n من $\{2,\dots,p-1\}$: n لا يقسم p ومنه p عدد أولي .

2) أ- ليكن p عدد أولي و $p\geq 2$ وليكن x من $[\![1,p-1]\!]$

إذن : $x < p$

وبما أن p أولي فإن : $p\wedge x = 1$ ، ومنه حسب مبرهنة Bezout

$\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2 : \quad \alpha x + \beta p = 1$

أي : $\alpha x \equiv 1 \quad [p]$

القسمة الإقليدية لـ α على p تعطي :

$\exists! \, (q,r) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \quad \alpha = qp + r \quad$ و $\quad 0 \leq r \leq p-1$

ومنه : $(qp+r)x \equiv 1 \quad [p]$

أي : $qpx + rx \equiv 1 \quad [p]$

وبالتالي : $rx \equiv 1 \quad [p]$ و $r\in [\![0;p-1]\!]$

ب - لنحل في $[\![1,p-1]\!]$ المعادلة : $(1) : \ x^2 \equiv 1 \ [p]$

لدينا : $x^2 \equiv 1 \quad [p] \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1) \equiv 0 \quad [p]$

$\Leftrightarrow \quad p \mid (x-1)(x+1)$

(لأن p أولي) $\Leftrightarrow \quad p\mid (x-1)$ أو $p \mid (x+1)$

$x^2 \equiv 1 \ [p] \iff x-1 \equiv 0 \ [p]$ أو $x+1 \equiv 0 \ [p]$

$\iff x \equiv 1 \ [p]$ أو $x \equiv -1 \ [p]$

$\iff x \equiv 1 \ [p]$ أو $x \equiv p-1 \ [p]$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S = \{1 ; p-1\}$

ج- بما أن هناك عنصران فقط يقبلان كمقلوب نفسهما : 1 و $p-1$

فإن : $\forall x \in \{2, ... ; p-2\} : \exists ! \, r \neq x \ \ (r \in \{2, ..., p-2\}) : xr \equiv 1 \ [p]$

وبالتالي : $2 \times 3 \times .... \times p-2 \equiv 1 \ [p]$

إذن : $(2 \times 3 \ ..... \times p-2)(p-1) \equiv (p-1) \ [p]$

ومنه : $(p-1)! \equiv p-1 \ [p]$

وبالتالي : $(p-1)! + 1 \equiv 0 \ [p]$

خلاصة مبرهنة wilson :

$$\boxed{p \text{ أولي} \iff (p-1)!+1 \equiv 0 \ [p]}$$

تطبيقات مبرهنة WILSON

71

1) ليكن n من $\mathbb{N}$ و $n \geq 5$

بين الاستلزام التالي : $(n!-1)$ غير أولي $\Rightarrow$ $(n+2)$ أولي

2) ليكن n عدد من $\mathbb{N}$ و n زوجي بحيث : $p=2n+1$ أولي .

بين أن : $(n!)^2 + 1 \equiv 0 \ [p]$

3) ليكن p عدد أولي فردي .

بين أن : $2((p-3)!) + 1 \equiv 0 \ [p]$

الجواب : 1) لدينا : $n+2$ أولي ومنه حسب مبرهنة wilson

$$(n+1)! + 1 \equiv 0 \ [n+2]$$

أي : $(n+1)! \equiv -1 \ [n+2]$

ولدينا :

$$\begin{aligned}(n+1)! + 1 &= (n+1)n! + 1 \\ &= (n+1)n! - n! + n! + 1 \\ &= (n+2)n! - n! + 1\end{aligned}$$

وبما أن : $(n+1)!+1\equiv 0 \ [n+2]$ فإن : $(n+2)n!-n!+1\equiv 0 \ [n+2]$

أي : $-n!+1\equiv 0 \ [n+2]$ (لأن : $(n+2)n!\equiv 0 \ [n+2]$)

ومنه : $n+2 \mid n!-1$

وبما أن : $\begin{cases} n>5 \\ 1<n+2<n!-1 \end{cases}$ فإن $n!-1$ غير أولي .

2) لدينا : $p=2n+1$ أولي إذن حسب مبرهنة Wilson لدينا :

$(p-1)!+1\equiv 0 \ [p]$ أي : $(2n)!\equiv -1 \ [p]$ أي : $p \mid (2n)!+1$

ولدينا : $(2n)!=(1\times 2\times \dots \times n)((n+1)\times \dots \times (2n))$

وبما أن : $n+1\equiv 2n+1-n \ [p]$

$n+1\equiv -n \ [p]$

$n+2\equiv -n+1 \ [p]$

$\vdots$

$2n\equiv -1 \ [p]$

ومنه : $(n+1)(n+2)\times \dots \times (2n)\equiv (-n)(-n+1)\times \dots \times (-1) \ [p]$

$\equiv (-1)^n(n(n-1)\times \dots \times 1) \ [p]$

$\equiv (-1)^n.n! \ [p]$

وبما أن : n زوجي فإن : $(n+1)(n+2)\times \dots \times (2n)\equiv n! \ [p]$

ومنه : $(2n)!\equiv (n!)(n!) \ [p]$

وبالتالي : $(2n)!+1\equiv (n!)^2+1 \ [p]$

وبما أن : $(2n)!+1\equiv 0 \ [p]$ فإن : $(n!)^2+1\equiv 0 \ [p]$

3) نضع : $a=2((p-3)!)$

لدينا : $(p-1)(p-2)a=2(p-1)(p-2)(p-3)!$

$=2(p-1)!$

بما أن : p عدد أولي فإنه حسب مبرهنة Wilson : $(p-1)!\equiv -1 \ [p]$

ومنه : $(p-1)(p-2)a\equiv -2 \ [p]$

وبما أن : $p-1\equiv -1 \ [p]$ و $p-2\equiv -2 \ [p]$

فإن : $(p-1)(p-2)\equiv 2 \ [p]$

ومنه : $2a\equiv 2 \ [p]$ إذن : $2(a+1)\equiv 0 \ [p]$

وبما أن p أولي و p فردي فإن p لا يقسم 2 ومنه : $2\wedge p=1$

إذن : $2\wedge p=1$ و $p \mid 2(a+1)$ ومنه : $p \mid a+1$

إذن : $a+1\equiv 0 \ [p]$

وبالتالي : $2((p-3)!)+1\equiv 0 \ [p]$

72

ليكن p عددا أوليا و n من $\mathbb{Z}$.

نضع : $u_n = n^p + (p-1)!\,n$

1) بين أن : $u_n\equiv 0 \ [p]$

2) بين أن : $1999 \mid (2000)^{1999} + 2000(1988!)$

الجواب : 1) لدينا p أولي إذن حسب مبرهنة Fermat :

$$n^p\equiv n \ [p]$$

وحسب مبرهنة Wilson : $(p-1)!\equiv -1 \ [p]$

ومنه : $n(p-1)!\equiv n \ [p]$ و $n^p\equiv n \ [p]$

وبالتالي : $n^p + n(p-1)!\equiv 0 \ [p]$ أي : $u_n\equiv 0 \ [p]$

2) لنبين أن : $1999 \mid (2000)^{1999} + 2000(1988!)$

لنبين أولا أن : 1999 عدد أولي .

لدينا : $[\sqrt{1999}]=44$.

بما أن جميع الأعداد الأولية التي تنتمي إلى $[\![1,44]\!]$ لا تقسم 1999

ومربعها أصغر من 1999 فإن : 1999 عدد أولي .

ومنه حسب السؤال 1) نأخذ : $p=1999$ و $n=2000$

نستنتج أن : $(2000)^{1999} + 2000(1988!)\equiv 0 \ [1999]$

وبالتالي : $1999 \mid (2000)^{1999} + 2000(1988!)$

73

حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ النظمة التالية :

$$(S)\ \begin{cases} x\wedge y=18\\ x\vee y=540\end{cases}$$

الجواب : نضع : $d=x\wedge y$ نعلم أن : $(x\wedge y)(x\vee y)=|xy|$

ومنه : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : x=\alpha d$ و $y=\beta d$ و $\alpha\wedge\beta=1$

إذن النظمة (S) تكافيء :
$$\begin{cases} d=18 \\ \alpha\beta d=54 \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} d=18 \\ \alpha\beta=30 \\ \alpha\wedge\beta=1 \end{cases}$$

بما أن : $\alpha|30$ فإن : $\alpha\in\{1;2;3;5;6;10;15;30\}$

بما أن : $\alpha\wedge\beta=1$ فإن القيم الممكنة لـ α و β هي :

$\alpha=1 \Leftrightarrow \beta=30$ ، $\alpha=2 \Leftrightarrow \beta=15$

$\alpha=3 \Leftrightarrow \beta=10$ ، $\alpha=5 \Leftrightarrow \beta=6$

وبما أن α و β يلعبان أدوار مماثلة فإن مجموعة حلول النظمة (S) هي :

$S=\{(18;540);(36;270);(54;180);(90;108);(540;18);$
$(270;36);(180;54);(108;90)\}.$

74 ليكن n من $\mathbb{N}$ ؛ نضع : $u_n=\sqrt{\frac{n}{n+2}}$

1) لتكن a و b و c و d أعداداً من $\mathbb{N}$ بحيث : $a\wedge b=1$ و $c\wedge d=1$

بين أن : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a=c$ و $b=d$

2) استنتج أن : $u_n\notin\mathbb{Q}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (ناقش حسب زوجية n)

<u>الجواب :</u> 1) لدينا : $a\wedge b=1$ و $c\wedge d=1$ و $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

إذن : $ad=bc$ ومنه : $a|bc$

وبما أن : $a\wedge b=1$ فإنه حسب غوص : $a|c$

وبما أن : $c|ad$ و $c\wedge d=1$ فإن : $c|a$

إذن :
$$\begin{cases} a|c \\ c|a \\ a\geq 0 \text{ و } c\geq 0 \end{cases}$$
ومنه : $a=c$

وبما أن : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ و $a=c$ فإن : $b=d$

وبالتالي :
$$\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \\ a\wedge b=1 \text{ و } c\wedge d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

2) نفترض أن : $u_n \in \mathbb{Q}$ أي : $\exists (p,q) \in \mathbb{N}^{*2} : u_n = \frac{p}{q}$ و $p \wedge q = 1$

إذن : $u_n = \frac{p}{q} \Leftrightarrow u_n^2 = \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{n}{n+2}$

* إذا كان : $n = 2\alpha$ زوجي فإن : $\frac{p^2}{q^2} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ و $\begin{cases} p^2 \wedge q^2 = 1 \\ \alpha \wedge (\alpha+1) = 1 \end{cases}$

فحسب السؤال 1) نستنتج أن : $p^2 = \alpha$ و $q^2 = \alpha + 1$

ومنه : $q^2 - p^2 = 1$ أي : $(q-p)(q+p) = 1$

إذن : $\begin{cases} p+q = 1 \\ q-p = 1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} p = 0 \\ q = 1 \end{cases}$ تناقض مع كون $p \wedge q = 1$

* إذا كان : $n = 2\alpha+1$ فردي فإن : $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2\alpha+1}{2\alpha+3}$

لدينا : $(2\alpha+3) \wedge (2\alpha+1) = (2\alpha+1) \wedge 2 = 1$

لأن : 2 عدد أولي و 2 لا يقسم $2\alpha+1$.

وبما أن : $p^2 \wedge q^2 = 1$ فإن : $\begin{cases} p^2 = 2\alpha+1 \\ q^2 = 2\alpha+3 \end{cases}$

ومنه : $q^2 - p^2 = 2$ أي : $(q-p)(q+p) = 2$

بما أن : $p+q > q-p$ فإن : $\begin{cases} p+q = 2 \\ q-p = 1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ p = \frac{1}{2} \end{cases}$ تناقض مع كون $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

ومنه الافتراض خاطئ وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \notin \mathbb{Q}$

75

الهدف من هذا التمرين هو البرهنة بالخلف على أن لكل a و b من $\mathbb{N}^*$ حيث : $a > b$ لدينا : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$

نفترض أن يوجد n من $\mathbb{N}$ بحيث : $n = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ و نضع : $d = a \wedge b$

1) بين أنه : $\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{*2} : \alpha^2 + \beta^2 = n(\alpha^2 - \beta^2)$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

2) بين أنه : $\exists k \in \mathbb{N}^* : k(\alpha^2 - \beta^2) = 2$

3) بين أن : $\alpha^2 - \beta^2 \geq 3$

4) استنتج أن : $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$.

الجواب : 1) لدينا : $d = a \wedge b$ ومنه :

$\exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : a = d\alpha$ و $b = d\beta$ و $\alpha \wedge \beta = 1$

إذن: $n = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{d^2\alpha^2+d^2\beta^2}{d^2\alpha^2-d^2\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

ومنه: $n(\alpha^2-\beta^2) = \alpha^2+\beta^2$

(ملاحظة: $a>b \Leftrightarrow \alpha>\beta$)

2) حسب السؤال 1) لدينا: $n(\alpha^2-\beta^2)=\alpha^2+\beta^2$

ومنه: $\alpha^2(n-1)=\beta^2(n+1)$ $(*)$

لدينا: $\alpha\wedge\beta=1 \Leftrightarrow \alpha^2\wedge\beta=1$

وبما أن: $\beta^2 \mid \alpha^2(n-1)$ و $\alpha^2\wedge\beta^2=1$ فإنه حسب مبرهنة غوص:

$\beta^2 \mid n-1$ ومنه: $\exists k\in\mathbb{N}^*: \quad n-1=k\beta^2$

ومن $(*)$ نستنتج أن: $\beta^2(n+1)=\alpha^2k\beta^2$ أي: $n+1=k\alpha^2$

إذن لدينا: $n-1=k\beta^2$ و $n+1=k\alpha^2$

ومنه: $k\alpha^2-k\beta^2=2$

أي: $k(\alpha^2-\beta^2)=2$

3) لدينا: $a>b \Leftrightarrow \alpha>\beta$

(لأن: α,β من $\mathbb{N}^*$) $\Leftrightarrow \alpha\geq\beta+1$

$\Leftrightarrow \alpha^2\geq(\beta+1)^2=\beta^2+2\beta+1$

$\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2\geq 2\beta+1$

وبما أن: $\beta\in\mathbb{N}^*$ فإن: $\beta\geq1$ ومنه: $2\beta+1\geq3$

وبالتالي: $\alpha^2-\beta^2\geq3$

4) بافتراضنا أن: $n=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ فإننا حصلنا على ما يلي:

يوجد k من $\mathbb{N}^*$ بحيث: $k(\alpha^2-\beta^2)=2$ و $\alpha^2-\beta^2\geq3$ و $\alpha\wedge\beta=1$

إذن: $k(\alpha^2-\beta^2)\geq3k$ ومنه: $2\geq3k$

أي: $k\leq\frac{2}{3}$ تناقض مع كون $k\geq1$

إذن: الافتراض خاطئ.

وبالتالي: لا يوجد a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث: $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\in\mathbb{N}$ و $a>b$

www.learnit.66ghz.com

76 لتكن a و b و A و B أعداداً صحيحة طبيعية بحيث :

$A = 11a + 2b$ و $B = 18a + 5b$

1) أ. أحسب : $7A + B$ بدلالة a و b .

ب- استنتج أنه إذا كان أحد العددين A و B يقبل القسمة على 19 فإن الآخر يقبل القسمة على 19 .

2) بين أنه إذا كان العددان a و b أوليين فيما بينهما فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B لا يمكن أن يكون إلا 1 أو 19 .

الجواب : 1) أ- لدينا : $A = 11a + 2b$ و $B = 18a + 5b$

إذن : $7A + B = 7(11a + 2b) + 18a + 5b = 95a + 19b$

ب- لدينا : $7A + B = 19(5a + b)$.

* نفترض أن : $19 \mid A$

بما أن : $B = 19(5a + b) - 7A$ و $19 \mid A$ و $19 \mid 19(5a + b)$

فإن : $19 \mid B$.

* نفترض أن : $19 \mid B$

بما أن : $7A = 19(5a + b) - B$ و $19 \mid B$ و $19 \mid 19(5a + b)$

فإن : $19 \mid 7A$

وبما أن : $19 \wedge 7 = 1$ فإن : $19 \mid A$.

2) نفترض أن : $a \wedge b = 1$

لدينا : $\begin{cases} A = 11a + 2b \\ B = 18a + 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19a = 5A - 2B \\ 19b = 11B - 18A \end{cases}$

نضع : $d = A \wedge B$

بما أن : $d \mid A$ و $d \mid B$ فإن : $d \mid 19a$ و $d \mid 19b$

ومنه : $d \mid (19a) \wedge (19b)$ أي : $d \mid 19(a \wedge b)$

وبما أن : $a \wedge b = 1$ فإن : $d \mid 19$

وبما أن : 19 عدد أولي و $d \in \mathbb{N}^*$ فإن : $d = 1$ أو $d = 19$

أي : $a \wedge b = 1$ أو $a \wedge b = 19$

77

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $36x-25y=5$ (1)

1) بين أن x مضاعف للعدد 5 إذا كان (x,y) حلاً للمعادلة (1)

2) حدد حلا خاصًا للمعادلة (1) ؛ ثم حل المعادلة (1)

3) ليكن (x,y) حلاً للمعادلة (1) و $d=x\wedge y$

أ- حدد القيم الممكنة للعدد d .

ب- حدد الحلول (x,y) للمعادلة (1) حيث : $x\wedge y=1$.

الجواب : 1) لتكن S مجموعة حلول المعادلة (1)

لدينا : $(x,y)\in S \iff 36x-25y=5$

$\iff 36x=5(1+5y)$

$\Rightarrow 5 \mid 36x$

بما أن : $5\wedge 36=1$ فإنه حسب مبرهنة Gauss : $5\mid x$

أي : x مضاعف للعدد 5 ومنه : $x=5x'$ $(x'\in\mathbb{Z})$

2) لنحدد حلاً خاصًا للمعادلة (1) :

$36x-25y=5 \iff x=5x'$ و $36x'-5y=1$

نلاحظ أن : $(1,7)$ حلاً للمعادلة : $36x'-5y=1$

ومنه : $(5,7)$ حلاً خاصًا للمعادلة (1)

لدينا : $(x,y)\in S \iff 36x-25y=5$

$36.5-25.7=5$

إذن : $36(x-5)=25(y-7)$

بما أن : $36\mid 25(y-7)$ و $36\wedge 25=1$ فإن : $36\mid y-7$

أي : $\exists k\in\mathbb{Z} : \quad y-7=36k$

$\exists k\in\mathbb{Z} : \quad y=7+36k$

إذن : $x-5=25k$ أي : $x=5+25k$

عكسيًا : الزوج : $(5+25k;7+36k)$ حل للمعادلة (1) لكل k من $\mathbb{Z}$

وبالتالي حلول المعادلة (1) هي :

$$S=\{(5+25k\,;\,7+36k) \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

3) أ- ليكن (x,y) من S لنحدد : $d = x \wedge y$

$(x,y) \in S \Leftrightarrow x = 5 + 25k$ و $y = 7 + 36k \mid k \in \mathbb{Z}$

لدينا : $d \mid x$ و $d \mid y$ إذن : $d \mid 36x - 25y = 5$

ومنه : $d = 1$ أو $d = 5$.

ب - يكون $d = 5$ إذا كان : $y = 36k + 7$ مضاعف للعدد 5 .

أي : $36k + 7 \equiv 0 \; [5]$ أي : $k + 2 \equiv 0 \; [5]$

ومنه : $k \equiv 3 \; [5]$

يكون $d = 1$ إذا كان : $k = 5k' + 1$ أو $k = 5k' + 2$

أو $k = 5k' + 4$ أو $k = 5k'$ $(k' \in \mathbb{Z})$

ومنه : $(x,y) \in S$ و $x \wedge y = 1$ إذا وفقط إذا كان :

$(x,y) \in \{ (25(5k'+1)+5 ; 36(5k'+1)+7)$;

$(25(5k'+2)+5 ; 36(5k'+2)+7)$; $(25(5k'+4)+5 ; 36(5k'+4)+7)$;

$(25.5k'+5 ; 36.5k'+7) \mid k' \in \mathbb{Z} \}$

78 حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلات التالية :

(1) : $12x - 15y = 8$

(2) : $24x - 20y = 12$

(3) : $143x - 100 = 1$

الجواب :

* لنحل المعادلة : $12x - 15y = 8$ (1)

لدينا : $12 \wedge 15 = 3$ و ليكن (x,y) حلا للمعادلة (1)

إذن : $3 / 12x - 15y$ ومنه : $3 / 8$, وهذا تناقض .

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S_1 = \phi$

* لنحل المعادلة : $24x - 20y = 12$ (2)

لدينا : $24 \wedge 20 = 4$ و $4 / 12$

إذن المعادلة (2) تكافئ : المعادلة : $6x - 5y = 3$

لدينا : $(3,3)$ حلاً بديهياً للمعادلة (2)

$$(2) \Leftrightarrow 6x-5y=3 \quad \text{و} \quad 6.3-5.3=3$$

$$\Leftrightarrow 6(x-3)-5(y-3)=0$$

$$\Leftrightarrow 6(x-3)=5(y-3)$$

بما أن : $6\,|\,5(y-3)$ و $6\wedge 5=1$ فإنه حسب مبرهنة Gauss

$6\,|\,y-3$ أي : $y-3=6k$: $\exists k\in\mathbb{Z}$

ومنه : $y=3+6k$: $(k\in\mathbb{Z})$

إذن : $6(x-3)=5.6k$ أي : $x-3=5k$

ومنه : $x=3+5k$

عكسيا لكل k من $\mathbb{Z}$: $(3+5k, 3+6k)$ حلاً للمعادلة (2)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (2) هي :

$$S_2=\{(3+5k\,;\,3+6k)\ |\ k\in\mathbb{Z}\}$$

* لنحل المعادلة : $143x-100x=1$ (3)

لدينا : $143\wedge 100=1$ إذن المعادلة (3) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

لنحدد إذن حلاً بديهياً لهذه المعادلة.

نضع : $b=143$ و $a=100$

لدينا : $b=a+43$

$a=2.43+14$

$43=3.14+1$

سنحاول أن نكتب العدد 1 بدلالة a و b

لدينا، $b-a=43$.

$14=a-2.43=a-2(b-a)$

$14=3a-2b$

ولدينا : $1=43-3.14$

$1=(b-a)-3(3a-2b)$

$1=7b-10a$ ومنه : $(7,10)$ حلا بديهيا للمعادلة (2)

لدينا : $143.7-100.10=1$ و $143x-100y=1 \quad \Leftrightarrow \quad (3)$

$\Leftrightarrow \quad 143(x-7)=100(y-10)$

بما أن : $143 \mid 100(y-10)$ و $143 \wedge 100 = 1$ فإن : $143 \mid y-10$

إذن : $y-10 = 143k \quad : \exists k \in \mathbb{Z}$

أي : $y = 10 + 143k$

ولدينا : $143.(x-7) = 100.143k$ أي : $x-7 = 100k$

ومنه : $x = 7 + 100k$

عكسيا لكل k من $\mathbb{Z}$ ؛ $(7+100k ; 10+143k)$ حلا للمعادلة (3)

وبالتالي حلول المعادلة (3) هي : $S_3 = \{(7+100k ; 10+143k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

79

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $17x - 15y = 3 \quad (E)$

1) بين أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن : x مضاعف 3 .

2) حل المعادلة (E) .

3) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) ؛ نضع : $d = x \wedge y$

أ- ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب- ما هي الحلول (x,y) بحيث يكون لدينا : $d \neq 1$ ؟

الجواب : 1) لتكن S مجموعة المعادلة (E)

لدينا : $17x - 15y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \in S$

$\Leftrightarrow \quad 17x = 3(5y+1)$

ومنه : $\begin{cases} 3 \mid 17x \\ 17 \wedge 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 \mid x$

إذن : x مضاعف لـ 3 .

2) نضع : $x = 3x' \quad (x' \in \mathbb{Z})$

المعادلة (E) تكافئ : $(E') : \quad 17x' - 5y = 1$

لدينا : $(-2,-7)$ حلا بديهيا للمعادلة (E') .

لدينا : $17.(-2) - 5.(-7) = 1$ و $17x' - 5y = 1$

ومنه : $17(x'+2) = 5(y+7)$

لدينا : $\begin{cases} 17 \mid 5(y+7) \\ 17 \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow 17 \mid y+7$

إذن : $\exists k \in \mathbb{Z} : \quad y+7 = 17k$

$y = -7 + 17k$

ومنه : $17(x'+2) = 5 . 17k$

أي : $x'+2 = 5k$

$x' = -2 + 5k$

وبالتالي : $x = -6 + 15k$ و $y = -7 + 17k$ $(k \in \mathbb{Z})$

عكسيًا لكل k من $\mathbb{Z}$ ، $(-6+15k ; -7+17k)$ حل للمعادلة (E)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{ (-6+15k ; -7+17k) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

3) ليكن (x,y) من S و $d = x \wedge y$

أ- لدينا : $d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 17x - 15y$

$\Rightarrow d \mid 3$ (لأن : $17x - 15y = 3$)

ومنه : $d \in \{1;3\}$

ب - لدينا :

$$\begin{aligned} x \wedge y \neq 1 &\Leftrightarrow x \wedge y = 3 \\ &\Leftrightarrow 3 \mid y \quad (\text{لأن : } 3 \mid x) \\ &\Leftrightarrow 3 \mid -7+17k \\ &\Leftrightarrow -7+17k \equiv 0 \quad [3] \\ &\Leftrightarrow 2 - k \equiv 0 \quad [3] \\ &\Leftrightarrow k \equiv 2 \quad [3] \\ &\Leftrightarrow k = 2 + 3\alpha \quad / \quad \alpha \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ومنه : $x = 24 + 45\alpha$ و $y = 27 + 51\alpha$ حيث : $\alpha \in \mathbb{Z}$

80 كل عدد صحيح طبيعي n ، $n>1$ ، يكتب : $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$

حيث الأعداد p_i أولية ومختلفة والأعداد α_i أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

1) برهن على أن عدد القواسم الموجبة لـ n يساوي: $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\times\dots\times(1+\alpha_k)$

2) برهن على أنه إذا كان عدد صحيح طبيعي n يقبل 9 قواسم موجبة فإن n يكون على شكل: a^8 أو a^2b^2 ، حيث a و b عددان أوليان مختلفان.

3) نريد أن نحدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تحقق الشرطين:

(1) n يقبل تسعة قواسم.

(2) $n=39p+1$ ؛ حيث p عدد أولي.

أ- برهن على أن n لا يمكن أن يكون على شكل a^8 ، حيث: a عدد أولي.

ب- برهن على أن p يأخذ إحدى القيم 5 أو 37 أو 41.

ج- أوجد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي تحقق الشرطين (1) و (2).

الجواب: 1) القواسم الموجبة للعدد $p_i^{\alpha_i}$ هي: $1 ; p_i ; p_i^2 ; \dots ; p_i^{\alpha_i}$

ومنه عدد القواسم الموجبة للعدد $p_i^{\alpha_i}$ هو: $(1+\alpha_i)$

وبما أن: $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ فإنه حسب المبدأ الأساسي عدد القواسم الموجبة للعدد n هو: $\prod_{i=1}^{k}(1+\alpha_i)$ أي: $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\times\dots\times(1+\alpha_k)$

2) ليكن عدد القواسم الموجبة لـ n هو 9 إذن: 9 يمكن كتابته على شكل $(1+8)$ أو $(1+2)(1+2)$

وحسب السؤال 1) فإن n يكتب على شكل: a^8 أو $a^2\times b^2$

حيث a و b عددان أوليان مختلفان.

3) بما أن n يقبل تسعة قواسم موجبة فإنه إما على شكل a^8 أو على $a^2.b^2$ حيث: a و b عددان أوليان مختلفان.

نفترض أن: $n=a^8$.

وبما أن: $n=39p+1$ فإن: $a^8=39p+1$ (p عدد أولي)

ومنه: $a^8-1=39p$ أي: $(a^4+1)(a^2+1)(a-1)(a+1)=1\times p\times3\times13$

بما أن: a عدد أولي فإن: $a+1\neq1$ و $a^2+1\neq1$ و $a^4+1\neq1$ $(a\in\mathbb{N}^*)$

ومنه: $a-1=1$ أي: $a=2$

إذا كان: $a=2$ فإن: $(a^4+1)(a^2+1)(a-1)(a+1)=17\times5\times1\times3=1\times p\times3\times13$

غير ممكن لأن : $13p=5\times 17$ و p عدد أولي .

وبالتالي العدد n لا يمكن أن يكون على شكل : a^8

ب - بما أن العدد n لا يمكن أن يكون على شكل: a^8 فإنه يكتب على شكل: $a^2.b^2$ حيث : a و b عددان أوليا مختلفان .

إذن : $a^2.b^2=39p+1$ أي : $(ab-1)(ab+1)=39p$

(p أولي) $(ab-1)(ab+1)=3\times 13\times p$

ومنه : $\begin{cases}ab-1=p\\ab+1=39\end{cases}$ أو $\begin{cases}ab-1=39\\ab+1=p\end{cases}$ أو $\begin{cases}ab-1=1\\ab+1=39p\end{cases}$

$\begin{cases}ab-1=13p\\ab+1=3\end{cases}$ أو $\begin{cases}ab-1=3\\ab+1=13p\end{cases}$ أو $\begin{cases}ab-1=13\\ab+1=3p\end{cases}$ أو $\begin{cases}ab-1=3p\\ab+1=13\end{cases}$ أو

يكافئ : $\begin{cases}3p=11\\ab+1=13\end{cases}$ غير ممكن أو $\begin{cases}p=37\\ab+1=39\end{cases}$ أو $\begin{cases}p=41\\ab+1=p\end{cases}$ أو $\begin{cases}13p=1\\ab=2\end{cases}$ غير ممكن

$\begin{cases}13p=1\\ab+1=3\end{cases}$ غير ممكن أو $\begin{cases}3p=5\\ab+1=13p\end{cases}$ غير ممكن أو $\begin{cases}p=5\\ab+1=3p\end{cases}$

ومنه : $p=37$ أو $p=41$ أو $p=5$

ج - إذا كان : $p=5$ فإن: $n_1=39\times 5+1=196$ أي : $n_1=2^2\times 7^2$ تحقق

إذا كان: $p=37$ فإن : $n_2=39\times 37+1=1444$ أي : $n_2=2^2\times 19^2$ تحقق

إذا كان : $p=41$ فإن : $n_3=39\times 41+1=1600$ أي : $n_3=2^6\times 5^2$ لا يحقق

الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تحقق الشرطين (1) و(2) هي : 196 ؛ 1444

81

1) نضع : $a=pn$ و $b=p(n-1)$ حيث: $p\in\mathbb{N}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

بين أن : $a\wedge b=a-b$.

2) بين أنه إذا كان عددان طبيعيان غير منعدمين a و b يحققان :

$a\wedge b=a-b$ فإنه يوجد عددان طبيعيان n و p بحيث:

$a=pn$ و $b=p(n-1)$.

3) تطبيق : ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر:

$a=40x(3y+2)$ و $b=15x(8y+5)$ و $c=24x(5y+3)$

أ- حدد : $a\wedge b$ و $b\wedge c$

ب- تحقق من أن القاسم المشترك الأكبر للأعداد a و b و c هو x .

الجواب : 1) لدينا : $a=pn$ و $b=p(n-1)$ حيث : $p\in\mathbb{N}^*$ و $n\in\mathbb{N}^*$

نضع : $d=a\wedge b$ ولدينا : $a-b=pn-pn+p=p$

بما أن : $p|a$ و $p|b$ فإن : $p|a\wedge b$ أي : $p|d$

بما أن : $d|a$ و $d|b$ فإن : $d|a-b$ أي : $d|p$

بما أن : $p|d$ و $d|p$ و $p>0$ و $d>0$ فإن : $d=p$

وبالتالي : $a\wedge b=a-b$.

2) ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $a\wedge b=a-b$ إذن يوجد (α,β) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

بحيث : $a=\alpha(a-b)$ و $b=\beta(a-b)$ و $\alpha\wedge\beta=1$

إذن : $a-b=\alpha(a-b)-\beta(a-b)$ أي : $(a-b)(\alpha-\beta-1)=0$

وبما أن : $a-b\neq 0$ فإن : $\alpha-\beta-1=0$ أي : $\beta=\alpha-1$

لنضع : $a-b=p$ و $\alpha=n$ ومنه نستنتج أن :

$a=np$ و $b=p(n-1)$

3) أ- ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$a=40x(3y+2)$ و $b=15x(8y+5)$ و $c=24x(5y+3)$

لدينا : $a=5x(24y+16)$ و $b=5x(24+15)$

إذن : $a=pn$ و $b=p(n-1)$ حيث : $p=5x$ و $n=24y+16$

ومنه : $a\wedge b=a-b$ أي : $a\wedge b=5x$

ولدينا : $b=3x(40y+25)$ و $c=3x(40y+24)$

إذن : $b=pn$ و $c=p(n-1)$ حيث : $p=3x$ و $n=40y+25$

ومنه : $b\wedge c=b-c$ أي : $b\wedge c=3x$

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} a\wedge b\wedge c &=(a\wedge b)\wedge(b\wedge c)\\ &=5x\wedge 3x\\ &=x(5\wedge 3)\end{aligned}$$

وبما أن : $5\wedge 3=1$ فإن : $a\wedge b\wedge c=x$

82

1) ليكن x و y عددان صحيحان طبيعيان بحيث : $x \wedge y = 1$

بين أن : $x^{\alpha} \wedge y^{\beta} = 1$ لكل α و β من $\mathbb{N}^*$

2) ليكن $\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n}$ عددا جذريا غير منعدم بحيث لكل i يخالف j

$b_i \wedge b_j = 1$.

أثبت وجود أعداد صحيحة نسبية a_1 ، a_2 ، .... a_n بحيث يكون :

$$\frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

(يمكنك استعمال البرهان بالترجع على n ؛ $n \geq 1$)

3) ليكن a عددا من $\mathbb{Z}^*$ وليكن b عددا غير أولي من $\mathbb{N}^*$.

إستنتج وجود أعداد صحيحة نسبية غير منعدمة a_1 ؛ a_2 ، .... ، a_n

و b_1 ؛ b_2 ؛ .... ؛ b_n بحيث لكل i يخالف j : $b_i \wedge b_j = 1$ و

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$$

الجواب : 1) لنبين أن : $x \wedge y = 1 \Rightarrow \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{*2} : x^{\alpha} \wedge y^{\beta} = 1$

لنبين أولا : $x \wedge y = 1 \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}^* : x^{\alpha} \wedge y = 1$

لدينا : $a \wedge b = 1$ و نفترض أن : $x^{\alpha} \wedge y \neq 1$

ليكن d قاسم مشترك أولي لـ x^{α} و y (لأن : $x^{\alpha} \wedge y \neq 1$)

بما أن : $d | x^{\alpha}$ و d أولي فإن : $d | x$

إذن : $d | x$ و $d | y$ ومنه : $d | x \wedge y = 1$ و $d \in \mathbb{N}^*$

أي : $d = 1$ تناقض مع كون d عدد أولي إذن الافتراض خاطئ

وبالتالي : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^* : x^{\alpha} \wedge y = 1$

نضع : $X = x^{\alpha}$ و $Y = y$

وبما أن : $Y \wedge X = 1$ فإنه مما سبق : $\forall \beta \in \mathbb{N}^* : Y^{\beta} \wedge X = 1$

أي : $y^{\beta} \wedge x^{\alpha} = 1$: $\forall \beta \in \mathbb{N}^*$

وبالتالي : $x^{\alpha} \wedge y^{\beta} = 1$: $x \wedge y = 1 \Rightarrow \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{*2}$

2) لنبين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n : \frac{a}{b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$

حيث : $b_i \wedge b_j = 1$ $(i \neq j)$

من أجل $n=1$ لدينا : $\frac{a}{b_1}=\frac{a_1}{b_1}$ ومنه : $a_1=a$

نفترض أنه : $\exists(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{Z}^n : \frac{a}{b_1b_2\dots b_n}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}$

ليكن $\frac{a}{b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}$ عدداً جذريا غير منعدم بحيث : $i\neq j : b_i\wedge b_j=1$

نضع : $B_1=b_1b_2\dots b_n$ و $B_2=b_{n+1}$

بما أن : $b_{n+1}\wedge b_i$ لكل i من $\{1,\dots,n\}$ فإن : $b_{n+1}\wedge(b_1b_2\dots b_n)=1$

أي : $B_2\wedge B_1=1$

إذن، $\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2 : \quad uB_1+vB_2=1$

$$auB_1+avB_2=a$$

ومنه : $\frac{a}{B_1B_2}=\frac{av}{B_1}+\frac{au}{B_2}$

$$=\frac{av}{b_1b_2\dots b_n}+\frac{au}{b_{n+1}}$$

وحسب الافتراض لدينا : $\frac{a}{b_1b_2\dots b_n}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}$

إذن : $\frac{a}{b_1b_2\dots b_nb_{n+1}}=\frac{va_1}{b_1}+\frac{va_2}{b_2}+\dots+\frac{va_n}{b_n}+\frac{ua}{b_{n+1}}$

$$=\frac{\alpha_1}{b_1}+\frac{\alpha_2}{b_2}+\dots+\frac{\beta_{n+1}}{b_{n+1}} \quad (\alpha_i\in\mathbb{Z})$$

وبالتالي لكل n من $\mathbb{N}^*$ يوجد $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ من $\mathbb{Z}^n$ بحيث :

$$\frac{a}{b_1b_2\dots b_n}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n}$$

3) ليكن (a,b) من $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{N}^*$ حيث : b غير أولي.

* إذا كان : $b=1$ فإن : $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{1}=a$.
* إذا كان : $b\neq1$ فيمكن تفكيكه إلى جداء أعداد أولية.

أي توجد p_1 و p_2 و ..... و p_n أعداد أولية موجبة ومختلفة مثنى مثنى

وتوجد α_1 و α_2 و ..... و α_n من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $b=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot p_n^{\alpha_n}$

نضع : $b_i=p_i^{\alpha_i}$ لكل $i\in\{1,2,\dots,n\}$ إذن : $b_i\wedge b_j=1$ $(i\neq j)$

إذن لدينا : $\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}$

وحسب السؤال 1) توجد a_1 و a_2 و .... و a_n أعداد من $\mathbb{Z}$

بحيث : $\frac{a}{b} = \frac{a}{b_1 b_2 \ldots b_n} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}$

83

ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين يحققان النظمة :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 625 \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$$

1) بين أن أحد العددين x و y زوجي و الآخر فردي .

2) نفترض أن x زوجي .

أ- بين أن : $(25-x) \wedge (25+x) = 1$

ب- بين أنه يوجد عددان صحيحان طبيعيان فرديان m و n بحيث :

$$\begin{cases} x + 25 = m^2 \\ -x + 25 = n^2 \\ m \wedge n = 1 \end{cases}$$

3) حدد العددين x و y .

4) استنتج مماسبق حلول المعادلة : $x^2 + y^2 = 625$: $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

الجواب : 1) نفترض أن x و y لهما نفس الزوجية إذن x^2 و y^2 لهما نفس الزوجية ومنه : $x^2 + y^2 = 625$ عدد زوجي و هذا يتناقض مع كون 625 عدد فردي .

وبالتالي : أحد العددين x و y زوجي و الآخر فردي .

2) نفترض x زوجي إذن : y فردي .

أ- لدينا : $y^2 = (25+x)(25-x) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (25)^2$

نضع : $d = (25-x) \wedge (25+x)$

إذن : $d \mid 25-x$ و $d \mid 25+x$ ومنه : $\begin{cases} d^2 \mid y^2 \\ d \mid 2x \end{cases}$

إذن : $d \mid x$ و $d \mid y$ (لأن : $d \mid y$ و y فردي ومنه : $d \wedge 2 = 1$)

ومنه : $d \mid x\wedge y$ أي : $d \mid 1$ (لأن : $x\wedge y=1$)

إذن : $d=1$ وبالتالي : $(25-x)\wedge(25+x)=1$

ب- نعلم أن كل عدد صحيح نسبي غير منعدم ومخالف لـ 1 و -1 يمكن تفكيكه إلى جداء أعداد أولية فلأن x عدد زوجي فإن :

$25-x=\prod_{i=1}^{s} p_i^{\alpha_i}$ (مع $\alpha_i=0$ ؛ إذا كان : $25-x=1$)

$25+x=\prod_{i=s+1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ (مع $\alpha_i=0$ ؛ إذا كان : $25+x=1$)

حيث لكل $j\neq i$ لدينا : p_i و p_j أعداد أولية مختلفة.

ومنه : $y^2=\prod_{i=1}^{s+r} p_i^{\alpha_i}$

وبما أن : $(25-x)\wedge(25+x)=1$ فإن : $p_i\wedge p_j=1$ $\forall(i,j)\in[1,s]\times[1,r]$

ومنه لكل i من $[\![1,s+r]\!]$: α_i عدد زوجي أي : $\exists\beta_i\in\mathbb{N}^*: \alpha_i=2\beta_i$

إذن : $25-x=\left(\prod_{i=1}^{s} p_i^{\beta_i}\right)^2$ و $25+x=\left(\prod_{i=s+1}^{r} p_i^{\beta_i}\right)^2$

لنضع : $n=\prod_{i=1}^{p} p_i^{\beta_i}$ و $m=\prod_{i=p+1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ ؛ m^2 و n^2 فرديان

ومنه : $25-x=n^2$ و $25+x=m^2$ و $m^2\wedge n^2=1$

بما أن : $(m\wedge n)\,/\,m^2\wedge n^2=1$ فإن : $m\wedge n=1$

وبالتالي : يوجد عددان فرديان طبيعيان m و n بحيث :

$25-x=n^2$ و $25+x=m^2$ و $m\wedge n=1$

3) لنحدد x و y.

حسب السؤالين 1) و 2) واعتبار أن x زوجي و y فردي فإن :

$$(S)\begin{cases} x=25-n^2=m^2-25 \\ y^2=(25-x)(25+x)=(nm)^2 \\ m\wedge n=1 \end{cases}$$

يكافئ :

$$\begin{cases} m^2+n^2=50 \\ m\wedge n=1 \\ n\leq m \\ x=25-n^2 \\ y=nm \end{cases}$$

حلول النظمة : $\begin{cases} n^2+m^2=50 \\ m\wedge n=1 \\ n\leq m \end{cases}$ هي $\begin{cases} m=7 \\ n=1 \end{cases}$

ومنه : $(x=24$ و $y=7)$ أو $(x=7$ و $y=24)$

4) لنستنتج حلول المعادلة : $x^2+y^2=625$; (1) $(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$

ليكن : $d=x\wedge y$ إذن : $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{*2}$: $x=d\alpha$ و $y=d\beta$ و $\alpha\wedge\beta=1$

إذن : $(1)\Leftrightarrow d^2(\alpha^2+\beta^2)=25$ و $\alpha\wedge\beta=1$

ومنه : $d^2\mid 25$ إذن : $d\mid 5$ أي : $d=1$ أو $d=5$

* إذا كان : $d=1$ فإن : $\alpha^2+\beta^2=625$ و $\alpha\wedge\beta=1$

ومنه : $(\alpha,\beta)\in\{(24;7);(7,24)\}$

إذن : $(x,y)\in\{(24;7);(7;24)\}$

* إذا كان : $d=5$ فإن : $\alpha^2+\beta^2=25$ (2) ($1\leq\alpha<5$ و $1\leq\beta<5$)

الحلول المناسبة للمعادلة (2) هي : $(\alpha,\beta)\in\{(3,4);(4,3)\}$

ومنه : $(x,y)\in\{(15,20);(20,15)\}$

وبالتالي حلول المعادلة (1) هي : $S=\{(24,7);(7,24);(15,20);(20,15)\}$

84

1) أ- حدد حسب زوجية العدد الصحيح الطبيعي n، العدد : $(n^2+1)\wedge(n+1)$

ب- بين أن العدد : (n^2+1) ليس مربعاً كاملاً، مهما يكن n من $\mathbb{N}^*$.

2) لتكن a و b و n أعداداً صحيحة طبيعية غير منعدمة بحيث :

$$a\wedge b=1 \quad \text{و} \quad a(n^2+1)=b^2(n+1)$$

أ- بين أن : $a\wedge b^2=1$ ثم أن : $a\leq n$ و $b\leq n$

ب- بين أن : $(n^2+1)\wedge(n+1)=2$

ج- نضع : $n^2+1=2p$ و $n+1=2q$ ؛ حيث : $\begin{cases}(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\\ p\wedge q=1\end{cases}$

بين أن : $a=q$ و $b^2=p$.

د- نفترض أن : $b=a+1$ ؛ أحسب الأعداد a و b و n.

الجواب : 1) أ- لنحدد : $d=(n^2+1)\wedge(n+1)$ و $n\in\mathbb{N}$

لدينا : $d\mid n+1$ و $d\mid n^2+1$

ومنه : $\begin{cases}d\mid (n+1)^2-(n^2+1)=2n\\ d\mid n+1\end{cases}$

إذن : $d\mid 2(n+1)-2n$ أي : $d\mid 2$

ومنه : $d=1$ أو $d=2$

إذا كان : n زوجي فإن : $n+1$ و n^2+1 فرديان ومنه : $d=1$

إذا كان : n فردي فإن : $n+1$ و n^2+1 زوجيان ومنه : $d=2$

ب - لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$

إذن : n^2+1 ليس مربعاً كاملاً لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2) ليكن a و b و n من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $a \wedge b = 1$ و $a(n^2+1) = b^2(n+1)$

أ - بما أن : $a \wedge b = 1$ فإن : $a \wedge b^2 = 1$

لدينا : $\begin{cases} a \mid b^2(n+1) \\ a \wedge b^2 = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{Gauss}} a \mid n+1$

إذن : $a \leq n+1$ و $a \neq n+1$ لأن : n^2+1 ليس مربعاً كاملاً.

ومنه : $a \leq n$

ولدينا : $\begin{cases} b^2 \mid a(n^2+1) \\ b^2 \wedge a = 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{Gauss}} b^2 \mid n^2+1$

إذن : $b^2 \leq n^2+1$ و $b^2 \neq n^2+1$ لأن : n^2+1 ليس مربعاً كاملاً.

ومنه : $b^2 \leq n^2$ أي : $b \leq n$

ب - لدينا : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 1$ أو $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

نفترض أن : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 1$.

إذن : $a \mid (n+1)$ ، ومنه : $n+1 \leq a$ وهذا يتناقض مع كون $a \leq n$

وبالتالي : $(n^2+1) \wedge (n+1) = 2$

ج - نضع : $n^2+1 = 2p$ و $n+1 = 2q$ و $\begin{cases} (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

لنبين أن : $a = p$ و $b^2 = q$.

لدينا : $n+1 = 2q$ و $n^2+1 = 2p$ و $2ap = 2qb^2$

ومنه : $ap = qb^2$.

لدينا : $\left.\begin{matrix} \begin{cases} a \mid b^2 q \\ a \wedge b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a \mid q \\ \begin{cases} q \mid ap \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \Rightarrow q \mid a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = q$

وبما أن $ap = qb^2$ و $a = q$ فإن : $b^2 = p$

د - نفترض أن : $b = a+1$.

إذا كان : $b=a+1$ فإن : $a\wedge b=1$

ومما سبق فإن : $n^2+1=2b^2$ و $n+1=2a$

ولدينا : $4a^2=(n+1)^2=n^2+2n+1$

$4a^2=2b^2+2n=2(a+1)^2+2n$

ومنه : $2a^2=(a+1)^2+n$.

إذن : $2a^2=a^2+2a+1+n$

$2a^2=a^2+4a$

ومنه : $a(a-4)=0$ أي : $a=4$ لأن : $a\neq 0$

وبالتالي : $a=4$ و $b=5$ و $n=7$.

85 ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نضع : $A=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ؛ $B_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ؛ $C_n=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

1) بين أن : A_n و B_n و C_n أعداد صحيحة طبيعية .

2) أحسب : $A_n\wedge B_n$ (يمكنك استعمال الموافقة بترديد 3)

3) نضع : $D_n=C_n\wedge C_{n+1}$

أ- أحسب D_n (يمكنك استعمال الموافقة بترديد 2)

ب- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ لدينا :

i) $D_n\neq 1$.

ii) الأعداد C_n و C_{n+1} و C_{n+2} أولية فيما بينها .

الجواب : 1) بما أن لكل n من $\mathbb{N}^*$:

$A_n=1+2+\dots+n$ و $B_n=1^2+2^2+\dots+n^2$ و $C_n=(A_n)^2$

فإن : A_n و B_n و C_n أعداد صحيحة طبيعية .

2) حساب : $A_n\wedge B_n$ بدلالة n .

إذا كان : $n\equiv 0\ [3]$ أي : $n=3k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$

فإن : $A_n=\dfrac{3k(3k+1)}{2}$ و $B_n=\dfrac{3k(3k+1)(6k+1)}{6}$

بما أن : $B_n \in \mathbb{N}$ و $A_n \in \mathbb{N}$ و $3 \wedge (k+1) = 1$ و $3 | 3k(3k+1)(6k+1)$

فإن : $3 | 3k(3k+1)$ و $2 | 3k(3k+1)$ و $2 \wedge 3 = 1$

ومنه : $6 | 3k(3k+1)$ أي : $\frac{3k(3k+1)}{6} \in \mathbb{N}^*$

وبالتالي : $A_n \wedge B_n = \frac{3k(3k+1)}{6}$

أي : $A_n \wedge B_n = \frac{n(n+1)}{6}$

* إذا كان : $n \equiv 1 \ [3]$ أي : $n = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$

فإن : $A_n = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$ و $B_n = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2} \cdot (2k+1)$

ومنه : $A_n \wedge B_n = A_n = \frac{n(n+1)}{2}$

* إذا كان : $n \equiv 2 \ [3]$ أي : $n = 3k+2$ $(k \in \mathbb{N})$

فإن : $A_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6} \times 3$ و $B_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6}(6k+5)$

ومنه : $A_n \wedge B_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6}\left[(6k+5) \wedge 3\right]$ $\left(6 | (3k+2)(3k+3)\right)$ لأن :

وبما أن : $(6k+5) \wedge 3 = 5 \wedge 3 = 1$ (لأن : $(6k+5) = 3(2k) + 5$)

فإن : $A_n \wedge B_n = \frac{(3k+2)(3k+3)}{6}$

أي : $A_n \wedge B_n = \frac{n(n+1)}{6}$

3) نضع : $D_n = C_n \wedge C_{n+1}$

أ- لدينا : $D_n = (A_n)^2 \wedge (A_{n+1})^2 = (A_n \wedge A_{n+1})^2$

* إذا كان : $n \equiv 0 \ [2]$ أي : $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

فإن : $A_n = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1)$ و $A_{n+1} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1)$

إذن : $A_n \wedge A_{n+1} = (2k+1)\left[k \wedge k+1\right] = 2k+1$ (لأن : $k \wedge k+1 = 1$)

وبالتالي : $A_n \wedge A_{n+1} = n+1$

ومنه : $D_n = (n+1)^2$

* إذا كان : $n \equiv 1 \ [2]$ أي : $n = 1+2k$ $(k \in \mathbb{N})$

فإن : $A_n = (2k+1)(k+1)$ و $A_{n+1} = (k+1)(2k+3)$

ومنه : $A_n \wedge A_{n+1} = (k+1)\left[(2k+1)\wedge(2k+3)\right]$

$= k+1$ $\quad$ لأن : $\left((2k+1)\wedge(2k+3) = 1\right)$

وبالتالي : $A_n \wedge A_{n+1} = \dfrac{n-1}{2}$

ومنه : $D_n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

ب - أ) لدينا لكل n : $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$: $D_n = (n+1)^2$ أو $D_n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$

ومنه لكل n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$: $D_n \neq 1$.

ب) لدينا : $C_{n+2} \wedge C_{n+1} \wedge C_n = (C_{n+2} \wedge C_{n+1}) \wedge (C_{n+1} \wedge C_n)$

ومنه : $C_{n+2} \wedge C_{n+1} \wedge C_n = D_{n+1} \wedge D_n$

* إذا كان : $n \equiv 0 \ [2]$ فإن : $n+1 \equiv 1 \ [2]$

ومنه : $D_n = (n+1)^2$ و $D_{n+1} = \left(\dfrac{n+2}{2}\right)^2$

إذن : $D_n \wedge D_{n+1} = \left(\left(\dfrac{n}{2}+1\right) \wedge (n+1)\right)^2$ $\quad (n=2k)$

$= \left[(k+1) \wedge (2k+1)\right]^2$

بما أن : $(k+1)\wedge(2k+1) = 1$ فإن : $D_n \wedge D_{n+1} = 1$

ومنه : $C_{n+2} \wedge C_{n+1} \wedge C_n = 1$

* إذا كان : $n \equiv 1 \ [2]$ فإن : $n+1 \equiv 0 \ [2]$ $\quad (n=2k+1)$

ومنه : $D_n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$ و $D_{n+1} = (n+2)^2$

إذن : $D_n \wedge D_{n+1} = \left[\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \wedge (n+2)\right]^2$

$= \left[(k+1) \wedge (2k+3)\right]^2$

بما أن : $(k+1) \wedge (2k+3) = 1$ فإن : $D_n \wedge D_{n+1} = 1$

ومنه : $C_{n+2} \wedge C_{n+1} \wedge C_n = 1$

وبالتالي لكل n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ لدينا :

$C_{n+2} \wedge C_{n+1} \wedge C_n = 1$

أي : الأعداد C_{n+2} و C_{n+1} و C_n أولية فيما بينها .

86

1) لكل u و v من $\mathbb{Z}^*$ ، بين أنه إذا كان : $u \wedge v = 1$

فإن : $(u^2+v^2)\wedge u = 1$ و $(u^2+v^2)\wedge v = 1$ و $(u^2+v^2)\wedge uv = 1$

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ المعادلة : $(x^2+y^2)z = 26xy$ (1)

أ- بين أنه إذا كان : $x \wedge y = 1$ فإنه يوجد t من $\mathbb{Z}$ بحيث :

$$(x^2+y^2)t = 26$$

ب- أوجد الحلول x و y و z للمعادلة (1) في حالة : $x \wedge y = 1$

ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (1) .

الجواب : 1) لدينا : $u \wedge v = 1 \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2 : \alpha u + \beta v = 1$

$$\Rightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2 : \alpha^2u^2+\beta^2v^2+2\alpha\beta uv = 1$$

$$\Rightarrow \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2 : \beta^2(u^2+v^2)+[(\alpha^2-\beta^2)u+2\alpha\beta v]u = 1$$

$$\Leftrightarrow (u^2+v^2)\wedge u = 1$$

وبالمثل نبين أن : $(u^2+v^2)\wedge v = 1$

وبما أن : $(u^2+v^2)\wedge u = 1$ و $(u^2+v^2)\wedge v = 1$

فإن : $(u^2+v^2)\wedge uv = 1$

2) أ- لدينا : $\begin{cases}(x^2+y^2)z = 26xy\\ x\wedge y = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x^2+y^2) \mid 26xy\\ (x^2+y^2)\wedge xy = 1\end{cases}$

ومنه حسب مبرهنة Gauss : $x^2+y^2 \mid 26$

أي : $26 = t(x^2+y^2)$: $\exists t \in \mathbb{Z}$

ب- لدينا : $(*)\begin{cases}(x^2+y^2)z = 26xy\\ x\wedge y = 1\end{cases} \Rightarrow \exists t\mathbb{Z} : \begin{cases}x\wedge y = 1\\ t(x^2+y^2) = 26\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}x^2+y^2 = 13\\ x\wedge y = 1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x^2+y^2 = 2\\ x\wedge y = 1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x^2+y^2 = 1\\ x\wedge y = 1\end{cases}$ ليس لها حلا

$\begin{cases}x^2+y^2 = 26\\ x\wedge y = 1\end{cases}$

ومنه : $(x,y)\in\{(1,1);(-1,-1);(-1,1);(1,-1);(-2,3);(-2,-3);(2,-3);$
$(1,5);(-1,5);(1,-5);(1,5)\} = S_0$

عكسيا : إذا كان : $(x,y)\in S_0$ فإن : (x,y) تحقق المعادلة (*) .

ولدينا : $z = \frac{26xy}{x^2+y^2}$ إذن حلول المعادلة (1) في حالة : $x \wedge y = 1$

هي : $S_1 = \{(-1,-1,13) ; (1,1,13) ; (1,-1,-13) ; (-1;1,-13) ; (-2,-3,12) ;$
$(-2,3,-12) ; (2,3,12) ; (2,-3,-12) ; (-3,-2,12) ; (3,-2,-12) ;$
$(3,2,12) ; (-3;2,-12) ; (1,5,5) ; (-1,5,-5) ; (1,-5,-5) ;$
$(-1,-5,5) ; (5,1,5) ; (5,-1,5) ; (-5,1,-5) ; (-5,-1,5)\}$

ج - نضع : $d = x \wedge y$ إذن : $\exists (x_1,y_1) \in \mathbb{Z}^2 : \begin{cases} x = dx_1 \\ y = dy_1 \\ x_1 \wedge y_1 = 1 \end{cases}$

إذن : $(x^2+y^2)z = 26xy \Leftrightarrow \begin{cases} x = dx_1 \ ; \ y = dy_1 \ ; \ d \in \mathbb{N}^* \\ (x_1^2+y_1^2)z = 2x_1y_1 \\ x_1 \wedge y_1 = 1 \end{cases}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي :

$$S = \{(dx_1, dy_1 ; z) \ | \ (x_1, y_1 ; z) \in S_1 \text{ و } d \in \mathbb{N}^*\}.$$

87

ليكن p و q من $\mathbb{Z}^*$

1) أ- بين أن لكل q من $\mathbb{Z}$: $1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \ [2]$

ب - استنتج أن الزوج $(1,q)$ ليس حلاً للمعادلة :

$$(1) \quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2 : \quad x^3 + xy^2 + y^3 = 0$$

2) أ- بين أن : $p \wedge q = 1 \Leftrightarrow p \wedge q^3 = 1$

ب - استنتج أن الأزواج (p,q) من $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ بحيث : $|p| \neq 1$ و $p \wedge q = 1$ ليست حلولاً للمعادلة (1).

3) استنتج أن المعادلة : $x^3 + x + 1 = 0$ لا تقبل حلاً في $\mathbb{Q}$.

الجواب : 1) أ- لدينا لكل q من $\mathbb{Z}$: $q \equiv 1 \ [2]$ أو $q \equiv 0 \ [2]$

* إذا كان : $q \equiv 0 \ [2]$ فإن : $q^2 \equiv 0 \ [2]$ و $q^3 \equiv 0 \ [2]$

ومنه : $1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \ [2]$

* إذا كان : $q \equiv 1 \ [2]$ فإن : $q^3 \equiv 1 \ [2]$ و $q^3 \equiv 1 \ [2]$

ومنه : $1 + q^2 + q^3 \equiv 3 \ [2]$ أي : $1 + q^2 + q^3 \equiv 1 \ [2]$

وبالتالي : $\forall q\in\mathbb{Z} : \quad 1+q^2+q^3\equiv 1 \quad [2]$

ب- نفترض أن : $(1,q)$ حلا للمعادلة (1) أي : $1+q^2+q^3=0$

إذن : $1+q^2+q^3\equiv 0 \quad [2]$ ، وهذا تناقض مع كون لكل q من $\mathbb{Z}$:

$$1+q^2+q^3\equiv 1 \quad [2]$$

وبالتالي : $(1,q)$ ليس حلاً للمعادلة (1)

2) أ- لنبين أن : $p\wedge q=1 \Leftrightarrow p\wedge q^3=1$

$\Rightarrow$) إذا كان : $p\wedge q=1$ فإنه حسب مبرهنة Bezout :

$$\exists (u,v)\in\mathbb{Z}^2 : \quad up+vq=1$$

لدينا : $(up+vq)^3=1 \Leftrightarrow \underbrace{(u^3p^2+3u^2pqv+3uv^2q^2)}p+v^3q^3=1$

إذن : $\exists (u_0,v_0)\in\mathbb{Z}^2 : \quad u_0p+v_0q^3=1$

ومنه : $p\wedge q^3=1$

$\Leftarrow$) إذا كان : $p\wedge q^3=1$ فإنه حسب مبرهنة Bezout :

$$\exists (u_1,v_1)\in\mathbb{Z}^2 : \quad u_1p+v_1q^3=1$$

$$u_1p+\underbrace{(v_1q^2)}q=1$$

إذن : $\exists (u_1,v_2)\in\mathbb{Z}^2 : \quad u_1p+v_2q=1$

ومنه : $p\wedge q=1$

وبالتالي : $p\wedge q=1 \Leftrightarrow p\wedge q^3=1$

ب- ليكن (p,q) من $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ بحيث : $|p|\neq 1$ و $p\wedge q=1$

نفترض أن (p,q) حلاً للمعادلة (1) إذن : $p^3+pq^2+q^3=0$

أي : $q^3=-p(p^2+q^2)$ إذن : $p\mid q^3$

ومنه : $p\wedge q^3=|p|\neq 1$ ، وهذا تناقض مع كون $p\wedge q^3=1$ (لأن: $p\wedge q=1$)

وبالتالي : (p,q) ليس حلاً للمعادلة (1) بحيث: $|p|\neq 1$ و $p\wedge q=1$

4) لدينا : $x=0$ ليس حلاً للمعادلة: $x^3+x+1=0$ في $\mathbb{Q}$ (2)

- نفترض أنه يوجد $x=\frac{p}{q}$ من $\mathbb{Q}^*$ حلاً للمعادلة (2) بحيث :

$p\wedge q=1$ و $(p,q)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$.

إذن : $\frac{p^3}{q^3}+\frac{p}{q}+1=0$ أي : $p^3+pq^2+q^3=0$

إذن : $(p;q)$ حلاً للمعادلة (1) وهذا تناقض مع كون المعادلة (1) لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

وبالتالي المعادلة : $x^3+x+1=0$ لا تقبل حلاً في $\mathbb{Q}$.

88

ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة :

$$(x-2n)(y-2n)=2n^2 \qquad (1)$$

1) ليكن : $d=(x-2n)\wedge(y-2n)$

بين أن : $d \mid x\wedge y$

2) بين أن : $x^2+y^2=(x+y-2n)^2$ ، واستنتج أن : $(x\wedge y) \mid d$

3) بين أن : $(x\wedge y) \mid n$.

4) حدد x و y إذا علمت أن : $x\wedge y=1$ و $n=3$.

الجواب : 1) ليكن $d=(x-2n)\wedge(y-2n)$

إذن : $\begin{cases} d \mid x-2n \\ d \mid y-2n \end{cases} \Rightarrow d^2 \mid (x-2n)(y-2n)$

إذن : $\Rightarrow d^2 \mid 2n^2$

إذن : $d^2 \mid (2n)^2$ ومنه : $d \mid 2n$.

لدينا : $\begin{cases} d \mid x-2n \\ d \mid y-2n \\ d \mid 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases} \Rightarrow d \mid (x\wedge y)$

2) $x^2+y^2=(x+y-2n)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2+y^2+2xy-2n(x+y)$

$\Leftrightarrow 2xy-4n(x+y)+4n^2=0$

$\Leftrightarrow xy-2n(x+y)+2n^2=0$

$\Leftrightarrow (x-2n)(y-2n)=2n^2$

ليكن $\sigma=x\wedge y$ لنبين أن : $\sigma \mid d$

إذن : $\begin{cases} \sigma \mid x \\ \sigma \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma^2 \mid x^2 \\ \sigma^2 \mid y^2 \end{cases} \Rightarrow \sigma^2 \mid x^2+y^2$

ومنه : $\sigma^2 \mid (x+y-2n)^2$ إذن : $\sigma \mid x+y-2$

لدينا إذن : $\begin{cases} \sigma \mid x \\ \sigma \mid x+y-2n \\ \sigma \mid y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma \mid x-2n \\ \sigma \mid y-2n \end{cases}$

ومنه : $\sigma \mid (x-2n) \wedge (y-2n)$ أي : $\sigma \mid d$

وبالتالي : $(x \wedge y) \mid d$

3) لنبين أن : $(x \wedge y) \mid d$

لدينا : $d \mid 2n$ إذن : $\exists k \in \mathbb{N} : 2n = kd$

إذن : $4n^2 = k^2 d^2$ (1)

ولدينا : $d^2 \mid 2n^2$ إذن : $\exists k' \in \mathbb{N} : 2n^2 = k' d^2$

إذن : $4n^2 = 2k' d^2$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $k^2 d^2 = 2k' d^2$ أي : $k^2 = 2k'$

إذن : k عدد زوجي : $\exists k'' \in \mathbb{N} : k = 2k''$

ومنه : $2n = 2k'' d$ أي : $n = k'' d$

إذن : $d \mid n$.

وبما أن : $d \mid n$ و $(x \wedge y) \mid d$ فإن : $(x \wedge y) \mid n$

4) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(x-6)(y-6) = 18 = 2 \times 9$ و $x \wedge y = 1$ (2)

بما أن : $x \wedge y = 1$ فإنه حسب السؤال (1) $(x-6) \wedge (y-6) = 1$

$\begin{cases} x-6 = -2 \\ y-6 = -9 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-6 = 2 \\ y-6 = 9 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-6 = -1 \\ y-6 = -18 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x-6 = 1 \\ y-6 = 18 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 8 \\ y = 15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 5 \\ y = -12 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 7 \\ y = 24 \end{cases}$

ملاحظة : إذا كان (x, y) حلا للمعادلة (2) فإن (y, x) هو أيضا حلا للمعادلة (2)

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي :

$S = \{(7,24); (24,6); (5,-12); (-12,5); (8,15); (15,8); (4,-3); (-3,4)\}$

89

I - ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ، نرمز بـ $\sigma(n)$ لمجموع القواسم الموجبة للعدد n و بـ $\mathcal{P}^+$ لمجموعة الأعداد الأولية الموجبة

1) بين أن : $\forall p \in \mathcal{P}^+ : \sigma(p^\alpha) = \dfrac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$

2) ليكن : $x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ التفكيك لجداء عوامل أولية للعدد x .

بين أن : $\sigma(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\dfrac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1} \right)$

3) بين أنه إذا كان : x و y من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و $x \wedge y = 1$

فإن : $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$

II - تعريف : ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نقول إن العدد n كامل إذا كان : $\sigma(n) = 2n$.

نقول إن M_n عدد Mersenne إذا كان : $M_n = 2^n - 1$.

1) ليكن x من $\mathbb{N}$ بحيث n من $\mathbb{N}$ ؛ $n \geq 2$.

بين أن : $\mathcal{P}^+$ $x^n - 1$.

2) ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث : $n \geq 2$.

بين أن : $2^n - 1 \in \mathcal{P}^+ \Rightarrow n \in \mathcal{P}^+$

3) أحسب M_{11} . هل M_{11} أولي ؟ ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

III - ليكن p من $\mathbb{N}^*$ ؛ نضع : $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

1) بين أنه إذا كان : N_p كامل فإن p أولي .

2) ليكن n عدد زوجي كامل .

أ - بين أنه يوجد a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $n = 2^a . b$ و b فردي .

ب - بين أنه يوجد c من $\mathbb{N}$ بحيث : $b = (2^{a+1}-1)c$ و $\sigma(b) = 2^{a+1} . c$

ج - بين أن : $c = 1$.

الجواب : I - 1) القواسم الموجبة للعدد p^α هي : 1 ؛ p ؛ p^2 ؛ .... ؛ p^α

منه : $\sigma(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \dots + p^\alpha$

وبالتالي : $\sigma(p^{\alpha}) = \dfrac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$ (مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها p)

ب) ليكن $x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ التفكيك لجداء عوامل أولية للعدد x.

لنبين أن : $\sigma(x) = \prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)$

لدينا :
$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(1+p_i+p_i^2+\cdots\cdots+p_i^{\alpha_i}\right)$$
$$= (1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\times\cdots\cdots\times(1+p_n+p_n^2+\cdots+p_n^{\alpha_n})$$
$$= \sum_{\substack{0\le \beta_i\le\alpha_i\\ 1\le i\le n}} p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots\cdots p_n^{\beta_n} \qquad (p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots\cdots p_n^{\beta_n}\in \mathcal{D}^+(x))$$
$$= \sum_{d\in\mathcal{D}^+(x)} d = \sigma(x)$$

وبالتالي : $\sigma(x) = \prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)$

ج) ليكن : $x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ و $y = \prod_{j=1}^{m} q_j^{\beta_j}$ حيث : $p_i \neq p_j$

التفكيك لجداء عوامل أولية لكل من x و y.

لدينا :
$$\sigma(xy) = \sigma(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}\cdot q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}\cdots\cdot q_m^{\beta_m})$$
$$= \underbrace{\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\times\cdots\times\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}}_{\sigma(x)}\times\underbrace{\frac{q_1^{\beta_1}-1}{q_1-1}\times\frac{q_2^{\beta_2}-1}{q_2-1}\times\cdots\times\frac{q_m^{\beta_m}-1}{q_m-1}}_{\sigma(y)}$$

وبالتالي : $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

II - 1) ليكن x من $\mathbb{N}$ بحيث : $x \geq 3$ و $n \geq 2$

لدينا : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)$

لدينا : $x-1 \geq 2$ و $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 \geq 2$

ومنه : $x^n - 1 \notin \mathcal{P}^+$.

2) لنبين أن : $2^n-1 \in \mathcal{P}^+ \Rightarrow n\in\mathcal{P}^+$; $n\geq 2$

البرهان بالخلف : نفترض أنه : $n\notin\mathcal{P}^+$ أي : $q\geq 2$ و $p\geq 2$ و $n = p\cdot q$: $\exists(p,q)\in\mathbb{N}^2$

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1$$

إذن :

$$2^n - 1 = (2^p - 1)\left((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1\right)$$

بما أن : $p \geqslant 2$ فإن : $2^p - 1 \geqslant 3$

و $q \geqslant 2$ و $p \geqslant 2$ إذن : $(2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \dots + 2^p + 1 \geqslant 2$

ومنه : $2^n - 1 \notin \mathcal{P}^+$ تناقض مع كون $2^n - 1 \in \mathcal{P}^+$

وبالتالي : $n \in \mathcal{P}^+$.

3) لدينا : $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$

ومنه : $M_{11} \notin \mathcal{P}^+$

ونستنتج أن : $2^n - 1 \in \mathcal{P}^+ \not\Leftarrow n \in \mathcal{P}^+$.

III - 1) ليكن $N_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ و $p \in \mathbb{N}^*$

نفترض أن : N_p عدد كامل إذن : $\sigma(N_p) = 2N_p$

لنبين أن : $2^{p-1} \wedge (2^p - 1) = 1$

نضع : $d = 2^{p-1} \wedge (2^p - 1)$ إذن : $\begin{cases} d \mid 2^{p-1} \\ d \mid 2^p - 1 \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} d \mid 2^p \\ d \mid 2^p - 1 \end{cases}$

ومنه : $d \mid 1$ وبالتالي : $2^{p-1} \wedge (2^p - 1) = 1$

إذن :

$$\sigma(N_p) = \sigma(2^{p-1})\,\sigma(2^p - 1)$$

$$2^p(2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2 - 1} \times \sigma(2^p - 1)$$

ومنه : $\sigma(2^p - 1) = 2^p$ إذن : $\sigma(2^p - 1) = (2^p - 1) + 1$

إذن : $\mathcal{D}^+_{2^p - 1} = \{1 ; 2^p - 1\}$

وبالتالي : $2^p - 1 \in \mathcal{P}^+$.

2) ليكن n عدد زوجي كامل .

أ- ليكن a أكبر عدد صحيح طبيعي بحيث : $2^a / n$ إذن : $2^{a+1} \nmid n$

بما أن : $2^a / n$ فإن : $n = 2^a . b$: $\exists b \in \mathbb{N}^*$

إذا كان b زوجي فإن : $b = 2k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

إذن : $n = 2^{a+1} . k$ تناقض مع كون : $2^{a+1} \nmid n$.

إذن : b فردي .

وبالتالي : b فردي و $\exists (a,b)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : n=2^a.b$

ب - لدينا : n عدد كامل إذن : $\sigma(n)=2n$ و $n=2^a.b$ و b فردي

إذن : $\sigma(2^a.b)=2^{a+1}.b$

$\sigma(2^a).\sigma(b)=2^{a+1}.b$ (لأن : $2^a\wedge b=1$)

$(2^{a+1}-1)\sigma(b)=2^{a+1}.b$

إذن : $2^{a+1}-1\,|\,2^{a+1}.b$ و $(2^{a+1}-1)\wedge 2^a=1$

ومنه : $2^{a+1}-1\,|\,b$

أي : $\exists c\in\mathbb{N}^* : b=(2^{a+1}-1).c$

إذن : $(2^{a+1}-1)\sigma(b)=(2^{a+1}-c).c.2^{a+1}$

ومنه : $\sigma(b)=2^{a+1}.c$

ج - لنبين أن : $c=1$

نفترض أن : $c\geqslant 2$ ولدينا : $b=(2^{a+1}-1).c$

إذن : $\sigma(b)\geqslant 1+c+(2^{a+1}-1).c$

$2^{a+1}.c\geqslant 2^{a+1}.c+1$

ومنه : $0\geqslant 1$ تناقض .

وبالتالي : $c=1$ ومنه : $b=2^{a+1}-1$

90

1) ليكن x و y من $\mathbb{Z}$

بين أن : $x-2y$ و $x+2y$ لهما نفس الزوجية .

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $x^2-4y^2=36$

الجواب : 1) ليكن x و y من $\mathbb{Z}$ لدينا : $(x+2y)+(x-2y)=2x$

ومنه : $x-2y$ و $x+2y$ لهما نفس الزوجية .

2) لدينا : $x^2-4y^2=36 \Leftrightarrow (x+2y)(x-2y)=6.6=2.18$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=2\\x-2y=18\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+2y=-6\\x-2y=-6\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+2y=6\\x-2y=6\end{cases}$

أو $\begin{cases}x+2y=-18\\x-2y=-2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+2y=18\\x-2y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+2y=-2\\x-2y=-18\end{cases}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي :

$$S = \{(6,0);(-6,0);(10,-4);(-10,4);(10,4);(-10,-4)\}$$

91 نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة : $(E): x^2+y^2=z^2$

ولتكن S مجموعة حلول المعادلة (E)

1) بين أنه إذا كان : $(x,y,z)\in S$ فإن : $x\wedge y = y\wedge z = z\wedge x$

2) نضع : $\delta = x\wedge y$

أ- بين أن المعادلة (E) يكافئ المعادلة : $(E'): \begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ X\wedge Y = Y\wedge Z = Z\wedge X = 1 \end{cases}$

ب- لتكن S' مجموعة حلول المعادلة (E') ونضع : $d=(Z-X)\wedge(Z+X)$

بين أنه إذا كان : $(X,Y,Z)\in S'$ فإن : $d=1$ أو $d=2$

ج- حل المعادلة (E')

3) استنتج حلول المعادلة (E) .

الجواب : 1) ليكن $(x,y,z)\in S$ إذن : $x^2+y^2=z^2$

إذن : $z^2 = 1.x^2+y^2$ و $y^2 = 1.z^2-x^2$

ومنه : $x^2\wedge y^2 = y^2\wedge z^2$ و $y^2\wedge z^2 = z^2\wedge x^2$

أي : $(z\wedge y)^2 = (x\wedge y)^2 = (y\wedge z)^2$

وبالتالي : $x\wedge y = y\wedge z = z\wedge x$

2) أ- ليكن $\delta = x\wedge y$ إذن يوجد (X,Y,Z) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث :

$x=\delta X$ و $y=\delta Y$ و $z=\delta Z$ و $X\wedge Y = Y\wedge Z = Z\wedge X = 1$

إذن : $X\wedge Y = Y\wedge Z = Z\wedge X = 1$ و $\delta^2(X^2+Y^2) = \delta^2 Z^2 \Leftrightarrow (E): x^2+y^2=z^2$

$X\wedge Y = Y\wedge Z = Z\wedge X = 1$ و $X^2+Y^2=Z^2$: $(E)\Leftrightarrow(E')$

ب- ليكن : $d=(Z-X)\wedge(Z+X)$ و $\begin{cases} X^2+Y^2=Z^2 \\ X\wedge Y = Y\wedge Z = Z\wedge X = 1 \end{cases}$

إذن : $Y^2 = (Z-X)\cdot(Z+X)$

لدينا : $\begin{cases} d\mid Z-X \\ d\mid Z+X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\mid 2Z \\ d\mid 2X \end{cases} \Rightarrow d\mid 2(Z\wedge X) \Rightarrow d\mid 2$

ومنه : $d\in\{1,2\}$

ج - لنحل المعادلة (E') . $x\wedge y = y\wedge z = z\wedge x = 1$ و $(E')\quad x^2+y^2=z^2$

* **الحالة 1 :** إذا كان : $d=1$

بما أن : $z+x$ و $z-x$ لهما نفس الزوجية فهما فرديان .

ملاحظة : $\begin{cases} a=u^2 \\ b=v^2 \\ c=u.v \\ u\wedge v=1 \end{cases} ;(u,v)\in\mathbb{N}^2 \iff \begin{cases} ab=c^2 \\ a\wedge b=1 \\ (a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \end{cases}$

إذن : $(E') \iff \begin{cases} z-x=u^2 \\ z+x=v^2 \\ y=uv \\ u\wedge v=1 \end{cases}$ و (u و v فرديان)

$$\iff \begin{cases} z=\dfrac{v^2+u^2}{2} \\ x=\dfrac{v^2-u^2}{2} \\ y=uv \\ u\wedge v=1 \end{cases}$$ و $v\geq u\geq 1$ و (u و v فرديان)

* **الحالة 2 :** إذا كان : $d=2$. ولدينا : $x^2=(z-y)(z+y)$

نضع $d'=(z-y)(z+y)$ إذن : $d'=1$ أو $d'=2$

إذا كان : $d'=2$ فإن : $2|x$ و $2|y$ إذن : $x\wedge y\geq 2$ تناقض
(لأن : $d=2$)

مع كون : $x\wedge y=1$.

إذن : $d'=1$

ومنه : $(E') \iff \begin{cases} z-y=u^2 \\ z+y=v^2 \\ x=uv \\ u\wedge v=1 \end{cases}$ و u و v فرديان و $v\geq u\geq 1$ $\iff \begin{cases} x=uv \\ y=\dfrac{v^2-u^2}{2} \\ z=\dfrac{v^2+u^2}{2} \end{cases}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E') هي :

$$S'=\left\{\left(uv;\frac{v^2-u^2}{2};\frac{v^2+u^2}{2}\right);\left(\frac{v^2-u^2}{2};uv;\frac{v^2+u^2}{2}\right) \Big/ \begin{cases} \text{u و v فرديان} \\ u\wedge v=1 \\ v\geq u\geq 1 \\ (u,v)\in\mathbb{N}^2 \end{cases}\right\}$$

3) حلول المعادلة (E) هي :

$$S=\left\{\left(\delta uv;\delta.\frac{v^2-u^2}{2};\delta.\frac{v^2+u^2}{2}\right);\left(\delta\frac{v^2-u^2}{2};\delta uv;\delta\frac{v^2+u^2}{2}\right) \Big/ \begin{cases} \delta\in\mathbb{N}^* ; \text{u و v فرديان} \\ u\wedge v=1 \\ v\geq u\geq 1 ;(u,v)\in\mathbb{N}^2 \end{cases}\right\}$$

92 نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $x^2-6x-63=y^2 \quad (E)$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E).

1) بين أنه إذا كان : $(x,y)\in S$ فإن : $x\geq 12$.

2) بين أن المعادلة (E) تكافيء المعادلة : $(E') : (x-3-y)(x-3+y)=72$

3) بين أنه إذا كان : $(x,y)\in S$ فإن : $(x-3-y)$ و $(x-3+y)$ زوجيان

وأن : $x-3+y\geq x-3-y>0$

4) حل المعادلة (E) .

الجواب : 1) ليكن (x,y) من S إذن : $x^2-6x-63=y^2$

ومنه : $x^2-6x-63\geq 0$ أي : $(x-3)^2\geq 72$

أي : $x-3\geq\sqrt{72}$ أو $x-3\leq-\sqrt{72}$ (لا يمكن)

ومنه : $x\geq 3+\sqrt{72}>11$ إذن : $x\geq 12$

2) لدينا :
$$(E) \Leftrightarrow x^2-6x-63=y^2$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2-y^2=72$$
$$\Leftrightarrow (x-3-y)(x-3+y)=72 : (E')$$

3) * بما أن : $(x-3-y)(x-3+y)=72$ زوجي

و $(x-3-y)+(x-3+y)=2x-6$ زوجي

فإن $(x-3-y)$ و $(x-3+y)$ زوجيان

* لدينا : $y\in\mathbb{N}$ إذن : $x-3+y\geq x-3-y$

لنبين أن : $x-3-y>0$

نفترض أن : $x-3-y\leq 0$ إذن : $x-3+y<0$ (لأن : $72>0$)

ومنه : $y<-x+3$.

وبما أن : $x\geq 12$ فإن : $-x\leq -9$ ومنه : $y<-9$

تناقض مع كون $y\in\mathbb{N}$. إذن : $x-3-y>0$.

و بالتالي : $x-3+y\geq x-3-y>0$.

4) لنحل المعادلة (E) : لدينا : $\mathcal{D}^+_{72}=\{1,2;3;4;6;8;9;12;18;24;36;72\}$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(22,17);(14,7);(12,3)\}$

93

أنجز العمليات التالية :

$$A = \overline{110110}^{(2)} + \overline{11011}^{(2)}$$

$$B = \overline{11101}^{(2)} - \overline{10011}^{(2)}$$

$$C = \overline{11001}^{(2)} \times \overline{1011}^{(2)}$$

الجواب : لدينا :

$$\begin{array}{r} \overline{110110}^{(2)} \\ + \quad \overline{11011}^{(2)} \\ \hline A = \overline{1010001}^{(2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{11101}^{(2)} \\ - \quad \overline{10011}^{(2)} \\ \hline B = \overline{1010}^{(2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{11001}^{(2)} \\ \times \quad \overline{1011}^{(2)} \\ \hline 11001 \\ 11001. \\ 00000.. \\ 11001... \\ \hline C = \overline{100010011}^{(2)} \end{array}$$

94

ليكن x من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $\overline{36}^{(x)} + \overline{45}^{(x)} = \overline{103}^{(x)}$

أحسب : $\overline{36}^{x} \times \overline{45}^{(x)}$

الجواب : ملاحظة : $\overline{36}^{(x)} \Rightarrow x > 6$

لدينا : $\overline{36}^{(x)} + \overline{45}^{(x)} = \overline{103}^{(x)} \Leftrightarrow (3x+6) + (4x+5) = x^2 + 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{أو} \quad x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \qquad (\text{لأن: } x > 6)$$

لدينا : $\overline{36}^{x} \times \overline{45}^{(x)} = (3x+6)(4x+5)$

$$= 12x^2 + 39x + 30$$

$$= (8+4)x^2 + (4\times 8 + 7)x + 3\times 8 + 6$$

$$= (x+4)x^2 + (4x+7)x + 3x + 6$$

$$= x^3 + 8x^2 + (8+2)x + 6 = 2x^3 + x^2 + 2x + 6$$

وبالتالي : $\overline{36}^{(x)} \times \overline{45}^{(x)} = \overline{2126}^{(x)}$

95 حدد قيمة العدد x بحيث : $\overline{12551}^{(10)} = \overline{30407}^{(x)}$

الجواب : ملاحظة : $\overline{30407}^{(x)} \Rightarrow x > 7$

لدينا : $\overline{12551}^{10} = \overline{30407}^{(x)} \Leftrightarrow 12551 = 7 + 4x^2 + 3x^4$

$\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^2 - 12544$

$\Leftrightarrow x^2 = 64 \quad \Leftrightarrow x = 8$

96 نعتبر العدد : $N = \overline{342x}^{(b)}$

حدد x في كل حالة من الحالات الآتية :

1) $b = 6$ و $N \equiv 0 \quad [5]$

2) $b = 7$ و $N \equiv 0 \quad [3]$

الجواب : لدينا : $(x < b) \quad N = \overline{342x}^{(b)} = x + 2b + 4b^2 + 3b^3$

1) $b = 6$ إذن : $b \equiv 1 \quad [5]$ و $b^2 \equiv 1 \quad [5]$ و $b^3 \equiv 1 \quad [5]$

ومنه : $N \equiv x + 2 + 4 + 3 \quad [5]$

$N \equiv x + 4 \quad [5]$

ومنه : $N \equiv 0 \quad [5] \Leftrightarrow x + 4 \equiv 0 \quad [5]$

وبما أن : $x \in [\![0, 5]\!]$ فإن : $x + 4 \in [\![4, 9]\!]$ و $x + 4 \equiv 0 \quad [5]$

ومنه : $x + 4 = 5$ أي : $x = 1$ ومنه : $N = \overline{3421}^{(6)}$

2) إذا كان : $b = 7$ إذن : $b \equiv 1 \ [3]$ و $b^2 \equiv 1 \ [3]$ و $b^3 \equiv 1 \ [3]$

ومنه : $N \equiv x + 2 + 4 + 3 \quad [3]$

$N \equiv x \quad [3]$

ومنه : $N \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow x \equiv 0 \quad [3]$

وبما أن : $x \in [\![0, 6]\!]$ و $x \equiv 0 \quad [3]$ فإن : $x \in \{0, 3, 6\}$

ومنه : $N = \overline{3420}^{(7)}$ أو $N = \overline{3423}^{(7)}$ أو $N = \overline{3426}^{(7)}$

** إذا كان: $y=6$: فإن: $2x-5z=1$ إذن: $-5z\equiv 1\ [2]$

ومنه: $z\equiv 1\ [2]$ إذن z عدد فردي

بما أن: $x\leq 6$ فإن: $5z\leq 11$ أي: $z\leq 2$

وبما أن: z فردي فإن: $z=1$ ومنه: $x=3$

وبالتالي الحل الوحيد في هذه الحالة هو: $(3,6,1)$

بالتالي: $\overline{xyz}^{(7)}=\overline{zyx}^{(11)} \Leftrightarrow (x,y,z)\in\{(5,0,2);(3,6,1)\}$

97

ليكن a و b و c من $\mathbb{N}$.

حدد a و b و c بحيث:
$$\begin{cases}\overline{abca}^{(10)}\equiv 0\ [7]\\ \overline{abca}^{(10)}\equiv 1\ [99]\end{cases}$$

<u>الجواب:</u> نضع، $N=\overline{abca}^{(10)}$

إذن: $N=a+10c+100b+1000a$

حيث: a و b و c من $[\![0,9]\!]$

بما أن: $10\equiv 3\ [7]$ و $100\equiv 2\ [7]$ و $1000\equiv -1\ [7]$

فإن: $N\equiv 0\ [7] \Leftrightarrow 3c+2b\equiv 0\ [7]$

بما أن: $\begin{matrix}100\equiv 1 & [9]\\ 100\equiv 1 & [11]\end{matrix}$ و $\begin{matrix}1000\equiv 1 & [9]\\ 1000\equiv 1 & [9]\end{matrix}$

فإن: $N\equiv 1\ [11], N\equiv 1\ [9] \Leftrightarrow N\equiv 0\ [99]$ (لأن: $\begin{matrix}99=9\times 11\\ 9\wedge 11=1\end{matrix}$)

$N\equiv 1\ [9] \Leftrightarrow 2a+b+c-1\equiv 0\ [9]$

$N\equiv 1\ [11] \Leftrightarrow c-b+1\equiv 0\ [11]$

ومنه نحصل على النظمة التالية:

$$\begin{cases}2b+3c\equiv 0\ [7] & (1)\\ 2a+b+c-1\equiv 0\ [9] & (2)\\ c-b+1\equiv 0\ [11] & (3)\end{cases}$$

حيث: a و b و c من $[\![0,9]\!]$ إذن: $-9\leq -b\leq 0$ و $0\leq c-b\leq 9$

إذن: $-8\leq c-b+1\leq 10$

وبما أن: $11\mid c-b+1$ فإن: $c-b+1=0$

أي: $b=c+1$

98

ليكن a و b و c من $\mathbb{N}$ بحيث : $N=\overline{abc}^{(10)}$

بين أن : $N\equiv 0\ [17] \Rightarrow (2a-c)^2+2b^2\equiv 0\ [17]$

الجواب : لدينا : $N=\overline{abc}^{(10)}=100a+10b+c$

بما أن : $100\equiv -2\ [17]$ فإن : $N\equiv -2a+10b+c\ [17]$

ومنه : $N\equiv 0\ [17] \Leftrightarrow -2a+10b+c\equiv 0\ [17]$

$$\Leftrightarrow 2a-10b-c\equiv 0\ [17]$$

$$\Leftrightarrow 2a-c\equiv 10b\ [17]$$

$$\Rightarrow (2a-c)^2\equiv 100b^2\ [17]$$

$$\Rightarrow (2a-c)^2+2b^2\equiv 0\ [17] \quad (\text{لأن: } 100\equiv -2\ [17])$$

99

حدد x و y و z من $\mathbb{N}$ بحيث : $\overline{xyz}^{(7)}=\overline{zyx}^{(11)}$

الجواب : نضع : $N=\overline{xyz}^{(7)}=\overline{zyx}^{(11)}$

ومنه : x و y و z تنتمي إلى $[\![0,7[\![$

لدينا : $N=\overline{xyz}^{(7)}=z+7y+49x$

$N=\overline{zyx}^{(11)}=x+11y+121z$

ومنه : $z+7y+49x=x+11y+121z$

$\Leftrightarrow 120z+4y-48x=0 \Leftrightarrow 30z+y-12x=0$

$\Leftrightarrow y=6(2x-5z) \Rightarrow 6\mid y$

$\Rightarrow y\in\{0,6\} \quad (\text{لأن: } y\in[\![0,7[\![)$

* إذا كان $y=0$: فإن : $2x=5z$ إذن : $5\mid 2x$ و $5\wedge 2=1$

فإنه حسب مبرهنة Gauss : $5\mid x$ ومنه : $x\in\{0,5\}$

* $x=0 \Leftrightarrow z=0$ غير ممكن .

* $x=5 \Leftrightarrow z=5$

ومنه الحل الوحيد في هذه الحالة هو : $(5,0,2)$

لدينا : $2a+b+c-1 \equiv 0 \ [9]$ و $b=c+1$

ومنه : $2(a+c) \equiv 0 \ [9]$

بما أن : $9 \mid 2(a+c)$ و $9 \wedge 2 = 1$ فإن : $9 \mid a+c$.

إذن : $9 \mid a+c$ و $a+c \in [\![0,18]\!]$

ومنه ، $a+c=9$ أو $a+c=18$ غير ممكن لأنها لا تحقق المعادلة (3)

$\Updownarrow$

$a=c=3$

وبالتالي : $a=9-c$ و $c \in [\![1,8]\!]$

وبتعويض b بـ $c+1$ في المعادلة (3) : $2b+3c \equiv 0 \ [7]$

ومنه : $5c \equiv 5 \ [7]$

إذن : $\begin{cases} 5 \wedge 7 = 1 \\ 7 \mid 5(c-1) \end{cases} \Rightarrow 7 \mid c-1$

ومنه : $c-1=0$ أو $c-1=7$ (لأن : $c-1 \in [\![-1,8]\!]$)

أي : $c=1$ أو $c=8$

إذا كان : $c=1$ فإن : $b=2$ و $a=8$ ومنه : $N=8218$

إذا كان : $c=8$ فإن : $b=9$ و $a=1$ ومنه : $N=1981$

100 نضع : $a=\overline{2310}^{(n)}$ و $b=\overline{252}^{(n)}$ و $d_n = a \wedge b$

1) بين أن : $(2n+1) \mid b$ و $(2n+1) \mid a$

2) حدد بدلالة n : $\Delta_n = (n^2+n) \wedge (n+2)$ (ناقش حسب زوجية n)

3) بين أن : $d_n \in \{2(2n+1) ; 2n+1\}$

4) نأخذ $n=6$ ، حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $ax+by=-26$

الجواب : 1) لدينا : $a=\overline{2310}^{(n)} = n+3n^2+2n^3$

$a = n(n+1)(2n+1)$

$b=\overline{252}^{(n)} = 2+5n+2n^2 = (n+2)(2n+1)$

ومنه : $(2n+1) \mid a$ و $(2n+1) \mid b$

2) * إذا كان : $n=2p$ زوجي ($n \in \mathbb{N}$)

ومنه : $\Delta n = 2p(2p+1) \wedge (2p+2)$

$\Delta n = 2[p(2p+1) \wedge (p+1)]$

لدينا : $\begin{cases} p \wedge (p+1) = 1 \\ (2p+1) \wedge (p+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow p(2p+1) \wedge (p+1) = 1$

وبالتالي : $\Delta n = 2$

* إذا كان : $n = 2p+1$ فردي $(p \in \mathbb{N})$

ومنه : $\Delta n = (2p+1)(2p+2) \wedge (2p+3)$

لدينا : $\begin{cases} (2p+1) \wedge (2p+3) = 1 \\ (2p+2) \wedge (2p+3) = 1 \end{cases} \Rightarrow (2p+1)(2p+2) \wedge (2p+3) = 1$

وبالتالي : $\Delta n = 1$

<u>خلاصة</u> : إذا كان n زوجي فإن : $\Delta n = 2$

إذا كان n فردي فإن : $\Delta n = 1$

3) لدينا : $d_n = n(n+1)(2n+1) \wedge (n+2)(2n+1)$

$d_n = (2n+1)[n(n+1) \wedge (n+2)]$

إذن : $d_n = (2n+1) \cdot \Delta n$

* إذا كان : n زوجي فإن : $\Delta_n = 2$ ومنه : $d_n = 2(2n+1)$

* إذا كان : n فردي فإن : $\Delta n = 1$ ومنه : $d_n = 2n+1$

ومنه : $d_n \in \{2n+1 \, ; \, 2(2n+1)\}$

4) بأخذ : $n = 6$ زوجي ومنه : $d_6 = 2(2n+1) = 26$

ومنه المعادلة تصبح : $21x + 4y = -1 \quad (1)$

لدينا : $(-1,5)$ حلاً بديهياً ومنه : $21(x+1) = -4(y-5)$

إذن : $21 \mid -4(y-5)$ و $21 \wedge 4 = 1$ فإن : $21 \mid y-5$

أي : $\exists k \in \mathbb{Z} : y-5 = 21k$ ومنه : $\exists k \in \mathbb{Z} : y = 5 + 21k$

ومنه : $x = -1 - 4k$.

عكسياً لكل k من $\mathbb{Z}$ ، $(-1-4k; 5+21k)$ حلاً للمعادلة (1)

وبالتالي حلول المعادلة (1) هي : $S = \{(-1-4k; 5+21k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

101 لتكن a و b و n أعداداً من $\mathbb{N}$ بحيث : $n \neq 0$

نعتبر المعادلة : $ax \equiv b \quad [n] \quad : \quad x \in \mathbb{Z} \qquad (E)$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E) .

1) بين أن : $S \neq \phi \iff a \wedge n / b$

2) ليكن x_0 حل للمعادلة (E) .

بين أن : $S = \left\{ x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) تطبيقات : حل في $\mathbb{Z}$ المعادلات التالية :

$(E_1) : \ 15x \equiv 10 \quad [9] \quad ; \quad (E_2) : \ 15x \equiv 10 \quad [20]$

الجواب : 1) لنبين أن : $S \neq \phi \iff a \wedge n / b$

$(\Rightarrow)$ * نفترض أن : $S \neq \phi$.

إذن : $\exists x_1 \in \mathbb{Z} \ : \ ax_1 \equiv b \quad [n]$

أي : $\exists x_1 \in \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ ax_1 = b + kn$

نضع : $d = a \wedge n$

إذن : d / a و $d / n \Leftarrow d / ax_1$ و d / kn

ومنه : $d / ax_1 - kn$ أي : d / b

وبالتالي : $a \wedge n / b$

$(\Leftarrow)$ نفترض أن : $a \wedge n / b$

نضع : $d = a \wedge n$

إذن : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \alpha a + \beta n = d$

وبما أن : d / b فإن : $\exists k \in \mathbb{N} \ : \ b = kd$

إذن : $\exists \in \mathbb{N} \ : \ b = k(\alpha a + \beta n)$

$\exists k \in \mathbb{N} . \quad b = k\alpha a + k\beta n$

ومنه : $b \equiv k\alpha a \quad [n]$ إذن : $k\alpha \in S$

أي : $S \neq \phi$.

وبالتالي : $S \neq \phi \iff a \wedge n / b$

2) ليكن x_0 من S . لنبين أن : $S = \left\{ x_0 + \frac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

ليكن $x \in S$ لدينا : $ax \equiv b\ [n]$ و $ax_0 \equiv b\ [n]$

ومنه : $a(x - x_0) \equiv 0\ [n]$

أي : $a(x - x_0) = Kn \quad : \quad \exists K \in \mathbb{Z}$

إذن : $\dfrac{a}{a \wedge n}(x - x_0) = K \dfrac{n}{a \wedge n} \quad (*)$

بما أن : $\dfrac{a}{a \wedge n} \wedge \dfrac{n}{a \wedge n} = 1$ و $\dfrac{n}{a \wedge n}$ يقسم $\dfrac{a}{a \wedge n}(x - x_0)$

فإن : $\dfrac{n}{a \wedge n}$ يقسم $(x - x_0)$ (حسب مبرهنة Gauss)

أي : $x - x_0 = k \dfrac{n}{a \wedge n} \quad : \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

ومنه : $x = x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k \quad : \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

وبالتالي : $S \subset \left\{ x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

لنبين أن : $\left\{ x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset S$

لدينا لكل k من $\mathbb{Z}$: $a\left(x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k\right) = ax_0 + \dfrac{a}{a \wedge n} kn$

بما أن : $a \wedge n \mid a$ فإن : $\dfrac{a}{a \wedge n} \in \mathbb{N}$

ومنه : $a\left(x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k\right) \equiv ax_0 \quad [$

$\equiv b \quad [n]$ (لأن : $x_0 \in S$)

: $x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k \in S$

ومنه : $\left\{ x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset S$

وبالتالي : $S = \left\{ x_0 + \dfrac{n}{a \wedge n} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

3) لنحل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $15x \equiv 10\ [9] \quad (E_1)$

بما أن : $15 \wedge 9 = 3$ و $3 \nmid$ تقسم 10 فإن مجموعة حلول المعادلة (E_1)

هي : $S_1 = \emptyset$.

لنحل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $15x \equiv 10\ [20] \quad : \quad (E_2)$

بما أن : $15 \wedge 20 = 5$ و $5 \mid 10$ فإن مجموعة حلول المعادلة (E_2)

غير فارغة . لدينا $x_0 = 3$ حلاً بديهياً للمعادلة (E_2) ومنه مجموعة حلول

المعادلة (E_2) هي : $S_2 = \{3 + 4k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

102 (مبرهنة chinois)

لتكن a و b و m و n أعداداً من $\mathbb{N}$ بحيث : $n \neq 0$ و $m \neq 0$

نعتبر النظمة التالية :

$$(S) \quad x \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x \equiv a & [n] \\ x \equiv b & [m] \end{cases}$$

لتكن S مجموعة حلول النظمة (S).

1) بين أن : $S \neq \phi \Leftrightarrow m \wedge n \mid b - a$

2) ليكن x_0 من S ، بين أن : $S = \{x_0 + (m \vee n)k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

3) تطبيقات : حل في $\mathbb{Z}$ النظمتين :

$$(S_1) : \begin{cases} x \equiv 5 & [25] \\ x \equiv 3 & [20] \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 1 & [2] \end{cases}$$

الجواب : 1) $(\Rightarrow)$ نفترض أن : $S \neq \phi$ ونبين أن : $m \wedge n \mid b - a$

لدينا : $S \neq \phi \Leftrightarrow \exists x_1 \in \mathbb{Z} : \begin{cases} x_0 \equiv a & [n] \\ x_0 \equiv b & [m] \end{cases}$

نضع : $d = m \wedge n$

لدينا : $a \equiv x_0 \ [n] \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} : a = x_0 + k_1 n$

$b \equiv x_0 \ [m] \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : b = x_0 + k_2 m$

ومنه : $a - b = k_1 n - k_2 m$

وبما أن : $d \mid n$ و $d \mid m$ فإن : $d \mid k_1 n - k_2 m$

أي : $d \mid a - b$ أي : $n \wedge m \mid a - b$

$(\Leftarrow)$ نفترض أن : $m \wedge n \mid b - a$ ونبين أن : $S \neq \phi$

نضع : $d = m \wedge n$ إذن : $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : \alpha m + \beta n = d$

وبما أن : $m \wedge n \mid b - a$ فإن : $\exists k \in \mathbb{Z} : \quad b - a = k(m \wedge n)$

أي : $\exists k \in \mathbb{Z} : \quad b - a = k(\alpha m + \beta n)$

ومنه : $b - km\alpha = a + kn\beta$.

نضع : $x_0 = b - km\alpha = a + kn\beta$

إذن : $x_0 \equiv a \ [n]$ و $x_0 \equiv b \ [m]$

ومنه : $x_0 \in S$ إذن : $S \neq \phi$

وبالتالي : $S \neq \phi \Leftrightarrow m \wedge n \mid b-a$

2) لنبين أن : $S = \{x_0 + (m \vee n)k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ مع $x_0 \in S$

نضع : $A = \{x_0 + (m \vee n)k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

ليكن x من A إذن : $x = x_0 + (m \vee n)k \quad ; \quad \exists k \in \mathbb{Z}$

لدينا : $n \mid m \vee n$ و $m \mid m \vee n$

إذن : $\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 : \quad m \vee n = k_2 n$ و $m \vee n = k_1 m$

ومنه : $x = x_0 + k_1 k m = x_0 + k_2 k n$

إذن : $x \equiv x_0 \quad [n]$ و $x \equiv x_0 \quad [m]$

وبما أن : $x_0 \equiv a \quad [n]$ و $x_0 \equiv b \quad [m]$ (لأن : $x_0 \in S$)

فإن : $x \equiv a \quad [n]$ و $x \equiv b \quad [m]$

، $x \in S$

وبالتالي : $A \subset S$

عكسيا : لنبين أن $S \subset A$

لدينا : $x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv a & [n] \\ x \equiv b & [m] \end{cases}$

ومنه : $x_0 \equiv a \quad [n]$ و $x_0 \equiv b \quad [m]$

إذن : $x - x_0 \equiv 0 \quad [n]$ و $x - x_0 \equiv 0 \quad [m]$

أي : $n \mid x - x_0$ و $m \mid x - x_0$

ومنه : $m \vee n \mid x - x_0$

إذن : $x - x_0 = k(m \vee n) \quad \exists k \in \mathbb{Z} :$

$x = x_0 + k(m \vee n) \quad \exists k \in \mathbb{Z} :$

ومنه : $x \in A$

وبالتالي : $S \subset A$

ومنه : $S = A$.

3) لنحل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $(S_1) : \begin{cases} x \equiv 5 & [25] \\ x \equiv 3 & [20] \end{cases}$

لدينا : $n=25$ و $m=20$ و $a=5$ و $b=3$

بما أن : $m \wedge n = 5$ و $b-a=2$ و 5 لا تقسم 2

فإن مجموعة حلول النظمة (S_1) هي : $S_1 = \phi$

لنحل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $(S_2) : \begin{cases} x \equiv 2 \ [3] \\ x \equiv 1 \ [2] \end{cases}$

لدينا : $n=3$ و $m=2$ و $a=2$ و $b=1$

بما أن : $m \wedge n = 1$ و $b-a=1$ و 1 يقسم 1

فإن مجموعة حلول المعادلة (S_2) : $S_2 \neq \phi$. $(m \vee n = 6)$

لدينا : $x_0=5$ حلاً بديهيًا ومنه مجموعة حلول النظمة (S_2)

هي : $S_2 = \{5 + 6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

103 ليكن x عدد صحيح طبيعي بحيث : $x \geq 2$ ؛ p و q عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين .

1) بين أن : $(d/p) \Rightarrow [(x^d-1)/(x^p-1)]$

2) أ- ليكن $\sigma = p \wedge q$

بين أن : $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^2 : \quad mp - nq = \sigma$

ب- استنتج أنه إذا كان $\sigma = p \wedge q$ فإنه يوجد (m,n) من $\mathbb{N}^2$

بحيث : $(x^{mp}-1) - (x^{nq}-1)x^{\sigma} = x^{\sigma} - 1$

3) بين أن : $(x^p-1) \wedge (x^q-1) = x^{\sigma} - 1$

4) حدد : $(3^7-1) \wedge (3^{13}-1)$ و $(2^{15}-1) \wedge (2^{27}-1)$

الجواب : 1) لدينا : $d \mid p \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \quad p = kd$

لدينا : $x^d \equiv 1 \quad [x^d-1]$

إذن : $x^{kd} \equiv 1 \quad [x^d-1]$

ومنه : $x^p - 1 \equiv 0 \quad [x^d-1]$

أي : $x^d - 1 \mid x^p - 1$

2) أ- نضع : $\sigma = p \wedge q$

لنبين أن : $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^2 : \quad mp - nq = \sigma$

لدينا : $\sigma = p \wedge q \Rightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2 : \quad \alpha p + \beta q = \delta$

ولدينا : $\forall k \in \mathbb{Z} : \quad \alpha p + kpq - kpq + \beta q = \delta$

أي : $\forall k \in \mathbb{Z} : \quad (\alpha + kq)p - (kp - \beta) q = \delta$

نختار k من $\mathbb{Z}$ بحيث : $\alpha + kq \in \mathbb{N}$ و $kp - \beta \in \mathbb{N}$

إذن : $k \geq -\frac{\alpha}{q}$ و $k \geq \frac{\beta}{p}$

لنأخذ : $k = \sup\left(\left[\frac{\beta}{p}\right] + 1 \,;\, \left[-\frac{\alpha}{q}\right] + 1 \right)$

ومنه : $m = kq + \alpha$ و $n = kp - \beta$

إذن : $\exists (m,n) \in \mathbb{N}^2 : \quad mp - nq = \sigma$

ب- لدينا : $x^{mp} - 1 - (x^{nq} - 1) . x^{\sigma}$

$$= x^{mp} - 1 - x^{nq+\sigma} + x^{\sigma} = x^{mp} - x^{nq+\sigma} + x^{\sigma} - 1$$

بما أن : $nq + \sigma = mp$ (حسب السؤال 2) أ-)

فإن : $x^{mp} - 1 - (x^{nq} - 1) x^{\sigma} = x^{\sigma} - 1 .$

3) نضع : $d_1 = (x^p - 1) \wedge (x^q - 1)$ و $d_2 = x^{\sigma} - 1$

لدينا : $d_1 | x^q - 1$ و $d_1 | x^p - 1$

ومنه : $d_1 | x^{nq} - 1$ و $d_1 | x^{mp} - 1$ (لأن : $(x^p - 1) / (x^{mp} - 1)$)

إذن : $d_1 \,|\, (x^{mp} - 1) - (x^{nq} - 1) x^{\sigma}$

أي : $d_1 \,|\, x^{\sigma} - 1$

ومنه : $d_1 \,|\, d_2$

لدينا : $d_2 = x^{\sigma} - 1$

حسب السؤال 1) لدينا : $\begin{cases} \sigma / p \\ \sigma | q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{\sigma} - 1 \,|\, x^p - 1 \\ x^{\sigma} - 1 \,|\, x^q - 1 \end{cases}$

ومنه : $x^{\sigma} - 1 / (x^p - 1) \wedge (x^q - 1)$ أي : $d_2 \,|\, d_1$

إذن : $\begin{cases} d_1 / d_2 \\ d_2 / d_1 \\ d_1 \geq 0 \text{ و } d_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow d_1 = d_2$

وبالتالي : $(x^p-1)\wedge(x^q-1)=x^{\delta}-1$

أي : $(x^p-1)\wedge(x^q-1)=x^{p\wedge q}-1$

4) لدينا : $(3^7-1)\wedge(3^{13}-1)=3^{7\wedge 13}-1=3-1=2$

$(2^{15}-1)\wedge(2^{27}-1)=2^{15\wedge 27}-1=2^3-1=7$

104 ليكن p عدداً أولياً بحيث : $p\geqslant 3$

1) بين أن p يقسم C_p^n لكل n من $[\![1;p-1]\!]$

2) نضع : $a_n=\frac{1}{p}C_p^n$ مع $1\leqslant n\leqslant p-1$.

أ- بين أن p يقسم $na_n+(-1)^n$ لكل n بحيث : $1\leqslant n\leqslant p-1$

ب - بين أن : $p(a_1+a_2+\dots+a_{p-1})=2^p-2$

3) ليكن $\overline{n}$ صنف تكافؤ n بترديد p و $(\overline{n})^{-1}$ مقلوب $\overline{n}$ في الجسم $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};+,\times)$. حيث : $n\in\{0,1,\dots,p-1\}$

أ- بين أن : $(\overline{1})^{-1}+(\overline{2})^{-1}+\dots+(\overline{p-1})^{-1}=\overline{0}$

ب - نضع : $A=\frac{2^{p-1}-1}{p}$

بين أن : $\overline{A}=(\overline{1})^{-1}+(\overline{3})^{-1}+\dots+(\overline{p-2})^{-1}$

الجواب : 1) انظر التمرين رقم 51 (مبرهنة Fermat)

2) نضع : $a_n=\frac{1}{p}C_p^n$ مع $1\leqslant\ \ \leqslant p-1$

أ- لنبين أن : $\forall n\in[\![1;p-1]\!]:\ p\,/\,na_n+(-1)^n$

لدينا :
$$na_n=\frac{n}{p}C_p^n=\frac{n}{p}\times\frac{p!}{n!(p-n)!}$$
$$=\frac{(p-1)!}{(n-1)!(p-1)!}$$

ومنه : $(n-1)!\,na_n=(p-1)(p-2)\times\dots\times(p-(n-1))$

إذن : $(n-1)!\,na_n\equiv(-1)^{n-1}\times(1\times2\times\dots\times(n-1))\quad[p]$

$\equiv(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\quad[p]$

$\equiv-(-1)^n\cdot(n-1)!\quad[p]$

ومنه : $(n-1)!\,(na_n+(-1)^n)\equiv 0\quad[p]$

أي : $p \mid (n-1)!\,(n a_n + (-1)^n)$

بما أن : $p\wedge 1 = p\wedge 2 = \dots = p\wedge(n-1) = 1$

فإن : $p\wedge(1\times 2\times \dots \times(n-1)) = 1$

أي : $p\wedge (n-1)! = 1$

بما أن : $p \mid (n-1)!\,(n a_n+(-1)^n)$ و $p\wedge(n-1)! = 1$ فإنه حسب مبرهنة Gauss : $p \mid n a_n + (-1)^n$

ب- لنبين أن : $p(a_1+a_2+\dots+a_{p-1}) = 2^p-1$

لدينا : $p a_n = C_p^n$ لكل n من $[\![1,p-1]\!]$

ومنه : $p a_1 + p a_2 + \dots + p a_{p-1} = C_p^1 + C_p^2 + \dots + C_p^{p-1}$

$$= C_p^0 + C_p^1 + \dots + C_p^p - C_p^0 - C_p^p$$

$$= (1+1)^p - 2$$ (لأن : $C_p^0 = C_p^p = 1$)

ومنه : $p(a_1+a_2+\dots+a_{p-1}) = 2^p - 2$

3) أ- لدينا : $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,\times)$ جسم لأن p أولي.

و لدينا : $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \Leftrightarrow (\bar{x}_1)^{-1} \neq (\bar{x}_2)^{-1}$

ومنه :

$\exists \bar{r}_1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;:\; (\bar{1})^{-1} = \bar{r}_1$

$\exists \bar{r}_2 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;:\; (\bar{2})^{-1} = \bar{r}_2$

$\vdots$

$\exists \bar{r}_{p-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;:\; (\overline{p-1})^{-1} = \bar{r}_{p-1}$

إذن : $(\bar{1})^{-1} + (\bar{2})^{-1} + \dots + (\overline{p-1})^{-1} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \dots + \bar{r}_{p-1}$

$$= \bar{0}$$

(لأن : $\overline{1+2+\dots+p-1} = \bar{1}+\bar{2}+\dots+\overline{p-1} = \overline{p\left(\frac{p-1}{2}\right)} = \bar{0}$)

ب- لدينا : $n a_n \equiv (-1)^{n-1}\ [p]$ لكل n من $[\![1,p-1]\!]$

ومنه : $\bar{a}_n = (\bar{n})^{-1}\cdot\overline{(-1)}^{\,n-1}$ في $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

إذن : $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_{p-1} = (\bar{1})^{-1} - (\bar{2})^{-1} + (\bar{3})^{-1} + \dots - (\overline{p-1})^{-1}$

$$\overline{a_1+a_2+\dots+a_{p-1}} = (\bar{1})^{-1}+(\bar{3})^{-1}+\dots+(\overline{p-2})^{-1}-\left((\bar{2})^{-1}+(\bar{4})^{-1}+\dots+(\overline{p-1})^{-1}\right)$$

$$= 2\left((\bar{1})^{-1}+(\bar{3})^{-1}+\dots+(\overline{p-2})^{-1}\right)-\left((\bar{1})^{-1}+(\bar{2})^{-1}+\dots+(\overline{p-1})^{-1}\right)$$

وحسب السؤال 3) أ- $(\bar{1})^{-1}+(\bar{2})^{-1}+\dots+(\overline{p-1})^{-1}=\bar{0}$

فإن : $\overline{a_1+a_2+\dots+a_{p-1}} = \bar{2}\left((\bar{1})^{-1}+(\bar{3})^{-1}+\dots+(\overline{p-2})^{-1}\right)$

إذن : $\bar{2}\bar{A} = \bar{2}\left((\bar{1})^{-1}+(\bar{3})^{-1}+\dots+(\overline{p-2})^{-1}\right)$ (لأن: $2A=a_1+a_2+\dots+a_{p-1}$)

وبما أن : $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z};+;\times)$ جسم $\bar{2}\neq\bar{0}$ (لأن: $p\wedge 2=1$)

فإن : $\bar{A} = (\bar{1})^{-1}+(\bar{3})^{-1}+\dots+(\overline{p-2})^{-1}$

105

1) بين أن العدد 1999 أولي

2) حل في $\mathbb{Z}/1999\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^2+\overline{2001}x-\bar{3}=\bar{0}$

الجواب : 1) لنبين أن 1999 عدد أولي (أنظر التمرين رقم 66)

2) لنحل في $\mathbb{Z}/1999\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^2+\overline{2001}x-\bar{3}=\bar{0}$ (E)

(لأن : $\overline{2001}=\bar{2}$) $\Leftrightarrow x^2+\bar{2}x+\bar{1}-\bar{4}=\bar{0}$

$\Leftrightarrow (x+\bar{1})^2-\bar{4}=\bar{0}$

$\Leftrightarrow (x+\bar{1}-\bar{2})(x+\bar{1}+\bar{2})=\bar{0}$

$\Leftrightarrow (x-\bar{1})(x+\bar{3})=\bar{0}$

$\Leftrightarrow x-\bar{1}=\bar{0}$ أو $x+\bar{3}=\bar{0}$ (لأن : 1999 أولي $(\mathbb{Z}/1999\mathbb{Z};+;\times)$ جسم)

$\Leftrightarrow x=\bar{1}$ أو $x=-\bar{3}=\overline{1996}$

وبالتالي : $S=\{\bar{1};\overline{1996}\}$

106

ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع : $N=n!+1$

1) بين أن : $\forall k\in[\![1,n]\!] \quad k\wedge N=1$.

2) استنتج أنه توجد مالا نهاية من الأعداد الأولية .

الجواب : 1) ليكن k من $\mathbb{N}$ بحيث : $k\leq n$

لدينا : $k\leq n \Rightarrow k\,/\,n!$

إذن : $\exists q \in \mathbb{N} \; : \; n! = kq$

ومنه : $n! + 1 = kq + 1$ أي : $N - kq = 1$

وحسب مبرهنة Bezout فإن : $N \wedge \; = 1$

ج) نفترض أنه يوجد عدد منتهي من الأعداد الأولية P_1 و P_2 و .... و P_n

بحيث : $P_1 < P_2 < \dots < P_n$ ومنه لكل N_0 من $\mathbb{N}$ يمكن كتابته

على شكل : $N_0 = P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} . \dots . P_n^{\alpha}$ حيث : $\alpha_i \in \mathbb{N}$ ، $1 \leq i \leq n$

لنأخذ : $N_0 = P_n! + 1$

حسب السؤال السابق : $N_0 \wedge P_i = 1$ لكل $1 \leq i \leq n$ لأن : $P_i \leq P_n$

ومنه : $N_0 \wedge (P_1 P_2 \dots P_n) = 1$

ومنه : $N_0 \wedge (P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} . \dots . P_n^{\alpha_n}) = 1$

وبما أن : $N_0 = P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} \dots P_n^{\alpha_n}$ فإن : $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

وبالتالي : $N_0 = 1$ وهذا تناقض مع كون $N_0 = P_n! + 1 > 1$

وبالتالي توجد مالا نهاية من الأعداد الأولية.

ديما ديما لعبار ماشي لهو

تمارين للبحث

1

1) نعلم أن باقي القسمة الإقليدية لـ a على 12 هو 7.
حدد باقي القسمة الإقليدية لـ a على 3.

2) نعلم أن باقي القسمة الإقليدية لـ b على 3 هو 2.
حدد القيم الممكنة لباقي القسمة الإقليدية لـ b على 12.

2

1) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد 37^n على العدد 7.

2) استنتج من ذلك باقي القسمة الإقليدية للعددين 37^{26} و 37^{250} على 7.

3) ما هو باقي القسمة الإقليدية على 11 للعدد $N=(705432)^5$ ؟

3

1) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 3. $(n\in\mathbb{N})$

2) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد $(275423)^n$ على 3.

3) حدد باقي القسمة الإقليدية للعدد $(372121)^n$ على 3.

4) حدد قيم العدد الصحيح الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد:
$N=(275423)^n+(372121)^n$ قابل القسمة على 3.

4

حدد حسب قيم العدد الصحيح الطبيعي n، باقي القسمة الإقليدية للعدد $A=851^{3n}+851^{2n}+851^{n}+2$ على 7.

5

حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n التي من أجلها يكون العدد $A=n^2-3n+6$ قابل للقسمة على 5.

6

ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ نضع: $u_n=5^{2^{n-2}}-1$

1) بين أن: $5^{2^k}+1\equiv 2\ [4]$ $\quad \forall k\in\{0,1,\dots,n-2\}$

2) بين أن: $2^2 / u_2$

3) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ حيث: $n\geq 3$: $u_n=4\prod_{k=0}^{n-3}(5^{2^k}+1)$

4) استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$:
$2^n / u_n$

7 برهن على أن العدد $A=n^2(n^2-1)$ قابل للقسمة على 12 لكل n من $\mathbb{N}$

8 1) بين أن : $111 \mid 10^{6n}+10^{3n}-2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$:

2) بين أن : $288 \mid 7^{2n+1}-48n-7 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$:

9 حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث :

$$n^2-3n+6\equiv 0 \quad [5]$$

10 حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث :

$n-3$ يقسم n^3-3 .

11 حل المعادلات التالية :

1) $\bar{6}x^2+\bar{4}=\bar{0} \qquad x\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

2) $3x\equiv 1 \quad [5] \qquad x\in\mathbb{Z}$

3) $\bar{5}x^2+x-\bar{4}=\bar{0} \qquad x\in\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

4) $5x\equiv 2 \quad [7] \qquad x\in\mathbb{Z}$

12 1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $6x-13y=5$

2) استنتج حلول النظمة : $\begin{cases} x\equiv 2 & [6] \\ y\equiv 7 & [13] \end{cases}$

13 1) بين أن : $10^6\equiv 1 \quad [7]$

2) استنتج أن : $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}\equiv 5 \quad [7]$

14 1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $17x-7y=1$

2) حل في $\mathbb{Z}$:

أ- $\begin{cases} x\equiv 2 & [7] \\ x\equiv -2 & [17] \end{cases}$ ب- $\begin{cases} x\equiv -2 & [7] \\ x\equiv 2 & [17] \end{cases}$

3) حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^2\equiv 4 \quad [119]$.

15 ليكن n و k عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين.

نضع : $F_n=2^{2^n}+1$

بين أن : $F_n \wedge F_{n+k}=1$

16

حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $2^n - 1 \equiv 0\ [9]$

17

1) بين أن العدد 641 عددا أوليا

2) أ- بين أن : $5^4 \times 2^{28} \equiv 1\ [641]$

ب- بين أن : $5^4 \equiv -2^4\ [641]$

3) استنتج أن : 641 يقسم العدد $a = 2^{32}+1$

18

نضع : $a = (2222)^{3333} + (3333)^{2222}$

1) أثبت أن : $2222 \equiv 2\ [5]$ و $3333 \equiv 3\ [5]$

2) حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يحقق :

$2^n \equiv 1\ [5]$ و $3^n \equiv 1\ [5]$

3) استنتج أن العدد a يقبل القسمة على 5 .

19

1) حدد باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 2^x و 3^x على 7

حيث : x من $\mathbb{N}$.

2) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $2^x + 3^x \equiv 0\ [7]$

20

ليكن n عددا فرديا من $\mathbb{N}$ بحيث يوجد a و b من $\mathbb{N}$

يحققان : $n = a^2+b^2$

بين أن : $n \equiv \quad [4]$.

21

ليكن n من $\mathbb{N}$ نضع : $F_n = 2^{(2^n)}+1$

العدد F_n يسمى عدد Fermat

1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$: $F_n \equiv 7\ [10]$

2) بين أن : $2^{F_n} \equiv 2\ [F_n]$.

22

1) بين أنه لكل a من $\mathbb{Z}$: $a^2 \equiv 0\ [3]$ أو $a^2 \equiv 1\ [3]$

2) استنتج من ذلك أن لكل (a,b) من $\mathbb{Z}^2$:

$a^2+b^2 \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow a \equiv 0\ [3]$ و $b \equiv 0\ [3]$

3) بين باستعمال ما سبق أنه إذا وجد مثلوث (x,y,z) من $\mathbb{Z}^3$ بحيث :

$x^2+y^2 = z^2$ فإن : $x \equiv y \equiv z \equiv 0\ [3]$

23
لتكن a و b و c أعداد من $\mathbb{Z}$ بحيث : $9 / a^3+b^3+c^3$

1) بين أن : $3/a$ أو $3/b$ أو $3/c$

2) بين التكافؤ التالي : $a/b \Leftrightarrow a^n/b^n \ : \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

24
حل في $\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} x\equiv -1 \ [9] \\ x\equiv -3 \ [11] \end{cases}$

25
1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x-5y=6$

2) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} 3x-5y=6 \\ y\equiv x^2 \ [5] \end{cases}$

26
حل في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ النظمة التالية : $\begin{cases} \bar{3}x+\bar{2}y=\bar{1} \\ \bar{2}x+\bar{4}y=\bar{3} \end{cases}$

27
1) ناقش حسب قيم البارامتر a من $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ ، حلول المعادلة :

$$ax=\bar{0}$$

2) حل في $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^2+\bar{2}x-\bar{3}=\bar{0}$

28
حدد الأزواج (p,q) للأعداد الأولية الموجبة والمختلفة بحيث : p يقسم (q^2-q) و q يقسم (p^2+p).

29
ليكن a و b عددين من $\mathbb{N}$ بحيث : $0<a<b$

نضع : $d=a\wedge b$ و $m=a\vee b$

حدد مجموعة الأزواج (a,b) بحيث : $m-d=77$.

30
1) بين أنه إذا كان : $a'\wedge b'=1$ فإن : $(a'+b')\wedge a'b'=1$

2) حدد مجموعة الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^2$ بحيث :

$$5(a+b)^2=147(a\vee b)^2$$

31
نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $x^6+3x^3+1=y^4 \quad (1)$

1) بين أن المعادلة (1) تكافئ : $(2x+3)^2=(2y^2)^2+5$

2) نضع : $\alpha=2x+3$ و $\beta=2y^2$

حل المعادلة (1)

32

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلات التالية :

أ- $17\alpha - 19\beta = 2$ ب- $17\alpha - 19\beta = -2$

2) حدد الأعداد n من $\mathbb{Z}$ التي تحقق :

أ- $\begin{cases} n \equiv 0 & [17] \\ n \equiv -2 & [19] \end{cases}$ ب- $\begin{cases} n \equiv -2 & [17] \\ n \equiv 0 & [19] \end{cases}$

3) استنتج مما سبق مجموعة الأعداد n من $\mathbb{Z}$ بحيث :

$n^2 + 2n \equiv 0 \quad [323]$

33

1) حل في $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ النظمة : $\begin{cases} \bar{2}x + \bar{6}y = \bar{4} \\ x - \bar{3}y = \bar{0} \end{cases}$

2) أوجد جميع الأزواج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث تكون الأعداد

$2a - 6b - 4$ و $a - 3b$ في آن واحد قابلة للقسمة على 8.

لكل حل ، ما هو باقي القسمة الاقليدية لـ $a+b$ على 8.

3) استنتج شرط لازم وكاف لكي يكون زوج أعداد هو حل فردية حلاً للسؤال 2).

34

ليكن n عدد صحيح طبيعي بحيث : $n > 2$

نعتبر المجموعة : $S_n = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid x^2 + \bar{1} = \bar{0}\}$

1) أ- بين أن لكل n $(n>2)$ العناصر $\bar{0}$ و $\bar{1}$ و $-\bar{1}$ لا تنتمي إلى S_n.

ب- بين أنه إذا كان : $x \in S_n$ و $y \in S_n$ فإن : $(x+y)(x-y) = \bar{0}$

ج- بين أنه إذا كان : $x \in S_n$ فإن : $-x \in S_n$

د- بين أنه إذا كان n عدد أولي فإن : S_n فارغة أو S_n تقبل عنصرين مختلفين .

2) حل المعادلة : $x^2 + \bar{1} = \bar{0}$ في كل حالة من الحالات الآتية :

أ- $n = 5$ ب- $n = 6$ ج- $n = 7$

35

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $4x^2 - 9y^2 = 432 \quad (E)$

1) أ- بين أنه إذا كان (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن العدد 3 يقسم x والعدد 2 يقسم y .

ب- بين أنه إذا كان (X,Y) حلا للمعادلة : $X^2 - Y^2 = 12$.

فإن : $(3X\,;\,2Y)$ حلا للمعادلة (E)

2) أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $X^2 - Y^2 = 12$ ب- استنتج حلول المعادلة (E)

36 نعتبر الأعداد التالية: 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11

وليكن p من $\mathbb{N}$ حيث : $p \geq 13$ و p عدد أولي.

1) بين أن الأعداد: 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 لا يمكن كتابتها على شكل مجموع عددين غير أوليين.

2) حدد جميع الأعداد الأولية p التي تكتب على شكل مجموع عددين غير أوليين. (لاحظ أن: $p = 9 + (p-9)$).

37 1) ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً

بين أن عدداً واحداً فقط من بين الأعداد: n و $n+10$ و $n+20$ يكون قابلاً للقسمة على 3.

2) استنتج أنه يوجد p وحيد من $\mathbb{N}$ يتم تحديده بحيث تكون الأعداد: p و $p+10$ و $p+20$ كلها أولية.

3) أ- بين أنه لكل u و v من $\mathbb{Z}$:

$$13u + 23v \equiv 0 \ [3] \Leftrightarrow u \equiv v \ [3]$$

ب- استنتج في $\mathbb{Z}^3$ حلول المعادلة: $3x + 13y + 23z = 0$

38 بين أنه إذا كان: $a \wedge b \wedge c = 1$ فإن الأعداد

$x = abc$ و $y = ab + ac + bc$ و $z = a + b + c$

أولية فيما بينها.

39 ليكن n من $\mathbb{N}$ ؛ نضع: $d_n = (n^4+1) \wedge (n+1)$

1) بين أن: $d_n = (n+1) \wedge 2$

2) ماهي القيم الممكنة للعدد d_n ؟

3) نضع: $A_n = \dfrac{n^4+1}{n+1}$

أ- حدد الأعداد التي من أجلها يكون لدينا: $A_n \in \mathbb{N}$

ب- حدد الأعداد n التي من أجلها يكون A_n غير قابل للاختزال.

ج- بين أن A_n عدداً عشرياً إذا وفقط إذا وجد عددين α و β من $\mathbb{N}$ بحيث: $n = 2^\alpha . 5^\beta - 1$

40

1) بين أنه إذا كان: $a'\wedge b'=1$ فإن: $(a'+b')\wedge a'b'=1$

2) حدد الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^2$ بحيث: $5(a+b)^2=147(a\vee b)$

41

ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث: $n\geq 2$

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم p نضع: $I_p=\{x\in\mathbb{Z} \mid px\equiv 0\ [n]\}$

1) حدد I_2 ؛ I_3 ، I_4 ، I_5 إذا كان: $n=6$.

2) أ- بين أن: $n\mathbb{Z}\subset I_p$

ب- حدد I_p إذا كان: $n\wedge p=1$.

ج- نضع: $d=n\wedge p$ بحيث: $d\neq 1$

أثبت أن: $I_p\subset I_d$ ثم استنتج أن: $I_p=I_d$

3) ليكن p و q من $\mathbb{N}^*$ بحيث: $n=pq$ و $p\wedge q=1$

أ- أثبت أن: $I_p\cap I_q=n\mathbb{Z}$

ب- أثبت أن: $I_p+I_q=\mathbb{Z}$.

42

ليكن في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة: $x^2+y^2+xy-13x=0$ (E)

نضع: $x=ad$ و $y=bd$ و $d=x\wedge y$

1) بين أن: $a\mid d$.

2) نضع: $d=ac$ حيث: $c\in\mathbb{N}^*$.

بين أن: $c(a^2+ab+b^2)=13$

3) استنتج أن: $c=1$.

4) حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة (E).

43

ليكن p عدداً أولياً (الأسئلة الثلاثة 1) و 2) و 3) غير مرتبطة فيما بينها).

1) أ- نفترض أن $p\geq 5$.

بين أن: $p^2\equiv 1\ [3]$ وأن: $2^p\equiv 2\ [3]$ ثم استنتج أن العدد p^2+2^p ليس أولياً.

ب- بين أنه إذا كان العدد p^2+2^p أولياً فإن: $p=3$.

2) بين أنه إذا كان p يقسم 2^p+1 فإن: $p=3$.

3) أ- تحقق من أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ (2x^2+x)^2<4(1+x+x^2+x^3+x^4)<(2x^2+x+2)^2$

ب- بين أنه إذا كان مجموع قواسم العدد p^4 مربعاً كاملاً فإن: $p=3$.

44 لتكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ بحيث : $a^2 \neq b^2$

1) أثبت أنه إذا كان $c \wedge 2 = 1$ فإن :

$$[c | a+b \ \text{و}\ c | a-b] \Rightarrow [c | a \ \text{و}\ c | b]$$

2) استنتج أنه إذا كان a و b من زوجية مختلفة فإن :

$$a \wedge b = 1 \Rightarrow (a-b) \wedge (a+b) = 1$$

3) حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة التالية :
$$\begin{cases} \alpha\beta = 3^5 \times 5^{13} \\ \alpha \wedge \beta = 1 \\ 1 < \alpha < \beta \end{cases}$$

4) استنتج حلول النظمة التالية :
$$(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} x^2 - y^2 = 3^5 \times 5^{13} \\ x \wedge y = 1 \end{cases}$$

45 لتكن x و y و z من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$

1) حدد x و y إذا كان : $z = 1$.

2) نفترض أن $z \neq 1$ و $x \wedge y \wedge z = 1$.

أ- بين أن : $(y-z) \wedge (x-z) = 1$ (لاحظ أن : $(y-z)(x-z) = z^2$)

ب- استنتج أنه يوجد عنصران a و b من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ بحيث :

$$a \wedge b = 1 \ \text{و}\ y - z = b^2 \ \text{و}\ x - z = a^2 \ \text{و}\ z = ab$$

3) بين أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية α و β و d بحيث :

$$\alpha \wedge \beta = 1 \ \text{و}\ z = d\alpha\beta \ \text{و}\ y = \beta(\alpha+\beta)d \ \text{و}\ x = \alpha(\alpha+\beta)d$$

4) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{20}$

46 1) لتكن x و y و z أعداد صحيحة طبيعية .

برهن على أنه إذا كان : ($x \wedge z = 1$ و $x \wedge y = 1$) فإن : $x \wedge yz = 1$

2) ليكن p و q عددان صحيحان طبيعيان و r باقي القسمة الاقليدية للعدد p على العدد q .

برهن على أن : $p \wedge q = q \wedge r$.

3) ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $2 < b < a$ و $a \wedge b = 1$

47 لتكن : $E=\{b'\in\mathbb{N} \mid b'<b \text{ و } b'\wedge b=1\}$

$F=\{ab' \mid b'\in E\}$

أ- ليكن α عنصرًا من F ، أثبت أن : $\alpha\wedge b=1$

ب- ليكن α و β عنصرين من F بحيث : $\alpha\neq\beta$

r_α يرمز لباقي قسمة α على b و r_β يرمز لباقي قسمة β على b .

أثبت أن : $r_\alpha\neq r_\beta$ و $r_\alpha\wedge b=1$ و $r_\beta\wedge b=1$

ج- ليكن $\pi(F)$ جداء جميع عناصر المجموعة F .

و $\pi(E)$ جداء جميع عناصر المجموعة E .

أثبت أن : $[b]$ $\pi(F)\equiv\pi(E)$.

48 1) أ- ليكن t عددًا صحيحًا طبيعيًا لا يقبل القسمة على 7

بين أن أحد الأعداد الصحيحة : t^2-1 ؛ t^2-2 ؛ t^2-4 يقبل القسمة على 7

ب- استنتج أنه إذا كان m و n عددين صحيحين طبيعيين لا يقبلان القسمة على 7 بحيث يكون (n^2+m^2) مربعًا كاملاً فإن (m^2-n^2) يقبل القسمة على 7

2) نعتبر عددين صحيحين طبيعيين m و n أوليين فيما بينهما بحيث :

$m>n$ و $(m-n)$ فردي و (m^2+n^2) مربع كامل.

نضع : $x_0=m^2-n^2$ و $y_0=2mn$ و $z_0^2=m^2+n^2$

أ- بين أن : (x_0,y_0,z_0) حل للنظمة :
$$\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ x\wedge y=1\end{cases}$$

ب- نفترض أن y_0 لا يقبل القسمة على 7 تحقق من أن m و n لا يقبلان القسمة على 7 و استنتج أن x_0 يقبل القسمة على 7 .

3) أثبت الخاصية التالية : إذا كانت x و y و z أعدادًا صحيحة طبيعية بحيث : $x^2+y^2=z^2$ و $x\wedge y=1$

فإن الجداء xy يقبل القسمة على 7 .

49 ليكن x عددًا صحيحًا طبيعيًا أكبر قطعًا من 1 و p عددًا أوليًا موجبًا

1) أ- بين أنه إذا كان : $\begin{cases}p\wedge x=1\\ p\wedge y=1\end{cases}$ فإن : $p\wedge xy=1$

ب - استنتج أنه إذا كان $n < p$ فإن: $p \wedge (n!) = 1$

ج - ماهي الأعداد الأولية التي تقسم $(n!)$ ؟

2) نفترض في هذا السؤال أن: $p \leq n$ ونريد تحديد أكبر عدد α بحيث p^{α} يقسم $(n!)$.

أ- بين أن عوامل $(n!)$ التي تقبل القسمة على p هي:

$p\,;\,2p\,;\,\ldots\,;\,pq$ حيث q هو خارج القسمة الاقليدية لـ n على p.

ب- تحقق من أن جداء هذه العوامل هو: $\lambda = (q!)\,p^{q}$ وأن: $\lambda \mid (n!)$

ج - تحقق أنه إذا كان $q < p$ فإن: $\alpha = q$ ثم أنه إذا كان $p \leq q$ وكان q_1 هو خارج القسمة الاقليدية لـ q على p فإن:

p^{q+q_1} يقسم $(n!)$.

3) نأخذ: $n = 423$ و $p = 7$

بتطبيق نتائج السؤال 2) عدة مرات حدد أكبر عدد α بحيث:

7^{α} يقسم $(423)!$.

50

لتكن x_1 و x_2 و x_3 و y_1 و y_2 و y_3 أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة

بحيث: $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = M$

نضع: $d_x = pgcd(x_1;x_2;x_3)$ و $d_y = pgcd(y_1;y_2;y_3)$

$m_x = ppcm(x_1;x_2;x_3)$ و $m_y = ppcm(y_1;y_2;y_3)$

حيث: $pgcd$ هو القاسم المشترك الأكبر و $ppcm$ هو المضاعف المشترك الأصغر

1) بين أن M مضاعف لكل من الأعداد d_x و d_y و m_x و m_y.

2) نضع: $M = d_x . M'$

أ- بين أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية x'_1 و x'_2 و x'_3 أولية فيما بينها وتحقق:

$M' = x'_1y_1 = x'_2y_2 = x'_3y_3$

ب- استنتج أن M' مضاعف للعدد m_y.

3) نضع: $M' = M''.m_y$ ، لتكن z_1 و z_2 و z_3 الأعداد الصحيحة الطبيعية

بحيث: $m_y = z_1y_1 = z_2y_2 = z_3y_3$

أ- بين أن : $m'' = 1$ ، وأن : $M = d_x \cdot m_y$

ب- برهن على أن :

$$d_x = \frac{x_1 x_2 x_3}{ppcm(x_2x_3 ; x_1x_3 ; x_1x_2)}$$

$$m_x = \frac{x_1 x_2 x_3}{pgcd(x_2x_3 ; x_1x_3 ; x_1x_2)}$$

(نأخذ : $y_1 = x_2x_3$ ؛ $y_2 = x_1x_3$ ؛ $y_3 = x_1x_2$)

51

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث : $0 < b < a$

و b^2 يقبل القسمة على a .

1) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

نضع : $a = d a_1$ و $b = d b_1$

أ- بين أن العددين a_1 و b_1^2 أوليان فيما بينهما .

ب- بين أن العدد a_1 يقسم العدد d و أن العدد a_1^2 يقسم العدد a

2) نكتب العدد a على شكل : $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ حيث الأعداد p_i $(1 \leq i \leq n)$ أولية و مختلفة و الأعداد α_i $(1 \leq i \leq n)$ أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

أ- بين أنه لكل i من المجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$ ، العدد p_i يقسم العدد b .

ب- بين أن العدد b يكتب على شكل : $b = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n}) \cdot c$

حيث : β_i $(1 \leq i \leq n)$ أعداد صحيحة طبيعية تحقق : $2\beta_i \geq \alpha_i$

والعددان a و c أوليان فيما بينهما .

52

1) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي a و لكل عدد صحيح فردي m

لدينا : $a + 1$ يقسم $a^m + 1$.

2) ليكن q عدداً أولياً و a عدداً صحيحاً طبيعياً .

أ- بين أن : $(a+1)^q \equiv a^q + 1 \quad [q]$

ب- استنتج أن : $a^q \equiv a \quad [q]$

3) لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعاً من 1 ؛ نضع : $a_n = (n!)^2 + 1$

أ - بين أن a_n عدد فردي .

ب - بين أن a_n يقبل قاسمًا أوليًا فرديًا p أكبر قطعًا من n.

ج - نفترض أن العدد p يكتب على الشكل $p=4k+3$ حيث : $k\in\mathbb{N}$

بين أن a_n يقسم العدد $(n!)^{2(2k+1)}+1$

وأن العدد p يقسم العدد $(n!)^p+n!$

د - استنتج أن العدد p لا يمكن أن يكتب على الشكل $p=4k+3$ حيث : $k\in\mathbb{N}$

4) استنتج من كل مما سبق أن المتتالية $(4n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ يحتوي على ما لا نهاية من الأعداد الأولية .

53 ليكن p عدد أولي و n عنصرًا من $\mathbb{N}^*$ ، نرمز لـ $\delta_p(n)$ لأكبر عدد صحيح طبيعي i بحيث n يقبل القسمة على p^i ونرمز لـ $[x]$ للجزء الصحيح للعدد x .

1) نفترض أن : $p\le n$ و $n\ge 2$ ، بين أن لكل i و j من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$p^{i+j}\le n \Rightarrow \left[\frac{1}{p^j}\left[\frac{n}{p^i}\right]\right]=\left[\frac{n}{p^{i+j}}\right]$$

2) نفترض أن : $m=\left[\frac{n}{p}\right]$

بين أن : $\delta_p(n!)=m+\delta_p(m!)$

3) بين أن : $\delta_p(n!)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots\cdots+\left[\frac{n}{p^s}\right]$

حيث : s هو أكبر عدد صحيح طبيعي λ بحيث : $p^\lambda\le n$

4) استنتج أن العدد $(1000)!$ ينتهي ب 249 صفر.

54 نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بمايلي :

$$u_0=0 \quad \text{و} \quad u_1=1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$

بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$:

1) $2\mid u_n \Leftrightarrow 3\mid n$

2) $3\mid u_n \Leftrightarrow 4\mid n$

3) $4\mid u_n \Leftrightarrow 6\mid n$

55

1) ليكن a و b و k أعداد صحيحة نسبية حيث : $a \neq 0$ و $b \neq 0$

أثبت أن : $a \wedge b = b \wedge (a - bk)$

2) ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً حيث : $n \geq 4$.

نضع : $A = n^2 - n - 10$ و $B = n + 4$

أ- بين أن : $A \wedge B = B \wedge 10$

ب- حدد قيم n التي من أجلها B قاسماً للعدد A .

ج- نضع : $A' = \dfrac{A}{A \wedge B}$; $B' = \dfrac{B}{A \wedge B}$

د) بين أن : $[A'B' = 60$ و B' فردي $] \Leftrightarrow [A \wedge B = 5$ و $A \vee B = 300]$

هـ) استنتج العدد n الذي يكون من أجله : $A \wedge B = 5$ و $A \vee B = 300$

56

ليكن a و b عددان من $\mathbb{N}$ بحيث : $a \wedge b = 1$ و $a \geq 2$ و $b \geq 2$

وليكن x من $\mathbb{Z}$ بحيث : $x \geq ab$

نعتبر التطبيق φ المعرف بـ :

$$\varphi : [\![0, b-1]\!] \longrightarrow [\![0, b-1]\!]$$
$$k \longmapsto r_k$$

حيث : r_k هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $x - ka - b$ على b

و $[\![0, b-1]\!] = \{0, 1, \dots, b-1\}$

1) بين أن φ تقابل .

2) استنتج من ذلك أنه : $\exists (u, v) \in \mathbb{N}^2 : \quad x = au + bv$

3) نفترض أن : $x > ab - a - b$.

بين أنه : $\exists (u', v') \in \mathbb{N}^2 : \quad x = au' + bv'$

4) بين أن النتيجة خاطئة إذا كان : $x = ab - a - b$ (استعمل مبرهنة غوص)

57

ليكن p عدد أولي موجب . نعتبر المجموعة : $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{(p^2-1)}\}$

1) أ- ليكن $0 < x < p^2$. بين أن $\bar{x}$ قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان p يقسم x

ب- حدد قواسم الصفر في $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

2) حدد قواسم الصفر في $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

3) حدد مجموعة الأعداد n من $\mathbb{N}$ بحيث ، $(2n+5)(n+4)$ يقبل القسمة على 9 .

<u>تعريف :</u> نقول إن $\bar{x}$ قاسم للصفر في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ إذا وجد $\bar{y}$ من $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ بحيث :

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0}$ و $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (\bar{0}, \bar{0})$

58 ليكن (x,y) عنصراً من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $x+y^2=y^3$

1) نفترض أن : $xy\neq 0$

أ- بين أن y يقسم x

ب- نضع : $x=dy$ ، أثبت أن y يقسم d .

ج- استنتج أنه يوجد α من $\mathbb{Z}^*$ بحيث : $x=\alpha(\alpha+1)^2$ و $y=\alpha+1$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $x+y^2=y^3$.

59 لتكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

بين أن : $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

60 ليكن a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ ، بين الاستلزام التالي :

$$c\,|\,ab \Rightarrow c\,|\,(a\wedge c)\times(b\wedge c)$$

61 ليكن a و m عددين صحيحين طبيعيين أكبر قطعاً من 1 .

بين أنه إذا كان q_m خارج القسمة الاقليدية لـ a^m على $a-1$

فإن : $q_m\wedge(a-1)=m\wedge(a-1)$

62 نضع : $a_n=15n^2+8n+6$ و $b_n=30n^2+21n+13$

حيث : $n\in\mathbb{N}$.

1) أحسب : b_n-2a_n .

2) استنتج أن : $a_n\wedge b_n=1$

63 حل في $\mathbb{N}^2$ النظمة :
$$\begin{cases} x\wedge y=60 \\ x\vee y=3600 \end{cases}$$

64 حدد الثنائيات $\{a,b\}$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث :

$$2(a\vee b)+7(a\wedge b)=11$$

65 ليكن (a,b) من $\mathbb{Z}^2$

1) بين أن : $a\wedge b=1 \Leftrightarrow (a+b)\wedge ab=1$

2) استنتج أنه لكل x و y من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $(x+y)\wedge(x\vee y)=x\wedge y$

3) حل في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ النظمة التالية :
$$\begin{cases} x+y=276 \\ x\vee y=1440 \\ x<y \end{cases}$$

66 1) حدد مجموعة القواسم الموجبة للعدد 210 .

2) ليكن x و y من $\mathbb{N}^*$. نضع : $d = x \wedge y$ و $m = x \vee y$

حدد الأزواج (x,y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي تحقق : $\begin{cases} m = 210d \\ y - x = d \end{cases}$

67 ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $m = a \vee b$

1) بين أن : $(a+b) \wedge m = a \wedge b$

2) حل في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ النظمة التالية : $\begin{cases} a+b = 60 \\ a \vee b = 72 \end{cases}$

68 ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $d = a \wedge b$ و $m = a \vee b$

حدد الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ بحيث :

a لا يقسم b و $0 < a < b$ و $2m + 3d = 78$

69 ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $d = a \wedge b$ و $m = a \vee b$

حدد الأعداد a و b بحيث ، $\begin{cases} a \leq b \\ a + b = 105 \\ m = 19d \end{cases}$

70 1) حدد مجموعة القواسم الموجبة للعدد 5929 .

2) حدد الأزواج (a,b) من $\mathbb{N}^2$ بحيث : $d = a \wedge b$ و $m = a \vee b$

تكون حلولاً للمعادلة : $x^2 - 91x + 588 = 0$

71 ليكن n من $\mathbb{Z}$ ، نعتبر العددين : $B = 9n - 9$ و $A = 3n + 4$

1) أوجد قيمة العدد $A \wedge B$ حسب قيم n.

2) أوجد الأعداد n بحيث يكون لدينا : $A \wedge B = 17$ و $A \vee B = 84$

72 1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $90(x-3) = 36(2-y)$

2) استنتج مجموعة الأزواج (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $\begin{cases} 90(x-3) = 36(2-y) \\ xy \geq -15 \end{cases}$

73 لتكن a و b و c و d حدود صحيحة طبيعية لمتتالية هندسية

أساسها q ، حيث : a عدد أولي .

حدد هذه الأعداد بحيث : $10a^2 = d - b$

74

1) ليكن p عدد أولي موجب ، حدد الأعداد الصحيحة النسبية α

بحيث : $\alpha^2 \equiv 0 \quad [p^2]$

واستنتج حلول المعادلة : $x^2 = \bar{0} \quad : \quad x \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$

2) حل في $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$ المعادلة : $x^2 + \overline{16}x + \overline{15} = \bar{0}$

75

1) أكتب العدد 319 على شكل جداء عوامل أولية

2) بين أنه إذا كان x و y أوليان فيما بينهما فإن العددين :

$3x+5y$ و $x+2y$ هما أيضا أوليان فيما بينهما.

3) حل في النظمة $\mathbb{N}^2$: $\begin{cases} (3a+5b)(2a+b) = 1276 \\ ab = 2(a \vee b) \end{cases}$

76

1) ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $a+b = 23$

أ- بين أن : $a \wedge b = 1$

ب- استنتج a و b بحيث : $a<b$ و $a \vee b = 126$

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $9u - 14v = 1$

3) نعتبر المجموعة (S) للأعداد x من $\mathbb{Z}$ بحيث : $\begin{cases} x \equiv 4 \quad [9] \\ x \equiv 5 \quad [14] \end{cases}$

بين أن عناصر المجموعة (S) توافق نفس العدد بترديد 126 .

77

ليكن a و b و α و β من $\mathbb{Z}$ بحيث : $a = \alpha b + \beta$

1) بين أن : $a \wedge b = b \wedge \beta$.

2) نضع : $d_2 = (19a \wedge 9b) \wedge (5a+4b)$ و $d_1 = a \wedge b$

حدد d_2 بدلالة d_1 .

3) حدد $(9n+4) \wedge (2n-1)$ حيث : $n \in \mathbb{Z}$

(ناقش حسب قيم n)

78

1) أ- حدد الأعداد x من $\mathbb{Z}$ بحيث : $3x \equiv 23 \quad [7]$

ب- استنتج مجموعة الأزواج (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $3x - 7y = 23 \quad (1)$

2) أ- ليكن k عنصرا من $\mathbb{Z}$ بحيث : $k \neq -7$

بين أن : $(3+7k) \wedge (-2+3k) = (k+7) \wedge 23$

ب- استنتج الأزواج (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ التي تحقق :

$x \wedge y = 1$ و $3x - 7y = 23$

79

ليكن x و y من $\mathbb{N}$. نعتبر المعادلة: $409x - 68y = 17$ (1)

1) بين أنه إذا كان (x,y) حلاً للمعادلة (1) فإن x مضاعف للعدد 17

2) حدد الحل (x_0,y_0) للمعادلة (1) بحيث: $0 < x_0 < 30$.

و استنتج حلول المعادلة (1)

3) ليكن (x,y) حلاً للمعادلة (1)

أ- بين أن خارج القسمة الاقليدية للعدد y على x غير مرتبط بـ x و y

ب- بين أن: $x \wedge y = 17$ إذا وفقط إذا كان باقي القسمة الاقليدية لـ y على x مضاعف للعدد 17.

80

1) ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث: $a \wedge b = 1$

نضع: $A = a^2 + ab + b^2$ و $B = ab$

بين أن A و B لا يقبلان قاسماً أولياً مشتركاً

2) استنتج أن: $A \wedge B = 1$

3) بين أنه لكل x و y من $\mathbb{N}^*$: $(x^2 + xy + y^2) \wedge xy = (x \wedge y)^2$

81

ليكن n من $\mathbb{Z}$. نضع $A = n^2 - 3n + 6$ و $B = n - 1$

1) أ- بين أن: $A \wedge B = B \wedge 4$

ب- حدد حسب قيم n، العدد $A \wedge B$.

2) ما هي قيم n التي من أجلها يكون العدد $\frac{n^2-3n+6}{n-1}$ ينتمي إلى $\mathbb{Z}$؟

82

لتكن (a_n) و (b_n) متتاليتان عدديتان معرفتان بما يلي:

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

1) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{N}$ و $b_n \in \mathbb{N}$

2) حدد a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n.

3) بين أن: $a_{n+1} \wedge b_{n+1} = a_n \wedge b_n$

4) استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \wedge b_n = 1$

83

نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة: $x^2 - y^2 = 1616$ (1)

1) بين أن: $x+y$ و $x-y$ قاسمان زوجيان للعدد 1616

2) حدد القواسم الزوجية للعدد 1616

3) حل المعادلة (1)

84 ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم
1) بين أنه لكل m من $\mathbb{N}$ العدد $(2m+1)^n(m+1)-1$ يقبل القسمة على m
2) استنتج أن العدد $20 - 11^n - 11^{n+2}$ يقبل القسمة على 100 لكل n من $\mathbb{N}^*$.

85 نعتبر المجموعة: $S=\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 : 2^x - 3^y = 1\}$
1) بين أن: $(2,1)\in S$ و $(1,0)\in S$
2) ليكن (x,y) من $\mathbb{N}^2$ بحيث: $(x,y)\notin\{(1,0);(2,1)\}$
نفترض أن: $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 2$
أ- بين أن: $(x,y)\in S \Rightarrow 2^x\equiv 1\ [9]$
ب- بين أن: $2^x\equiv 1\ [9] \Leftrightarrow x\equiv 0\ [6]$
3) استنتج أن: $S=\{(1,0);(2,1)\}$

86 ليكن a من $\mathbb{N}$ نضع: $A=1+a+a^2+a^3+a^4$
نفترض أن A مربع كامل أي: $\exists n\in\mathbb{N} \;:\; A=n^2$
1) بين أن: $\exists b\in\mathbb{N} \quad n=a^2+b^2$
2) بين أن: $a\leq 2b-1$
3) استنتج أن: $b\leq 2$
4) بين أن: $b=2$
5) استنتج أن: A مربع كامل $\Leftrightarrow a=3$.

87 ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نضع: $S_n=\sum_{p=1}^{n} p^3$
1) أحسب: $S_{n+1}\wedge S_n$
2) بين أن: $S_{n+2}\wedge S_{n+1}\wedge S_n=1$

88 1) ليكن n من $\mathbb{N}$. نضع: $p=n^4+4$
حدد n لكي يكون p عدداً أولياً.
2) ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين بحيث: $n=m+2$
نضع: $p=m^4+4$ و $q=n^4+4$
برهن على أن p و q ليسا أوليان فيما بينهما.

89

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بحيث:

$$\begin{cases} u_1=u_2=1 \\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1} \quad ; n\geq 2 \end{cases}$$

1) بين أن: $\forall n\geq 2: \ u_{n+1}\cdot u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$

استنتج أن: $u_n\wedge u_{n-1}=1$

2) بين أن: $\forall n\geq 2 ; \forall p\geq 2 : \ u_{n+p}=u_n u_{p-1}+u_{n+1}\cdot u_p$

3) بين أن: $u_{n+p}\wedge u_n=u_n\wedge u_p$

استنتج أن: $u_m\wedge u_n=u_n\wedge u_r$

حيث r هو الباقي في القسمة الاقليدية لـ m على n.

ثم استنتج أن: $u_m\wedge u_n=u_{m\wedge n}$

90

نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بمايلي:

$u_0=0$ و $u_1=1$ و $u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) حدد u_n بدلالة n.

2) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*: \ u_{n+1}\wedge u_n=1$

3) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع: $S_n=1+3+3^2+\dots+3^{n-1}$

بين أن: $S_{n+1}\wedge S_n=1$

4) أ- بين أن: $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*: \ u_{n+p}=(u_p+1)u_n+u_p$

ب- استنتج أن: $u_{n+p}\wedge u_n=u_p\wedge u_n$

5) ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث: $a>b$ و r باقي القسمة الاقليدية لـ a على b.

أ- بين أن: $u_a\wedge u_b=u_b\wedge u_r$

ب- استنتج أن: $u_a\wedge u_b=u_{(a\wedge b)}$

91

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$.

1) أ- بين أن كل قاسم مشترك للعددين $a-b$ و a^2-ab+b^2 فهو قاسم مشترك للعددين: a^2 و b^2.

ب- استنتج أنه إذا كان العددان a و b أوليين فيما بينهما فإن العددين $a-b$ و a^2-ab+b^2 أوليان فيما بينهما.

2) أوجد a و b بحيث: $a\wedge b=1$ و $4(a^2-ab+b^2)=13(a-b)$

www.learnit.66ghz.com

92

ليكن p و q من $\mathbb{N}^*$.

1) بين أنه إذا كان : $p \wedge q = 1$ فإن : $\begin{cases} (p+q) \wedge p = 1 \\ p \wedge q(p+q) = 1 \end{cases}$

2) ليكن (x,y) زوج من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث :

$$x(43-x) = y(x+y) \quad (1)$$

نضع : $d = x \wedge y$ و $x = da$ و $y = db$

أ- بين أن : $a(43-ad) = bd(a+b)$

ب- بين أن العدد a يقسم d ؛ نضع : $d = ac$

ج- بين أن : $c(a^2+ab+b^2) = 43$

واستنتج أن : $c = 1$.

د- حدد جميع الأزواج (x,y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي تحقق العلاقة (1) .

93

1) ليكن n من $\mathbb{N}$

بين أن عدداً واحداً فقط من بين الأعداد n و $n+10$ و $n+20$ يكون قابلاً للقسمة على 3 .

2) استنتج أنه يوجد p وحيد من $\mathbb{N}$ يتم تحديده بحيث تكون الأعداد p و $p+10$ و $p+20$ كلها أولية .

3) أ- بين أنه لكل u و v من $\mathbb{Z}$:

$$13u + 23v \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow u \equiv v\ [3]$$

ب- استنتج حلول المعادلة : $3x+13y+23z=0$ في $\mathbb{Z}^3$.

94

لتكن x و y و z من $\mathbb{N}$ بحيث :

$y = \overline{131}^{(x)}$ و $z = \overline{101}^{(x)}$

1) اكتب الجداء xyz في نظمة العد ذات الأساس x .

2) هل يمكن كتابة $x+y+z$ في نظمة العد ذات الأساس x ؟

3) إذا علمت أن : $x+y+z = \overline{50}^{(x)}$ (في نظمة العد العشري) فأحسب : $\overline{x+y+z}^{(x)}$ و $\overline{xyz}^{(10)}$.

4) ليكن $N = \overline{342y}^{(x)}$ ، حدد قيم y لكي يكون هذا العدد قابلاً للقسمة

أ- على 5 من أجل $x=6$ ب- على 12 من أجل $x=17$

95

I - لتكن a_1 و a_2 و .... و a_k أعداد صحيحة طبيعية ($k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$)

نضع : $\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)=(1+a_1)(1+a_2)\times\dots\times(1+a_k)$

بين أن : $\left(\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)\in 2\mathbb{N}\right)\Leftrightarrow\left(\exists i\in[\![1,k]\!]\ \mid a_i\notin 2\mathbb{N}\right)$

II - ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم .

$d(n)$ يرمز لعدد قواسم الموجبة للعدد n و $\pi(n)$ يرمز لجداء القواسم الموجبة لـ n

1) حدد $d(n)$ و $\pi(n)$ في كل من الحالتين : $n=14$ ؛ $n=81$

2) أ - نفترض أن : $d(n)$ عدد زوجي .

أثبت أن : $\pi(n)=n^{\frac{d(n)}{2}}$

ب - نفترض أن : $d(n)$ عدد فردي .

أثبت أن العدد n مربع كامل ثم بين أن :

$\pi(n)=n^{\frac{d(n)-1}{2}}.q$ بحيث : $n=q^2$

ج - تحقق من أن : $(\pi(n))^2=n^{d(n)}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

3) حدد عدداً صحيحاً طبيعياً n بحيث : $\pi(n)=12^{15}$.

96

نعتبر الحدودية : $P(x)=16x^3-20x^2-8x+3$

ليكن m من $\mathbb{Z}^*$ و n من $\mathbb{N}^*$ أوليين فيما بينهما بحيث : $P\left(\frac{m}{n}\right)=0$

1) بين أن m يقسم 3 و n يقسم 16 .

2) ليكن a عدداً صحيحاً نسبياً .

أ - حدد الحدودية $Q(x)$ بحيث لكل x من $\mathbb{R}$:

$$P(x)-P(a)=(x-a).Q(x)$$

ب - بين أن : $(m-an)$ و n أوليان فيما بينهما .

3) استنتج من السؤال 2) أن : $(m-an)$ يقسم $P(a)$.

4) أ - أحسب $P(a)$ من أجل $a=1$ ثم من أجل $a=-1$.

ب - باستعمال السؤالين (1) و (3) اعط كل الحلول الجذرية للمعادلة : $P(x)=0$

97 لتكن f الدالة الحدودية المعرفة بما يلي :

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ وحيث : $n\geq 2$

و a_0 و a_1 و ...... و a_n تنتمي إلى $\mathbb{N}$

ليكن p و q عنصرين من $\mathbb{Z}$ بحيث : $p\wedge q=1$

1) بين أنه إذا كان : $f(\frac{p}{q})=0$ فإن : p/a_0 و p/a_n

2) نفترض أن : a_0 و a_n و $f(1)$ أعداد فردية.

أ- بين أنه لكل k و j من $\mathbb{N}$ بحيث : $(k;j)\neq(0,0)$

فإن : $p^k.q^j\equiv 1\ [2]$

ب- استنتج أن : $f(1)-q^n f(\frac{p}{q})\equiv 0\ [2]$

ج- بين أنه إذا كان : $f(\frac{p}{q})=0$ فإن : $f(1)-q^n f(\frac{p}{q})\equiv 1\ [2]$

د- استنتج أن المعادلة : $f(x)=0$ لا تقبل حلاً جذرياً.

3) ليكن a عنصراً من $\mathbb{Z}$ بحيث : $f(a)\neq 0$.

أ- بين أن : $f(x)-f(a)=(x-a).g(x)$

حيث : g دالة حدودية معاملاتها تنتمي إلى $\mathbb{Z}$

ب- بين أنه إذا كان : $f(\frac{p}{q})=0$ فإن : $(p-aq)/f(a)$

4) حدد الجذور الجذرية للحدودية :

$f(x)=60x^6-212x^5+203x^4+48x^3-133x^2+10x+24$

احريرة هذي !!!!

الأعـداد العقديـة

I - الأعداد العقدية :

$\mathbb{C}$ هي مجموعة "الأعداد العقدية" المعرفة كمايلي: $\mathbb{C} = \{a+ib \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2, i^2=-1\}$

كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل: $z=a+ib$ حيث: $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

* العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد العقدي z و يرمز له ب : $a=\mathcal{R}e(z)$

* العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد العقدي z و يرمز له ب : $b=\mathcal{I}m(z)$

* $z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(z)=0$ * $z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(z)=0$ (z تخيلي صرف)

العمليات في $\mathbb{C}$: ليكن : $z=a+ib$; $z'=a'+ib'$; $(a,a',b,b',\lambda)\in\mathbb{R}^5$

الجمع : $z+z' = (a+a') + i(b+b')$

الضرب : $zz' = (aa'-bb') + i(ab'+ba')$

$\lambda z = (\lambda a) + i(\lambda b)$

المقلوب : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ $(z\neq 0)$

مرافق عدد عقدي : ليكن $z=a+ib$ حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي $a-ib$ و يرمز له ب : $\bar{z}$.

خاصيات :

$\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}'$

$(z'\neq 0)$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

$z\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}=z$; $z\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z}=-\bar{z}$

$z+\bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$; $z-\bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$

معيار عدد عقدي : ليكن $z=a+ib$ حيث : $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

معيار العدد z هو العدد الحقيقي الموجب : $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$ ويرمز له ب : $|z|$

خاصيات :

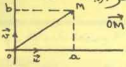
$|zz'| = |z||z'|$; $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$ $(z'\neq 0)$

$(z'\neq 0)$ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$; $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

$\mathcal{R}e(z) \leq |z|$; $|z+z'| \leq |z|+|z'|$; $\mathcal{I}m(z) \leq |z|$

II- التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ مباشر. (يسمى المستوى العقدي)



لكل عدد عقدي $z=a+ib$; $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ نعتبر النقطة $M(a,b)$ والمتجهة $\overrightarrow{OM}(a;b)$

العدد z يسمى لحق M (أو لحق $\overrightarrow{OM}$)

النقطة M تسمى صورة z . ونكتب : $z=\text{aff}(M)$ (أو : $z=\text{aff}(\overrightarrow{OM})$)

خاصيات : * إذا كان $z_1=\text{aff}(M_1)$ و $z_2=\text{aff}(M_2)$ فإن :

$z_2-z_1=\text{aff}(\overrightarrow{M_1M_2})$ و $|z_2-z_1|=\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$

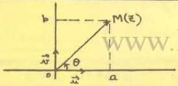
* إذا كان $z_1=\text{aff}(\vec{u}_1)$ و $z_2=\text{aff}(\vec{u}_2)$ فإن :

$z_1+z_2=\text{aff}(\vec{u}_1+\vec{u}_2)$ و $\lambda z_1=\text{aff}(\lambda\vec{u}_1)$

خاصية : لتكن A و B و C على التوالي صور الأعداد z_A و z_B و z_C بحيث : $z_A\neq z_C$

A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow$ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عدد حقيقي .

III- الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :



$(O,\vec{u},\vec{v})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$z=a+ib$ و M لحقها z $(z\neq 0)$

لتكن θ قياساً للزاوية $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}})$

العدد θ يسمى عمدة للعدد z ويرمز له ب : $\arg z$

ونكتب : $\arg z\equiv\theta\ [2\pi]$

إذا كان : $\theta\in]-\pi,\pi[$ فإن : θ يسمى العمدة الرئيسي لـ z ويرمز له ب $\text{Arg}\, z$

لدينا : $z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ ، حيث : $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ يسمى الشكل المثلثي للعدد z

ونكتب : $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]$ $(r>0)$

خاصيات : إذا كان : $z=[r;\theta]$ و $z'=[r';\theta']$ فإن :

$\bar{z}=[r;-\theta]$ ، $-z=[r;\theta+\pi]$ ، $\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r};-\theta\right]$

$zz'=[rr';\theta+\theta']$ ، $\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$

صيغة موافر : $(\forall n\in\mathbb{Z})(\forall\theta\in\mathbb{R}) : (\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

خاصية: إذا كان z_A لحق A و z_B لحق B و z_C لحق C فإن:

$$(\vec{u};\overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

التوضيح الأسي لعدد عقدي غير منعدم:

* كل عدد عقدي: $z = [r;\theta]$ يكتب: $z = re^{i\theta}$

خاصيات:

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad ; \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad ; \quad \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}$$

الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن $a \in \mathbb{C}^*$ بحيث: $a = [r;\theta]$ و $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

المعادلة: $z^n = a$ تقبل n حلاً في $\mathbb{C}$ وهي الأعداد العقدية z_k

بحيث: $z_k = \left[\sqrt[n]{r}\,;\, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right]$ مع: $k \in \{0;1;\dots,n-1\}$

الجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم: $a = [r,\theta]$

حلول المعادلة: $z^2 = a$. تسمى الجذور المربعة للعدد العقدي a .

وهي: $\sigma_1 = \left[\sqrt{r}\,;\,\frac{\theta}{2}\right]$ و $\sigma_2 = \left[\sqrt{r}\,;\,\frac{\theta}{2} + \pi\right]$ $(\sigma_2 = -\sigma_1)$

تحديد الجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم:

$a = \alpha + i\beta$: $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$z = x + iy$: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \\ y^2 = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

حل معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$:

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): az^2 + bz + c = 0$ $\quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$

العدد العقدي: $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة (E) وليكن σ جذر مربع لـ (Δ)

حلول المعادلة (E) هما:

$$z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b-\sigma}{2a}$$

VI – التأويل الهندسي للعمليات في $\mathbb{C}$:

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

الإزاحة :

ليكن ω عدد عقدي.

التطبيق : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z+\omega \end{array}$ هو الإزاحة : $M(z) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} M'(z')$

حيث : $\vec{u}(z)$

الدوران :

ليكن ω عدد عقدي بحيث : $\omega = [1 ; \theta]$

التطبيق : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \omega z \end{array}$ هو الدوران : $M(z) \xrightarrow{R(O;\theta)} M'(z')$

التناظر المتعامد :

التطبيق : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \bar{z} \end{array}$ هو التناظر المتعامد بالنسبة لمحور الفواصل

$M(z) \xrightarrow{S_{(xx')}} M'(z')$

ليكن العدد العقدي : $\omega = [r, \theta]$.

التطبيق : $\begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \omega z \end{array}$ هو مركب الدوران $R(O,\theta)$ والتحاكي $h = h(O ; r)$

$M(z) \longmapsto M'(z')$

الأعداد العقدية

1 ليكن z عدد من $\mathbb{C}$. بين أن :

$$\frac{|Re(z)|+|Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |Re(z)|+|Im(z)|$$

الجواب : نضع : $z=x+iy$ حيث : x و y من $\mathbb{R}$

ومنه يكفي أن نبين أن : $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$

لدينا :

$$\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow (|x|+|y|)^2 \leq 2(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow -x^2-2|x||y|-y^2+2(x^2+y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2|x||y|+y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \geq 0$$

العبارة الأخيرة صحيحة لكل x و y من $\mathbb{R}$ ومنه : $\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}$

ولدينا :

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y| \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-x^2-y^2-2|x||y| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2|x||y| \leq 0$$

العبارة الأخيرة صحيحة لكل x و y من $\mathbb{R}$ ومنه : $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$

و بالتالي لكل z من $\mathbb{C}$: $\dfrac{|Re(z)|+|Im(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |Re(z)|+|Im(z)|$

2 ليكن z عدد من $\mathbb{C}$.

1) أ- بين أن : $Im(z) \geq 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\dfrac{|z|+Re(z)}{2}} + i\sqrt{\dfrac{|z|-Re(z)}{2}}\right)^2$

ب- $Im(z) \leq 0 \Rightarrow z = \left(\sqrt{\dfrac{|z|+Re(z)}{2}} - i\sqrt{\dfrac{|z|-Re(z)}{2}}\right)^2$

2) استنتج الجذور المربعة للعددين z_1 و z_2 بحيث : $z_1=2+i$; $z_2=4-3i$

الجواب : نضع : $A = \sqrt{\dfrac{|z|+Re(z)}{2}} + i\sqrt{\dfrac{|z|-Re(z)}{2}}$

لدينا : $A^2 = \frac{|z|+\mathcal{Re}(z)}{2} - \frac{|z|-\mathcal{Re}(z)}{2} + 2i\sqrt{\frac{|z|^2-\mathcal{Re}^2(z)}{4}}$

بما أن : $|z|^2 = \mathcal{Re}^2(z) + \mathcal{Im}^2(z)$ فإن : $\mathcal{Im}^2(z) = |z|^2 - \mathcal{Re}^2(z)$

إذن : $A^2 = \mathcal{Re}(z) + i\,|\mathcal{Im}(z)|$

ومنه : أ- $\mathcal{Im}(z) \geq 0 \Rightarrow A^2 = z$

ب- $\mathcal{Im}(z) \leq 0 \Rightarrow \bar{A}^2 = z$

ملاحظة هامة : A أو $\bar{A}$ يمثلان أحد الجذور المربعة للعدد z وذلك حسب إشارة $\mathcal{Im}(z)$.

2) لنحدد الجذور المربعة للعدد العقدي : $z_1 = 2+i$

لدينا : $\mathcal{Im}(z_1) > 0$ و $\mathcal{Re}(z_1) = 2$ و $|z_1| = \sqrt{5}$

ومنه أحد الجذور المربعة لـ z_1 هو : $A_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

ومنه الجذور المربعة لـ z_1 هي : A_1 و $(-A_1)$.

لنحدد الجذور المربعة للعدد العقدي : $z_2 = 4+3i$

لدينا : $\mathcal{Im}(z_2) < 0$ و $\mathcal{Re}(z_2) = 4$ و $|z_2| = 5$

ومنه أحد الجذور المربعة لـ z_2 هو : $A_2 = \sqrt{\frac{5+4}{2}} - i\sqrt{\frac{5-4}{2}}$

$A_2 = 3\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(3-i)$

ومنه الجذور المربعة لـ z_2 هي : A_2 و $(-A_2)$.

3

ليكن a و b من $\mathbb{C}$ بحيث : $a \neq b$

بين أن : $|a| = 1 \Rightarrow \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$

الجواب : نفترض أن : $|a| = 1$ أي : $a\bar{a} = 1$ ومنه : $\bar{a} = \frac{1}{a}$

لدينا : $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = \left|\frac{a-b}{1-\frac{1}{a}.b}\right| = \left|\frac{a-b}{a-b}a\right|$

$= |a| = 1$

ومنه : $|a| = 1 \Rightarrow \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$

4 ليكن a و b و c من $\mathbb{C}$ ؛ بين أن :

$$|a|=|b|=|c|=1 \Rightarrow |ab+bc+ca|=|a+b+c|$$

الجواب : نفترض أن : $|a|=|b|=|c|=1$ ومنه : $|abc|=1$

لدينا : $|ab+bc+ca| = \dfrac{|ab+bc+ca|}{|abc|} = \left|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right|$

$= \left|\overline{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}\right|$ (لأن : $|\bar{z}|=|z|$)

$= \left|\overline{\dfrac{1}{a}}+\overline{\dfrac{1}{b}}+\overline{\dfrac{1}{c}}\right|$

بما أن : $|z|=1 \Leftrightarrow \overline{\dfrac{1}{z}}=z$

فإن : $\overline{\dfrac{1}{a}}=a$ و $\overline{\dfrac{1}{b}}=b$ و $\overline{\dfrac{1}{c}}=c$

وبالتالي : $|ab+bc+ca|=|a+b+c|$

5 حدد معيار وعمدة كل من الأعداد العقدية التالية :

$z_1=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ، $z_2=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{12}$ ؛ $z_3=\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

الجواب : * لدينا : $z_1=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

لنحدد معيار z_1 : لدينا : $|z_1| = \left|\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right|^{20} = \left(\dfrac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|}\right)^{20}$

وبما أن : $|1+i\sqrt{3}|=2$ و $|1-i|=\sqrt{2}$

فإن : $|z_1| = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^{20} = (\sqrt{2})^{20}$

ومنه : $|z_1| = 2^{10}$

لنحدد عمدة z_1 : لدينا : $\arg z_1 \equiv \arg\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} \quad [2\pi]$

$\equiv 20\arg\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv 20\left(\arg(1+i\sqrt{3})-\arg(1-i)\right) \quad [2\pi]$

بما أن : $1+i\sqrt{3} = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

و $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

فإن : $\arg(1+i\sqrt{3})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ و $\arg(1-i)\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ومنه : $\arg z_1\equiv 20\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$

وبالتالي : $\arg z_1\equiv\frac{35\pi}{3}\ [2\pi]$

* لدينا : $z_2=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{42}$

إذن : $z_2=\left(2-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2i\sqrt{4-3}\right)^{21}$

$z_2=(-2\sqrt{3}-2i)^{21}$

$z_2=(-2)^{21}\cdot(\sqrt{3}+i)^{21}$

لنحدد معيار z_2 : $|z_2|=2^{21}\cdot|\sqrt{3}+i|^{21}=2^{21}\cdot2^{21}=2^{42}$

(لأن : $|\sqrt{3}+i|=2$)

لنحدد عمدة z_2 : $\arg z_2\equiv\arg(-2^{21})+\arg(\sqrt{3}+i)^{21}\ [2\pi]$

$\equiv\arg(-2^{21})+21\arg(\sqrt{3}+i)\ [2\pi]$

بما أن : $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ و $-2^{21}=2^{21}(\cos\pi+i\sin\pi)$

فإن : $\arg z_2\equiv-\pi+21\cdot\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

أي : $\arg z_2\equiv\frac{5\pi}{2}\ [2\pi]$

* لدينا : $z_3=\left(1-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{24}$

ملاحظة هامة : $e^{ix}=\left(e^{i\frac{x}{2}}\right)^2$ و $\forall x\in\mathbb{R}:\ 1=e^{ix}\cdot e^{-ix}$

لدينا : $\frac{\sqrt{3}+i}{2}=e^{i\frac{\pi}{6}}=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2$ و $1=e^{i\frac{\pi}{12}}\times e^{-i\frac{\pi}{12}}$

ومنه : $z_3=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}e^{-i\frac{\pi}{12}}-\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2\right)^{24}$

$=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right)\right)^{24}$

$=e^{2i\pi}\cdot\left(-2i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{24}=2^{24}\sin^{24}\frac{\pi}{12}>0$

وبالتالي : $|z_3|=2^{24}\sin^{24}\frac{\pi}{12}$ و $\arg z_2\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

6 حدد معيار وعمدة العدد العقدي a بحيث :

$a=(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n$ مع $n\in\mathbb{N}$

<u>الجواب :</u> نضع : $z_0=(1+i\sqrt{3})^n$ ومنه : $\bar{z}_0=(1-i\sqrt{3})^n$

إذن : $a=z_0+\bar{z}_0=2\mathcal{R}e(z_0)$

لنحدد : $\mathcal{R}e(z_0)$

لدينا : $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ومنه : $z_0=(1+i\sqrt{3})^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)$ (حسب علاقة موافر)

وبالتالي : $a=2.2^n.\cos\frac{n\pi}{3}$

$a=2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{3}$

إذا كان : $\cos\frac{n\pi}{3}>0$ فإن : $|a|=2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{3}$ و $\arg a\equiv 0\ [2\pi]$

إذا كان : $\cos\frac{n\pi}{3}<0$ فإن : $|a|=-2^{n+1}.\cos\frac{n\pi}{3}$ و $\arg a\equiv\pi\ [2\pi]$

<u>ملاحظة</u> : لكل n من $\mathbb{N}$: $\cos\frac{n\pi}{3}\neq 0$ (لأن : $\frac{n\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}\ [\pi]$)

7 ليكن θ عدد حقيقي من $\mathbb{R}-\{2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

نضع : $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$

حدد معيار وعمدة العدد العقدي z .

<u>الجواب :</u> نضع : $z_1=1+\cos\theta+i\sin\theta$ و $z_2=1-\cos\theta-i\sin\theta$

لدينا : $|z|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ و $\arg z\equiv\arg z_1-\arg z_2\ [2\pi]$

لدينا : $\left(\begin{matrix}1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}\ :\ \text{لأن}\\ \sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{matrix}\right)$ $z_1=2\cos^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$z_1=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

و $z_2=1-\cos\theta-i\sin\theta=1+\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$

$z_2=2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

إذن : $|z_1|=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ و $|z_2|=2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|$

بما أن : $\frac{\theta}{2} \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ فإن : $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|\cos\frac{\theta}{2}|}{|\sin\frac{\theta}{2}|}$

(لأن : $|\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})| = |\sin(\frac{\theta}{2})|$)

ومنه : $|z| = |\cotan\frac{\theta}{2}|$

لنحدد عمدة z . لدينا : $\arg z \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \quad [2\pi]$

$$z = \frac{2\cos\theta/2\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)}{-2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})\right)}$$

$$z = -\cotan\frac{\theta}{2}\left(\frac{[1,\frac{\theta}{2}]}{[1,\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}]}\right)$$

$$z = -\cotan\frac{\theta}{2}\left([1\,;\frac{\theta}{2}-(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})]\right)$$

$$z = -\cotan\frac{\theta}{2}\left([1,-\frac{\pi}{2}]\right)$$

ومنه إذا كان : $-\cotan\frac{\theta}{2} > 0$ فإن : $z = [-\cotan\frac{\theta}{2}\,;-\frac{\pi}{2}]$

إذن : $\arg z \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

إذا كان : $-\cotan\frac{\theta}{2} < 0$ فإن : $z = [\cotan\frac{\theta}{2}\,;-\frac{\pi}{2}+\pi]$

إذن : $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

8

ليكن θ_1 و θ_2 من $\mathbb{R}$ حيث : $\theta_1 \neq \theta_2$

نضع : $z_1 = e^{i\theta_1} = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ و $z_2 = e^{i\theta_2} = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2$

حدد معيار وعمدة العدد العقدي $z = z_1 + z_2$.

الجواب : لدينا : $z = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$

$$z = e^{i\theta_1}\left(1 + e^{i(\theta-\theta_1)}\right)$$

ولدينا : $1 = e^{i(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})} \times e^{-i(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})}$ و $e^{i(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})} = \left(e^{i(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})}\right)^2$

ومنه : $z = e^{i\theta_1} \times e^{i(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})}\left(e^{-i(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})} + e^{i(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})}\right)$

نعلم أن : $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \quad : \forall x \in \mathbb{R}$

ومنه : $z = e^{i(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})} \times 2\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$

ومنه : $|z| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\right|$

ملاحظة هامة : $\begin{matrix} z = ae^{i\theta} \\ a \in \mathbb{R}^* \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} |z| = |a| \\ \arg z \equiv \begin{cases} \theta & [2\pi] \quad ; a > 0 \\ \theta + \pi & [2\pi] \quad ; a < 0 \end{cases} \end{cases}$

ومنه : $\arg(z) \equiv \arg(z_1+z_2) \equiv \begin{cases} \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \quad [2\pi] \quad ; \cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) > 0 \\ \frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \pi \quad [2\pi] \quad ; \cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) < 0 \end{cases}$

9

ليكن a و b من $\mathbb{C}$ بحيث : $a \neq b$ و $|a| = |b| = 1$

بين أن : $\forall z \in \mathbb{C} \; : \; \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$

الجواب : ملاحظة هامة : $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z$

ليكن z من $\mathbb{C}$ نضع : $Z = \frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b}$

لدينا : $\bar{Z} = \frac{\bar{z} + \bar{a}.\bar{b}\, z - (\bar{a}+\bar{b})}{\bar{a}-\bar{b}}$

بما أن : $|a| = 1$ و $|b| = 1$ فإن : $\bar{a} = \frac{1}{a}$ و $\bar{b} = \frac{1}{b}$

ومنه : $\bar{Z} = \frac{\bar{z} + \frac{1}{a}.\frac{1}{b} z - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$

$$\bar{Z} = \frac{ab\bar{z} + z - (a+b)}{b-a} = -\frac{z + ab\bar{z} - (a+b)}{a-b}$$

إذن : $\bar{Z} = -Z$ وبالتالي : $Z \in i\mathbb{R}$

10

ليكن z من $\mathbb{C}$. بين أن :

$$|z| = 1 \Rightarrow i\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \in \mathbb{R}$$

الجواب : ليكن z من $\mathbb{C}$ ؛ نضع : $Z = i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

بحيث : $|z| = 1$ أي : $\bar{z} = \frac{1}{z}$

لدينا : $\bar{z} = -i\left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right) = -i\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)$

$$\bar{z} = -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

ومنه : $\bar{z} = z$ وبالتالي : $z \in \mathbb{R}$.

11 ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث : $a>0$.

نضع : $z = a\frac{1+ib}{1-ib}$

حدد معيار وعمدة العدد العقدي z .

__الجواب :__ لنحدد معيار z :

لدينا : $|z| = |a|.\frac{|1+ib|}{|1-ib|}$

بما أن : $|1+ib| = |\overline{1+ib}| = |1-ib|$ $(b\in\mathbb{R})$

فإن : $|z| = |a| = a$ (لأن : $a>0$)

لنحدد عمدة z :

__ملاحظة هامة :__ $x<0 \Leftrightarrow \arg x \equiv \pi\ [2\pi]$; $x>0 \Leftrightarrow \arg x \equiv 0\ [2\pi]$

$\arg(1+ix) \equiv \operatorname{Arctan} x\ [2\pi]$: $\forall x \in \mathbb{R}$

لدينا : $\arg z \equiv \arg a + \arg\left(\frac{1+ib}{1-ib}\right)\ [2\pi]$

بما أن : $a>0$ فإن : $\arg(a) \equiv 0\ [2\pi]$

ولدينا : $\arg(1+ib) \equiv \operatorname{Arctan} b\ [2\pi]$ و $\arg(1-ib) \equiv -\operatorname{Arctan} b\ [2\pi]$

إذن : $\arg z \equiv \arg(1+ib) - \arg(1-ib)\ [2\pi]$

$$\equiv \operatorname{Arctan} b + \operatorname{Arctan} b\ [2\pi]$$

وبالتالي : $\arg z \equiv 2\operatorname{Arctan} b$

إذن : $z = [a\,;\,2\operatorname{Arctan} b]$

12 ليكن z_1 و z_2 من $\mathbb{C}$. بين أن :

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |2 + z_1 z_2| = 1 \end{cases} \Rightarrow z_1 z_2 = -1$$

<u>الجواب :</u> ملاحظة هامة : $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta}$

إذن : $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : z_1 = e^{i\theta_1}$ و $z_2 = e^{i\theta_2}$

ولدينا : $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| = R \Leftrightarrow z\bar{z} = R^2$

إذن : $|2 + z_1 z_2| = 1 \Leftrightarrow (2 + z_1 z_2)(\overline{2 + z_1 z_2}) = 1$

$$\Leftrightarrow (2 + e^{i(\theta_1+\theta_2)})(2 + e^{-i(\theta_1+\theta_2)}) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2(e^{i(\theta_1+\theta_2)} + e^{-i(\theta_1+\theta_2)}) + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2.2\cos(\theta_1 + \theta_2) = -4$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta_1 + \theta_2) = -1$$

وبما أن : $\cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2) = 1$

فإن : $\sin(\theta_1 + \theta_2) = 0 \qquad$ (لأن : $\cos^2(\theta_1 + \theta_2) = 1$)

ومنه : $z_1 z_2 = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

وبالتالي : $z_1 z_2 = -1$

13 حدد جميع الأعداد العقدية z بحيث يكون z^7 و $\frac{1}{z^2}$ مترافقان .

<u>الجواب :</u> لدينا : z^7 و $\frac{1}{z^2}$ مترافقان يعني أن : $z^7 = \overline{\left(\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^2}$

ومنه : $|z^7| = \frac{1}{|z|^2}$ أي : $|z|^9 = 1$

ومنه : $|z| = 1$

إذن : $z = e^{i\theta} \quad : \quad \exists \theta \in \mathbb{R}$

لدينا : $z^7 = e^{7i\theta}$ و $\frac{1}{z^2} = e^{-2i\theta}$

ومنه : $e^{7i\theta} = e^{2i\theta} \Leftrightarrow z^7 = \frac{1}{z^2}$

$\Leftrightarrow e^{5i\theta} = 1$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5} \quad / k \in \{0,1,2,3,4\}$

وبالتالي : z^7 و $\frac{1}{z^2}$ متوافقان $\Leftrightarrow z \in \{e^{\frac{2k\pi}{5}i} \quad / k \in \{0,1,2,3,4\}\}$

14 حدد الجذور المربعة للعدد العقدي : $z = 4ab + 2(a^2 - b^2)i$

بحيث : a و b من $\mathbb{R}$ و $a > b$.

<u>الجواب :</u> ليكن Z جذر مربع للعدد z إذن : $Z^2 = z$

نضع : $z = x + iy$ بحيث : $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

ومنه : $Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4ab \\ xy = a^2 - b^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-y^2) = 4ab \\ x^2(-y^2) = -(a^2 - b^2)^2 \end{cases}$

إذن : x^2 و $(-y^2)$ حلا المعادلة : $X^2 - 4abX - (a^2-b^2)^2 = 0$

التي تقبل الحلان : $X_1 = -(a-b)^2$ و $X_2 = (a+b)^2$

ومنه : $x = \varepsilon_1(a+b)$ و $y = \varepsilon_2(a-b)$

حيث : ε_1 و ε_2 عنصرين من $\{-1, 1\}$.

واعتبار $xy = a^2 - b^2 > 0$ نحصل على $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$

أي : $Z = \varepsilon[(a+b) + i(a-b)]$ حيث : $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

15 ليكن z و z' و u من $\mathbb{C}$ بحيث : $zz' = u^2$

بين أن : $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|$

<u>الجواب :</u> ملاحظة هامة : $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists a \in \mathbb{C} \quad z = a^2$

لدينا : $\exists b \in \mathbb{C} : z' = b^2$

بما أن : $u^2 = zz' = (ab)^2$

فإن : $u = ab$ أو $u = -ab$

* إذا كان : $u = ab$ لدينا :
$\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| \quad \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|$
$$= \left|\frac{a^2+b^2}{2}+ab\right| + \left|\frac{a^2+b^2}{2}-ab\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|(a+b)^2\right| + \frac{1}{2}\left|(a-b)^2\right| = \frac{1}{2}\left(|a+b|^2+|a-b|^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left((a+b)(\bar{a}+\bar{b}) + (a-b)(\bar{a}-\bar{b})\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(a\bar{a}+a\bar{b}+b\bar{a}+b\bar{b}+a\bar{a}-a\bar{b}-b\bar{a}+b\bar{b}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2a\bar{a}+2b\bar{b}\right) = a\bar{a}+b\bar{b} = |a|^2+|b|^2$$

وبالتالي : $\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| + \left|\frac{z+z'}{2}-u\right| = |z|+|z'|$

* بالمثل نحصل نفس النتيجة إذا كان : $u = -ab$.

16

ليكن a و b من $\mathbb{C}^*$.

بيّن أن : $\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$

الجواب : لدينا : $|a|^2 = a\bar{a}$ و $|b|^2 = b\bar{b}$

ومنه : $\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right| = \left|\frac{a}{a\bar{a}}-\frac{b}{b\bar{b}}\right| = \left|\frac{1}{\bar{a}}-\frac{1}{\bar{b}}\right|$
$$= \frac{|\bar{b}-\bar{a}|}{|\bar{a}\bar{b}|} = \frac{|\overline{b-a}|}{|\overline{ab}|}$$

وبما أن : $|\overline{ab}| = |ab| = |a||b|$ و $|\overline{b-a}| = |b-a|$

فإن : $\left|\frac{a}{|a|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right| = \frac{|a-b|}{|a||b|}$

17

ليكن z من $\mathbb{C}$ بحيث : $|z| = 1$ و $z \neq -1$

بيّن أن : $\exists x \in \mathbb{R} : \quad z = \frac{1+xi}{1-xi}$

الجواب : لدينا : $|z| = 1 \Leftrightarrow \exists\theta \in \mathbb{R} : z = e^{i\theta}$

نضع : $x = \tan\frac{\theta}{2}$ $\quad (z \neq -1 \Leftrightarrow \theta \not\equiv \pi \; [2\pi])$

لنبيّن أن : $z = \frac{1+xi}{1-xi}$

لدينا :
$$\frac{1+xi}{1-xi}=\frac{1+(\tan\frac{\theta}{2})i}{1-(\tan\frac{\theta}{2})i}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}=e^{i\theta}=z$$

و بالتالي : $\exists x\in\mathbb{R}:\ z=\dfrac{1+xi}{1-xi}$

18 ليكن z_1 و z_2 من $\mathbb{C}$ بحيث : $1+z_1z_2\neq 0$

بين أن : $|z_1|=|z_2|=1 \Longrightarrow \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$

<u>الجواب :</u> لدينا : $|z_1|=|z_2|=1 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\dfrac{1}{z_1}$ و $\bar{z}_2=\dfrac{1}{z_2}$

نضع : $Z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$

لدينا : $\bar{Z}=\dfrac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2}=\dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}}=\dfrac{z_2+z_1}{z_1z_2+1}=Z$

ومنه : $Z\in\mathbb{R}$

19 لتكن a و b و c و d أعداد عقدية مختلفة مثنى، مثنى

بين أن : $\left[\dfrac{a-d}{b-c}\in i\mathbb{R}\ \text{و}\ \dfrac{b-d}{c-a}\in i\mathbb{R}\right]\Rightarrow\dfrac{c-d}{a-b}\in i\mathbb{R}$

<u>الجواب :</u> لدينا :
$$\begin{cases}\dfrac{a-b}{b-c}\in i\mathbb{R}\\ \dfrac{b-d}{c-a}\in i\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}}=-\dfrac{a-b}{b-c}\\ \dfrac{\bar{b}-\bar{d}}{\bar{c}-\bar{a}}=-\dfrac{b-d}{c-a}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{a}b-\bar{a}c-\bar{d}b+\bar{d}c=d\bar{b}-a\bar{b}-d\bar{c}+a\bar{c} & (1)\\ c\bar{b}-a\bar{b}-c\bar{d}+\bar{d}a=d\bar{c}-\bar{a}d+\bar{a}b & (2)\end{cases}$$

ومنه : $(1)+(2)\Leftrightarrow c(\bar{b}-\bar{a})+\bar{d}(a-b)=d(\bar{b}-\bar{a})+\bar{c}(a-b)$
$$\Leftrightarrow(\bar{b}-\bar{a})(c-d)=(a-b)(\bar{c}-\bar{d})$$
$$\Leftrightarrow\frac{\bar{c}-\bar{d}}{\bar{a}-\bar{b}}=-\frac{c-d}{a-b}\Leftrightarrow\frac{c-d}{a-b}\in i\mathbb{R}$$

20

ليكن $z_1 = 1+i$ و $z_2 = \sqrt{3}-i$

1) حدد معيار وعمدة كل من z_1 و z_2.

2) حدد الشكل المثلثي و الشكل الجبري للعدد $z_1 z_2$.

واستنتج : $\sin\frac{\pi}{12}$ و $\cos\frac{\pi}{12}$.

الجواب : 1) لدينا : $z_1 = 1+i$ و $z_2 = \sqrt{3}-i$

إذن : $|z_1| = \sqrt{2}$ و $|z_2| = 2$

لدينا : $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه : $\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ إذن : $z_1 = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}]$

لدينا : $z_2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

ومنه : $\arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$ إذن : $z_2 = [2, -\frac{\pi}{6}]$

2) لدينا : $z_1 z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1)$

ولدينا : $z_1 z_2 = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}] \times [2; -\frac{\pi}{6}]$

$$= [2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}] = [2\sqrt{2}; \frac{\pi}{12}]$$

إذن : $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ومنه : $\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + i\, 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

21

ليكن u عدد عقدي معياره r وعمدته θ و $\bar{u}$ مرافق u

أحسب بدلالة r و θ التعبير : $P_n = (u+\bar{u})(u^2+\bar{u}^2) \times \dots \times (u^n+\bar{u}^n)$

الجواب : لدينا : $u = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ إذن : $\bar{u} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

$$u^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$$

ولدينا : $u^k + \bar{u}^k = 2\mathcal{R}e(u^k) = 2r^k\cos k\theta$

ومنه : $P_n = \prod_{k=1}^{n}(u^k+\bar{u}^k) = \prod_{k=1}^{n} 2r^k\cos k\theta$

$$P_n = 2^n . r^{(1+2+\dots+n)} . \cos\theta\cos 2\theta \times \dots \times \cos n\theta$$

و بما أن :

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

فإن :

$$P_n=2^n\times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}\times \cos\theta\cos 2\theta\times\cdots\times\cos n\theta$$

22

ليكن z عدد عقدي و θ عدد حقيقي بحيث :

$$z^2-2z\cos\theta+1=0$$

بين أن : $\quad z^{2n}-2z^n\cos n\theta+1=0 \quad : \forall n\in\mathbb{N}$

الجواب : لدينا :

$$z^2-2z\cos\theta+1=0 \Leftrightarrow (z-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=0$$

$$\Leftrightarrow (z-\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (z-\cos\theta-i\sin\theta)(z-\cos\theta+i\sin\theta)=0$$

$$\Leftrightarrow z=\cos\theta+i\sin\theta \text{ أو } z=\cos\theta-i\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow z=e^{i\theta} \text{ أو } z=e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow z^n=e^{in\theta} \text{ أو } z^n=e^{-in\theta}$$

ومنه :

$$(z^n-e^{in\theta})(z^n-e^{-in\theta})=0$$

$$\Leftrightarrow z^{2n}-(e^{in\theta}+e^{-in\theta})z^n+e^{in\theta}\times e^{-in\theta}=0$$

أي :

$$z^{2n}-2z^{n}\cos n\theta+1=0$$

23

ليكن a و b عددين عقديين بحيث : $a\neq b$

بين أن : $\quad |a|=|b| \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)\in\mathbb{R}^-$

الجواب : $(\Rightarrow)$ لدينا :

$$|a|=|b| \Leftrightarrow \left|\frac{a}{b}\right|=1 \quad ; (b\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R} : \frac{a}{b}=e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R} : a=be^{i\theta}$$

نضع :

$$Z=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

لدينا :

$$Z=\left(\frac{be^{i\theta}-b}{be^{i\theta}+b}\right)^2=\left(\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\right)^2=\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}})}\right)^2$$

$$z=\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right)^2=\left(\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2=-\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2$$

ومنه : $z\in\mathbb{R}^-$.

$\Leftarrow$) لدينا : $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\in\mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\equiv\pi\ [2\pi]$

$$\Leftrightarrow 2\arg\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\equiv\pi\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}^+ : \frac{a+b}{a-b}=\alpha i$$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}^+ : a(-1+i\alpha)=b(1+i\alpha)$$

$$\Rightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}^+ : |a||-1+i\alpha|=|b||1+i\alpha|$$

$$\Rightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}^+ : |a|\sqrt{1+\alpha^2}=|b|\sqrt{1+\alpha^2}$$

$$\Rightarrow |a|=|b| \qquad (\text{لأن: } \sqrt{1+\alpha^2}\neq 0)$$

وبالتالي : $|a|=|b| \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\in\mathbb{R}^-$

24

ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين و u عددا عقديا بحيث :

$$u^2=zz'$$

بين أن : $\arg z-\arg z'\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Rightarrow \frac{z+z'+i(z-z')}{u}\in\mathbb{R}$

الجواب : نضع : $t=\frac{z+z'+i(z-z')}{u}$

نفترض أن : $\arg z-\arg z'\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ولنبين أن : $t\in\mathbb{R}$ أي : $\arg t\equiv 0\ [\pi]$

نضع : $\theta\equiv\arg z\ [2\pi]$ ومنه : $\frac{\pi}{2}+\theta\equiv\arg z'\ [2\pi]$

لدينا : $t=\frac{z(1+i)+z'(1-i)}{u}$

ومنه : $ut=z(1+i)+z'(1-i)$

لدينا : $\arg z(1+i)\equiv\arg z+\arg(1+i)\ [2\pi]$

$\equiv\theta+\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ $\qquad$ (لأن: $\arg(1+i)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$)

$\arg z'(1-i)\equiv\arg z'+\arg(1-i)\ [2\pi]$

$\equiv\theta+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ $\qquad$ (لأن: $\arg(1-i)\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$)

إذن : $\arg z'(1-i) \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

ملاحظة هامة : $\begin{cases} \arg z \equiv \alpha \quad [2\pi] \\ \arg z' \equiv \alpha \quad [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \arg(z+z') \equiv \alpha \quad [2\pi]$

لدينا : $\begin{cases} \arg(1+i)z \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \; [2\pi] \\ \arg(1-i)z' \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \; [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \arg((1+i)z + (1-i)z') \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \; [2\pi]$

ومنه : $\arg ut \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg u + \arg t \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

بما أن : $u^2 = zz'$ فإن : $\arg u^2 \equiv \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$

$2\arg u \equiv \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$

إذن : $\arg u \equiv \frac{1}{2}(\arg z + \arg z') \quad [\pi]$

ومنه : $\arg u \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \quad [\pi]$

وبما أن : $\arg u + \arg t \equiv \theta + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

فإن : $\arg t \equiv 0 \quad [\pi]$

ومنه : $t \in \mathbb{R}$

25 نعتبر العدد العقدي : $z = e^{i\frac{\pi}{7}}$

نضع : $S = z + z^2 + z^4$ و $T = z^3 + z^5 + z^6$

1) بين أن العددين S و T مترافقين .

2) بين أن : $\mathrm{Im}(S) > 0$.

3) أحسب : $S+T$ و ST

4) استنتج قيم S و T .

الجواب : لدينا : $z = e^{i\frac{\pi}{7}}$ إذن : $z^7 = 1$

1) لدينا : $\bar{S} = \bar{z} + \bar{z}^2 + \bar{z}^4$

بما أن : $|z| = 1$ فإن : $\bar{z} = \frac{1}{z}$

ولدينا : $z^6 = \frac{1}{z}$ و $z^5 = \frac{1}{z^2}$ و $z^3 = \frac{1}{z^4}$

ومنه : $\bar{S} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^4}$ إذن : $\bar{S} = z^6 + z^5 + z^3 = T$

وبالتالي S و T مترافقين .

2) لنبين أن : $\mathfrak{Im}(S)>0$

لدينا : $S=z+z^2+z^4$

ومنه ، $\mathfrak{Im}(S)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$

$=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)+\sin\frac{4\pi}{7}$

$=\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{4\pi}{7}>0$

ومنه : $\mathfrak{Im}(S)>0$ (لأن : $0<\frac{4\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$)

3) لنحسب : $S+T$ و ST .

لدينا : $S+T=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$

$=(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)-1$

$S+T=\frac{1-z^7}{1-z}-1=-1$ (لأن : $z\neq1$ و $z^7=1$)

ومنه : $S+T=-1$

لدينا : $ST=(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)$

بعد النشر نحصل على : $ST=z^6+z^5+z^4+z^8+z^9+z^{10}+3z^7$

$ST=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+3$ (لأن : $z^7=1$)

ومنه : $ST=2$ (لأن : $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$)

4) لدينا : $\begin{cases}S+T=-1\\ST=2\end{cases}$ ومنه S و T حلول المعادلة : $X^2+X+2=0$

وهما : $X_1=\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$ و $X_2=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$

وبما أن : $\mathfrak{Im}(S)>0$ فإن ، $S=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$ و $T=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$

26 ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة بمايلي :

$$S_n=\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)+\dots+\sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

1) نضع $z=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

أ- أحسب : $S=1+z+z^2+\dots+z^{n-1}$

ب- حدد $\mathfrak{Re}(S)$ و $\mathfrak{Im}(S)$

2) استنتج أن : $S_n=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{S_n}{n}\right)$

الجواب : 1) أ- لدينا :

$$S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

$$= \frac{z^n - 1}{z - 1} \quad (z \neq 1 \text{ لأن})$$

وبما أن $z^n = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ فإن : $S = \dfrac{-2}{z-1}$

إذن :

$$S = \frac{-2}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{-2e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{e^{i\frac{\pi}{2n}} - e^{-i\frac{\pi}{2n}}}$$

$$S = \frac{-2e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{2i\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{i\,e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

ومنه :

$$S = \frac{i}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$S = 1 + i\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

ب- بما أن : $S = 1 + i\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$ فإن : $\mathcal{R}e(S) = 1$ و $\mathcal{I}m(S) = \dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

2) لدينا :

$$S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

$$= 1 + \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{n-1}$$

$$= 1 + \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + i\sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)\right)$$

$$= \left(1 + \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)\right) + i\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\pi\right)\right)$$

ومنه :

$$S_n = \mathcal{I}m\,S = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

لدينا ،

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = \lim\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}} \times \frac{2}{\pi}$$

بما أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{2}{\pi}$.

27

ليكن n من $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ و θ عدد حقيقي .

أحسب المجموع : $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos^k\theta\cos k\theta$

الجواب : نضع : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\cos^k\theta\sin k\theta$

و $z = C_n + iS_n$

لدينا :
$$Z=\sum_{k=0}^{n-1}(\cos k\theta+i\sin k\theta)\cos^k\theta$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^k\theta\, e^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{n-1}(\cos\theta e^{i\theta})^k$$

إذن :
$$Z=\frac{1-\cos^n\theta e^{in\theta}}{1-\cos\theta e^{i\theta}}$$
$$Z=\frac{1-\cos^n\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta)}{1-\cos\theta e^{i\theta}}$$

لدينا :
$$1-\cos\theta e^{i\theta}=1-\cos^2\theta-i\cos\theta\sin\theta=\sin^2\theta-i\cos\theta\sin\theta$$
$$=\sin\theta(\sin\theta-i\cos\theta)$$

إذن :
$$Z=\frac{(1-\cos^n\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta))(\sin\theta+i\cos\theta)}{\sin\theta(\sin\theta-i\cos\theta)(\sin\theta+i\cos\theta)}$$
$$Z=\frac{(1-\cos^n\theta(\cos n\theta+i\sin n\theta))(\sin\theta+i\cos\theta)}{\sin\theta}$$
$$Z=\frac{\sin\theta+i\cos\theta-i\cos^n\theta(\cos(n-1)\theta+i\sin(n-1)\theta)}{\sin\theta}$$
$$Z=\frac{\sin\theta+\cos^n\theta\sin(n-1)\theta-i\cos^n\theta\cos(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

ومنه :
$$c_n=\mathcal{R}e(Z)=1+\frac{\cos^n\theta\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}$$

28 ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ؛ نضع : $Z_n=\left(\frac{3-4i}{5}\right)^n$

1) بين أن : $Z_n=1 \Leftrightarrow (2+i)^n=(2-i)^n$

2) بين أن : $Z_n=1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1}C_n^k(2-i)^k(2i)^{n-k}=-(2i)^n$

3) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}$: $2^{2n}\not\equiv 0\ [5]$

4) استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $Z_n\neq 1$

الجواب : 1) ليكن n من $\mathbb{N}^*$:

لدينا :
$$(2+i)^n=(2-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{2-i}{2+i}\right)^n=1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{(2-i)(2-i)}{5}\right)^n=1$$

ومنه : $(2+i)^n = (2-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{3-i}{5}\right)^n = 1$

$\Leftrightarrow Z_n = 1$

2) نفترض أن $Z_n = 1$ ، ومنه : $(2+i)^n = (2-i)^n$

$\Leftrightarrow (2-i)^n = ((2-i)+2i)^n$

$\Leftrightarrow (2-i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k}$

$(2-i)^n = (2i)^n + (2-i)^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k}$

ومنه : $\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k (2-i)^k (2i)^{n-k} = -(2i)^n$

3) ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا : $2^{2n} = 4^n$

وبما أن : $4 \equiv -1 \ [5]$ فإن : $2^{2n} \equiv (-1)^n \ [5]$

ومنه : $2^{2n} \not\equiv 0 \ [5] \quad : \forall n \in \mathbb{N}$

4) البرهان بالخلف نفترض أن : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad Z_{n_0} = 1$

حسب السؤال 2) لدينا : $\sum_{k=1}^{n_0-1} C_{n_0}^k (2-i)^k (2i)^{n_0-k} = -(2i)^{n_0}$

$\Leftrightarrow (2-i) \sum_{k=1}^{n} C_{n_0}^k (2-i)^{k-1} \cdot (2i)^{n_0} = -(2i)^{n_0}$

ولدينا : $\exists! (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \ : \ \sum_{k=1}^{n_0-1} C_{n_0}^k (2-i)^k (2i)^{n_0-1} = \alpha + i\beta$

ومنه : $(2-i)(\alpha + i\beta) = -(2i)^{n_0}$

إذن : $|(2-i)||\alpha + i\beta| = |-(2i)^{n_0}|$

أي : $\sqrt{5}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2^{n_0}$

ومنه : $5(\alpha^2+\beta^2) = 2^{n_0}$

إذن : $2^{n_0} \equiv 0 \ [5]$ ، وهذا تناقض ، وذلك حسب السؤال 3)

وبالتالي : $Z_n \neq 1. \quad : \forall n \in \mathbb{N}^*$

29

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر المجموعة : $E = \{M(z) \ / \ (z-1)(\bar{z}-1) = 4\}$

حدد طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة .

الجواب : لدينا :

$$M(z) \in (E) \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 4$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = 4$$
$$\Leftrightarrow |z-1|^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow |z-1| = 2$$
$$\Leftrightarrow AM = 2$$

(A النقطة ذات اللحق 1)

ومنه (E) هي الدائرة التي مركزها $A(1,0)$ وشعاعها $R=2$.

30

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) حدد مجموعة النقط M التي لحقها z التي تحقق :

$$|1-z| = |i-z|$$

2) حدد مجموعة النقط M التي لحقها z التي تحقق :

أ- $(1-z)(1-iz) \in \mathbb{R}$

ب- $(1-z)(1-iz) \in i\mathbb{R}$

الجواب : 1) لتكن : $E = \{M(z) \ | \ |1-z| = |i-z|\}$

نعتبر النقطتين : $A(1)$ و $B(i)$

لدينا :

$$M(z) \in E \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$$
$$\Leftrightarrow AM = BM$$

ومنه E هو واسط القطعة $[AB]$.

2) أ- لتكن $F = \{M(z) \ | \ (1-z)(1-iz) \in \mathbb{R}\}$

نضع : $z = x+iy$ حيث : $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

لدينا :

$$(1-z)(1-iz) = 1-(1+i)z+iz^2$$
$$= 1-(1+i)(x+iy)+i(x+iy)^2$$
$$= 1-x-iy-ix+y+ix^2-iy^2-2xy$$

ومنه : $(1-z)(1-iz)=(1-x+y-2xy)+i(x^2-y^2-x-y)$

إذن : $(1-z)(1-iz)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-y^2-x-y=0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-y-1)=0$

$\Leftrightarrow x+y=0$ أو $x-y-1=0$

ومنه (F) هي إتحاد مستقيمين : $(D): x+y=0$ و $(\Delta): x-y-1=0$

ب - لتكن $H=\{M(z) \mid (1-z)(1-iz)\in i\mathbb{R}\}$

لدينا : $M(z)\in H \Leftrightarrow (1-z)(1-iz)\in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 1-x+y-2xy=0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1-x}{2x-1}$

ومنه (H) هو المدلول الذي معادلته : $y=\dfrac{1-x}{2x-1}$

31

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) حدد العدد العقدي z الذي تحقق : $\begin{cases}|z|=|z-2|\\ \arg z\equiv\arg(z+3+i) & [2\pi]\end{cases}$

2) حدد مجموعة النقط M التي لحقها z التي يحقق : $z+\bar{z}=k|z|$

(ناقش حسب قيم k)

الجواب : لتكن M نقطة من المستوى لحقها z و A النقطة التي لحقها 2

لدينا : $|z|=|z-2| \Leftrightarrow OM=AM$

$\Leftrightarrow$ M تنتمي إلى واسط القطعة $[OA]$

واسط القطعة $[OA]$ معادلته : $(\Delta): x=1$

ولتكن B النقطة التي لحقها $-3-i$

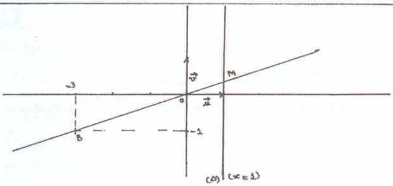
لدينا : $\arg z=(\vec{u},\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

$\arg(z+3+i)\equiv(\vec{u},\overrightarrow{BM})\ [2\pi]$

إذن : $\arg z\equiv\arg(z+3+i) \Leftrightarrow \overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM})}\equiv\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BM})}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow$ نصفي المستقيمين $[OM)$ و $[BM)$ منطبقين

وبالتالي : M تنتمي إلى تقاطع (Δ) و (OB) $\Leftrightarrow \begin{cases}|z|=|z-2|\\ \arg z\equiv\arg(z+3+i) & [2\pi]\end{cases}$



٢) لتكن : $E=\{ M(z) \mid z+\bar{z} = k|z| \}$

نضع : $z=x+iy$ بحيث : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

لدينا : $M(z)\in E \Leftrightarrow z+\bar{z}=k|z| \Leftrightarrow 2x=k\sqrt{x^2+y^2}$

* إذا كان : $k=0$ فإن : $x=0$ ومنه E هو محور الأراتيب.

* إذا كان : $k\neq 0$.

لدينا :

$$2x=k\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2=k^2(x^2+y^2) \\ kx\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-k^2)x^2=k^2y^2 \\ kx\geqslant 0 \end{cases}$$

- إذا كان : $4-k^2<0$ فإن $k^2y^2<0$ غير ممكن ومنه : $E=\emptyset$

- إذا كان : $4-k^2>0$ أي : $-2\leq k\leq 2$

فإن :

$$M(z)\in E \Leftrightarrow \begin{cases} |y|=\frac{x}{k}\sqrt{4-k^2} \\ kx\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x \quad \text{أو} \quad y=-\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x \\ kx\geqslant 0 \end{cases}$$

وبالتالي E هو إتحاد نصفي مستقيمين معادلتهما :

$(\Delta_1) : \begin{cases} y=\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x \\ kx\geqslant 0 \end{cases}$ و $(\Delta_2) : \begin{cases} y=-\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x \\ kx\geqslant 0 \end{cases}$.

32 المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A و B و C التي ألحاقها a و b و c على التوالي.

1) أ- بين أن : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(a\bar{b}+\bar{a}b)$

ب- استنتج أن : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[(c-a)(\bar{b}-\bar{a})+(\bar{c}-\bar{a})(b-a)\right]$

2) أ- بين أن : $\det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{i}{2}(a\bar{b}-\bar{a}b)$

ب- استنتج أن : $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{i}{2}\left[(c-a)(\bar{b}-\bar{a})-(\bar{c}-\bar{a})(b-a)\right]$

3) نضع : $a=R_1e^{i\theta_1}$ و $b=R_2e^{i\theta_2}$ حيث : $R_1>0$ و $R_2>0$

حدد $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ و $\det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$ بدلالة R_1 و R_2 و θ_1 و θ_2.

4) تطبيق : حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط $A(1)$ و $M(z)$ و $C(1+z^2)$ مستقيمية.

الجواب : 1) أ- نضع : $a=x_1+iy_1$ و $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$

$b=x_2+iy_2$ و $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$

لدينا :
$$a\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2-i(x_1y_2-y_1x_2)$$
$$\bar{a}b=x_1x_2+y_1y_2+i(x_1y_2-y_1x_2)$$

ومنه : $a\bar{b}+\bar{a}b=2(x_1x_2+y_1y_2)$

إذن : $\frac{1}{2}(a\bar{b}+\bar{a}b)=x_1x_2+y_1y_2$

وبالتالي : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(a\bar{b}+\bar{a}b)$

ب- لتكن L و K نقطتين من $(\mathcal{P})$ بحيث : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OL}$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OK}$

لدينا لحق K هو $b-a$ ولحق L هو $c-a$.

ومنه حسب السؤال 1) أ-
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OL}.\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\left[(c-a)(\bar{b}-\bar{a})+(\bar{c}-\bar{a})(b-a)\right]$$

2) أ- لدينا : $\frac{1}{2}(a\bar{b}-\bar{a}b)=-i(x_1y_2-y_1x_2)$

$$\frac{i}{2}(a\bar{b}-\bar{a}b)=x_1y_2-x_2y_1$$

ومنه : $\det(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{i}{2}(a\bar{b}-\bar{a}b)$

ب- نضع : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OL}$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OK}$

إذن : $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\det(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OL})=\frac{i}{2}\left[(c-a)(\bar{b}-\bar{a})-(\bar{c}-\bar{a})(b-a)\right]$

3) لدينا : $a = R_1 e^{i\theta_1}$ و $b = R_2 e^{i\theta_2}$

إذن : $\vec{OA}.\vec{OB} = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b) = \frac{1}{2}\left[R_1R_2 e^{i\theta_1}.e^{-i\theta_2} + R_1R_2 e^{-i\theta_1}.e^{i\theta_2}\right]$

$= \frac{1}{2}R_1R_2\left(e^{i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}\right)$

ومنه : $\vec{OA}.\vec{OB} = R_1R_2\cos(\theta_1-\theta_2)$

$\det(\vec{OA};\vec{OB}) = \frac{i}{2}(a\bar{b} - \bar{a}b)$

ومنه : $\det(\vec{OA};\vec{OB}) = R_1R_2\sin(\theta_1-\theta_2)$

4) النقط $A(1)$ و $M(z)$ ، $C(1+z^2)$ مستقيمية يكافيء :

$\det(\vec{AC};\vec{AB}) = 0 \Leftrightarrow \frac{i}{2}\left[(1+z^2-1)(\bar{z}-1) - (1+\bar{z}^2-1)(z-1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) - \bar{z}^2(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) - \overline{z^2(\bar{z}-1)} = 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(z^2(\bar{z}-1)\right) = 0$

نضع : $z = x + iy$ حيث : $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$z^2(\bar{z}-1) = \left((x^2-y^2) + i2xy\right)(x-1-iy)$

$= (x^2-y^2)(x-1) + 2xy^2 - i\left[(x^2-y^2)y - 2xy(x-1)\right]$

ومنه : $\mathrm{Im}\left(z^2(\bar{z}-1)\right) = 0 \Leftrightarrow y(x^2-y^2) - 2xy(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow y(x^2-y^2-2x^2+2x) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ أو $x^2+y^2-2x = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ أو $(x-1)^2+y^2 = 1$

ومنه مجموعة $M(z)$ بحيث تكون النقط $A(1)$ و $M(z)$ و $C(1+z^2)$ مستقيمية هي إتحاد المستقيم (D) الذي معادلته : $y = 0$ والدائرة $(\mathscr{C})$ التي مركزها $\Omega(1,0)$ وشعاعها $R=1$.

33

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

ليكن z عددعقدي و m صورة z .

نضع : $Z=\dfrac{z-1}{z+1}$ و M صورة Z.

1) بين أن : $\dfrac{Z+i}{Z-i}=i\,\dfrac{z+i}{z-i}$

2) ليكن (P_1) نصف المستوى المعرف ب : $y\geq 0$.

بين أنه إذا كانت m تنتمي إلى (P_1) فإن M تنتمي أيضاً إلى (P_1).

3) ليكن $k\in\mathbb{R}^+$ و $(\mathscr{C}_k)$ مجموعة النقط m لحقها z التي تحقق :

$$|Z|=\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=k$$

حدد طبيعة $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$ و أنشئهما .

<u>الجواب :</u> 1) ليكن z من $\mathbb{C}$ ؛ لدينا : $Z=\dfrac{z-1}{z+1}$

إذن :
$$\frac{Z+i}{Z-i}=\frac{\dfrac{z-1}{z+1}+i}{\dfrac{z-1}{z+1}-i}=\frac{z(1+i)-(1-i)}{z(1-i)-(1+i)}$$
$$=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{z-\dfrac{1-i}{1+i}}{z-\dfrac{1+i}{1-i}}$$

بما أن : $\dfrac{1+i}{1-i}=+i$ و $\dfrac{1-i}{1+i}=-i$

فإن : $\dfrac{Z+i}{Z-i}=i\,\dfrac{z+i}{z-i}$

2) لدينا : $Z=\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)}$

$$=\frac{z\bar{z}-1+(z-\bar{z})}{|z+1|^2}$$

$$Z=\frac{|z|^2-1}{|z+1|^2}+2i\,\frac{\mathcal{I}m(z)}{|z+1|^2}$$

(لأن : $z-\bar{z}=2i\,\mathcal{I}m(z)$ ، $z\bar{z}=|z|^2$)

إذا كانت : $m(z)\in(P_1)$ فإن : $\mathcal{I}m(z)\geq 0$

و بما أن : $\mathcal{I}m(Z)=\dfrac{2\,\mathcal{I}m(z)}{|z+1|^2}$ و $\mathcal{I}m(z)\geq 0$ فإن : $\mathcal{I}m(Z)\geq 0$

ومنه : $M(Z)$ تنتمي إلى (P_1) .

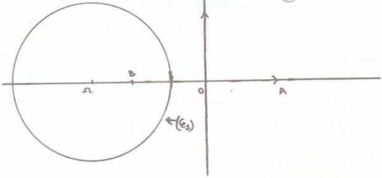
3) لتكن A و B النقطتين اللتان لحقهما 1 و -1 على التوالي.

لدينا :
$$m(z) \in (\mathscr{E}_1) \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1 \text{ و } z+1 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow |z-1| = |z+1| \text{ و } z \neq -1$$
$$\Leftrightarrow Am = Bm \text{ و } m \neq B$$

ومنه $(\mathscr{E}_1)$ هي واسط القطعة $[AB]$: محور الأراتيب.

لدينا :
$$m(z) \in (\mathscr{E}_2) \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2 \text{ و } z+1 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow |z-1| = 2|z+1| \text{ و } z \neq -1$$
$$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 4(z+1)(\bar{z}+1)$$
$$\Leftrightarrow 3z\bar{z} + 5(z+\bar{z}) + 3 = 0$$
نضع : $\begin{pmatrix} z = x+iy \\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{pmatrix}$
$$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2) + 10x + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

ومنه $(\mathscr{E}_2)$ هي الدائرة التي مركزها $\Omega(-\frac{5}{3},0)$ وشعاعها $R = \frac{4}{3}$.



34 لتكن f التقابل المعرف من $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ نحو $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ بما يلي :
$$z \longmapsto z' = f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

1) أحسب $|z'|^2$ بدلالة $|z|$ و $\mathrm{Im}(z)$.

2) حدد صورة محور الحقيقي بالتطبيق f.

3) حدد صورة الجزء $D = \{M(z) \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ بالتطبيق f.

الجواب : 1) حساب $|z'|^2$:

لدينا : $$|z'|^2 = z'\bar{z}' = \frac{z-i}{z+i} \times \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z\bar{z} + i(z-\bar{z}) + 1}{z\bar{z} - i(z-\bar{z}) + 1}$$

بما أن : $z\bar{z} = |z|^2$ و $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

فإن : $$|z'|^2 = \frac{|z|^2 - 2\,\mathrm{Im}(z) + 1}{|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}(z) + 1}$$

2) صور المحور الحقيقي بالتطبيق f .

لدينا : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow |z'|^2 = \frac{|z|^2+1}{|z|^2+1} = 1$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z'| = 1$

صورة المحور الحقيقي ب f هي الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O وشعاعها $R=1$ ومحرومة من النقطة $A(1,0)$.

3) صورة $\mathcal{D}$ بالتطبيق f .

لدينا : $M(z) \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow |z'|^2 < 1 \Leftrightarrow |z'| < 1$

صورة $(\mathcal{D})$ بالتطبيق f هو قرص الدائرة (Γ) التي مركزها O وشعاعها $R=1$ والمحروم من الدائرة (Γ) .

35 لتكن A و B و C ثلاثة نقط ألحاقها a و b و c على التوالي .

1) بين أن النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان :

$$a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0$$

2) لتكن A و B نقطتين مختلفتين.

حدد شرط لازم وكاف على z و $\bar{z}$ كي تكون النقطة M لحقها z تنتمي إلى المستقيم (AB) .

بين أنه إذا كان : $|a| = |b| = 1$ فإن هذه العلاقة تكتب :

$$z + ab\bar{z} - (a+b) = 0$$

الجواب : 1) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB} \;/ k \in \mathbb{R}$ أو $B = C \Leftrightarrow$ النقط A و B و C مستقيمية

$(a-c) = k(b-c) \;/ k \in \mathbb{R}$ أو $\Leftrightarrow b = c$

$\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ أو $\Leftrightarrow b = c$

$b=c$ أو $\dfrac{a-c}{b-c}=\dfrac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$ $\Leftrightarrow$ النقط A و B و C مستقيمية.

$\Leftrightarrow$ $b=c$ أو $(a-c)(\bar{b}-\bar{c})=(\bar{a}-\bar{c})(b-c)$

(1) $a(\bar{b}-\bar{c})+b(\bar{c}-\bar{a})+c(\bar{a}-\bar{b})=0$ $\Leftrightarrow$ النقط A و B و C مستقيمية.

2) النقط A و B و M مستقيمية $\Leftrightarrow$ $M\in(AB)$

$\Leftrightarrow$ $a(\bar{b}-\bar{z})+b(\bar{z}-\bar{a})+z(\bar{a}-\bar{b})=0$ (نعتبر $c=z$)

(2) $(\bar{a}-\bar{b})z-(a-b)\bar{z}+a\bar{b}-b\bar{a}=0$ $\Leftrightarrow$

<u>ملاحظة:</u> إذا كانت $B=O$ (أصل المعلم) فإن:

O و A و M مستقيمية $\Leftrightarrow$ $\bar{a}z-a\bar{z}=0$ $(a\neq 0)$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{z}{a}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{a}}$

إذا كان: $|a|=|b|=1$ فإن: $a\bar{a}=b\bar{b}=1$ أي: $\bar{a}=\dfrac{1}{a}$ و $\bar{b}=\dfrac{1}{b}$

ومنه: $\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)z-(a-b)\bar{z}+\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=0$ $\Leftrightarrow$ (2)

$\Leftrightarrow$ $(b-a)z-ab(a-b)\bar{z}+a^2-b^2=0$

(لأن: $a-b\neq 0$) $z-ab\bar{z}+a-b=0$ $\Leftrightarrow$ النقط A و B و M مستقيمية

36 1) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

حدد المجموعة (E) للنقط M ذات اللحق z بحيث: $|z-1|=|\bar{z}+1|$ (1)

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-1)^n=(\bar{z}+1)^n$ (2) $(n\in\mathbb{N}^*)$

<u>الجواب:</u> 1) لدينا:

$M(z)\in(E)$ $\Leftrightarrow$ $|z-1|=|\bar{z}+1|$

$\Leftrightarrow$ $|z-1|=|\overline{z+1}|$

$\Leftrightarrow$ $|z-1|=|z+1|$ (لأن: لكل z من $\mathbb{C}$: $|\bar{z}|=|z|$)

لتكن A و B النقطتين ألحاقهما 1 و -1 على التوالي.

إذن: $M(z)\in(E)$ $\Leftrightarrow$ $AM=BM$

ومنه (E) هي واسط القطعة [AB] أي: محور الأراتيب (المحور التخيلي الصرف)

2) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-1)^n=(\bar{z}+1)^n$ (2)

لدينا، $(z-1)^n=(\bar{z}+1)^n$ إذن، $|z-1|^n=|\bar{z}+1|^n$

ومنه: $|z-1|=|\bar{z}+1|$ ومن السؤال 1) لدينا: $z\in i\mathbb{R}$

ومنه: $\exists y \in \mathbb{R} : \quad z = iy$

إذن: $(2) \Leftrightarrow (iy-1)^n = (-iy+1)^n$

$\Leftrightarrow (iy-1)^n = (-1)^n (iy-1)^n$

$\Leftrightarrow 1 = (-1)^n$

إذا كان n زوجي فإن العلاقة الأخيرة صحيحة لكل y من $\mathbb{R}$ ومنه: $z = iy$

ومنه: $S = i\mathbb{R}$

إذا كان n فردي فإن العلاقة الأخيرة غير صحيحة

ومنه: $S = \phi$

37

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

لتكن A و B صورتي i و $-2i$ على التوالي

ليكن f التطبيق المعرف من $\mathcal{P} - \{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بحيث: $z \neq i$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = \frac{2z - i}{iz + 1}$

1) ليكن z عدد عقدي بحيث: $z \neq i$

أ- نرمز بـ r و θ لمعيار وعمدة للعدد العقدي: $z - i$.

أول هندسياً r و θ باستعمال A و M.

ب- بين أن: $(z' + 2i)(z - i) = 1$

ج- نرمز بـ r' و θ' لمعيار وعمدة العدد العقدي: $z' + 2i$.

عبر عن r' و θ' بدلالة r و θ.

أول هندسياً r' و θ' باستعمال B و M'.

2) لتكن $(\mathcal{C})$ الدائرة التي مركزها A وشعاعها 1.

أ- بين أنه إذا كانت $M \in (\mathcal{C})$ فإن M' صورتها بـ f تنتمي إلى دائرة $(\mathcal{C}')$ مركزها B ويتم تحديد شعاعها.

ب- هل الدائرة $(\mathcal{C}')$ هي صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ بالتطبيق f؟

3) لتكن T النقطة ذات اللحق $\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$

أ- أحسب لحق المتجهة $\overrightarrow{AT}$، واستنتج أن: $T \in (\mathcal{C})$.

ب- حدد بالرديان قياساً للزاوية $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AT}})$. أنشئ الدائرة $(\mathcal{C})$ والنقطة T

ج- باستعمال الأسئلة السابقة، أنشئ T' صورة T بـ f.

الجواب : 1) لدينا : $z' = \dfrac{2z-i}{iz+1}$ $(z \neq i)$

أ- لدينا : $A(i)$ و $M(z)$

ومنه : $r = |z-i| = AM$

$\theta \equiv \arg(z-i) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{AM})$ $[2\pi]$

ب- لدينا : $(z'+2i)(z-i) = \left(\dfrac{2z-i}{iz+1} + 2i\right)(z-i)$

$= \dfrac{2z-i-2z+2i}{iz+1}(z-i) = \dfrac{i(z-i)}{iz+1} = \dfrac{iz+1}{iz+1}$

ومنه : $(z'+2i)(z-i) = 1$

ج- بما أن : $(z'+2i)(z-i) = 1$

فإن : $|z'+2i||z-i| = 1$ و $\arg(z'+2i) + \arg(z-i) \equiv 0$ $[2\pi]$

أي : $r'r = 1$ و $\theta' + \theta \equiv 0$ $[2\pi]$

ومنه : $r' = \dfrac{1}{r} = BM'$ و $\theta' \equiv -\theta \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{BM'})$ $[2\pi]$

2) أ- إذا كانت : $M \in (\mathscr{C})$ فإن : $AM = r = 1$ ، ومنه : $BM' = \dfrac{1}{r} = 1$

وبالتالي M' تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C}')$ التي مركزها B وشعاعها 1 . $(f(\mathscr{C}) \subset (\mathscr{C}'))$

ب- عكسياً : إذا كانت $M'(z') \in (\mathscr{C}')$ فإن : $|z'+2i| = 1$

لنبحث عن $M(z)$ بحيث : $z' = \dfrac{2z-i}{iz+1}$

$\Leftrightarrow izz' + z' = 2z - i \Leftrightarrow z(iz'-2) = -z' - i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-z'-i}{iz'-2}$ $\quad (z' \neq -2i$; $M' \neq B)$

بما أن : $rr' = 1$ فإن : $AM = r = \dfrac{1}{r'} = 1$

ومنه : $M(z) \in (\mathscr{C})$ إذن : $(\mathscr{C}') \subset f(\mathscr{C})$

وبالتالي : $f(\mathscr{C}) = (\mathscr{C}')$. (لأن : $f(\mathscr{C}) \subset (\mathscr{C}')$ و $(\mathscr{C}') \subset f(\mathscr{C})$)

3) أ- لحق المتجهة $\overrightarrow{AT}$ هو : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i - i = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$= \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

إذن : $\|\overrightarrow{AT}\| = |e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$

ومنه : $T \in (\mathscr{C})$.

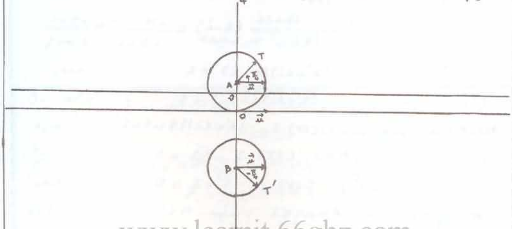
ب- لدينا: $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AT})} \equiv \arg(e^{i\frac{\pi}{4}})\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ج- لدينا: $T'=f(T)$ إذن: $BT'=1$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BT'})} \equiv -\overline{(\vec{u},\overrightarrow{AT})}\ [2\pi]$

ومنه: $BT'=1$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BT'})} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

وبالتالي: $B' \in (\mathscr{C}')$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BT'})} \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$



38

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A و B و C مختلفة مثنى - مثنى لحاقها على التوالي a و b و c.

1) لتكن M نقطة لحقها z، عبر عن z' بدلالة z:

أ- z' لحق M' صورة M بالدوران r_1 الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

ب- z'' لحق M'' صورة M بالدوران r_2 الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

2) ماذا يمكن أن نقول عن المثلث ABC إذا كانت الأعداد العقدية a و b و c تحقق:

أ- $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ؟

ب- $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ ؟

3) أثبت أن المثلث ABC متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان:

$$a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$$

الجواب: 1) أ- نضع: $\mathfrak{z}=z-a$ و $\mathfrak{z}'=z'-a$

لدينا :
$$r_1(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z$$
$$\Leftrightarrow z'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}.(z-a)$$
$$\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+a(1-e^{i\frac{\pi}{3}})$$
$$r_1(M)=M' \Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+a\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ب - لدينا :
$$r_2(M)=M'' \Leftrightarrow z'-a=e^{-i\frac{\pi}{3}}.(z-a)$$
$$\Leftrightarrow z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+a(1-e^{-i\pi/3})$$
$$\Leftrightarrow z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+a\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2) أ- إذا كان : $\frac{c-a}{b-a}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ فإن : $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

ومنه : $r_1(B)=c$ أي : $AC=AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

وبالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر.

ب- إذا كان : $\frac{c-a}{b-a}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$ فإن : $c-a=e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

ومنه : $r_2(B)=c$ أي : $AC=AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

وبالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع غير مباشر.

3) لدينا : ABC مثلث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان :
$$\frac{c-a}{b-a}=e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad \text{أو} \quad \frac{c-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad \frac{c-a}{b-a}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a}-\frac{1}{2}=-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad \frac{c-a}{b-a}-\frac{1}{2}=i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2c-a-b)^2}{4(b-a)^2}=-\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow (2c-a-b)^2=-3(b-a)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+4c^2-4ac-4cb+2a=-3b^2-3a^2+6ab$$
$$\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+4c^2=4ab+4bc+4ca$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$$

وبالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

39 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-(1-2i)z+1-7i=0$

الجواب: لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_1)\quad z^2-(1-2i)z+1-7i=0$

لدينا: $\Delta=(1-2i)^2-4(1-7i)$ مميز المعادلة (E_1)

$\Delta=-7+24i$

ليكن $\sigma=x+iy$ جذر مربع لـ Δ أي: $\Delta=\sigma^2$ (حيث: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{7^2+24^2}\\ x^2-y^2=-7\\ 2xy=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\frac{-7+\sqrt{49+576}}{2}=\frac{-7+25}{2}=9\\ y^2=\frac{7+\sqrt{49+576}}{2}=\frac{7+25}{2}=16\\ 2xy=24>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=4\end{cases}\ \text{أو}\ \begin{cases}x=-3\\ y=-4\end{cases}$$

إذن: $\sigma_1=3+4i$ و $\sigma_2=-3-4i$

ومنه حلول المعادلة (E_1) هي:

$z_1=\frac{1-2i+3+4i}{2}=2+i$ و $z_2=\frac{1-2i-3-4i}{2}=-1-3i$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\{2+i;-1-3i\}$

40 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$

الجواب: لدينا: $(E_2):(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$

مميز هذه المعادلة هو: $\Delta=(7-i)^2+4(1+3i)(4+2i)$

$\Delta=40+42i$

ليكن $\sigma=x+iy$ جذر مربع لـ (Δ) أي: $\Delta=\sigma^2$ (حيث: $(x,y)\in\mathbb{R}^2$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=\sqrt{40^2+42^2}\\ x^2-y^2=40\\ 2xy=42\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=49\\ y^2=9\\ xy>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=7\\ y=3\end{cases}\ \text{أو}\ \begin{cases}x=-7\\ y=-3\end{cases}$$

إذن الجذرين المربعين لـ Δ هما: $\sigma_1=7+3i$ و $\sigma_1=-7-3i$

ومنه حلول المعادلة (E_2) هي:

$z_1=\frac{-7+i-7-3i}{2(-4-2i)}$ و $z_2=\frac{-7+i+7+3i}{2(-4-2i)}$

$z_1=\frac{7+i}{4+2i}=\frac{3-i}{2}$ و $z_2=-\frac{i}{2+i}=-\frac{1+2i}{5}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E_2) هي: $S=\left\{-\frac{1+2i}{5};\frac{3-i}{2}\right\}$

41

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\quad z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0$

حيث θ عدد حقيقي معلوم .

2) لتكن A و B صور حلول المعادلة (E) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

حدد θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الأضلاع .

الجواب : 1) لدينا : $(E)\quad z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0$

$$\Delta=(2^{\theta+1}\cos\theta)^2-4\times2^{2\theta}=2^{2\theta+2}\times(\cos^2\theta-1)$$

$$\Delta=-2^{2\theta+2}\times\sin^2\theta=(i\,2^{\theta+1}\sin\theta)^2$$

ومنه : $\sigma=i\,2^{\theta+1}\times\sin\theta$ جذر مربع لـ Δ

إذن حلول المعادلة (E) هما :

$$z_1=\frac{2^{\theta+1}\cos\theta+i\,2^{\theta+1}\sin\theta}{2}\qquad z_2=\frac{2^{\theta+1}\cos\theta-i\,2^{\theta+1}\sin\theta}{2}$$

$$z_1=2^{\theta}(\cos\theta+i\sin\theta)=2^{\theta}e^{i\theta}\qquad z_2=2^{\theta}(\cos\theta-i\sin\theta)=2^{\theta}e^{-i\theta}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{2^{\theta}e^{-i\theta}\,;\,2^{\theta}e^{i\theta}\}$

2) المثلث OAB متساوي الساقين لأن : $OA=OB=2^{\theta}$

ومنه OAB متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان : $\left\{\begin{array}{l}(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\\ \text{أو}\\ (\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{array}\right.$

أي : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)\equiv\pm\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$

$$\Leftrightarrow\quad 2\theta\equiv\pm\frac{\pi}{3}\quad[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad \theta\equiv\pm\frac{\pi}{6}\quad[\pi]$$

OAB متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow$ $\theta=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ أو $\theta=\frac{\pi}{6}+k\pi\ \mid k\in\mathbb{Z}$.

42

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\quad z^2+2(1-\cos\theta)z+2(1-\cos\theta)=0$

حيث θ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0,\pi]$.

2) حدد معيارا وعمدة لكل حل للمعادلة (E) .

الجواب : 1) لدينا : $(E)\quad z^2+2(1-\cos\theta)z+2(1-\cos\theta)=0$

مميز هذه المعادلة : $\Delta'=(1-\cos\theta)^2-2(1-\cos\theta)$

إذن :
$$\Delta' = -(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = -\sin^2\theta$$
$$\Delta' = (i\sin\theta)^2$$

ومنه $\sigma = i\sin\theta$ جذر مربع لـ Δ إذن حلول المعادلة (E) هي

$$z_1 = \frac{-1+\cos\theta+i\sin\theta}{1} \qquad z_2 = \frac{-1+\cos\theta-i\sin\theta}{1}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{-1+\cos\theta - i\sin\theta \,;\, -1+\cos\theta+i\sin\theta\}$

2) لنحدد معيار وعمدة لكل من z_1 و z_2.

لدينا :
$$z_1 = -(1-\cos\theta) + i\sin\theta = -2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$z_1 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$z_2 = -2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$z_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

* إذا كان: $\theta = 0$ فإن: $z_1 = z_2 = 0$

* إذا كان: $\theta \in]0,\pi]$ فإن: $\frac{\theta}{2} \in]0,\frac{\pi}{2}]$ إذن: $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

ومنه :
$$|z_2| = |z_1| = 2\sin\frac{\theta}{2}$$
$$\arg z_1 \equiv \frac{\theta+\pi}{2} \quad [2\pi]$$
$$\arg z_2 \equiv -\frac{\theta+\pi}{2} \quad [2\pi]$$

43

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$

الجواب : لدينا :
$$(E) \quad z^4 + (3-6i)z^2 + 2(16-63i) = 0$$

نضع : $\mathfrak{z} = z^2$

إذن المعادلة (E) تكافئ : $(E') : \mathfrak{z}^2 + (3-6i)\mathfrak{z} + 2(16-63i) = 0$

مميز هذه المعادلة :
$$\Delta = -155 + 468i$$

الجذور المربعة لـ Δ هي : $\sigma_1 = 13+18i$ و $\sigma_2 = -13-18i$

ومنه حلول المعادلة (E') هي :

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{-3+6i+13+18i}{2} = 5+12i \quad \text{و} \quad \mathfrak{z}_2 = \frac{-3+6i-13-18i}{2} = -8-6i$$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E) .

إذن : $z \in S \Leftrightarrow z^2=-8-6i$ أو $z^2=5+12i$

الجذور المربعة للعدد $5+12i$ هما : $3+2i$ و $-3-2i$

الجذور المربعة للعدد $-8-6i$ هما : $1-3i$ و $-1+3i$

وبالتالي : $S=\{-3-2i\,;3+2i\,;-1+3i\,;1-3i\}$

44

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$

الجواب : لدينا : $(E) : z^6+(2i-1)z^3-1-i=0$

نضع : $\mathfrak{z}=z^3$ إذن المعادلة (E) تكافئ : $(E') \quad \mathfrak{z}^2+(2i-1)\mathfrak{z}-1-i=0$

مميز المعادلة (E') هو : $\Delta=(2i-1)^2+4(1+i)$

$\Delta=1$

ومنه حلول المعادلة (E') هي : $\mathfrak{z}_1=-i$ و $\mathfrak{z}_2=1-i$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E)

لدينا :

$$z\in S \Leftrightarrow z^3=-i \text{ أو } z^3=1-i$$

$$\Leftrightarrow z^3=e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ أو } z^3=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow z=e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})} \text{ أو } z=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\,e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})} \;/\; k\in[\![0,2]\!]$$

ومنه :

$$S=\left\{e^{-i\frac{\pi}{6}}\,;e^{i\frac{\pi}{2}}\,;e^{i\frac{7\pi}{6}}\,;\sqrt[6]{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}\,;\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}\,;\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$$

45

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : 2z^3-(1+2i)z^2+(25i-1)z+13i=0$

1) بين أن المعادلة (E) تقبل حلاً حقيقياً z_0 ، ثم تحديده .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

الجواب : 1) ليكن λ عدد حقيقي حل المعادلة (E) يعني أن :

$$2\lambda^3-(1+2i)\lambda^2+(25i-1)\lambda+13i=0$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda^3-\lambda^2-\lambda)+i(-2\lambda^2+25\lambda+13)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda(2\lambda^2-\lambda-1)=0\\ -2\lambda^2+25\lambda+13=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=0 \text{ أو } 2\lambda^2-\lambda-1=0 & (1)\\ -2\lambda^2+25\lambda+13=0 & (2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=0 \text{ أو } \lambda=-\frac{1}{2} \text{ أو } \lambda=1 & (1)\\ -2\lambda^2+25\lambda+13 & (2)\end{cases}$$

$-\frac{1}{2}$ هو الحل الوحيد الذي يحقق المعادلة (2)

ومنه : $\lambda = -\frac{1}{2}$ هو الحل الحقيقي للمعادلة (E).

2) نضع : $P(z) = 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i+1)z + 13i = 0$

بما أن : $P(-\frac{1}{2}) = 0$ فإن : $P(z)$ يقبل القسمة على $(z+\frac{1}{2})$

ونحصل على : $P(z) = 2(z+\frac{1}{2})(z^2 - (1+i)z + 13i)$

إذن : $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$ أو $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : (E') $z^2 - (1+i)z + 13i = 0$

مميزها : $\Delta = (1+i)^2 - 52i = -50i$

$\Delta = (5(1-i))^2$

ومنه : $\sigma = 5(1-i)$ جذر مربع لـ Δ ومنه حلول المعادلة (E') هي :

$z_1 = \frac{1+i+5-5i}{2} = 3-2i$ و $z_2 = \frac{1+i-5+5i}{2} = -2+3i$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{-\frac{1}{2}, -2+3i ; 3-2i\}$

46

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية P المعرفة بما يلي :

$P(z) = (i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i$

1) بين أن المعادلة : $P(z) = 0$ تقبل حلاً تخيلياً صرفاً z_0 يتم تحديده

2) حدد الأعداد العقدية a و b و c بحيث : $P(z) = (z-z_0)(az^2+bz+c)$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

الجواب : 1) ليكن λi $(\lambda \in \mathbb{R})$ حلا للمعادلة $P(z)=0$،

أي : $(i-1)(\lambda i)^3 - (5i-11)(\lambda i)^2 - (43+i)(\lambda i) + 9 + 37i = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9) + i(\lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 - 11\lambda^2 + \lambda + 9 = 0 & (1) \\ \lambda^3 + 5\lambda^2 - 43\lambda + 37 = 0 & (2) \end{cases}$$

نلاحظ أن 1 حل للمعادلتين (1) و (2) ومنه i حل تخيلي صرف للمعادلة $P(z)=0$ ومنه : $z_0 = i$.

2) بما أن $P(i) = 0$ فإن $P(z)$ يقبل القسمة على $(z-i)$.

وبعد إنجاز القسمة الإقليدية لـ $P(z)$ على $(z-i)$ نحصل على :

$$P(z)=(z-i)\left((i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i\right)$$

ومنه : $a=i-1$ و $b=10-6i$ و $c=-37+9i$

3) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

لدينا: $P(z)=0 \Leftrightarrow z-i=0$ أو $(i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i=0$

لنحل المعادلة : $(E)\quad (i-1)z^2+(10-6i)z-37+9i=0$

مميزها : $\Delta'=(5-3i)^2-(i-1)(-37+9i)$

$\Delta'=-12+16i$ جذورها المربعة هما :

$\sigma_1=2+4i$ و $\sigma_2=-2-4i$.

إذن حلول المعادلة (E) هي : $z_1=\dfrac{-5+3i+2+4i}{i-1}$ و $z_2=\dfrac{-5+3i-2-4i}{i-1}$

$z_1=\dfrac{-3+7i}{i-1}=5-2i$ و $z_2=\dfrac{-7-i}{i-1}=3+4i$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة : $P(z)=0$ هي : $S=\{i;3+4i;5-2i\}$

47

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)^3+\left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)^2+\left(\dfrac{z+2i}{z-2i}\right)+1=0$

الجواب : لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E) ونضع : $\mathfrak{z}=\dfrac{z+2i}{z-2i}$
$2i\notin S$

لدينا :

$$z\in S \Leftrightarrow \mathfrak{z}^3+\mathfrak{z}^2+\mathfrak{z}+1=0$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{z}^2(\mathfrak{z}+1)+(\mathfrak{z}+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\mathfrak{z}+1)(\mathfrak{z}^2+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (\mathfrak{z}+1)(\mathfrak{z}-i)(\mathfrak{z}+i)=0$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{z}=-1 \text{ أو } \mathfrak{z}=-i \text{ أو } \mathfrak{z}=i$$

إذن :

$$z\in S \Leftrightarrow \frac{z+2i}{z-2i}=\mathfrak{z} \quad | \ \mathfrak{z}\in\{-1,-i,i\}$$

$$\Leftrightarrow z+2i=\mathfrak{z}(z-2i) \quad | \ \mathfrak{z}\in\{-1,-i,i\}$$

$$\Leftrightarrow z(1-\mathfrak{z})=-2i(1+\mathfrak{z}) \quad | \ \mathfrak{z}\in\{-1,-i,i\}$$

$$\Leftrightarrow z=2i\frac{\mathfrak{z}+1}{\mathfrak{z}-1} \quad | \ \mathfrak{z}\in\{-1,-i,i\}$$

$$\Leftrightarrow z=0 \text{ أو } z=-2 \text{ أو } z=2$$

وبالتالي : $S=\{-2,0,2\}$.

48

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

$$z^2-2\bar{z}+1=0 \quad (1)$$

$$z+3\bar{z}=(2+i\sqrt{3})|z| \quad (2)$$

الجواب : * لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(1)\ z^2-2\bar{z}+1=0$

نعتبر : $z=x+iy$ حيث : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

إذن :
$$z^2-2\bar{z}+1=0 \Leftrightarrow (x^2-y^2+2ixy)-2(x-iy)+1=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-y^2-2x+1)+i(2xy+2y)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-2x+1=0 \\ 2y(x+1)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z=1 \text{ أو } z=-1-2i \text{ أو } z=-1+2i$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S_1=\{1;-1+2i;-1-2i\}$

* لنحل في المعادلة : $(2)\ z+3\bar{z}=(2+i\sqrt{3})|z|$

نعتبر كذلك : $z=x+iy$ حيث : $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

لدينا :
$$z+3\bar{z}=(2+i\sqrt{3})|z| \Leftrightarrow (x+iy)+3(x-iy)=(2+i\sqrt{3})\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow 4x-2iy=(2+i\sqrt{3})\sqrt{x^2+y^2}$$

إذا :
$$\Rightarrow |4x-2iy|^2=|2+i\sqrt{3}|^2(x^2+y^2)$$
$$\Rightarrow 16x^2+4y^2=7(x^2+y^2)$$
$$\Rightarrow 9x^2-3y^2=0$$
$$\Rightarrow y=-\sqrt{3}x \text{ أو } y=\sqrt{3}x$$
$$\Rightarrow z=x(1-\sqrt{3}i) \text{ أو } z=x(1+\sqrt{3}i)$$

عكسياً : لدينا : $z=x(1+\sqrt{3}i)$ حل لـ(2) :
$$x(1+\sqrt{3}i)+3x(1-\sqrt{3}i)=(2+i\sqrt{3})|x||1+\sqrt{3}i|$$
$$x(4-2i\sqrt{3})=2(2+i\sqrt{3})|x|$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}|x| \Leftrightarrow x=\frac{1+4i\sqrt{3}}{7}|x|$$

ومنه : $x(1+\sqrt{3}i)$ ليس حلاً للمعادلة (2) إذا كان $x\neq 0$

* إذا كان : $x=0$ فإن : $z=0$ حل للمعادلة (2)

إذا كان : $z=x(1-i\sqrt{3})$ حل لـ (2) فإن :

$$x(1-\sqrt{3}i)+3x(1+\sqrt{3}i)=(2+i\sqrt{3})|x||1-\sqrt{3}i|$$

$$\Leftrightarrow \quad x(4+2i\sqrt{3})=2(2+i\sqrt{3})|x|$$

$$\Leftrightarrow \quad x=|x| \quad \Leftrightarrow \quad x\in\mathbb{R}^+$$

ومنه: $z=x(1-i\sqrt{3})$ حل المعادلة (2) إذا كان $x\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (2) هي : $S_2=\{x(1-i\sqrt{3})\mid x\in\mathbb{R}^+\}$

49

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم و θ عدد حقيقي.

حل في $\mathbb{C}^2$ النظمة : $(S)\begin{cases}(z+it)^n+(z-it)^n=2\cos\theta\\ z^2+t^2=1\end{cases}$; $(z,t)\in\mathbb{C}^2$

الجواب : لدينا : $z^2+t^2=(z+it)(z-it)$

نضع : $u=z+it$ و $v=z-it$

إذن النظمة (S) تكافئ :

$$(S')\begin{cases}u^n+v^n=2\cos\theta\\ uv=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=\frac{1}{u}\\ u^{2n}-2u^n\cos\theta+1=0 \quad (1)\end{cases}$$

نضع : $X=u^n$ إذن :

$$(1)\Leftrightarrow X^2-2\cos\theta X+1=0$$

$$\Leftrightarrow (X-\cos\theta)^2=-\sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow X-\cos\theta=i\sin\theta \quad \text{أو} \quad X-\cos\theta=-i\sin\theta$$

$$\Leftrightarrow X=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta} \quad \text{أو} \quad X=\cos\theta-i\sin\theta=e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow u^n=e^{i\theta} \quad \text{أو} \quad u^n=e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow u=e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} \quad \text{أو} \quad u=e^{i(-\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})} \quad \Big| \; k\in[\![0,n-1]\!]$$

وبما أن : $v=\frac{1}{u}$ فإن مجموعة حلول النظمة (S') هي :

$$S'=\bigcup_{k=0}^{n-1}\left\{\left(e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})};e^{-i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}\right);\left(e^{i(-\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})};e^{-i(-\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}\right)\right\}$$

ولدينا : $\begin{cases}u=z+it\\ v=z-it\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=\frac{u+v}{2}\\ t=\frac{u-v}{2i}\end{cases}$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي :

$$S=\bigcup_{k=0}^{n-1}\left\{\left(\cos(\tfrac{\theta}{n}+\tfrac{2k\pi}{n});\sin(\tfrac{\theta}{n}+\tfrac{2k\pi}{n})\right);\left(\cos(-\tfrac{\theta}{n}+\tfrac{2k\pi}{n});\sin(-\tfrac{\theta}{n}+\tfrac{2k\pi}{n})\right)\right\}$$

50. ليكن العدد العقدي : $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

1) نضع : $\alpha = z_0 + z_0^4$ و $\beta = z_0^2 + z_0^3$

أ- بين أن : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$ واستنتج أن : α و β هما حلي المعادلة : $X^2 + X - 1 = 0$ (1)

ب- حدد α بدلالة $\cos\frac{2\pi}{5}$.

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\frac{2\pi}{5}$

2) لتكن A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 و A_4 صور الأعداد العقدية 1 و z_0 و z_0^2 ، z_0^3 و z_0^4 على التوالي في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

أ- لتكن H نقطة تقاطع المستقيم (A_1A_4) مع المحور $(O, \vec{u})$.

بين أن : $\overline{OH} = \cos\frac{2\pi}{5}$

ب- لتكن $(\mathcal{C})$ الدائرة التي مركزها $\Omega(-\frac{1}{2})$ والمارة من النقطة $B(i)$

الدائرة $(\mathcal{C})$ تقطع المحور $(O, \vec{u})$ في نقطتين : M و N

(M النقطة ذات الأفصول الموجب)

بين أن : $\overline{ON} = \beta$ و $\overline{OM} = \alpha$ وأن H منتصف القطعة $[OM]$

الجواب : 1) أ- لدينا : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z^4 = \frac{1 - z_0^5}{1 - z_0}$ (لأن $z_0 \neq 1$)

وبما أن : $z_0^5 = \left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$
$= 1$

فإن : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$

ومنه : $1 + \alpha + \beta = 0$ أي : $\alpha + \beta = -1$

ولدينا : $\alpha\beta = (z_0 + z_0^4)(z_0^2 + z_0^3) = z_0^3 + z_0^4 + z_0^6 + z_0^7$

وبما أن : $z_0^6 = z_0$ و $z_0^7 = z_0^2$ (لأن : $z_0^5 = 1$)

فإن : $\alpha\beta = z_0^3 + z_0^4 + z_0 + z_0^2 = -1$

إذن : $\alpha + \beta = -1$ و $\alpha\beta = -1$

ومنه : α و β هما حلي المعادلة : $X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = 0$ أي : $X^2 + X - 1 = 0$

ب- لدينا : $\alpha = z_0 + z_0^4 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}$$

ومنه : $\alpha = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

ج - حلول المعادلة ، $x^2+x-1=0$ هما : $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ و $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$

بما أن : $2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ فإن : $2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ومنه : $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

2) أ- لحق النقطة A_1 هو $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

لحق النقطة A_4 هو : $z_0^4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}$

بما أن : $\bar{z}_0 = z_0^4$ فإن النقطتين A_1 و A_4 متماثلتان بالنسبة للمحور $(O,\vec{u})$ ومسقطهما على $(O,\vec{u})$ هي النقطة H بحيث : $\overline{OH} = \cos\frac{2\pi}{5}$

(لأن : $A_1\left(\cos\frac{2\pi}{5} ; \sin\frac{2\pi}{5}\right)$) .

ب- لدينا $(\mathscr{C})$ الدائرة التي مركزها $\Omega\left(-\frac{1}{2}\right)$ والمارة من $B(i)$

إذن شعاعها هو : $\Omega B = \left|i + \frac{1}{2}\right| = \sqrt{1+\frac{1}{4}}$ أي : $\Omega B = \frac{\sqrt{5}}{2}$

لدينا : $\overline{OM} = \overline{O\Omega} + \overline{\Omega M}$ $(M \in (\mathscr{C}))$

$$\overline{OM} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \alpha$$

ولدينا : $\overline{ON} = \overline{O\Omega} + \overline{\Omega N}$

$$\overline{ON} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \beta$$

وبما أن ، $\overline{OH} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OM}}{2}$

فإن ، H منتصف القطعة $[OM]$.

51 المستوى العقدي $(\mathscr{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

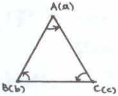
لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى $(\mathscr{P})$ ألحاقها a و b و c على التوالي :

1) بين أن : $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow$ ABC مثلث متساوي الأضلاع

2) بين أن : $(a-b)(\bar{b}-\bar{c}) - (c-b)(\bar{a}-\bar{b})=0 \Leftrightarrow$ ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A

3) بين أن : $(a-b)(\bar{a}-\bar{c}) + (a-c)(\bar{a}-\bar{b})=0 \Leftrightarrow$ ABC مثلث قائم الزاوية في A

الجواب :



1) لدينا : ABC مثلث متساوي الأضلاع

يعني أن : $\overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} \equiv \overline{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]$

و $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{BC}{AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b}=\frac{b-c}{a-c} \quad (*)$$

ملاحظة هامة : $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \arg z_1\equiv\arg z_2\ [2\pi]\end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow (a-b)(a-c)=(b-c)(c-b)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=0$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)+(b^2+c^2-2bc)=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

2) لدينا : ABC مثلث متساوي الساقين في A $\Leftrightarrow \begin{cases}AB=AC\\ \overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}\equiv\overline{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}\ [2\pi]\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AC}{BC}\\ \overline{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}\equiv-\overline{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})}\ [2\pi]\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b}=\frac{\bar a-\bar c}{\bar b-\bar c} \quad (**)$$

(لأن : $z_1=\bar z_2 \Leftrightarrow \begin{cases}|z_1|=|z_2|\\ \arg z_1\equiv-\arg z_2\ [2\pi]\end{cases}$)

إذن : $(**) \Leftrightarrow (a-b)(\bar b-\bar c)-(c-b)(\bar a-\bar c)=0$

3) لدينا : ABC مثلث قائم الزاوية في A . $\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\\ \text{أو}\\ \overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ أو } \arg\left(\frac{c-a}{b-c}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a}\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a}=-\frac{\bar c-\bar a}{\bar b-\bar a}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\bar c-\bar a)+(a-c)(\bar b-\bar a)=0$$

52 ليكن α عدداً حقيقياً من المجال $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

نعتبر المعادلة في $\mathbb{C}$ ذات المجهول z :

$$(E) : (1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

1) ليكن z_0 حلاً للمعادلة (E) .

أ- بين أن : $|1+iz_0| = |1-iz_0|$

ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي .

2) أ- أحسب : $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ بدلالة $e^{i\alpha}$.

ب- نضع : $z=\tan\theta$ حيث : $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

استنتج حلول المعادلة (E).

الجواب : 1) ليكن z_0 حلاً للمعادلة (E)

أ- لدينا :

$$(1+iz_0)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz_0)^3(1+i\tan\alpha)$$

إذن :

$$|1+iz_0|^3|1-i\tan\alpha| = |1-iz_0|^3|1+i\tan\alpha|$$

$$|1+iz_0|^3\sqrt{1+\tan^2\alpha} = |1-iz_0|^3\sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

وبما أن : $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\neq 0$ فإن : $|1+iz_0|^3=|1-iz_0|^3$

ومنه : $|1+iz_0|=|1-iz_0|$

ب- لدينا : $|1+iz_0|=|1-iz_0| \Leftrightarrow |i(z_0-i)| = |-i(z_0+i)|$

$$\Leftrightarrow |i||z_0-i| = |-i||z_0+i|$$

$$\Leftrightarrow |z_0-i| = |z_0+i| \quad (\text{لأن: } |i|=|-i|=1)$$

$$\Leftrightarrow (z_0-i)(\bar{z}_0+i) = (z_0+i)(\bar{z}_0-i)$$

$$\Leftrightarrow i(z_0-\bar{z}_0) = -i(z_0-\bar{z}_0)$$

$$\Leftrightarrow z_0-\bar{z}_0=0 \Leftrightarrow \bar{z}_0=z_0 \Leftrightarrow z_0\in\mathbb{R}$$

2) أ- لدينا :

$$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = (e^{i\alpha})^2$$

ب- لدينا :

$$(1+iz)^3(1-i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = (e^{i\alpha})^2$$

بما أن : $z=\tan\theta$

فإن :
$$(E) \Leftrightarrow \left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^3 = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow e^{6i\theta} = e^{2i\alpha}$$
$$\Leftrightarrow 6\theta = 2\alpha + 2k\pi \quad | \; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha + k\pi}{3} \quad | \; k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :
$$S = \left\{ e^{i\frac{\alpha}{3}} ; e^{i\left(\frac{\alpha+\pi}{3}\right)} ; e^{i\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right)} ; e^{i\left(\frac{\alpha+3\pi}{3}\right)} ; e^{i\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right)} ; e^{i\left(\frac{\alpha+5\pi}{3}\right)} \right\}$$

53 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^n = \bar{z}$ $\quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

الجواب : لتكن S مجموعة حلول المعادلة : $z^n = \bar{z}$

لدينا : $0 \in S$.

ليكن z من S بحيث : $z \neq 0$ إذن : $\exists R>0 \,;\, \exists \theta \in \mathbb{R} \,:\, z = Re^{i\theta}$

إذن :
$$z \in S \Leftrightarrow z^n = \bar{z}$$
$$\Leftrightarrow R^n e^{in\theta} = Re^{-i\theta}$$
$$\Leftrightarrow R^{n-1} e^{i(n+1)\theta} = 1$$
$$\Leftrightarrow R^{n-1} = 1 \text{ و } (n+1)\theta = 2k\pi \quad | \; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow R = 1 \text{ و } \theta = \frac{2k\pi}{n+1} \quad | \; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} \quad | \; k \in \{0,1,\dots,n\}$$

ومنه :
$$S = \{0\} \cup \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} \;|\; k \in \{0,1,\dots,n\} \right\}$$

54 ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث : $n \geq 2$ و ليكن w من $\mathbb{C}$ بحيث :
$$w^n = 1 \text{ و } w \neq 1$$

نضع :
$$S = 1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1}$$

1) بين أن : $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$

2) استنتج أن : $S = \dfrac{n}{w-1}$

الجواب : 1) لدينا : $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = \dfrac{1-w^n}{1-w}$ $\quad (w \neq 1)$

بما أن : $w^n = 1$ فإن : $1 + w + w^2 + \dots + w^{n-1} = 0$.

2) لدينا :
$$S = \sum_{k=1}^{n} k w^{k-1}$$

55 نعتبر الحدودية P المعرفة بمايلي :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad P(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1+i\frac{x}{8}\right)^8 - \left(1-i\frac{x}{8}\right)^8\right]$$

1) بين أن P دالة حدودية معاملاتها أعداد حقيقية.

2) حدد درجة P وزوجيتها.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^8 = 1$

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$.

الجواب : 1) لدينا : $x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1+i\frac{x}{8}\right)^8 - \left(1-i\frac{x}{8}\right)^8\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(i\frac{x}{8}\right)^k - \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(-i\frac{x}{8}\right)^k\right]$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(\left(i\frac{x}{8}\right)^k - \left(-i\frac{x}{8}\right)^k\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{8} C_8^k \left(\frac{x}{8}\right)^k \left(i^k - (-i)^k\right)$$

لدينا : $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ومنه : $i^k = e^{\frac{\pi}{2}ki}$

إذن : $i^k - (-i)^k = i^k - \overline{i^k} = 2i\sin k\frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $P(x) = \sum_{k=0}^{8} \left(C_8^k \sin\frac{k\pi}{2}\right)\left(\frac{x}{8}\right)^k$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{8} \left(\frac{1}{8^k} C_8^k \sin\frac{k\pi}{2}\right) x^k$$

ومنه P دالة حدودية معاملاتها أعداد حقيقية : $a_k = \frac{1}{8^k} C_8^k \sin\frac{k\pi}{2}$

2) لدينا : $a_8 = 0$ و $a_7 = \frac{1}{8^7} C_8^7 \sin\frac{7\pi}{2} \neq 0$

ومنه : $d^\circ P = 7$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $P(-x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1-i\frac{x}{8}\right)^8 - \left(1+i\frac{x}{8}\right)^8\right]$

$$= -\frac{1}{2i}\left[\left(1+i\frac{x}{8}\right)^8 - \left(1-i\frac{x}{8}\right)^8\right]$$

إذن : $P(-x) = -P(x)$

ومنه P دالة فردية .

3) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^8 = 1$

حلول هذه المعادلة هي : $z = e^{\frac{2k\pi}{8}i}$ حيث : $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

ومنه مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $S=\{e^{i\frac{k\pi}{4}} \mid k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}\}$

4) لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x)=0$

لدينا :
$$P(x)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1+i\frac{x}{8}}{1-i\frac{x}{8}}\right)^8=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1+i\frac{x}{8}}{1-i\frac{x}{8}}=e^{i\frac{k\pi}{4}} \quad \mid k\in[\![0,7]\!]$$

ملاحظة : إذا كان $k=4$ فإن : $1+i\frac{x}{8}=-1-i\frac{x}{8}$ أي : $-1=1$ غير ممكن

إذن :
$$P(x)=0 \Leftrightarrow 1+i\frac{x}{8}=(1-i\frac{x}{8})e^{i\frac{k\pi}{4}} \quad \mid k\in[\![0,7]\!]\setminus\{4\}$$
$$\Leftrightarrow i\frac{x}{8}(1+e^{i\frac{k\pi}{4}})=-1+e^{i\frac{k\pi}{4}}$$
$$\Leftrightarrow i\frac{x}{8}=\frac{-1+e^{i\frac{k\pi}{4}}}{1+e^{i\frac{k\pi}{4}}}=\frac{2i\sin\frac{k\pi}{8}}{2\cos\frac{k\pi}{8}}=i\tan\frac{k\pi}{8}$$
$$\Leftrightarrow x=8\tan\frac{k\pi}{8} \quad \mid k\in[\![0,7]\!]\setminus\{4\}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $P(x)=0$ هي :
$$S'=\left\{8\tan\frac{k\pi}{8} \mid k\in[\![0,7]\!]\setminus\{4\}\right\}.$$

56

ليكن n عدد صحيح طبيعي أكبر قطعا من 2 .

1) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^n=-1$ ولتكن S مجموعة حلولها .

ب- بين أن : $i\in S \Leftrightarrow n\equiv 2\ [4]$ حيث : $i^2=-1$

2) أ- أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $u=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

ب- بين أن : $(\forall p\in\mathbb{N}) : \bar{u}^p+u^p=2\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$ ($\bar{u}$ مرافق u)

3) نعتبر التطبيق f من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بحيث : $f(z)=\sum_{p=0}^{n}C_n^p z^p\cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$

بين أن : $f(z)=\frac{1}{2}\left[(1+uz)^n+(1+\bar{u}z)^n\right]$

4) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=0$ ، وتحقق أن جميع حلولها أعداد حقيقية .

الجواب : 1) أ-
$$z\in S \Leftrightarrow z^n=-1=e^{i\pi}$$
$$\Leftrightarrow z=e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \mid k\in[\![0,n-1]\!]=\{0,1,\dots,n-1\}$$

ومنه :
$$S=\left\{e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)} \mid k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

ب- لدينا :
$$i\in S \Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!] : e^{i\frac{\pi}{2}}=e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)}$$

$$i \in S \iff \exists k \in [\![0,n-1]\!] \ : \ \frac{\pi}{2} \equiv (2k+1)\frac{\pi}{n} \quad [2\pi]$$

$$\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!] \ : \ \frac{\pi}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{n} + 2\alpha\pi \quad | \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \exists k \in [\![0,n-1]\!] \ : \ n = 4k+2+4\alpha n \quad | \alpha \in \mathbb{Z}$$

ومنه:

$$i \in S \iff n \equiv 2 \quad [4]$$

2) أ- لدينا:

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

ب- حسب صيغة موافر لدينا:

$$u^p = \cos\frac{p\pi}{4} + i\sin\frac{p\pi}{4}$$

$$\bar{u}^p = \cos\frac{p\pi}{4} - i\sin\frac{p\pi}{4}$$

ومنه:

$$u^p + \bar{u}^p = 2\cos\frac{p\pi}{4}$$

3) لدينا:

$$\forall z \in \mathbb{C} \ : \quad f(z) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

بما أن:

$$\cos\frac{p\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(u^p + \bar{u}^p\right)$$

فإن:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p (uz)^p + \sum_{p=0}^{n} C_n^p (\bar{u}z)^p\right)$$

ومنه:

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n\right]$$

4) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $f(z)=0$.

لدينا:

$$f(z)=0 \iff (1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n = 0$$

$$\iff \left(\frac{1+uz}{1+\bar{u}z}\right)^n = -1$$

$$\iff \frac{1+uz}{1+\bar{u}z} = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{n}} \quad | k \in [\![0,n-1]\!]$$

$$\iff \left(u - \bar{u}e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)}\right)z = e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)} - 1 \quad | k \in [\![0,n-1]\!]$$

$$\iff z = \frac{e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)} - 1}{u - \bar{u}e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)}} \quad | k \in [\![0,n-1]\!]$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة: $f(z)=0$ هي:

$$S' = \left\{ \frac{e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)} - 1}{u - \bar{u}e^{i\frac{\pi}{n}(2k+1)}} \quad | k \in [\![0,n-1]\!] \right\}.$$

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$$ (نعوض k بـ $k+1$)

$$=\sum_{k=0}^{n-1}k\omega^k+\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}k\omega^{k-1}.\omega$$ (لأن : $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k=0$)

$$S=\omega\sum_{k=1}^{n-1}k\omega^{k-1}=\omega\left(\sum_{k=1}^{n}k\omega^{k-1}-n\omega^{n-1}\right)$$

إذن : $S=\omega S-n\omega^n$

أي : $(1-\omega)S=-n$ ($\omega^n=1$ لأن)

ومنه : $S=\dfrac{n}{\omega-1}$

57 ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث : $n\geqslant 2$ وليكن ω جذر نوني للوحدة

أحسب المجموع : $S=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\,\omega^k$

الجواب : لدينا : $\omega^n=1$ أي $\exists p\in\{0,1,\dots,n-1\}:\omega=e^{\frac{i2p\pi}{n}}$

لدينا : $S=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\omega^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\omega^k-\omega^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\omega^k-1$$ ($\omega^n=1$ لأن)

$$=(1+\omega)^n-1$$

$$=\left(1+e^{\frac{i2p\pi}{n}}\right)^n-1$$

$$=\left[e^{\frac{ip\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ip\pi}{n}}+e^{\frac{ip\pi}{n}}\right)\right]^n-1$$

$$=e^{ip\pi}\left(2^n\cos^n\frac{p\pi}{n}\right)-1$$

وبالتالي : $S=\left(2^n\cos^n\left(\frac{p\pi}{n}\right)\right)e^{ip\pi}-1$

58 ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ و a من $]0,\frac{\pi}{2}[$.

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^n=\dfrac{1-i\tan a}{1+i\tan a}$ (E)

الجواب : مجموعة تعريف المعادلة (E) هي : $D = \mathbb{C} \setminus \{i\}$

لدينا : $\dfrac{1 - i\tan a}{1 + i\tan a} = \dfrac{\cos a - i\sin a}{\cos a + i\sin a} = \dfrac{e^{-ia}}{e^{ia}} = e^{-2ia}$

و لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E) . ونضع : $Z = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$

لدينا : $z \in S \Leftrightarrow Z^n = e^{-2ia}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} : Z = e^{i\left(\frac{-2a}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$

نضع : $\theta_k = -\dfrac{a}{n} + \dfrac{k\pi}{n}$ حيث : $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

إذن : $z \in S \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\}\ \dfrac{1 - iz}{1 + iz} = e^{2i\theta_k}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} : iz(1 + e^{2i\theta_k}) = 1 - e^{2i\theta_k}$

إذا كان : $e^{2i\theta_k} + 1 = 0$ أي : $e^{2i\theta_k} = -1$

و بما أن : $e^{2i\theta_k} = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$ و $Z^n = e^{2i\theta_k}$

فإن : $(-1)^n = e^{-2ai}$ وهذا غير ممكن لأن : $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

ومنه : $e^{2i\theta_k} + 1 \neq 0$ لكل k من $\{0,1,\dots,n-1\}$

إذن : $z \in S \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} : z = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{1 - e^{2i\theta_k}}{1 + e^{2i\theta_k}}\right)$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} : z = \dfrac{1}{i} \times \dfrac{e^{-i\theta_k} - e^{i\theta_k}}{e^{-i\theta_k} + e^{i\theta_k}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} : z = -\dfrac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k} = -\tan\theta_k$

$\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,\dots,n-1\} : z = -\tan\left(-\dfrac{a}{n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$

و بالتالي : $S = \left\{-\tan\left(-\frac{a}{n} + k\frac{\pi}{n}\right) \mid k \in \{0,1,\dots,n-1\}\right\}$

59

1) أكتب على الشكل المثلثي حلول كلا من المعادلتين :

$(E_1) : \quad z^3 = e^{2i\frac{\pi}{3}}$ $\qquad (E_2) : \quad z^3 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$

2) بين أن : $\forall \alpha \in \mathbb{R} : 1 + e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{\alpha}{2}} \times \cos\frac{\alpha}{2}$

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$

الجواب : 1) حلول المعادلة $z^3=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ هي الأعداد العقدية

$$z_k=e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad / k\in\{0,1,2\}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E_1) هي :

$$S_1=\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) ; \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right) ; \cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\right\}$$

بما أن : $z\in S_2 \Leftrightarrow z^3=e^{-\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \bar{z}^3=e^{\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow \bar{z}\in S_1$

حيث : S_2 مجموعة حلول المعادلة (E_2) فإن :

$$S_2=\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right) ; \cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right) ; \cos\left(-\frac{10\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{9}\right)\right\}$$

2) لدينا :

$$1+e^{i\alpha}=\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)+\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$
$$=e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}}+e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\,e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

ومنه :

$$1+e^{i\alpha}=2\cos\frac{\alpha}{2}\,e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

3) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-1)^6+(z-1)^3+1=0 \quad (E)$

لتكن S مجموعة حلول المعادلة (E) . ونضع : $u=(z-1)^3$

لدينا :

$$z\in S \Leftrightarrow u^2+u+1=0$$
$$\Leftrightarrow u=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أو } u=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow u=e^{-\frac{2i\pi}{3}} \text{ أو } u=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow (z-1)^3=e^{-\frac{2i\pi}{3}} \text{ أو } (z-1)^3=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

لدينا :

$$(z-1)^3=e^{-2i\pi/3} \Leftrightarrow z+1=e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad / k\in\{0,1,2\}$$
$$\Leftrightarrow z=1+e^{i\left(-\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad / k\in\{0,1,2\}$$
$$\Leftrightarrow z=2\cos\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)e^{i\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)} \quad / k\in\{0,1,2\}$$

$$(z-1)^3=e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow z=2\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)} \quad / k\in\{0,1,2\}$$

وبالتالي :

$$S=\left\{2\cos\left(+\frac{\pi}{9}\right)e^{+i\frac{\pi}{9}} ; 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)e^{i\frac{2\pi}{9}} ; 2\cos\frac{5\pi}{9}e^{i\frac{5\pi}{9}} ;\right.$$
$$\left.2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)e^{-i\frac{\pi}{9}} ; 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)e^{-i\frac{2\pi}{9}} ; 2\cos\frac{5\pi}{9}e^{-i\frac{5\pi}{9}}\right\}$$

60

ليكن θ من $\mathbb{R}$ و n من $\mathbb{N}^*$.

نضع : $Z=\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{4k\pi}{n}}-2\cos\theta\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1\right)$

1) بين أن لكل X من $\mathbb{C}$: $X^2-2\cos\theta X+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$

2) استنتج أن : $Z=2(1-\cos n\theta)$

الجواب : 1) لدينا : $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})=X^2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})X+e^{i\theta}e^{-i\theta}$

ومنه : $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})=X^2-2\cos\theta X+1$

2) نضع : $X=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

لدينا :
$$e^{i\frac{4k\pi}{n}}-2\cos\theta\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1=\left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)^2-2\cos\theta\, e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1$$
$$=X^2-2\cos\theta X+1$$
$$=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$$

ومنه :
$$Z=\prod_{k=0}^{n-1}(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$$
$$=\prod_{k=0}^{n-1}(e^{i\theta}-X)(e^{-i\theta}-X)=\prod_{k=0}^{n-1}(e^{i\theta}-X)\prod_{k=0}^{n-1}(e^{-i\theta}-X)$$

ملاحظة هامة : $\forall y\in\mathbb{C},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\quad y^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(y-e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)$

ومنه : $Z=(e^{in\theta}-1)(e^{-in\theta}-1)$ $\left(\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n=1\right)$
$$Z=1-(e^{in\theta}+e^{-in\theta})+1$$
$$Z=2-2\cos(n\theta)$$

وبالتالي : $Z=2(1-\cos(n\theta))$

61

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و a و b من $\mathbb{R}$ حيث : $b\not\equiv 0\ [2\pi]$

نضع : $C=\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kb)$ و $S=\sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+kb)$

و $T=e^{ia}\left(\dfrac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}\right)$

1) حدد : $\mathcal{R}e(T)$ و $\mathcal{I}m(T)$

2) بين أن : $T=C+ib$

3) استنتج حساب : C و S .

الجواب : 1) لدينا :

$$T = e^{ia}\left(\frac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}\right)$$

$(b \neq 0\ [2\pi])$

$$= e^{ia}\cdot e^{i\frac{nb}{2}}\cdot\frac{e^{-i\frac{nb}{2}}-e^{i\frac{nb}{2}}}{e^{i\frac{b}{2}}\left(e^{-i\frac{b}{2}}-e^{i\frac{b}{2}}\right)}$$

$$= e^{i\left(a+b\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)}\times\frac{\sin\frac{nb}{2}}{\sin\frac{b}{2}}$$

$$T = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\frac{b}{2}}\left(\cos\left(a+b\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)+i\sin\left(a+b\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)\right)$$

ومنه :

$$\mathcal{R}e(T) = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}\cos\left(a+b\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$\mathcal{I}m(T) = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}\sin\left(a+b\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

2) لدينا :

$$C+iS = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kb) + i\sum_{k=0}^{n-1}\sin(a+kb)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos(a+kb)+i\sin(a+kb)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ib}\right)^k$$

$$C+iS = e^{ia}\times\frac{1-\left(e^{ib}\right)^n}{1-e^{ib}} = e^{ia}\times\frac{1-e^{inb}}{1-e^{ib}}$$

$(e^{ib}\neq 1$: لأن$)$

ومنه :

$$T = C+iS$$

3) بما أن : $T = C+iS$ و $(C,S)\in\mathbb{R}^2$

فإن : $C = \mathcal{R}e(T)$ و $S = \mathcal{I}m(T)$

أي :

$$C = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}\cos\left(a+b\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

و

$$S = \frac{\sin\left(\frac{nb}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}\sin\left(a+b\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

62 نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z)=z^3+z^2+z+1$

1) بين أن المعادلة : $P(z)=0$ تقبل حلاً حقيقياً .

2) لتكن α و β و γ حلول المعادلة : $P(z)=0$.

أ- بدون حساب α و β و γ أحسب مايلي :

$\alpha\beta\gamma$ و $\alpha+\beta+\gamma$ و $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

3) استنتج حلول النظمة S في $\mathbb{C}^3$ المعرفة بمايلي :

$$(S):\begin{cases} x+y+z=-1 \\ |x|=|y|=|z|=1 \\ xyz=-1 \end{cases}$$

الجواب : 1) نلاحظ أن : $P(-1)=0$ ومنه : -1 حلاً للمعادلة : $P(z)=0$

ملاحظة : بما أن : $P(\bar{z})=\overline{P(z)}$ و $d^\circ P=3$ فإن أحد حلول المعادلة : $P(z)=0$ تقبل حلاً حقيقياً . (لأنها تقبل ثلاث حلول)

2) أ- بما أن α و β و γ حلول المعادلة : $P(z)=0$ و $d^\circ P=3$

فإن : $\forall z\in\mathbb{C}$: $P(z)=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$

$$= z^3-(\alpha+\beta+\gamma)z^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)z-\alpha\beta\gamma$$

$$= z^3+z^2+z+1$$

ومنه :

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-1 \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1 \\ \alpha\beta\gamma=-1 \end{cases}$$

ب- لدينا : $P(z)=(z+1)(z^2-1)$

$P(z)=(z+1)(z-i)(z+i)$

إذن : $P(z)=0 \Leftrightarrow z=-1$ أو $z=-i$ أو $z=i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $P(z)=0$ هي : $S_1=\{-1,-i,i\}$

3) لدينا : $|x|=|y|=|z|=1 \Leftrightarrow \bar{x}=\frac{1}{x}$ و $\bar{y}=\frac{1}{y}$ و $\bar{z}=\frac{1}{z}$

لتكن S_2 مجموعة حلول النظمة (S)

إذن :
$$(x,y,z)\in S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ |x|=|y|=|z|=1 \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ \bar{x}=\frac{1}{x} \text{ و } \bar{y}=\frac{1}{y} \text{ و } \bar{z}=\frac{1}{z} \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ \bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-1 \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ yz+xz+yx=-xyz \\ xyz=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-1 \\ xy+yz+zx=1 \\ xyz=-1 \end{cases}$$

ومنه ، $(x,y,z)\in S_2 \Leftrightarrow$ x و y و z هي حلول المعادلة $P(z)=0$

وبالتالي : $S_2=\{(1,i,-i)\,;(1,-i,i)\,;(-i,1,i)\,;(-i,i,1)\,;(i,-i,1)\,;(i,1,-i)\}$

63

1) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $x^2-x+1=0$ ثم أكتب الجذرين على شكلهما المثلثي .

ب- استنتج حل النظمة في $\mathbb{C}^2$: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ xy=1 \end{cases}$ بحيث : $\operatorname{Im} y^3\le 0$

2) لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-3z-1=0$: (E) وليكن x و y عدد عقديين بحيث : $xy=1$.

أ- بين أن : $x+y$ جذر للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان : $x^3+y^3=1$

ب- استنتج مما سبق أن حلول المعادلة (E) هي : $S=\{2\cos\frac{\pi}{9}\,;2\cos\frac{7\pi}{9}\,;2\cos\frac{13\pi}{9}\}$

الجواب : 1) أ- لدينا : $x^2-x+1=0$ و $x\in\mathbb{C}$ (1)

إذن : $\Delta=1-4=-3=(\sqrt{3}i)^2$ ومنه : $\sigma=3i$ جذر مربع لـ (Δ)

إذن : $x=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ أو $x=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي : $S_1=\{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

ب - لدينا النظمة : $(S): \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ xy=1 \\ \Im m(y^3)\leq 0 \end{cases}$

لتكن S_2 مجموعة حلول النظمة (S).

$$(x,y)\in S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ xy=1 \\ \Im m(y^3)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^3\cdot y^3=1 \\ \Im m(y^3)=1 \end{cases}$$

إذن : x^3 و y^3 هما حلي المعادلة : $X^2-X+1=0$ أي :

$$\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبما أن : $\Im m(y^3)\leq 0$ فإن : $y^3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن : $y^3=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ومنه : $y=e^{i(-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3})}$ حيث : $k\in\{0;1;2\}$

أي : $y=e^{-i\frac{\pi}{9}}$ أو $y=e^{\frac{-7i\pi}{9}}$ أو $y=e^{\frac{-13i\pi}{9}}$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

وبما أن $xy=1$ فإن : $x=e^{i\frac{\pi}{9}}$ أو $x=e^{+i\frac{7\pi}{9}}$ أو $x=e^{+i\frac{13\pi}{9}}$

وبالتالي :

$$S_2=\left\{\left(e^{i\frac{\pi}{9}};e^{-i\frac{\pi}{9}}\right);\left(e^{+i\frac{7\pi}{9}};e^{-i\frac{7\pi}{9}}\right);\left(e^{+i\frac{13\pi}{9}};e^{-i\frac{13\pi}{9}}\right)\right\}.$$

ج) لدينا المعادلة : $(E):\ z^3-3z-1=0$

$x+y$ حل للمعادلة (E) $\Leftrightarrow$ $(x+y)^3-3(x+y)-1=0$

$\Leftrightarrow$ $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3(x+y)-1=0$

$\Leftrightarrow$ $x^3+y^3+3xy(x+y)-3(x+y)=1$

$\Leftrightarrow$ $x^3+y^3+(x+y)(3xy-3)=1$

$\Leftrightarrow$ $x^3+y^3=1$

لأن : $xy=1$

ب - نضع : $z=x+y$ حيث : $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ و $xy=1$

$$(E)\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ xy=1 \\ z=x+y \end{cases}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي :

$$e^{i\frac{\pi}{9}}+e^{-i\frac{\pi}{9}}=2\cos\frac{\pi}{9}$$

$$e^{\frac{13i\pi}{9}}+e^{-\frac{13i\pi}{9}}=2\cos\frac{13\pi}{9} \quad ; \quad e^{i\frac{7\pi}{9}}+e^{-i\frac{7\pi}{9}}=2\cos\frac{7\pi}{9}$$

وبالتالي : $S_2=\left\{2\cos\frac{\pi}{9};\ 2\cos\frac{7\pi}{9};\ 2\cos\frac{13\pi}{9}\right\}$

64 المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) حدد على الشكل المثلثي حلول المعادلة : $z^6 - i = 0$: $z \in \mathbb{C}$

ومثل صورها في المستوى العقدي و نرمز لها بعمدتها بالترتيب التزايدي

المنتمية إلى المجال $[0,2\pi[$ ب : A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 و A_5

2) أ- بين أن المستقيم (A_1A_5) يقطع المستقيم $[OA_0]$ في منتصفه.

ب - ليكن M_0 نقطة تقاطع القطعتين $[A_0A_2]$ و $[A_1A_5]$.

نعرف عن النقطة M_0 في المثلث OA_0A_2 . نعرف كذلك النقط M_1 و M_2 و M_3

و M_4 و M_5 في المثلثات OA_1A_2 و OA_2A_3 و OA_3A_4 و OA_4A_5 و OA_5A_0

3) ليكن m_k لحق النقطة M_k حيث : $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

حدد هندسياً معيار و عمدة m_0 ثم m_k .

الجواب : 1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^6 - i = 0$ (E)

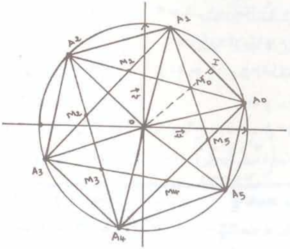
$z^6 = i$

بما أن : $i = [1,\frac{\pi}{2}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$ فإن حلول المعادلة (E) هي :

$z = e^{i(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6})}$ / $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \left\{ e^{i\frac{\pi}{12}} ; e^{i\frac{5\pi}{12}} ; e^{i\frac{9\pi}{12}} ; e^{i\frac{13\pi}{12}} ; e^{i\frac{17\pi}{12}} ; e^{i\frac{21\pi}{12}} \right\}$$



لدينا $(A_0A_1A_2A_3A_4A_5)$ سداسي منتظم بحيث : $(\vec{u},\overrightarrow{OA_0}) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ و $\|\overrightarrow{OA_0}\| = 1$

2) أ- لدينا المثلث OA_kA_{k+1} $(0\leq k\leq 4)$ متساوي الأضلاع لأن:

$$\begin{cases} OA_k = OA_{k+1} = 1 \\ \overline{(\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_{k+1}})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$$

وبالخصوص OA_0A_1 متساوي الأضلاع ، كذلك OA_5A_0 متساوي الأضلاع

إذن: $OA_1 = A_0A_1$ و $OA_5 = A_0A_5$

ومنه (A_1A_5) واسط القطعة $[OA_0]$ ومنه (A_1A_5) يقطع القطعة $[OA_0]$ في المنتصف.

ب - كذلك لدينا: (A_0A_2) واسط القطعة $[OA_1]$ إذن: M_0 نقطة تقاطع واسطي المثلث OA_0A_1 ومنه M_0 مركز ثقل (أو مركز الدائرة المحيطة) المثلث OA_0A_1.

3) في المثلث المتساوي الأضلاع OA_0A_1 وليكن I منتصف $[A_0A_1]$

إذن: $OM_0 = \frac{2}{3}OI = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ (لأن: $OI = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

ومنه: $|m_0| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

لدينا: $\arg m_0 \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM_0}) \equiv \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

ومنه: $\arg m_0 \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

نعتبر المثلثات المتساوية الأضلاع OA_kA_{k+1} $(0\leq k\leq 5)$

وبنفس الطريقة نبين أن: $|m_k| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

و $\arg m_k \equiv \overline{(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k})} \quad [2\pi]$

$\equiv \overline{(\vec{u}, \overrightarrow{OM_0})} + \overline{(\overrightarrow{OM_0}; \overrightarrow{OM_k})} \quad [2\pi]$

ومنه: $\arg m_k \equiv \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

65

ليكن a و b عددين من $\mathbb{C}^*$ و ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة :

$$(\ ) \quad z \in \mathbb{C} \ : \ z^2 + az + b = 0$$

بين أن :

$$|z_1| = |z_2| \iff \begin{cases} |b| = 1 \text{ و } |a| \leq 2 \\ \arg b \equiv 2\arg a \quad [2\pi] \end{cases}$$

الجواب : $(\Rightarrow)$ نفترض : $|z_2| = |z_1| = 1$

لدينا : z_1 و z_2 حلي المعادلة : $z^2 + az + b = 0$ فإن : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases}$

ومنه : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1$ أي : $|b| = 1$

لدينا : $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$ أي : $|a| \leq 2$

لدينا : $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \theta_1 \in \mathbb{R} : & z_1 = e^{i\theta_1} \\ \exists \theta_2 \in \mathbb{R} : & z_2 = e^{i\theta_2} \end{cases}$

ومنه : $a = -\left(e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right) = -e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \times \left(e^{i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}\right)$

$$a = -e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} \times 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$$

إذن : $a^2 = 4e^{i(\theta_1+\theta_2)} \times \cos^2\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$

ومنه : $2\arg(a) \equiv \arg(a^2) = \theta_1 + \theta_2 \quad [2\pi]$

ولدينا : $b = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

ومنه : $\arg(b) \equiv \theta_1 + \theta_2 \quad [2\pi]$

و بالتالي : $\arg(b) \equiv 2\arg a \quad [2\pi]$

$(\Leftarrow)$ نفترض أن : $|b| \leq 1$ و $|a| \leq 2$ و $\arg b \equiv 2\arg a \quad [2\pi]$

لدينا : $|b| = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} : \ b = e^{i\theta}$

بما أن : $\arg b \equiv 2\arg(a) \quad [2\pi]$

فإن : $\arg(a) \equiv \theta \quad [2\pi]$

ومنه : $\exists R \in]0, 2] : \ a = Re^{i\theta}$ (لأن : $0 < |a| \leq 2$)

لنحل المعادلة : (E) $z^2+az+b=0$

لدينا : $\Delta = a^2-4b = R^2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} = e^{2i\theta}(R^2-4) = \left(\sqrt{4-R^2}\,i e^{i\theta}\right)^2$

لأن : $R^2-4 \leq 0$

ومنه حلول المعادلة (E) هي :

$$\frac{-Re^{i\theta} - i\sqrt{4-R^2}\,e^{i\theta}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{-Re^{i\theta}+i\sqrt{4-R^2}\,e^{i\theta}}{2}$$

أي : $\frac{-R + \varepsilon i\sqrt{4-R^2}}{2}e^{i\theta}$ مع : $\varepsilon\in\{-1,1\}$

ومنه : $\left|\frac{-R+\varepsilon i\sqrt{4-R^2}}{2}e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{R^2+4-R^2}=1$

إذن ، $|z_1|=|z_2|=1$ حيث : z_1 و z_2 حلول المعادلة (E)

وبالتالي : $|z_1|=|z_2| \Leftrightarrow \begin{cases}|b|=1 \text{ و } |a|\leq 2\\ \arg b \equiv 2\arg a \quad [2\pi]\end{cases}$

66

المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

لتكن (C) الدائرة التي مركزها O وشعاعها R $(R>0)$ والنقطة A من (C) لحقها R.

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $n\geq 2$. و r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{n}$.

نعتبر المتتالية للنقط $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ من الدائرة (C) المعرفة بمايلي :

$M_0=A$ و $M_{k+1}=r(M_k)$

وليكن z_k لحق النقطة M_k.

1) أ- لكل k من $\mathbb{N}$ عبر عن z_{k+1} بدلالة z_k.

ب- استنتج z_k بدلالة k و n.

ج- قارن M_n و M_0.

د- أنشئ الشكل من أجل $n=16$ و $R=4cm$.

2) أ- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\| = 2R\sin\frac{\pi}{n}$

ب- نضع : $L_n=\sum_{k=0}^{n-1}\|\overrightarrow{M_kM_{k+1}}\|$ ، حدد $\lim_{n\to+\infty}L_n$ واعط تأويلا هندسيا.

الجواب : 1) أ- لنكن $M(z)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ و $M'(z')$ صورتها بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{n}$

إذن : $z' - 0 = e^{i\frac{2\pi}{n}}(z-0) \iff r(M(z)) = M'(z')$

$\iff z' = e^{i\frac{2\pi}{n}} z$

ومنه : $z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \cdot z_k \iff r(M_k) = M_{k+1}$

ب- بما أن : $\forall k \in \mathbb{N} : z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{n}} \cdot z_k$

فإن (z_k) متتالية هندسية أساسها $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ وحدها الأول $z_0 = R$

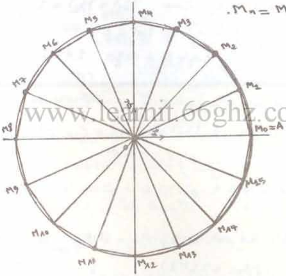
إذن : $\forall k \in \mathbb{N} : z_k = z_0 \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k$

أي : $\forall k \in \mathbb{N} : z_k = R e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

ج- لدينا لحق M_n هو z_n إذن : $z_n = R e^{i\frac{2n\pi}{n}} = R e^{i2\pi} = R$

ومنه : $M_n = M_0$.

د-



2) أ- ليكن k من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$M_kM_{k+1} = |z_{k+1} - z_k|$$

$$= \left|e^{2i\frac{(k+1)\pi}{n}} \cdot R - e^{2i\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \cdot R\right| = R\left|e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right|\left|e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right| = R\left|e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right|$$

$$= R\left|\left(\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right) + i\sin\frac{2\pi}{n}\right| = R\sqrt{\left(\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{n}}$$

$$= R\sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}} = R\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\right)} = R\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

وبالتالي : $M_kM_{k+1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$

ب- ليكن L_n محيط المضلع المنتظم $(M_0, M_1, \ldots ; M_n)$

وحسب السؤال 2) أ- لدينا : $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_{n-1}M_n$

$= 2R\sin\frac{\pi}{n} + 2R\sin\frac{\pi}{n} + \dots + 2R\sin\frac{\pi}{n}$

ومنه : $L_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n}$.

ولدينا : $L_n = 2\pi R \dfrac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n} = 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 2\pi R$

هذه النهاية تمثل محيط دائرة شعاعها R

67

نعتبر الأعداد العقدية : $-1+i$ و $3(1+i)$ و 2

1) أكتب على الشكل المثلثي هذه الأعداد .

2) لتكن a و b و c هذه الأعداد الثلاث بحيث : $|a|<|b|<|c|$

ولتكن A و B و C صورها على التوالي في المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

أ- أنشئ النقط A و B و C .

ب- بين أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية .

3) ليكن f التطبيق المعرف من $(\mathcal{P})$ نحو $(\mathcal{P})$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z' = 2iz + 1 - 2i$

لتكن A' و B' و C' ألحاقها a' و b' و c' على التوالي : صور النقط A و B و C بالتطبيق f على التوالي .

أ- حدد a' و b' و c' و أنشئ A' و B' و C' في المستوى $(\mathcal{P})$

حدد طبيعة المثلث A'B'C' ؟

ب- أحسب : $\omega = \frac{c'-b'}{c'-a'}$ ، أكتب ω على الشكل المثلثي .

واستنتج قيمة $\frac{B'C'}{BC}$ و قياسا للزاوية $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{B'C'})$

ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمين (BC) و $(B'C')$ ؟

الجواب : 1) لدينا : $|-1+i| = \sqrt{2}$ إذن :

$-1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

لدينا : $|3(1+i)| = 3\sqrt{2}$

إذن : $3(1+i) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا : $2 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2e^{i0}$

ج) إنشاء A و B و C :

بما أن : $\sqrt{2} < 2 < 3\sqrt{2}$ فإن : $a = -1+i$ و $b = 2$ و $c = 3(1+i)$

ومنه : $A(-1,1)$ و $B(2,0)$ و $C(3,3)$

ب - لدينا : $AB = |b-a| = |3-i| = \sqrt{10}$

$AC = |c-a| = |4+2i| = \sqrt{20}$

$BC = |c-b| = |1+3i| = \sqrt{10}$

بما أن : $AB = CB$ و $AC^2 = AB^2 + CB^2$

فإن : ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في B .

3) أ- لدينا : $z' = 2iz + 1 - 2i$

إذن : $a' = 2ia + 1 - 2i = 2i(-1+i) + 1 - 2i$

$a' = -2i - 2 + 1 - 2i$

ومنه : $a' = -1 - 4i$ و $A'(-1,-4)$

لدينا : $b' = 2ib + 1 - 2i = 2i(2) + 1 - 2i$

ومنه : $b' = 1 + 2i$ و $B'(1,2)$

لدينا : $c' = 2ic + 1 - 2i = 2i(3+3i) + 1 - 2i$

$c' = 6i - 6 + 1 - 2i$

ومنه : $c' = -5 + 4i$ و $C'(-5,4)$

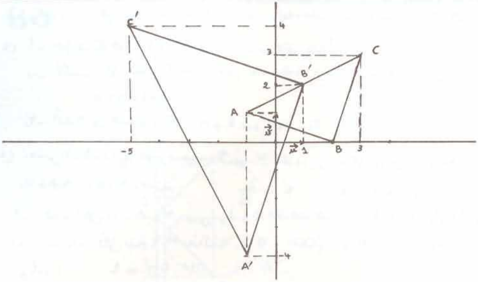
طبيعة المثلث $A'B'C'$:

لدينا : $B'C' = |c'-b'| = \sqrt{40}$ و $A'B' = |b'-a'| = \sqrt{40}$

و $A'C' = |c'-a'| = \sqrt{80}$

بما أن : $A'B' = C'B'$ و $A'C'^2 = A'B'^2 + C'B'^2$

فإن : $A'B'C'$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في B'.



ب ـ حساب w :

لدينا : $w = \dfrac{c'-b'}{c-b} = \dfrac{-5+4i-1-2i}{3+3i-2} = \dfrac{-6+2i}{1+3i}$

$$w = \frac{(-6+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = 2i$$

ومنه : $w = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

لدينا : $\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{|c'-b'|}{|c-b|} = \dfrac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = 2$

و $\overline{(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{B'C'})} \equiv \arg\left(\dfrac{c'-b'}{c-b}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv \arg(w) \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

إذن : $\overline{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'})} \equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

ومنه : $(BC) \perp (B'C')$.

68 المستوى العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+8=0$

ب- اكتب على الشكل المثلثي حلي هذه المعادلة z_1 و z_2 بحيث : $Im(z_1)>0$.

ج- أنشئ في المستوى $\mathcal{P}$ ، A و B صور z_1 و z_2 على التوالي .

2) نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathcal{P}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{1}{\bar{z}}$ ($\bar{z}$ مرافق z)

أ- لحق لكل من A' و B' صور A و B على التوالي بالتطبيق f ، وأنشئ A' و B'

ب- بين أن لكل نقطة M مخالفة لـ O ، النقط O و M و M' مستقيمية

وأن : $OM.OM'=1$

3) أ- بين أن لكل عدد عقدي غير منعدم z لدينا :

$|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2\bar{z'}}{\bar{z'}}\right|=2$ حيث : $z'=\frac{1}{\bar{z}}$

واستنتج أن : $|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}-z'\right|=|z'|$

ب- لتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة التي مركزها I لحقها 2 وشعاعها $R=2$.

i) بين أن $[AB]$ قطراً للدائرة $(\mathscr{C})$.

ii) لتكن M نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$ مخالفة لـ O .

بين أن M' تنتمي إلى مستقيم (D) يتم تحديد معادلة ديكارتية له ، أنشئ $(\mathscr{C})$ و (D) .

الجواب : 1) أ- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+8=0$ (E)

مميز هذه المعادلة هو : $\Delta=16-32=(4i)^2$

إذن حلول المعادلة (E) هما : $z_2=2-2i$ و $z_1=2+2i$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{2-2i\,;\,2+2i\}$

ب- لدينا : $|z_1|=2\sqrt{2}$

إذن : $z_1=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

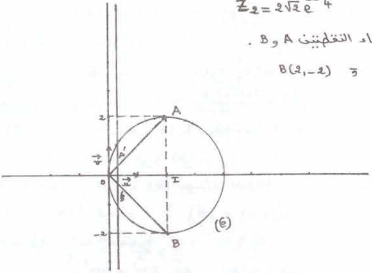
ومنه : $z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

بما أن : $Z_2=\overline{Z}_1$ فإن : $Z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

أي : $Z_2=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ج- إنشاء النقطتين A و B .

$A(2,2)$ و $B(2,-2)$



2) أ- لدينا : $z'_1=\frac{1}{\overline{z}_1}=\frac{z_1}{\overline{z}_1z_1}=\frac{1+i}{4}$

ومنه : $\frac{1+i}{4}$ لحق النقطة A' إذن : $A'\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

لدينا : $z'_2=\frac{1}{\overline{z}_2}=\frac{z_2}{\overline{z}_2z_2}=\frac{1-i}{4}$

ومنه : $\frac{1-i}{4}$ لحق النقطة B' ، إذن : $B'\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$

ب- لدينا : $OM=|z|$ و $OM'=|z'|$ حيث : $z\neq 0$

بما أن : $z'=\frac{1}{\overline{z}}$ فإن : $|z'.\overline{z}|=1$

أي : $|z'||\overline{z}|=|z'||z|=1$ (لأن : $|\overline{z}|=|z|$)

ومنه : $OM.OM'=1$.

3) أ- ليكن z من $\mathbb{C}^*$ إذن : $z'=\frac{1}{\overline{z}}\in\mathbb{C}^*$

لدينا : $\left|\frac{1-2\overline{z}'}{\overline{z}'}\right|=\left|\frac{1-\frac{2}{z}}{\frac{1}{z}}\right|=|z-2|$

ومنه : $\left|\frac{1-2\overline{z}'}{\overline{z}'}\right|=2 \Leftrightarrow |z-2|=2$

ولدينا : $|z-2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1-2\overline{z}'}{\overline{z}'}\right|=2$

إذن : $|z-2|=2 \Leftrightarrow |1-2\bar{z}'| = 2|\bar{z}'|$

ومنه : $|z-2|=2 \Leftrightarrow |1-2z'| = 2|z'|$ (نذكر من $\mathbb{C}$ لدينا : $|\bar{x}|=|x|$)

ب - لنبين $[AB]$ قطراً للدائرة $(\mathscr{C})$.

أ) لدينا : $AB = |z_2 - z_1| = |-4i| = 4 = R$

لحق منتصف $[AB]$ هو : $\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{2+2i+2-2i}{2} = 2$ هو لحق النقطة I

بما أن $(\mathscr{C})$ هي الدائرة التي مركزها I وشعاعها $R=2$

فإن : $[AB]$ قطراً للدائرة $(\mathscr{C})$.

ب) لتكن $M(z)$ نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$ بحيث : $M \neq O$ إذن : $|z-2|=2$

وحسب السؤال 3) أ لدينا : $|\frac{1}{2} - z'| = |z'|$ (حيث : $f(M)=M'(z')$)

لتكن E النقطة ذات اللحق $\frac{1}{2}$ أي : $E(\frac{1}{2}, 0)$.

إذن : $|\frac{1}{2} - z'| = |z'| \Leftrightarrow EM' = OM'$

ومنه M' تنتمي إلى واسط القطعة $[OE]$: (D) معادلته : $x = \frac{1}{4}$.

69

لتكن (z_n) المتتالية للأعداد العقدية المعرفة بما يلي :

$z_0 = \cos x + i\sin x$ و $\forall n \in \mathbb{N} : z_{n+1} = z_n + |z_n|$

حيث : $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) أكتب على شكل المثلثي العدد z_1.

2) لتكن (α_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$\alpha_n \in]0; \frac{\pi}{2}[$ و $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n \equiv \arg z_n \quad [2\pi]$

أ- بين أن المتتالية (α_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

ب- استنتج α_n بدلالة x و n.

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = z_n - \bar{z}_n$

أ- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n ، ماذا يمكن أن نستنتج ؟

ب- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |z_n| = \frac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})}$

4) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : z_n - z_0 = |z_0| + |z_1| + \cdots + |z_{n-1}|$

5) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \cotan(\frac{x}{2^n}) - \cotan x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} + \cdots + \frac{1}{\sin(\frac{x}{2^{n-1}})}$

الجواب: 1) لدينا: $z_1 = z_0 + |z_0| = 1 + \cos x + i\sin x$

$$z_1 = 2\cos^2\frac{x}{2} + 2i\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos x + i\sin\frac{x}{2}\right)$$

بما أن: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ فإن: $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ و $\cos\frac{x}{2} > 0$

ومنه: $z_1 = \left[2\cos\frac{x}{2} ; \frac{x}{2}\right] = 2\cos x\, e^{i\frac{x}{2}}$

2) أ- بما أن: $\arg z_n \equiv \alpha_n\ [2\pi]$ فإن: $z_n = |z_n| e^{i\alpha_n}$

ولدينا: $z_{n+1} = |z_{n+1}| e^{i\alpha_{n+1}} = z_n + |z_n|$

$$= |z_n|\left(e^{i\alpha_n} + 1\right)$$

$$= |z_n|\left[\left(e^{i\frac{\alpha_n}{2}}\right)^2 + e^{i\frac{\alpha_n}{2}} \times e^{-i\frac{\alpha_n}{2}}\right]$$

$$= |z_n|\left[e^{i\frac{\alpha_n}{2}} + e^{-i\frac{\alpha_n}{2}}\right] e^{i\frac{\alpha_n}{2}}$$

$$= \left[|z_n|\cos\frac{\alpha_n}{2}\right] e^{i\frac{\alpha_n}{2}}$$

بما أن: $0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$ فإن: $0 < \frac{\alpha_n}{2} < \frac{\pi}{4}$ و $|z_n|\cos\frac{\alpha_n}{2} > 0$

$|z_{n+1}| = |z_n|\cos\frac{\alpha_n}{2}$ و $\arg z_{n+1} \equiv \frac{\alpha_n}{2}\ [2\pi]$

وبما أن $0 < \frac{\alpha_n}{2} < \frac{\pi}{2}$ فإن: $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ومنه (α_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $\alpha_0 = x$

ب- بما أن: (α_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $\alpha_0 = x$

فإن: $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \alpha_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

أي: $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \frac{x}{2^n}$

3) أ- لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = z_{n+1} - \overline{z_{n+1}}$

$$= z_n + |z_n| - \overline{(z_n + |z_n|)}$$

$\overline{|z_n|} = |z_n|$ (لأن: $|z_n| \in \mathbb{R}$)

$$= z_n + |z_n| - \overline{z_n} - |z_n|$$

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = v_n$

إذن (v_n) متتالية ثابتة أي: $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 = z_0 - \overline{z_0}$

ومنه: $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 2i\sin x$

ب- بما أن: $z_n = |z_n| e^{i\frac{x}{2^n}}$ و $v_n = z_n - \overline{z_n}$

فإن: $v_n = 2i|z_n|\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ ، ولدينا كذلك $v_n = 2i\sin x$

إذن: $2i|z_n|\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2i\sin x$

$$\forall n\in\mathbb{N} : |Z_n| = \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

4) لدينا : لكل n من $\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} Z_n = Z_{n-1} + |Z_{n-1}| \\ Z_{n-1} = Z_{n-2} + |Z_{n-2}| \\ \vdots \\ Z_2 = Z_1 + |Z_1| \\ Z_1 = Z_0 + |Z_0| \end{cases}$$

بجمع طرف بطرف هذه المتساويات نحصل على :

$$Z_n = Z_0 + |Z_0| + |Z_1| + \dots + |Z_{n-1}|$$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^* : Z_n - Z_0 = |Z_0| + |Z_1| + \dots + |Z_{n-1}|$

5) لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $Z_n - Z_0 = |Z_0| + |Z_1| + \dots + |Z_{n-1}|$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) + i\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - (\cos x + i\sin x) = \sum_{k=0}^{n-1}|Z_k|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) - \cos x = \sum_{k=0}^{n-1}|Z_k|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$

وبالتالي : $\cotan\left(\frac{x}{2^n}\right) - \cotan x = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \dots + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}$

لكل n من $\mathbb{N}^*$.

70

أخطط ما يلي :

$f(x) = \sin 2x \cos^2 3x$; $g(x) = \sin^5 2x$; $h(x) = \cos 3x \cos^2 5x$

الجواب : لدينا لكل n من $\mathbb{N}$:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

لدينا :

$$f(x) = \sin 2x \cos^2 3x = \left(\frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{16i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{9ix} + 3e^{6ix}\cdot e^{-3ix} + 3e^{3ix}\cdot e^{-6ix} + e^{-9ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{9ix} + 3e^{3ix} + 3e^{-3ix} + e^{-9ix}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{16i}\left(e^{11ix}+3e^{5ix}+3e^{-ix}+e^{-7ix}-e^{7ix}-3e^{ix}-3e^{-5ix}-e^{-11ix}\right)$$

$$=\frac{1}{16i}\left[\left(e^{11ix}-e^{-11ix}\right)+3\left(e^{5ix}-e^{-5ix}\right)-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)-\left(e^{7ix}-e^{-7ix}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{16i}\left[2i\sin 11x+6i\sin 5x-6i\sin x-2i\sin 7x\right]$$

ومنه : $f(x)=\frac{1}{8}\sin 11x+\frac{3}{8}\sin 5x-\frac{3}{8}\sin x-\frac{1}{8}\sin 7x$

لدينا : $g(x)=\sin^5 2x=\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^5$

$$=\frac{1}{32i}\left(e^{10ix}-5e^{8ix}\times e^{-2ix}+10e^{6ix}\cdot e^{-4ix}-10e^{4ix}\cdot e^{-6ix}+5e^{2ix}\cdot e^{-8ix}-e^{-10ix}\right)$$

$$=\frac{1}{32i}\left[\left(e^{10ix}-e^{-10ix}\right)-5\left(e^{8ix}-e^{-8i}\right)+10\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\right]$$

ومنه ، $g(x)=\frac{1}{16}\sin 10x-\frac{5}{16}\sin 8x+\frac{5}{8}\sin 2x$

لدينا : $h(x)=\cos 3x\cos^2 5x=\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\times\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{10ix}+2+e^{-10ix}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{13ix}+2e^{3ix}+e^{-7ix}+e^{7ix}+2e^{-3ix}+e^{-10ix}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left[\left(e^{13ix}+e^{-10ix}\right)+2\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+\left(e^{7ix}+e^{-7ix}\right)\right]$$

ومنه ، $h(x)=\frac{1}{4}\cos 13x+\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{4}\cos 7x$

تمارين للبحث

1 ليكن z و z' عددين عقديين.

بين أن : $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

$$(1)\quad 4z+8|z|^2-3=0$$

$$(2)\quad z+\bar{z}=|z|$$

3 حدد الأعداد العقدية z بحيث :

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|$$

4 لتكن x و y و z أعداد عقدية معيارها يساوي 1 بحيث :

$(1):\ xyz=1$ و $(2):\ x+y+z=1$

1) بين أن : $(3):\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

2) أحسب : x و y و z.

5 ليكن a عدد عقدي مخالف لـ 1 بحيث : $|a|=1$

1) بين أن لكل عدد عقدي z العدد $z=\dfrac{z-a\bar{z}}{1-a}$ حقيقي.

2) هل العكس صحيح ؟

6 ليكن λ عدداً عقدياً ، نعتبر العدد العقدي

$$z_\lambda=a\lambda\bar{\lambda}+b\bar{\lambda}+\bar{b}\lambda+c$$

حيث : a و c عددان حقيقيان معلومان و b عدد عقدي معلوم.

1) بين أن العدد z_λ عدد حقيقي.

2) إذا كان : $a>0$ ، بين أن المجموعة : $E=\{z_\lambda\ /\ \lambda\in\mathbb{C}\}$ تقبل أصغر عنصر.

7 لتكن a و b و c أعداد عقدية معلومة ، نعتبر التعبير التالي :

$P(\lambda,\mu)=\lambda\bar{\lambda}+b\lambda\bar{\mu}+\bar{\lambda}\bar{b}\mu+c\mu\bar{\mu}$ حيث : $(\mu,\lambda)\in\mathbb{C}^2$

بين أن : $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2:\ P(\lambda,\mu)\geq 0 \Leftrightarrow (a\geq 0$ و $c\geq 0$ و $|b|^2\leq ac)$

8 ليكن العدد العقدي a بحيث : $a=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)$

1) أ- أحسب : a^2 .

ب- حدد معيار وعمدة a^2 .

ج- استنتج معيار وعمدة العدد العقدي a .

2) ليكن u العدد العقدي حيث : $u=\dfrac{a}{2+2i}$

بين أن : $u=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-i(3u^3+4u^4)z-12u^7=0$ (E)

حيث : z هو المجهول .

أ- أوجد بدلالة u حلي المعادلة (E)

ب- أكتب على الشكل المثلثي والجبري لكل من حلي المعادلة (E) .

9 ليكن z و z' عددين عقديين معلومين .

1) أ- قارن : $|z+z'|^2$ و $|z|^2+|z'|^2$

ب- ماهو الشرط لكي يكون لدينا : $|z+z'|^2=|z|^2+|z'|^2$ ؟.

2) ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث : $n\geq 2$ وليكن $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ من $\mathbb{C}^n$.

نضع : $f(z)=\sum_{k=1}^{n}|a_k-\bar{b}_k z|^2$ حيث : $z\in\mathbb{C}$

أ- بين أنه لكل z من $\mathbb{C}$ لدينا :

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2+|z|^2\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2-2\,\mathrm{Re}\left(\bar{z}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)\right.$$

ب- نضع : $\lambda=\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2$ و $z=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)$

برهن على أن : $\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\right)$.

10 1) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-i\sqrt{3}z-1=0$ (1)

نرمز ب α و β لحلي هذه المعادلة .

ب- أكتب α و β على الشكل المثلثي .

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

11

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = i\sqrt{3}\,u_{n+1} + u_n \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

لكل n من $\mathbb{N}$: نضع : $a_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ و $b_n = u_{n+1} - \beta u_n$

أ- حدد الشكل الجبري و الشكل المثلثي لكل من الأعداد العقدية : a_0 ; a_1 ، b_0 ; b_1 .

ب - بين أن : $b_{n+1} = \alpha b_n$ و $a_{n+1} = \beta a_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$

واكتب a_n و b_n على الشكل المثلثي .

ج - حدد u_n بدلالة n .

12

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

لتكن النقطة A ذات اللحق i .

نعتبر التحويل T المعرف على $\mathcal{P} - \{A\}$ والذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z' = \dfrac{iz + 2}{z - i}$

1) أ- حدد النقط الصامدة ب T.

ب - بين أن : $T \circ T = Id_{\mathcal{P}}$

2) أ- بين أن المستقيم الذي معادلته : $x = 0$ ، محروما من نقطة يتم تحديدها ، صامد إجماليا ب T.

ب - بين أن المستقيم الذي معادلته : $y = 1$ ، محروما من نقطة يتم تحديدها ، صامد إجماليا ب T.

3) أ- عبر عن $|z' - i|$ بدلالة $|z - i|$.

ب- استنتج صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها A وشعاعها R بالتحويل T حيث : $R > 0$.

حدد R بحيث تكون الدائرة $(\mathcal{C})$ صامدة إجماليا بالتحويل T.

ج - حدد صورة الدائرة التي مركزها A والمارة من النقط ذات اللحق : $1 - i$ و $i + 1$.

13 ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين بحيث : $z_1 z_2 = 5(1+i)$

1) أ- أحسب : $|z_1||z_2|$

ب- أحسب $\arg z_1$ بدلالة $\arg z_2$

2) أ- أحسب الجذرين المربعين للعدد $u = 21 + 20i$

ب- أحسب z_1 و z_2 إذا علمت أن :

$$z_1 z_2 = 5(1+i) \quad \text{و} \quad z_2 = z_1 + 1$$

14 نعتبر العدد العقدي : $z = 5\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

1) أحسب z^2 ، وأكتب z^2 على الشكل المثلثي .

2) حدد $|z|$ ، $\arg z$.

3) ليكن $u = re^{i\theta}$ حيث : $r > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$

حدد و أنشئ المجموعات التالية :

$$E_1 = \{ M(u) \mid uz \in \mathbb{R} \}$$

$$E_2 = \{ M(u) \mid uz \in i\mathbb{R} \}$$

$$E_3 = \{ M(u) \mid 5 \leq |uz| \leq 15 \}$$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

15 حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث صور الأعداد العقدية 1 و z و $z' = 1 + z^2$ مستقيمية .

16 1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(E) : 2z^3 + (-7+i)z^2 + (10-4i)z - 8 + 4i = 0$$

أ- حل المعادلة (E) إذا علمت أن أحد حلولها عدد حقيقي a

ب- ليكن z_1 و z_2 الحلين الآخرين للمعادلة (E) بحيث : $\operatorname{Im}(z_2) < 0$

أكتب z_1 على الشكل المثلثي ثم استنتج الشكل الجبري للعدد $(z_1)^{199}$

2) أ- أحسب $(z_1)^3$

ب- استنتج الجذور المكعبة للعدد $-2 + 2i$.

17

ليكن θ عدداً حقيقياً

نضع : $P(z) = z^3 + (1+3ie^{i\theta})z^2 + (1+i(1+3e^{i\theta}))z + (3i-3)e^{i\theta}$ لكل z من $\mathbb{C}$

1) بين أن $z_0 = -3ie^{i\theta}$ حل للمعادلة : $(E) : \; z \in \mathbb{C} \; ; \; P(z) = 0$

2) أ- حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$P(z) = (z+3e^{i\theta})(z^2+az+b)$ لكل z من $\mathbb{C}$.

ب- ليكن z_1 و z_2 الحلين الآخرين للمعادلة (E).

حدد z_1 و z_2 (z_1 هو الحل التخيلي الصرف)

3) أ- أكتب z_0 و z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ب- نضع : $\theta = \frac{\pi}{10}$ حدد الشكل للعدد العقدي α بحيث : $\alpha = z_0^5 + z_1^5 + z_2^5$

18

ليكن u عدداً عقدياً غير منعدم و j العدد العقدي بحيث : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

نضع : $u = [r, \theta]$ و $z_1 = uj$ و $z_2 = ui$

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) نضع : $Z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$

أ- حدد معيار وعمدة العدد العقدي : $\bar{j} - i$ (نأخذ : $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$)

ب- استنتج الشكل المثلثي للعدد Z بدلالة r و θ .

3) أ- حدد قيم θ التي يكون من أجلها Z عدداً حقيقياً موجباً .

ب- حدد قيم θ التي يكون من أجلها Z تخيلياً صرفاً .

4) نعتبر المعادلة : $(E) : z \in \mathbb{C} : z^3 - ujz^2 + u^2z - u^3j = 0$

أ- بين أن العدد $-ui$ حل المعادلة (E).

ب- حل المعادلة (E) .

ج- بين أن صور حلول المعادلة (E) تنتمي إلى دائرة يجب تحديد مركزها وشعاعها

19

ليكن n عدد صحيح طبيعي أكبر قطعاً من 1 .

1) حدد على الشكل الجذور النونية لكل من $u = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ و $v = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^{2n} - z^n + 1 = 0 \quad : \quad (1)$

3) أ- ليكن θ عدداً حقيقياً يخالف $2k\pi$ لكل k من $\mathbb{Z}$.

بين أن : $\dfrac{\cos\theta + i\sin\theta + 1}{\cos\theta + i\sin\theta - 1} = -i\,\text{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

ب - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$: (2)

ج - نعتبر في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ النقطة A ذات اللحق 1 .

بين أن مجموعة صور حلول المعادلة (2) في $\mathcal{P}$ هي تقاطع المستقيمات (AM) مع محور الأراتيب ، حيث M تنتمي إلى مجموعة صور الجذور النونية للعددين u و v في المستوى $\mathcal{P}$.

20 ليكن a عدد حقيقي و z العدد العقدي المعرف بمايلي :

$$z = 8a^2 - (1+a^2)^2 + 4a(1-a^2)i$$

حدد العدد العقدي z بحيث : $z^4 = z$.

21 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^8 + (1+i(\sqrt{3}-2))z^4 + \sqrt{3} - i$

2) أ- أنشر : $(x+1)^7$ و $(x-1)^7$

ب - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $x^7 + 21x^5 + 35x^3 + 7x = 0$

22 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

(E_1) : $(z+1)^3 + i(z-1)^3 = 0$

(E_2) : $(z+1)^n + (z-1)^n = 0$ $(n \in \mathbb{N} ; n \geq 2)$

(E_3) : $\left(1 + i\dfrac{z}{n}\right)^n + \left(1 - i\dfrac{z}{n}\right)^n = 0$

(E_4) : $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

23 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z) = (z^2+3z)^2 + (3z+5)^2$

أ- بين أنه إذا كان z_0 حل للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\bar{z}_0$ هو أيضاً حلاً لها .

ب - عمل $P(z)$ إلى جداء حدود بتين من الدرجة الثانية عواملها أعداد عقدية .

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

4) أكتب $P(z)$ على شكل جداء حدود بتين من الدرجة الثانية عواملها أعداد حقيقية

24

1) أعط الشكل المثلثي لكل حل من حلول المعادلة :

$$z \in \mathbb{C} \quad ; \quad z^4 = 1 + i\sqrt{3}$$

2) اعط الشكل الجبري لكل جذر من الجذرين المربعين للعدد $u = \sqrt{3} + i$

3) نضع : $v = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}} + i\sqrt{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

اعط الشكل الجبري للعدد v^2 واستنتج أن : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4) المستوي العقدي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

نعتبر التحويل S من $\mathcal{P}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3}$

حدد طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من $\mathcal{P}$ بحيث : $\|\overrightarrow{OM'}\| = \sqrt{3}\|\overrightarrow{OM}\|$

25

المستوي العقدي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر المعادلة : $(E_\theta) : z \in \mathbb{C} \; : \; z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$

حيث θ بارامتر حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1) أ- حل المعادلة (E_θ).

ب- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_θ) حيث : $\operatorname{Im}(z_1) = \tan\theta$

أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

2) لتكن M_1 و M_2 على التوالي صورتي z_1 و z_2 في المستوي العقدي .

بين أن المثلث OM_1M_2 متساوي الساقين رأسه O .

3) ليكن n من $\mathbb{N}^*$.

نعتبر المعادلة : $(E) \quad z \in \mathbb{C} \; ; \; z \in \mathbb{C} : z^{2n} - 2z^n + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$

حدد حلول المعادلة (E) على الشكل المثلثي .

26

ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : z^2 + 2\cos\theta(1+\cos\theta)z + (1+\cos\theta)^2 = 0$

حل المعادلة (E) وأكتب حليها على الشكل المثلثي بدلالة θ .

2) حدد على الشكل المثلثي بدلالة θ الجذرين المربعين z_1 و z_2 للعدد العقدي

$$a = 2\cos^2\frac{\theta}{2}(-\cos\theta + i\sin\theta)$$

3) استنتج على الشكل المثلثي بدلالة θ الجذرين المربعين z_3 و z_4 للعدد $\bar{a}$

4) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$

بين أن لكل p من $\mathbb{N}$: $S_{2p+1} = 0$ و $S_{2p} = (-1)^p 2^{p+2} \times \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2p} \cos(p\theta)$

27

نعتبر التطبيق f من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بمايلي :

$f(z) = z^3 - (1-2\cos\alpha)z^2 + (1-2\cos\alpha)z - 1$ حيث : $\alpha \in]0,\frac{\pi}{2}[$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$

2) أ- بين أن : $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ ، واستنتج أنه إذا كان z حلاً للمعادلة $f(z)=0$ فإن : $\bar{z}$ حل لها أيضاً

ب- حدد a إذا علمت أن : $f(z) = (z-1)(z^2+az+1)$

ج- استنتج حلول المعادلة : $f(z)=0$ نرمز إلى الحل الحقيقي بـ z_0 وبـ z_1 إلى الحل الذي جزءه التخيلي هو $\sin\alpha$ وبـ : z_3 إلى الحل الثالث.

3) أكتب على الشكل المثلثي z_1 ، z_2 و $z_1 - z_0$

4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

نعتبر النقط $A(z_0)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$.

أ- أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A.

ب- بين أن B و C متماثلين بالنسبة لـ : (Ox) وأن : $(OA)\perp(BC)$.

28

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_\theta): z^2 - (1+i\sin2\theta)z + \frac{1}{2}i\sin2\theta = 0$

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

1) حل المعادلة (E_θ) واعط الحل المزدوج .

2) لتكن M' و M'' صورتي الحلين z' و z'' و I منتصف $[M'M'']$.

أ- ماهي مجموعة النقط I عندما يتغير θ في $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

ب- برهن على أن مجموعة النقطتين M' و M'' هي دائرة يجب تحديدها .

ج- برهن أنه إذا كان : $M' \neq M''$ فإن المستقيم $(M'M'')$ له اتجاه غير مرتبط بقيمة θ .

د- θ معلوم ، استنتج مماسبق طريقة بسيطة لإنشاء I و M' و M'' .

29

نعتبر في المستوى $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ النقط: $A(1,0)$ و $B(-1,0)$

نربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $zz'=1$

1) أنشئ M' إذا علمت أن: $z=2(1+i)$

2) في الحالة العامة بين أن المستقيم (AB) هو منصف الزاوية $(\widehat{\vec{OM},\vec{OM'}})$

3) بين أن: $OM \times OM' = OA^2$

4) أ- تحقق من أن: $\left(\frac{z+z'}{2}-1\right)\left(\frac{z+z'}{2}+1\right)=\left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$: $\forall z \in \mathbb{C}^*$

ب- استنتج أن: $IA \times IB = IM^2$ حيث: I منتصف $[MM']$

5) بين أن المستقيم (MM') هو منصف الزاوية $(\widehat{\vec{IA},\vec{IB}})$ حيث: $M \neq A$ ، $M \neq B$

30

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم و q عدد حقيقي

بحيث: $q(q+1)(q-1) \neq 0$

نعتبر في المستوى العقدي النقط A_0 و A_1 و .... و A_{n-1}

ألحاقها على التوالي هي: z_0 و z_1 و .... و z_{n-1}

1) بين أن النقطة المتزنة $\{(A_k;q^k) / 0 \leq k \leq n-1\}$ تقبل مرجحا G_n

2) نضع: $z_0=1$ و $z_n=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

أ- أحسب z_n لحق G_n بدلالة q و z_1 و n

ب- أحسب: $Re(z_n)$ و $Im(z_n)$ بدلالة q و z_1 و n

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} Re(z_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} Im(z_n)$

31

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

نعتبر النقطتين: $A(1,0)$ و $B(-1,0)$ والتطبيق T المعرف من $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ و الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث:

$$z'=\frac{z-1}{1-\bar{z}}$$

1) ليكن z من $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ و $M(z)$

بين أنه إذا كان: $|z|=1$ فإن M نقطة صامدة بـ T.

2) بين أن : $|z'|=1$ و $\frac{z'-1}{z-1}$ حقيقياً و $\frac{z'+1}{z-1}$ تخيلياً صرفاً

ثم إعط تأويلاً هندسياً لهذه النتائج باستعمال النقط O و A و B و M و M'

3) ليكن المستقيم : $(D): x+y-2=0$ والدائرة $\mathcal{C}=\mathcal{C}(A,r)$ $(r>0)$

أ- تحقق أن : $z'-i=\frac{(1+i)(Re(z)+Im(z)-1)}{1-\bar{z}}$: $(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\})$

ب- استنتج أنه إذا كان : $M\in(D)\cap(\mathcal{C})$ فإن M' تنتمي إلى دائرة يتم تحديدها.

4) نعتبر النظمة : $(S)\begin{cases} z'=\frac{1}{6}(z+2)^2 \\ |z|=\sqrt{2}\end{cases}$

بين أنه إذا كان z حل لـ (S) فإن : $z^3-4z^2+2z-8=0$ ثم حل النظمة (S)

32

ليكن m عدداً عقدياً غير منعدم . نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

(E) : $z^2-(3m-2i)z+2m^2-4mi=0$

1) حل المعادلة (E).

2) في هذا السؤال نأخذ : $m=1+i$ وليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1|<|z_2|$

أ- أكتب كلا من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

ب- تحقق من أن $(-z_1)$ هو جذر مكعب للعدد z_2 . ثم استنتج على الشكل الجبري ، الجذرين المكعبين الآخرين للعدد z_2 .

3) المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

لتكن A و B و C النقط التي ألحاقها على التوالي : i و $2m$ و $m-2i$

ونفترض أن m ليس تخيلياً صرفاً .

أ- بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- خارج المثلث ABC ، ننشىء النقطة D بحيث يكون المثلث BCD متساوي الساقين وقائم الزاوية في D . ليكن d لحق النقطة D .

بين أن : $d=\frac{3m-im+2-2i}{2}$ أو $d=\frac{3m+im-2-2i}{2}$

ج- حدد m لكي يكون الرباعي $ABDC$ مربعاً.

33

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $|z+i| = |z-i|$ (1)

1) بين أن حلول المعادلة (1) هي أعداد حقيقية .

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+i)^3 = i(z-i)^3$ (2)

أ- استنتج من 1) أن حلول المعادلة (2) ، أعداد حقيقية .

ب- حل المعادلة (2) ثم بين أن حلولها يمكن أن تكتب على شكل $z = \tan\alpha$ ؛ حدد قيم α .

3) اعط طريقة ثانية لحل المعادلة (2) ثم استنتج القيمة العددية للعدد $\tan\frac{\pi}{12}$.

34

نعتبر التطبيق P من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بمايلي :

$$P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i).$$

1) أ- بين أن المعادلة : $P(z)=0$ تقبل حل تخيلي صرف وحيد z_1 يتم تحديده.

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$. نرمز للحلين الآخرين بـ z_2 و z_3 .

2) لتكن M_1 و M_2 و M_3 صور الأعداد z_1 و z_2 و z_3 على التوالي .

أ- بين أن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الأضلاع .

ب- أنشئ النقط M_1 و M_2 و M_3 .

35

نعتبر في $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha) - 1$

حيث : $\alpha \in [0,\pi]$

1) أ- أحسب $P(1)$ ، وحدد الأعداد a و b و c بحيث : $P(z) = (z-1)(az^2+bz+c)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$ (1)

نرمز لحلول هذه المعادلة بـ z_1 و z_2 و z_3 بحيث : $z_1 = 1$ و $\mathrm{Im}(z_2) = \cos\alpha$

2) أ- حدد معيار وعمدة لكل من z_1 و z_2 و z_3 .

ب- حدد قيم العدد α التي من أجلها الأعداد :

$|z_2+1|$ و $|z_1|$ و $|z_3-1|$ في هذا الترتيب تكون حدود متتالية هندسية .

36

ليكن n من $\mathbb{N}$.

نضع : $C=\sum_{k=0}^{n}\cos(2k)$ و $S=\sum_{k=0}^{n}\sin(2k)$

1) أحسب : $C+iS$

2) استنتج أن : $C=\cos(n)\dfrac{\sin(n+1)}{\sin(1)}$ و $S=\sin(n)\dfrac{\sin(n+1)}{\sin(1)}$

3) بين أن : $\sum_{k=1}^{n}|\cos k| \geq \dfrac{n}{4}$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

37

لتكن $\mathcal{U}$ مجموعة الأعداد العقدية التي معيارها 1 .

1) بين أن : $-1\leq \mathcal{R}e(z)\leq 1$ و $-1\leq \mathcal{I}m(z)\leq 1$ $\quad \forall z\in\mathcal{U}$

2) ليكن a و b عددين عقديين من $\mathcal{U}$.

أ- بين أن : $\dfrac{(a+b)^2}{ab}=a\bar{b}+\bar{a}b+2$

ب- استنتج أن : $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ عدد حقيقي موجب .

3) ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين .

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقهما على التوالي هما z_1 و z_2 ، وليكن t لحق

النقطة G مرجح النظمة المتزنة : $\left\{\left(M_1;\dfrac{1}{|z_1|}\right);\left(M_2;\dfrac{1}{|z_2|}\right)\right\}$

نضع : $a=\dfrac{z_1}{|z_1|}$ و $b=\dfrac{z_2}{|z_2|}$

أ- بين أن : $\dfrac{t^2}{z_1z_2}=\dfrac{(a+b)^2}{ab}\times\dfrac{|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}$

ب- نفترض أن : $a+b\neq 0$.

بين أن المستقيم (OG) هو حامل منصف الزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}})$

4) تطبيق : نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقهما على التوالي :

$2+i$ و $-2+11i$

حدد معادلة ديكارتية لحامل منصف الزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

38

نعتبر التطبيق f_a من $\mathbb{C}-\{a\}$ نحو $\mathbb{C}-\{a\}$ المعرف بمايلي:

$$f_a(z)=\frac{az}{z-a} \quad ; \quad a\in\mathbb{C}^*$$

1) بين أن : $f_a(z)\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 Re(a)=|a|^2 Re(z)$

2) نضع : $|z-a|=2$ و $\arg(z-a)\equiv\theta\ [2\pi]$ حيث: $z\in\mathbb{C}-\{a\}$

أحسب : $|f_a(z)-a|$ بدلالة 2 و $|a|$ وأحسب :

$\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ و $\arg a$.

3) نضع : $a=-1+i$ ونعتبر في المستوى العقدي $\mathcal{P}$ المجموعات :

$$(\mathcal{D})=\{M(z)\ /\ \arg(f(z)-a)\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\}$$

$$(\mathcal{C})=\{M(z)\ /\ |f_a(z)-a|=2\}$$

$$(E)=\{M(z)\ /\ f(z)\in i\mathbb{R}\}$$

أ- حدد (E) و $(\mathcal{C})$ و بين أن $(\mathcal{D})$ نصف مستقيم طرفه $A(a)$ ومحروم من A محددًا معادلة ديكارتية له .

ب- ليكن $z_0\in\mathbb{C}-\{a\}$ و $B(z_0)$ بحيث $B\in(\mathcal{D})\cap(\mathcal{C})$

أكتب $f_a(z_0)$ على الشكل الجبري ثم حدد z_0 .

ج- أنشئ $(\mathcal{C})$ و (E) و $(\mathcal{D})$.

4) نعتبر التطبيق s المعرف من $\mathcal{P}$ نحو $\mathcal{P}$ بحيث :

$$s(M(z))=M'(z') \Leftrightarrow z'=(-1+i)z+3i-1$$

بين أن s هو مركب تحاك ودوران يتم تحديده صور $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{D})$ ب s .

39

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $2i\left|\frac{z}{z+3i}\right|=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 \quad (E)$

1) بين أن z يكون حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان:

$$|z+3i|=2|z| \quad \text{و} \quad \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2=i$$

2) لتكن المجموعة : $(\mathcal{C})=\{M(z)\in\mathcal{P}\ /\ |z+3i|=2|z|\}$

بين أن $(\mathcal{C})$ دائرة يتم تحديد مركزها وشعاعها .

3) لتكن المجموعة : $(\Gamma)=\{M(z)\in\mathcal{P}\ /\ \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2=i\}$

بين أن (Γ) هي إتحاد مستقيمين باستثناء نقطة يتم تحديدها .

4) استنتج عدد حلول المعادلة (E) .

40

ليكن θ من $\mathbb{R}$ بحيث : $\theta \not\equiv \pi \ [2\pi]$ و z من $\mathbb{C}$

نضع : $P(z) = z^4\left(1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - 4z^2\cos\theta + 4iz\sin 2\theta + 8\sin^2\theta$

1) بين أن المعادلة : $P(z)=0$; $z \in \mathbb{C}$ لا تقبل حلان مترافقان

2) نضع : $z = iu$ بحيث u من $\mathbb{C}$ أحسب : $Q(u) = P(iu)$

3) عمل في $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)$ علما أنها تقبل حلا على الشكل $a(1+i)$ بحيث a عدد حقيقي.

41

نعتبر التطبيق T المعرف من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$$T(z) = \frac{z+1}{z-i}$$

1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $T(z) = \frac{1}{z+1}$ (1)

ليكن z_1 و z_2 هما حلي المعادلة (1) بحيث : $|z_1| > |z_2|$

أ- حدد z_1 و z_2 .

ب- أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ج- حدد الجذور من الرتبة الرابعة للعدد z_2 ثم استنتج : $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

2) لتكن A و B و C صور $-i$ و $-1+i$ و $\sqrt{3}-3-2i\sqrt{3}$ على التوالي .

أحسب النسبة $\frac{BC}{BA}$ و حدد قياسا للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$.

3) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $T(z)$ تخيلي صرف .

42

نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ بما يلي :

$f(z) = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$ ولتكن $A(i)$ و $A'(-i)$

نعتبر التطبيق F المعرف من $\mathcal{P}-\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ بما يلي :

$$F : M(z) \longmapsto M'(f(z))$$

1) أ- بين أن : $|f(z)| = |z|$, $-\arg z \equiv -2\arg(z-i) + \arg f(z)$ حيث : $z \neq 0$ ، $z \neq i$

ب- بين أن : $|z| = 1 \Rightarrow f(z) = -i$

2) حدد مجموعة النقط الصامدة بـ F .

3) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $f(z)$ تخيلي صرف .

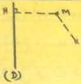
4) بين أن : $f(z)+i = \frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$ و $f(z)- = \frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$

5) استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان وأن $(AM) \perp (MM')$

6) اعط طريقة هندسية لإنشاء صور M بالتطبيق F .

المخروطيات

1) ليكن (D) مستقيم و $F \notin D$ و $e>0$.



المجموعة: $\left\{ M \in \mathcal{P} \,/\, \frac{MF}{MH} = e \right\}$ تسمى المخروطي.

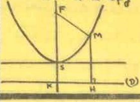
ذو البؤرة F والدليل (D) والتباعد المركزي e

ويرمز لها: $\Gamma = \Gamma(F ; (D) ; e)$

2) الشلجم: إذا كان: $e=1$ فإن المخروطي (Γ) يسمى شلجم.

* (Γ) شلجم إذا وفقط إذا كانت معادلته في معلم متعامد ممنظم تكتب على أحد الشكلين: $y^2 = 2px$ أو $x^2 = 2py$. $(p \neq 0)$

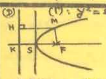
$(\Gamma) : x^2 = 2py$ $(p>0)$



$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

$(D)\ y = -\frac{p}{2}$

$(\Gamma) : y^2 = 2px$ $(p>0)$



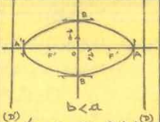
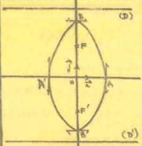
$F\left(\frac{p}{2} ; 0\right)$

$(D) : x = -\frac{p}{2}$

في النقطة $M_0(x_0, y_0)$ من (Γ) معادلة المماس هي: $yy_0 = p(x + x_0)$

3) الإهليلج: إذا كان: $0 < e < 1$ فإن المخروطي (Γ) يسمى إهليلج.

* (Γ) إهليلج إذا وفقط إذا كانت معادلته في معلم متعامد ممنظم تكتب على الشكل: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، $(a,b) \in \mathbb{R}^{*} \times \mathbb{R}^{*}$.

المعادلة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$0 < b < a$	$0 < a < b$	$a = b$
التباعد المركزي البؤرتان الدليلات	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ؛ $e = \frac{c}{a}$ $F(c, 0)$ ؛ $F'(-c, 0)$ $(D) : x = \frac{a^2}{c}$ ؛ $(D') \ x = -\frac{a^2}{c}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$ ؛ $e = \frac{c}{b}$ $F(0, c)$ ؛ $F'(0, -c)$ $(D) : y = \frac{b^2}{c}$ ؛ $(D') : y = -\frac{b^2}{c}$	دائرة مركزها O وشعاعها $R = a$
الرؤوس	$A(a, 0)$ ؛ $A'(-a, 0)$ ؛ $B(0, b)$ ؛ $B'(0, -b)$		
التمثيل المبياني للإهليلج	 القطعة [AA'] تسمى المحور الكبير القطعة [BB'] تسمى المحور الصغير		

معادلة مماس لإهليلج: $(\Gamma) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ في نقطة $M_0(x_0, y_0)$ من (Γ)

هي: $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

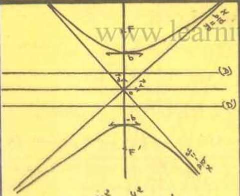
التعريف البؤرتاني لإهليلج : لتكن F و F' نقطتان مختلفتان من المستوى $\mathcal{P}$ و a عدد حقيقي موجب قطعاً بحيث : $2a > FF'$

المجموعة : $\{M\in\mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$ هي الإهليلج ذو البؤرتين F و F' والذي مسافة رأسيه المنتميين إلى محور البؤرين هي $2a$.

4) الهذلول : إذا كان : $e>1$ فإن المخروطي $(\mathcal{H})$ يسمى هذلول .

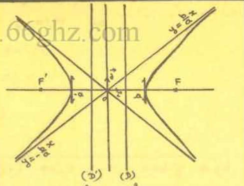
* $(\mathcal{H})$ هذلول إذا وفقط إذا كانت معادلته في معلم متعامد ممنظم تكتب على أحد الشكلين: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ أو $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

المعادلة المختصرة	c	التباعد المركزي	البؤرتان	الدليلان	المقاربان
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$e=\frac{c}{a}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$	$(D): x=\frac{a^2}{c}$ $(D'): x=-\frac{a^2}{c}$	$y=\frac{b}{a}x : (\Delta)$ $y=-\frac{b}{a}x : (\Delta')$
$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$e=\frac{c}{b}$	$F(0,c)$ $F'(0,-c)$	$(D): y=\frac{b^2}{c}$ $(D'): y=-\frac{b^2}{c}$	$(\Delta): y=\frac{b}{a}x$ $(\Delta'): y=-\frac{b}{a}x$



$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

O مركز الهذلول $(\mathcal{H})$



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

O مركز الهذلول $(\mathcal{H})$

التعريف البؤرتاني لهذلول : لتكن F و F' نقطتان مختلفتان في المستوى $\mathcal{P}$.

و a عدد حقيقي موجب قطعاً بحيث : $2a < FF'$.

المجموعة : $\{M\in\mathcal{P} \mid |MF-MF'| = 2a\}$ هي الهذلول ذو البؤرتين F و F' والذي مسافة رأسيه A و A' هي $2a$.

معادلة المماس لهذلول $(\mathcal{H})$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ في نقطة $M_0(x_0,y_0)$ من $(\mathcal{H})$

هي : $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

المخروطيات

1

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من $\mathcal{P}$ التي تحقق :

$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$$

1) بين أن (Γ) هو اتحاد مخروطيين (Γ_1) و (Γ_2).

2) حدد العناصر المميزة للمخروطيين (Γ_1) و (Γ_2).

3) أنشئ (Γ).

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ لدينا :

$$M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow (x^2-1)^2 - \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right)\left(x^2-\frac{y^2}{4}-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{y^2}{4}-1 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2-\frac{y^2}{4}-1=0$$

$$\Leftrightarrow M(x,y)\in(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$$

بحيث : $(\Gamma_1) : x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ هذلول.

$(\Gamma_2) : x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ إهليج.

وبالتالي : $(\Gamma) = (\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)$

2) العناصر المميزة لـ إهليج (Γ_1) :

لدينا : $(\Gamma_1) : \dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ حيث : $a=1$ ، $b=2$ و $b>a$

لدينا : $c^2=b^2-a^2=3$ إذن : $c=\sqrt{3}$

ومنه : * التباعد المركزي لـ (Γ_1) هو : $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

* البؤرتان لـ (Γ_1) هما : $F_1(0,c)$ و $F_1'(0,-c)$

أي : $F_1(0,\sqrt{3})$ و $F_1'(0,-\sqrt{3})$

* الدليلان لـ (Γ_1) هما : $(D_1): x=\dfrac{b^2}{c}$ و $(D_2'): x=-\dfrac{b^2}{c}$

أي : $(D_1) : x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ و $(D_2'): x=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

* الرؤوس لـ (Γ_1) هي : $A(+1,0)$ ، $A'(-1,0)$ و $B(0;+2)$ و $B'(0,-2)$

العناصر المميزة للهذلول (Γ_2) :

لدينا : $(\Gamma_2) : \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ حيث : $a = 1$ و $b = 2$

لدينا : $c^2 = a^2 + b^2 = 5$ إذن : $c = \sqrt{5}$

ومنه : * التباعد المركزي لـ (Γ_2) هو : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$

* البؤرتان لـ (Γ_2) هما : $F_2(c, 0)$ و $F'_2(-c, 0)$

أي : $F_2(\sqrt{5}, 0)$ و $F'_2(-\sqrt{5}, 0)$

* الدليلان لـ (Γ_2) هما : $(D_2) : x = \frac{a^2}{c}$ و $(D'_2) : x = -\frac{a^2}{c}$

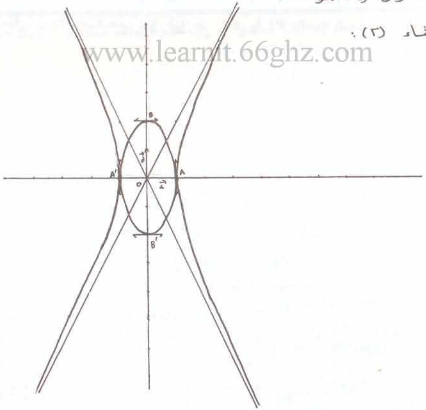
أي : $(D_2) : x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $(D'_2) : x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

* المقاربات لـ (Γ_2) هما : $(\Delta_2) : y = \frac{b}{a}x$ و $(\Delta'_2) : y = -\frac{b}{a}x$

أي : $(\Delta_2) : y = 2x$ و $(\Delta'_2) : y = -2x$

* مركز (Γ_2) هو $O(0, 0)$.

3) إنشاء (Γ) :



2 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق : $y^2-2y-2x-1=0$

1) حدد طبيعة والعناصر لـ (Γ) .

2) اعط معادلة المماس (Γ) عند النقطة $A(1,3)$

3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $x+2y+1=0$ ، مماس لـ (Γ)

4) أنشئ (Γ).

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

لدينا :
$$M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow y^2-2y-2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow (y-1)^2=2(x+1)$$

نضع : $\begin{cases} X=x+1 \\ Y=y-1 \end{cases}$ و $\Omega(-1,1)$

معادلة (Γ) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي : $Y^2=2X$ $(p=1)$

ومنه : (Γ) شلجم بؤرته : $F(\frac{1}{2},0)$ بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$F(-\frac{1}{2},1)$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

ودليله : $(D): X=-\frac{1}{2}$ بالنسبة للمعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$(D): x=-\frac{3}{2}$ بالنسبة للمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

ورأسه $\Omega(-1,1)$.

2) ليكن (Δ_1) المماس لـ (Γ) عند النقطة $A(1,3)$.

لدينا : $A\in(\Gamma)$ ، إذن معادلة (Δ_1) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

هي : $YY_0=p(X+X_0)$ أي : $2(y-1)=(x+1)+2$

ومنه : $(\Delta_1):\ y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

3) لنبين أن : $(\Delta): x+2y+1=0$ مماس لـ (Γ)

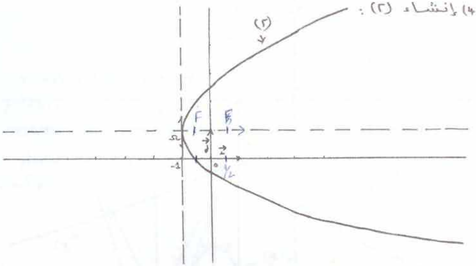
لتكن : $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

لدينا :
$$M(x,y)\in(\Gamma)\cap(\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+1=0 \\ y^2-2y-2x-1=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-1 \\ y^2+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

ومنه : $(\Gamma) \cap (\Delta) = \{B(1,-1)\}$

وبالتالي: (Δ) مماس لـ (Γ) .

4) إنشاء (Γ) :



3 المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى $(\mathcal{P})$ بحيث :

$$y^2-2y-2|x|-3=0$$

1) بين أن (Γ) هو اتحاد جزئين من شلجمين .

2) أنشئ (Γ) .

الجواب : 1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$

لدينا:
$$M(x,y)\in(\Gamma) \Leftrightarrow y^2-2y-2|x|-3=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ (y-1)^2=2(x+2)\end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x\leq 0 \\ (y-1)^2=-2(x-2)\end{cases}$$

نعتبر الشلجمين (P_1) و (P_2) بحيث :

(P_1) : $(y-1)^2=2(x+2)$

نضع: $\begin{cases} X=x+2 \\ Y=y-1\end{cases}$ و $\Omega_1(-2,1)$

معادلة الشلجم (P_1) في المعلم $(\Omega_1,\vec{i},\vec{j})$ هي : $Y^2=2X$

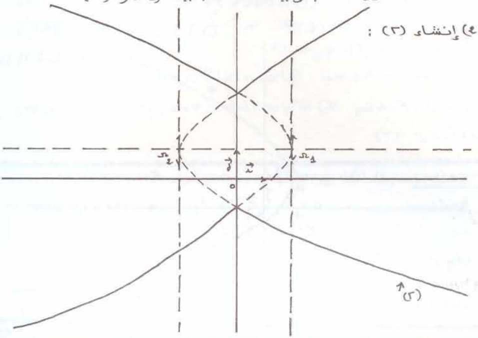
(P_2) : $(y-1)^2=-2(x-2)$

$\begin{cases} X=x-2 \\ Y=y-1\end{cases}$ و $\Omega_2(2,1)$

معادلة (P_2) في المعلم $(\Omega_2,\vec{i},\vec{j})$ هي : $Y^2=-2X$

منه : (Γ) هو إتحاد جزئين من الشلجمين (P_1) و (P_2).

٤) إنشاء (Γ) :



4 المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

لتكن $(\mathcal{E}_m)$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى (P) بحيث :

$$4mx^2+y^2-8x=0 \quad \text{حيث :} \quad m\in\mathbb{R}$$

١) حدد تبعا لقيم m طبيعة $(\mathcal{E}_m)$.

٢) أنشئ المنحنيين : $(\mathcal{E}_1)$ ، $(\mathcal{E}_{-1})$

الجواب : ١) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى (P).

لدينا : $M(x,y)\in(\mathcal{E}_m) \Leftrightarrow 4mx^2+y^2-8x=0$

* إذا كان : $m=0$ فإن : $y^2=8x$

ومنه : $(\mathcal{E}_0)$ شلجم.

* إذا كان : $m\neq 0$ فإن :

$$M(x,y)\in(\mathcal{E}_m) \Leftrightarrow x^2-\frac{2}{m}x+\frac{y^2}{4m}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{m}\right)^2+\frac{y^2}{4m}=\frac{1}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{4}{m}}=1$$

* إذا كان: $m>0$ فإن: (E_m) إهليج أو دائرة.

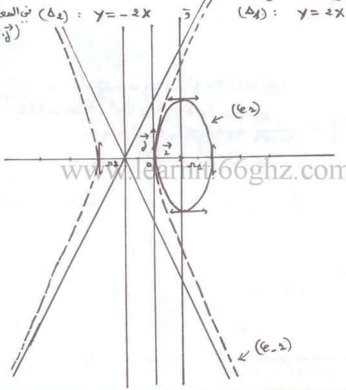
* إذا كان: $m<0$ فإن: (E_m) هذلول.

2) إنشاء المنحنيين: (E_1) و (E_{-1}):

لدينا:

$(E_1): \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ إهليج مركزه $\Omega_1(1,0)$ ورؤوسه $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ و $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$ في المعلم $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j})$.

لدينا: $\frac{(x+1)^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 : (E_{-1})$ هذلول مركزه $\Omega_2(-1,0)$ ومقارباته: $(\Delta_1): y = 2x$ و $(\Delta_2): y = -2x$ في المعلم $(\Omega_2, \vec{i}, \vec{j})$



5 المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته: $x = \frac{16}{3}$.

1) أعط معادلة ديكارتية للإهليج (Γ) الذي دليله (D) وبؤرته النقطة O وتباعده المركزي $e = \frac{3}{5}$.

2) أنشئ (Γ)

3) لتكن M نقطة من (Γ) ؛ نضع : $[2\pi]$ $\theta \equiv (\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM})$

أ - بين أن : $OM = \dfrac{16}{3+3\cos\theta}$

ب - نفترض أن : $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. المستقيم (OM) يقطع (D) في I و (Γ) في M'

أحسب : $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OM'}$ وبين أن : $\dfrac{1}{OM} - \dfrac{1}{OM'} = \dfrac{2}{OI}$

الجواب : 1) لدينا الإهليلج : $(\Gamma) = \Gamma(O;(D);e)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$ لدينا :

$$M(x,y) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \frac{MO}{d(M,(D))} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{5} \times \frac{|x - \frac{16}{3}|}{\sqrt{1^2+0^2}}$$

$$\Leftrightarrow 25(x^2+y^2) = 9(x-\frac{16}{3})^2$$

$$\Leftrightarrow 25x^2+25y^2 = 9x^2 - 96x + 256$$

$$\Leftrightarrow 16(x+3)^2 + 25y^2 = 400$$

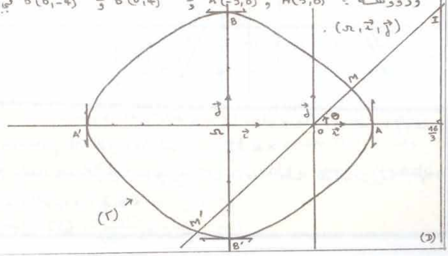
$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

ومنه معادلة الإهليلج (Γ) هي : $\dfrac{(x+3)^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

2) إنشاء الإهليلج (Γ).

لدينا : $(\Gamma): \dfrac{(x+3)^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ مركزه $\Omega(-3,0)$

ورؤوسه : $A(5,0)$ ، $A'(-5,0)$ و $B(0,4)$ و $B'(0,-4)$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.



3) لدينا : $(\vec{i},\overrightarrow{OM})\equiv\theta\ [2\pi]$ إذن : $\begin{cases}x=OM\cos\theta\\ y=OM\sin\theta\end{cases}$

ولدينا : $M\in(\Gamma)\iff OM=\frac{3}{5}d(M,D)$

$\iff OM=\frac{3}{5}\left|OM\cos\theta-\frac{16}{3}\right|$ ((D) : $x=\frac{16}{3}$: لأن)

$\iff OM=\frac{3}{5}OM\cos\theta-\frac{16}{3}$ أو $OM=-\frac{3}{5}OM\cos\theta+\frac{16}{3}$

$\iff OM=\frac{-16}{5-3\cos\theta}<0$ أو $OM=\frac{16}{5+3\cos\theta}$

غير ممكن

$M\in(\Gamma)\iff OM=\frac{16}{5+3\cos\theta}$

ب - لدينا : $(\vec{i},\overrightarrow{OM'})\equiv\theta+\pi\ [2\pi]$

بما أن : $M'\in(\Gamma)$ فإن : $OM'=\frac{16}{5+3\cos(\pi+\theta)}=\frac{16}{5-3\cos\theta}$

ومنه : $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}=\frac{1}{16}(5+3\cos\theta)+\frac{1}{16}(5-3\cos\theta)$

إذن : $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}=\frac{5}{8}$

ولدينا : $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{1}{16}(5+3\cos\theta)-\frac{1}{16}(5-3\cos\theta)$

إذن : $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{3}{8}\cos\theta$

ولدينا : $\cos\theta=\frac{\frac{16}{3}}{OI}$ أي : $\cos\theta=\frac{16}{3}\times\frac{1}{OI}$

ومنه : $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{3}{8}\times\frac{16}{3}\times\frac{1}{OI}$

وبالتالي : $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$

6

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من (P) بحيث :

$$xy-x-y=0$$

نعتبر النقطة $\Omega(1,1)$ والمتجهتين : $\vec{I}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})$ و $\vec{J}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j})$

1) حدد معادلة ديكارتية المنحنى (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{I};\vec{J})$

2) حدد طبيعة والعناصر المميزة للمنحنى (Γ) في المعلم $(\Omega;\vec{I};\vec{J})$.

7 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر المنحنى $(\mathcal{C})$ الذي معادلته : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}$

ليكن $(\mathcal{P})$ المنحنى الذي معادلته : $(x-y)^2-4(x+y)+4=0$

1) بين أن $(\mathcal{C})$ جزء من $(\mathcal{P})$.

2) نعتبر النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ والمتجهتين $\vec{I}$ و $\vec{J}$ المعرفتين بمايلي :

$$\begin{cases}\vec{I}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\\ \vec{J}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\end{cases}$$

أ- أكتب معادلة $(\mathcal{P})$ في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$.

ب- استنتج طبيعة $(\mathcal{P})$ وحدد إحداثيات رأسه ومعادلة دليله في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$.

ج- بين أن (Ox) و (Oy) محوري المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ مماسان المنحنى $(\mathcal{P})$.

3) ارسم المنحنى $(\mathcal{C})$.

الجواب :

1) لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ لدينا :

$$\begin{aligned}M(x,y)\in(\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow x+y-2=-2\sqrt{xy}\\ &\Rightarrow x^2+y^2+4+2xy-4x-4y=4xy\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy-4(x+y)+4=0\\ &\Leftrightarrow (x-y)^2-4(x+y)+4=0\\ &\Leftrightarrow M(x,y)\in(\mathcal{P})\end{aligned}$$

ومنه : $(\mathcal{C})\subset(\mathcal{P})$

2) أ- ليكن (x,y) زوج إحداثيتي نقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

و (X,Y) زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

لدينا: $\overrightarrow{\Omega M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O\Omega} \Leftrightarrow X\vec{I}+Y\vec{J}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{j}$

$$\Leftrightarrow X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)+Y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)=x-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)=y-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)+\frac{1}{2}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$M(x,y)\in(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (x-y)^2-4(x+y)+4=0$

$\Leftrightarrow 2y^2-4\sqrt{2}x-4+4=0$

$\Leftrightarrow y^2=2\sqrt{2}x$

ومنه معادلة $(\mathcal{P})$ في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ هي : $y^2=2\sqrt{2}x$

ب- لدينا $(\mathcal{P})$ شلجم رأسه $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ وبؤرته : $F(\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ ودليله المستقيم (D) الذي معادلته : $X=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$.

ج - لنبين أن (ox) و (oy) مماسان للمنحنى $(\mathcal{P})$.

لدينا :
$$M(x,y)\in(\mathcal{P})\cap(ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2\end{cases}$$

ومنه : $(\mathcal{P})\cap(ox)=\{A(2,0)\}$ إذن : (ox) مماس لـ $(\mathcal{P})$.

$$M(x,y)\in(\mathcal{P})\cap(oy) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2\end{cases}$$

ومنه : $(\mathcal{P})\cap(ox)=\{B(0,2)\}$ إذن : (ox) مماس لـ $(\mathcal{P})$ ،

ونلاحظ أن : A و B تنتميان إلى كل من $(\mathcal{C})\cap(ox)$ و $(\mathcal{C})\cap(ox)$

لدينا $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$ زوج إحداثيتي النقطة A و $(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2})$ زوج إحداثيتي النقطة B في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$.

لدينا :
$$\begin{cases} X-Y=\sqrt{2}(x-\frac{1}{2}) \\ X+Y=\sqrt{2}(y-\frac{1}{2})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) \\ Y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\end{cases}$$

مماس $(\mathcal{P})$ في النقطة A هو المستقيم الذي معادلته : $-Y\sqrt{2}=\sqrt{2}(X+\frac{\sqrt{2}}{2})$

أي : $Y=-X-\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$.

إذن : $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه : $y=0$.

إذن محور الأفاصيل مماس لـ $(\mathcal{P})$ في النقطة A .

مماس $(\mathcal{P})$ في النقطة B هو المستقيم الذي معادلته : $Y\sqrt{2}=\sqrt{2}(X+\frac{\sqrt{2}}{2})$

أي : $Y=X+\frac{\sqrt{2}}{2}$ في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$.

إذن : $\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه : $x=0$.

إذن : محور الأراتيب لـ $(\mathcal{P})$ في النقطة B .

3) إنشاء المنحنى $(\mathcal{C})$:

$M(x,y)\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2}-\sqrt{y}$

الجواب : 1) ليكن (x,y) زوج إحداثيتي نقطة M في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

وليكن (X,Y) زوج إحداثيتي النقطة M في المعلم $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$

لدينا :
$$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O\Omega}$$
$$\Leftrightarrow \quad X\vec{I} + Y\vec{J} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$
$$\Leftrightarrow \quad X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}+\vec{j})\right) + Y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i}-\vec{j})\right) = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)\vec{j} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) = x-1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)+1 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)+1 \end{cases}$$

لدينا :
$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow xy - x - y = 0$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = 1$$

ومنه معادلة (Γ) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي : $\dfrac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

2) بما أن معادلة (Γ) في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ هي :
$$\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1 \qquad b = a = \sqrt{2}$$

فإن (Γ) هذلول مركزه $\Omega(1,1)$

في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ لدينا : $c^2 = a^2 + b^2$ أي : $c = 2$

التباعد المركزي : $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$

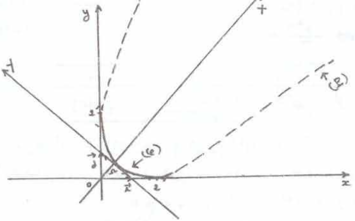
البؤرتان : $F(2,0)$ و $F'(-2,0)$

الدليلان : $(D) : X = 1$ و $(D')\ X = -1$

المقاربات : $(\Delta) : Y = X$ و $(\Delta')\ Y = -X$

$M(x,y) \in (\mathscr{E}) \Leftrightarrow \sqrt{y} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

ومنه : $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 2$



8

المستوى $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر (Γ_m) مجموعة النقط $M(x,y)$ من $\mathscr{P}$ بحيث :

$$(\Gamma_m) : (m-2)x^2 + my^2 - m(m-2) = 0$$

1) ناقش قيم m طبيعة المجموعة (Γ_m).

2) نفترض أن : $m(m-2)$ ينتمي إلى $\mathbb{R}^*$ ونعتبر النقطة $A(1,1)$.

أ- أثبت أنه من النقطة A يمر منحنيان $(\Gamma_{m'})$ و $(\Gamma_{m''})$ بحيث : $0 < m' < 2$ و $m'' > 2$.

ب- بين أن المماسين للمنحنيين $(\Gamma_{m'})$ و $(\Gamma_{m''})$ عند النقطة A متعامدان.

د) أنشئ $(\Gamma_{m'})$ و $(\Gamma_{m''})$ في نفس المعلم.

(نأخذ : $\sqrt{2+\sqrt{2}} \simeq 1{,}8$ و $\sqrt{\sqrt{2}} \simeq 1{,}2$ و $\sqrt{2-\sqrt{2}} \simeq 0{,}8$)

الجواب : 1) طبيعة (Γ_m).

لدينا : $M(x,y) \in \Gamma_m \Leftrightarrow (m-2)x^2 + my^2 = m(m-2)$

* إذا كان : $m(m-2)=0$ أي : $m=0$ أو $m=2$

+ إذا كان : $m=0$ فإن : $-2x^2=0$ أي : $x=0$

ومنه : (Γ_0) هو المستقيم الذي معادلته : $x=0$.

+ إذا كان : $m=2$ فإن : $2y^2=0$ أي : $y=0$

m	$-\infty$		0		2		$+\infty$
m		$-$	0	$+$		$+$	
$m-2$		$-$		$-$	0	$+$	

ومنه : (Γ_2) هو المستقيم الذي معادلته : $y=0$.

* إذا كان : $m(m-2)=0$ أي :

فإن : $$M(x,y)\in(\Gamma_m) \Leftrightarrow \frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-2}=1$$

m	$-\infty$	0		2	$+\infty$
طبيعة (Γ_m)	$\emptyset$	مستقيم	هذلول	مستقيم	إهليج

2) نفترض أن : $m(m-2)\neq 0$ ونعتبر النقطة $A(1,1)$.

أ- لدينا :
$$A(1,1)\in(\Gamma_m) \Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{R}:\ m-2+m-m^2+2m=0$$
$$\Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{R}:\ m^2-4m+2=0$$
$$\Leftrightarrow m=2-\sqrt{2} \quad \text{أو} \quad m=2+\sqrt{2}$$

ومنه : $m'=2-\sqrt{2}$ و $m''=2+\sqrt{2}$ بحيث : $0<m'<2$ و $m''>2$

إذن المنحنيان $(\Gamma_{m'})$ و $(\Gamma_{m''})$ يمران من النقطة A .

ب- معادلة المماس $(\Delta_{m'})$ للمنحنى $(\Gamma_{m'})$ عند النقطة A هي :

$$\frac{x\times 1}{m'}+\frac{y\times 1}{m'-2}=1 \quad \text{أي :} \quad \frac{x}{m'}+\frac{y}{m'-2}=1$$

بما أن : $m'=2-\sqrt{2}$ فإن :
$$(\Delta_{m'}) :\ \frac{x}{2-\sqrt{2}}+\frac{y}{-\sqrt{2}}=1$$

والمقاربان لـ $(\Gamma_{m'})$:
$$(D_1) :\ y=\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}x \quad \text{و} \quad (D_2) :\ y=-\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}x$$

معادلة المماس لـ $(\Delta_{m''})$ للمنحنى $(\Gamma_{m''})$ عند النقطة A هي :

$$\frac{x\times 1}{m''}+\frac{y\times 1}{m''-2}=1 \quad \text{أي :} \quad (\Delta_{m''}) :\ \frac{x}{m''}+\frac{y}{m''-2}=1$$

بما أن : $m'=2+\sqrt{2}$ فإن :
$$(\Delta_{m''}) :\ \frac{x}{2+\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=1$$

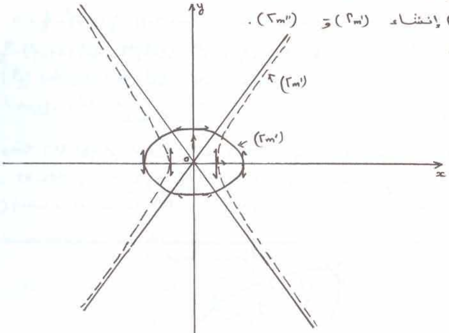
والمقاربان لـ $(\Gamma_{m''})$:
$$(D'_1) :\ y=\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}x \quad \text{و} \quad (D'_2) :\ y=-\frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}x$$

لدينا :
$$\vec{u}_{\Delta'_m}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2-\sqrt{2}}\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{u}_{\Delta_{m''}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2+\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

إذن :
$$\vec{u}_{\Delta'_m}\cdot\vec{u}_{\Delta_{m''}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}\times\frac{1}{2-\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4-2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

ومنه : $(\Delta_{m'}) \perp (\Delta_{m''})$.

3) إنشاء $(\Gamma_{m'})$ و $(\Gamma_{m''})$.



9 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى $\mathcal{P}$ بحيث :

$$x^2 + \frac{6}{5}xy + y^2 - \frac{8}{5} = 0$$

نعتبر المتجهتين : $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$ و $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$

1) حدد معادلة المنحنى (Γ) في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، واستنتج طبيعة (Γ)

2) أنشئ المنحنى (Γ) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

الجواب : 1) ليكن (x, y) زوج إحداثيي نقطة M في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

و (X, Y) زوج إحداثيي النقطة M في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

لدينا : $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}X(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{\sqrt{2}}{2}Y(\vec{i} - \vec{j}) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \end{cases}$$

لدينا : $M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + \frac{6}{5}xy + y^2 - \frac{8}{5} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(X+Y)^2 + \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}(X+Y)(X-Y) + \frac{1}{2}(X-Y)^2 - \frac{8}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(X^2+2XY+Y^2) + 6(X^2-Y^2) + 5(X^2-2XY+Y^2) - \frac{8}{5} = 0$$

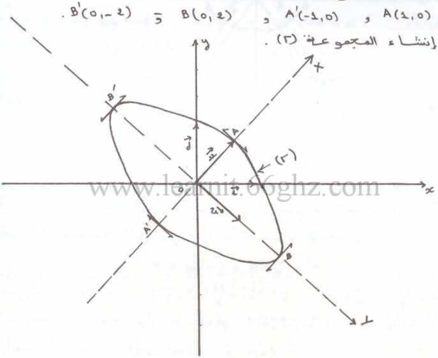
$$\Leftrightarrow 16X^2 + 4Y^2 - 16 = 0$$

$$M(X,Y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{X^2}{(1)^2} + \frac{Y^2}{(2)^2} - 1 = 0$$

ومنه (Γ) إهليلج مركزه $\Omega(0,0)$ ورؤوسه في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$

هي: $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$ و $B(0,2)$ و $B'(0,-2)$.

٢) إنشاء المجموعة (Γ).



www.learnit.66ghz.com

10 المستوى $(\mathcal{P})$ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

لتكن $(\mathcal{E})$ مجموعة النقط $M(x,y)$ من $(\mathcal{P})$ بحيث :

$$4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$$

1) أ- بين أن $(\mathcal{E})$ هي إتحاد جزء مخروطي $(\mathcal{E}_1)$ وجزء مخروطي $(\mathcal{E}_2)$

ب- حدد كل من $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$: طبيعتها ، مركزها ، رؤوسها و المقاربات إذا وجدت .

2) أ- حدد نقط تقاطع كل من $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$ مع محور الأراتيب .

ب- حدد المماسات لكل من $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$ في هذه النقط .

3) أنشئ المنحنى $(\mathcal{E})$.

الجواب : 1) أ- لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $(\mathcal{P})$

لدينا : $M(x,y) \in (\mathcal{E}) \Leftrightarrow 4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \text{ و } x \geq 0 \\ \text{أو} \\ -4x^2 + y^2 + 16x - 20 = 0 \text{ و } x \leq 0 \end{cases}$$

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{E}_1) : 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

$$(\mathcal{E}_1) : \frac{(x-2)^2}{(3)^2} + \frac{y^2}{(6)^2} = 1$$

ومنه $(\mathcal{E}_1)$ إهليلج .

نعتبر المجموعة : $(\mathcal{E}_2) : -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0$

$$(\mathcal{E}_2) : -\frac{(x+2)^2}{(1)^2} + \frac{y^2}{(2)^2} = 1$$

ومنه $(\mathcal{E}_2)$ هذلول .

وبالتالي : $(\mathcal{E})$ هي إتحاد جزء من الإهليلج $(\mathcal{E}_1)$ وجزء من الهذلول $(\mathcal{E}_2)$

ب- لدينا : $(\mathcal{E}_1) : \frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ إهليلج مركزه $\omega_1(2,0)$

ورؤوسه : $A_1(2,6)$ و $A'_1(2,-6)$ و $B_1(-1,0)$ و $B'_1(5,0)$

لدينا : $(\mathcal{E}_2) : -\frac{(x+2)^2}{(1)^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ هذلول مركزه $\omega_2(-2,0)$

ورؤوسه : $B_2(-2,2)$ و $B'_2(-2,-2)$

ومقاربات‍ه : $(D_2): y=-2(x+2)$ و $(D'_2)\ y=2(x+2)$

2) أ- تقاطع $(\mathcal{E}_1)$ مع (yy'):

لدينا :

$$M(x,y)\in(\mathcal{E}_1)\cap(yy')\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=-2\sqrt5 \text{ أو } y=2\sqrt5\end{cases}$$

إذن : $(\mathcal{E}_1)\cap(yy')=\{I_1(0,-2\sqrt5)\,;\,I'_1(0,2\sqrt5)\}$

تقاطع $(\mathcal{E}_2)$ مع (yy')

لدينا :

$$M(x,y)\in(\mathcal{E}_2)\cap(yy')\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ -\dfrac{(x+2)^2}{(1)^2}+\dfrac{y^2}{(2)^2}=1\end{cases}$$

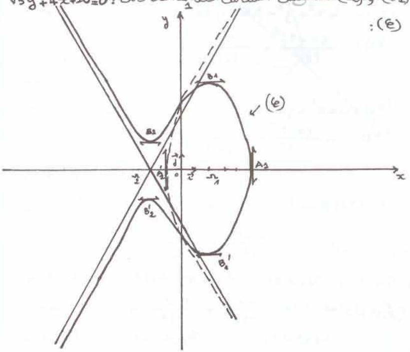
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y^2=20\end{cases}$$

ومنه : $(\mathcal{E}_2)\cap(yy')=\{I_1(0,-2\sqrt5)\,;\,I'_1(0,2\sqrt5)\}$

ب- المنحنيين $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$ لهما نفس المماس عند I'_1 معادلته : $\sqrt5 y-4x-10=0$

المنحنيين $(\mathcal{E}_1)$ و $(\mathcal{E}_2)$ لهما نفس المماس عند I_1 معادلته : $\sqrt5 y+4x+10=0$

3) إنشاء $(\mathcal{E})$:



11

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3+z^2+2z-4=0$ (1)

علماً أن أحد حلولها عدد صحيح طبيعي.

2) في المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط M_1 و M_2 و M_3 و Ω صور الأعداد العقدية :

1 و $-1+i\sqrt{3}$ و $-1-i\sqrt{3}$ و -1 على التوالي.

لتكن (E) الإهليج الذي مركزه Ω والذي يمر من النقطتين M_1 و M_2

ومحوره البؤري هو محور الفواصل.

أ - حدد البؤرتين و الدليلين و التباعد المركزي للإهليج (E).

ب - حدد معادلة ديكارتية للإهليج (E) في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

ج - حدد إحداثيات نقط تقاطع الإهليج (E) ومحور الأراتيب.

د - أنشئ (E).

الجواب : 1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3+z^2+2z-4=0$ (1)

نلاحظ أن : 1 حل للمعادلة (1) إذن : $P(z)=z^3+z^2+2z-4$ تقبل

القسمة على $z-1$ وبعد انجاز القسمة الإقليدية لـ $P(z)$ على $z-1$

نحصل على : $P(z)=(z-1)(z^2+2z+4)$

إذن : $P(z)=0 \Leftrightarrow z-1=0$ أو $z^2+2z+4=0$ (2)

مميز المعادلة (2) هو : $\Delta=-12=(2\sqrt{3}i)^2$

إذن : $P(z)=0 \Leftrightarrow z=1$ أو $z=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}$ أو $z=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow z=1$ أو $z=-1-i\sqrt{3}$ أو $z=-1+i\sqrt{3}$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $S=\{1;-1-i\sqrt{3};-1+i\sqrt{3}\}$

2) أ - لدينا محور البؤرتين للإهليج (E) هو محور الأفاصيل أي : (ΩM_1)

ولدينا : $(\Omega M_1)\perp(\Omega M_2)$ و M_3 مماثلة M_2 بالنسبة لـ Ω.

ومنه $[M_2M_3]$ هو المحور الصغير للإهليج (E)

لدينا : $\Omega M_1=2$ و $\Omega M_2=\sqrt{3}$

لتكن F أحد البؤرتين للاهليلج (E) إذن: $\Omega F^2 = c^2 = a^2 - b^2$

ومنه: $\Omega F^2 = \Omega M_1^2 + \Omega M_2^2$ حيث: $a = \Omega M_1$ ، $a = 2$ و $b = \Omega M_2$ ، $b = \sqrt{3}$

$a > b$

إذن: $\Omega F = 1$

وبما أن $\Omega(-1,0)$ فإن البؤرتين للاهليلج (E) هما: $F(0,0)$ و $F'(-2,0)$

ليكن K المسقط العمودي لـ F على أحد الدليلين للاهليلج (E) إذن:

$\Omega K = \frac{a^2}{c} = 4$ (لأن: $a=2$ و $c=1$)

ومنه الاهليلج (E) يقبل دليلين معادلتهما: $(D): x=3$ و $(D'): x=-5$

التباعد المركزي للاهليلج (E) هو: $e = \frac{\Omega F}{\Omega M_1} = \frac{1}{2}$

ب - معادلة الإهليلج (E) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

لأن: $\Omega(-1,0)$ مركز (E) و $a=2$ و $b=\sqrt{3}$.

ج - نقط تقاطع الإهليلج (E) ومحور الأراتيب:

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى لدينا:

$$M(x;y) \in (E) \cap (yy') \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

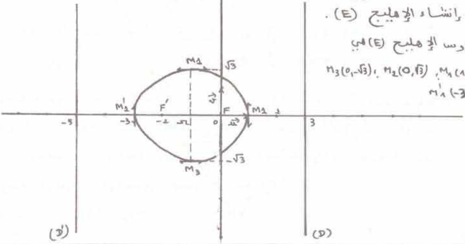
ومنه: $(E) \cap (yy') = \{E_1(0,-\frac{3}{2})\,;\,E_2(0,-\frac{3}{2})\}$

د - إنشاء الإهليلج (E).

رؤوس الإهليلج (E) هي:

$M_3(0,-\sqrt{3})$ ، $M_2(0,\sqrt{3})$ ، $M_1(1,0)$

$M'_1(-3,0)$



12

في المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطتين : $F(1,0)$ و $F'(-1,0)$.

لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى $\mathcal{P}$ بحيث : $MF+MF'=4$

1) نتحقق من أن النقط $A(-2,0)$ و $B(2,0)$ و $C(-1,\frac{3}{2})$ و $D(1,\frac{3}{2})$ و $E(1,-\frac{3}{2})$ تنتمي إلى (Γ) .

2) أ- حدد طبيعة (Γ)

ب- حدد معادلة ديكارتية لـ (Γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) أنشئ (Γ) والنقط A و B و C و D و E .

4) لتكن $M_0(x_0,y_0)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ بحيث : $M_0\notin(BC)$ و M_0 لا تنتمي إلى المماس لـ (Γ) عند النقطة B .

أ- حدد إحداثيات النقطة P تقاطع المستقيمين (DE) و (BM_0)

ب- حدد إحداثيات النقطة Q تقاطع المستقيمين (AE) و (CM_0)

ج- استنتج أن :

P و Q لهما نفس الأرتوب $\Leftrightarrow$ $M_0\in(\Gamma)$

الجواب : 1) لدينا : $MF+MF'=4 \Leftrightarrow M\in(\Gamma)$

بحيث : $F(1,0)$ و $F(-1,0)$

إذن : محور الأفاصيل هو محور تماثل المجموعة (Γ) و O أصل هو كذلك مركز تماثل المجموعة (Γ).

لدينا : $AF=3$ و $AF'=1$ إذن : $MF+MF'=4$

ومنه : $A\in(\Gamma)$

وبما أن : B هي مماثلة A بالنسبة لـ O فإن : $B\in(\Gamma)$

لدينا : $CF=\frac{5}{2}$ و $CF'=\frac{3}{2}$ إذن : $CF+CF'=4$

ومنه : $C\in(\Gamma)$

وبما أن : D هي مماثلة C بالنسبة لمحور الأفاصيل فإن : $D\in(\Gamma)$

وبما أن : E هي مماثلة D بالنسبة لأصل المعلم O فإن : $E\in(\Gamma)$

وبالتالي النقط A و B و C و D و E تنتمي إلى (Γ).

2) أ- طبيعة (Γ).

لدينا: $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF + MF' = 4$

بما أن: $FF' = 2 < 4$ فإن (Γ) إهليلج بؤرتيه F و F'.

بما أن O مركز الإهليلج فإن معادلة الإهليلج (Γ) تكتب على شكل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ حيث: $a > 0$ و $b > 0$.

هذا الإهليلج (Γ) يقطع محور الأفاصيل في النقطتين زوج لاحداثيتهما هما: $(a, 0)$ و $(-a, 0)$.

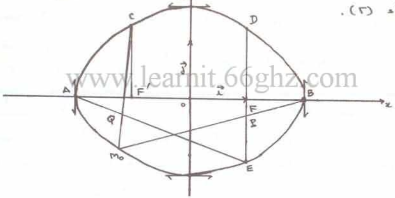
و بما أن: $A(-2, 0) \in (\Gamma)$ و $B(2, 0) \in (\Gamma)$ فإن: $a = 2$.

بما أن: $C(-1, \frac{3}{2}) \in (\Gamma)$ فإن: $\frac{1}{4} + \frac{9}{4b^2} = 1$

إذن: $b^2 = 3$ ومنه: $b = \sqrt{3}$.

وبالتالي معادلة (Γ) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

3) إنشاء (Γ).



معادلة المستقيم (DE) هي: $x = 1$

معادلة المستقيم (BM_0) هي: $y(x_0 - 2) - y_0(x - 2) = 0$.

لدينا: $P(x, y) \in (DE) \cap (BM_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y(x_0 - 2) - y_0(x - 2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{y_0}{2 - x_0} \end{cases}$$

ومنه: $P(1 ; \frac{y_0}{2 - x_0})$. ($2 - x_0 \neq 0$ لأن M_0 لا تنتمي إلى المماس لـ(Γ) عند B)

معادلة المستقيم (AE) هي: $x + 2y + 2 = 0$

معادلة المستقيم (CM_0) هي: $(x+1)(y_0 - \frac{3}{2}) - (x_0 + 1)(y - \frac{3}{2}) = 0$

لدينا :

$$Q(x,y) \in (AE) \cap (CM_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+2=0 \\ (x+1)(y_0-\frac{3}{2})-(x_0+1)(y-\frac{3}{2})=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-2 \\ (\frac{3}{2}-y_0)x+(x_0+1)y=\frac{3}{2}x_0+y_0 \end{cases}$$

لدينا مميز هذه النظمة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{3}{2}-y_0 & x_0+1 \end{vmatrix} = x_0+2y_0-2$$

بما أن : $M_0 \notin (BC)$ فإن : $x_0+2y_0-2 \neq 0$ (لأن معادلة (BC) هي : $x+2y-2=0$)

ومنه النظمة تقبل حل وحيد.

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{5x_0+2y_0+2}{x_0+2y_0-2} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{3x_0-2y_0+6}{2(x_0+2y_0-2)}$$

ومنه : $Q\left(\frac{5x_0+2y_0+2}{x_0+2y_0-2} ; \frac{3x_0-2y_0+6}{2(x_0+2y_0-2)}\right)$

ج - لدينا : $\begin{cases} x_0-2 \neq 0 \\ x_0+2y_0-2 \neq 0 \\ \frac{y_0}{2-x_0}=\frac{3x_0-2y_0+6}{2(x_0+2y_0-2)} \end{cases} \Leftrightarrow$ (P و Q لهما نفس الأرتوب)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2 \neq 0 \\ x_0+2y_0-2 \neq 0 \\ 3x_0^2+4y_0^2=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-2 \neq 0 \\ x_0+2y_0-2 \neq 0 \\ \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1 \end{cases}$$

وبالتالي : $M_0 \in (\Gamma \setminus \{B,C\}) \Leftrightarrow$ (P و Q لهما نفس الأرتوب)

13 في المستوى $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $M_\theta(x,y)$ بحيث : $\begin{cases} x=\frac{\cos\theta}{2+\cos\theta} \\ y=\frac{\sin\theta}{2+\cos\theta} \end{cases}$ مع $\theta \in [0,2\pi[$

1) أ- أحسب بدلالة θ المسافة OM_θ

ب- أحسب بدلالة θ مسافة النقطة M_θ عن المستقيم (D) الذي معادلته : $x=1$

2) بين أن لكل θ من $[0,2\pi[$ ، النقطة M_θ تنتمي إلى إهليلج (E) ثم تحديد تباعده المركزي ومحوره البؤري.

3) أ- حدد إحداثيات رؤوس الإهليلج (E) وإحداثيات نقط تقاطع (E) ومحور الأراتيب

ب- أنشئ الإهليلج (E)

الجواب : 1) أ- لدينا : $OM_\theta^2 = x^2+y^2 = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}$

بما أن : $\cos\theta \geq -1$ فإن : $2+\cos\theta > 0$.

ومنه : $OM_\theta = \frac{1}{2+\cos\theta}$

ب- لدينا : $d(M_\theta,(D)) = |x-1| = \left|\frac{-2}{2+\cos\theta}\right| = \frac{2}{2+\cos\theta}$

لأن : $2+\cos\theta>0$.

2) لدينا لكل θ من $[0,2\pi[$: $\frac{OM_\theta}{d(M_\theta,(D))} = \frac{1}{2} < 1$

ومنه M_θ تنتمي إلى الإهليلج (E) الذي بؤرته O ودليله (D)
وتباعده المركزي $e=\frac{1}{2}$ ومحوره البؤري لـ (E) عمودي على (D)
والمار من O أي المحور $(O,\vec{i})$.

3) إحداثيات رؤوس الإهليلج (E)
ليكن $M(x,0)$ رأس لـ (E).

لدينا : $M(x,0)\in(E) \Leftrightarrow \frac{OM}{d(M,(D))}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{|x|}{|x-1|}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x|=|x-1|$

$\Leftrightarrow 2x=x-1$ أو $2x=-x+1$

$\Leftrightarrow x=-1$ أو $x=\frac{1}{3}$

ومنه : $A(\frac{1}{3},0)$ و $A'(-1,0)$ رأسين للإهليلج (E) .

ليكن Ω مركز الإهليلج (E) إذن : Ω منتصف القطعة $[AA']$
أي : $\Omega(-\frac{1}{3},0)$.

المحور الكبير طوله : $2a=AA'=\frac{4}{3}$ أي : $a=\frac{2}{3}$

لدينا : $c=ea=\sqrt{a^2-b^2}$ ومنه : $b=a\sqrt{1-e^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

ومنه : $B(-\frac{1}{3};\frac{1}{\sqrt{3}})$ و $B'(-\frac{1}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}})$ الرأسين الآخرين لـ (E)

وبالتالي رؤوس الإهليلج (E) هي :

$A(\frac{1}{3},0)$ و $A'(-1,0)$ و $B(-\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}})$ و $B'(-\frac{1}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

إحداثيات نقط تقاطع الإهليلج (E) ومحور الأراتيب :

معادلة الإهليلج (E) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي :

$$\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2}+\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=1$$

أي : $9(x+\frac{1}{3})^2+12y^2=4$

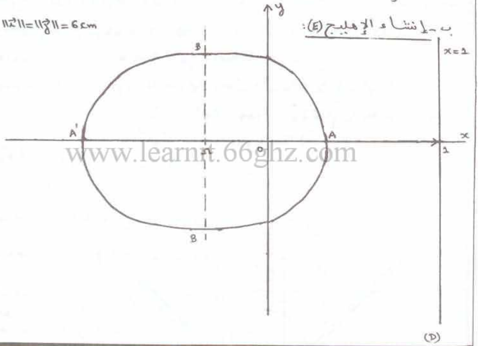
$$M(x,y)\in(E)\cap(O,\vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 9(x+\frac{1}{3})^2+12y^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

ومنه : $(E)\cap(yy')=\{E(0,\frac{1}{2})\,;\,E'(0,-\frac{1}{2})\}$

ب ـ إنشاء الإهليلج (E):

$\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=6\,cm$



14 المستوي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

حدد بيانيا المجموعة (E) للنقط $M(x,y)$ التي تحقق النظمة :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y\le 0 \\ x^2-2x-y^2\ge 0 \end{cases}$$

الجواب :

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$.

لدينا :
$$M(x,y)\in(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y\leq 0 \\ x^2-2x-y^2\geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2-4\leq 0 \\ (x-1)^2-y^2-1\geq 0 \end{cases}$$

نعتبر الدائرة $(\mathcal{C})$ التي معادلتها : $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ ؛ مركزها $\Omega(1,\sqrt{3})$ وشعاعها $R=2$

إذن مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث : $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2-4\leq 0$ هي مجموعة M الموجودة داخل الدائرة $(\mathcal{C})$.

نعتبر الهذلول (H) الذي معادلته : $(x-1)^2-y^2=1$. الذي مركزه $\Omega'(1,0)$

ومقارباته : $(D_1): y=x-1$ و $(D_2): y=-x+1$

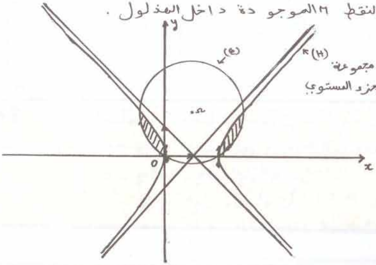
ورؤوسه : $A(2,0)$ و $A'(0,0)$.

مجموعة النقط $M(x,y)$ من H بحيث : $(x-1)^2-y^2-1\geq 0$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-y^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow y^2\leq x^2-2x$$
$$\Leftrightarrow |y|\leq\sqrt{x^2-2x}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\leq\sqrt{x^2-2x} \\ y\geq 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y\geq-\sqrt{x^2-2x} \\ y\leq 0 \end{cases}$$

ومنه مجموعة النقط $M(x,y)$ بحيث : $x^2-2x-y^2\geq 0$

هي مجموعة النقط M الموجودة داخل الهذلول .



المجموعة (E) هي مجموعة M التي تنتمي الجزء المستوى المخدش .

15 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر الإهليلج (E) الذي محوره الكبير $2a$ و بؤرتاه $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$

لتكن M نقطة من الإهليلج (E) أفصولها x و α قياس الزاوية $(\widehat{\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MF'}})$

1) بين أن : $\cos\alpha = \dfrac{c^2x^2-2c^2a^2+a^4}{a^4-c^2x^2}$

2) باستعمال النتيجة السابقة أدرس تقاطع الإهليلج (E) و الدائرة $(\mathcal{C})$ التي أحد أقطارها $[FF']$: الوجود - أفصول نقط التقاطع .

في حالة الدائرة $(\mathcal{C})$ مماسة لـ (E) ؛ حدد التباعد المركزي لـ (E)

الجواب : 1) معادلة الاهليلج (E) هي : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$

وبما أن : $c^2=a^2-b^2$ أي : $b^2=a^2-c^2$ فإن : $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

ومنه : $(E): \quad y^2=(a^2-c^2)\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$

: $y^2=a^2-c^2-x^2+\dfrac{c^2x^2}{a^2}$

لتكن $M(x,y)$ من (E) و $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$

إذن : $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}c-x\\-y\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{MF'}\begin{pmatrix}-c-x\\-y\end{pmatrix}$

لدينا : $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{MF}\|\cdot\|\overrightarrow{MF'}\|}$

$$= \frac{(c-x)(-c-x)+y^2}{\sqrt{(c-x)^2+y^2}\sqrt{(c+x)^2+y^2}}$$

$$= \frac{-c^2+x^2+a^2-c^2-x^2+\frac{c^2x^2}{a^2}}{\sqrt{c^2+x^2-2cx-c^2-x^2+\frac{c^2x^2}{a^2}}\sqrt{c^2+x^2+2cx+a^2-c^2-x^2+\frac{c^2x^2}{a^2}}} \qquad \left(y^2=a^2-c^2-x^2+\frac{c^2x^2}{a^2} : \text{لأن}\right)$$

$$= \frac{\frac{c^2x^2-2c^2a^2+a^4}{a^2}}{\sqrt{\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2}\sqrt{\left(a+\frac{cx}{a}\right)^2}}$$

$$= \frac{c^2x^2-2c^2a^2+a^4}{|(a^2-cx)(a^2+cx)|} = \frac{c^2x^2-2c^2a^2+a^4}{|a^4-c^2x^2|}$$

$$\cos\alpha = \frac{c^2x^2-2c^2a^2+a^4}{a^4-c^2x^2} \qquad \left(c\leq a,\ |x|\leq a : \text{لأن} \ ; \ c^2x^2\leq a^4\right)$$

2) لدينا $(\mathcal{C})$ الدائرة التي قطرها $[FF']$ و $(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MF'})\equiv\alpha\ [2\pi]$

إذن : $M\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MF'}=0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MF'})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ أو $(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MF'})\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=0$

لدينا :

$$M\in(\mathcal{C})\cap(E) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{c^2x^2-2c^2a^2+a^4}{a^4-c^2x^2}\\ \cos\alpha=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2-2c^2a^2+a^4=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2c^2a^2-a^4}{c^2}=\frac{a^2}{c^2}(2c^2-a^2)$$

ليكن e التباعد المركزي للإهليلج (E) إذن : $e=\frac{c}{a}$.

* إذا كان : $2c^2-a^2<0$ أي : $\frac{c}{a}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ أي : $e<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

فإن : $\mathcal{C}\cap E=\phi$.

* إذا كان : $2c^2-a^2>0$ أي : $\frac{c}{a}>\frac{1}{\sqrt{2}}$ أي : $e>\frac{1}{\sqrt{2}}$.

فإن $(\mathcal{C})\cap E$ تقبل أربع نقط أفاصيلها : $x_1=\frac{a}{c}\sqrt{2c^2-a^2}$ و $x_2=-\frac{a}{c}\sqrt{2c^2-a^2}$

* إذا كان : $2c^2-a^2=0$ أي : $\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أي : $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$

فإن : $\mathcal{C}\cap E$ يقبل نقطتين أفصولهما : $x=0$.

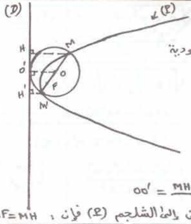
ومنه $(\mathcal{C})$ مماسة للإهليلج (E).

16

ليكن $(\mathcal{P})$ شلجم بؤرته F ودليله (D).

ليكن (Δ) مستقيم متغير مار من F يقطع الشلجم $(\mathcal{P})$ في نقطتين M و M'

بين أن الدائرة التي قطرها $[MM']$ مماسة المستقيم (D).



الجواب : ليكن O منتصف $[MM']$

لتكن H و H' و O' المساقط العمودية للنقط M و M' و O على التوالي على المستقيم (D).

بما أن O منتصف $[MM']$

فإن : O' منتصف $[HH']$

إذن : $OO'=\frac{MH+M'H'}{2}$

بما أن : M و M' تنتميان إلى الشلجم $(\mathcal{P})$ فإن : $MF=MH$ و $M'F=M'H'$

ومنه : $OO' = \frac{MF + M'F}{2}$ أي : $OO' = \frac{MM'}{2}$

ومنه : $OO' = OM = OM' = R$ (R شعاع الدائرة (C))

إذن : $d(O, (D)) = R$

وبالتالي (D) مماس للدائرة (C).

17 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث : $\|\vec{u}\| = 2cm$. نعتبر الشلجم (P) الذي بؤرته O ودليله (D) معادلته : $x = 1$.

1) أكتب معادلة الشلجم (P)، وأنشئ (P).

2) لتكن M نقطة من (P)، H المسقط العمودي لـ M على (D)، I منتصف القطعة [OH] ؛ A النقطة ذات اللحق 1 و B النقطة ذات اللحق 2.

بين أن : $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MH}) \equiv (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HA})$ $[\pi]$

واستنتج أن : $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) \equiv (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{HB})$ $[2\pi]$

3) ليكن $\theta \in [0, 2\pi[$ بحيث : $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) \equiv \theta$ $[2\pi]$

وليكن z و h لحقي النقطتين M و H على التوالي.

بين أن : $\frac{z-h}{z} = \frac{h-2}{h} = e^{i\theta}$ ، وأن : $\theta \neq 0$

واستنتج أن : $z = \frac{2}{(1-e^{i\theta})^2}$.

الجواب : 1) لدينا (P) الشلجم الذي بؤرته O ودليله : $(D)\ x = 1$

إذن :

$$M(x,y) \in (P) \Leftrightarrow d(M,(D)) = MO$$

$$\Leftrightarrow MH = MO$$ ($H(1,y)$ المسقط العمودي لـ M على (D))

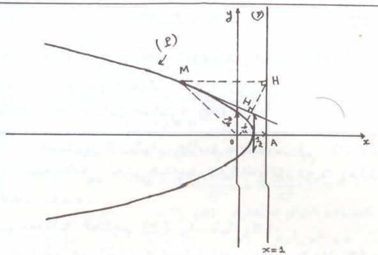
$$\Leftrightarrow MH^2 = MO^2$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = -2x + 1$$

ومنه معادلة الشلجم (P) هي : $y^2 = -2x + 1$.

إنشاء الشلجم (P) :



ع) لتكن M نقطة من (ℓ) و H المسقط العمودي لـ M على (D)

إذن : $(\overrightarrow{HM};\overrightarrow{HA}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

$(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HO}) + (\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HA}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ (علاقة شال)

ومنه : $(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HO}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HA}) \quad [\pi]$ (1)

بما أن : MO = OH (لأن : $M \in (\ell)$) فإن OMH مثلث متساوي الساقين في M ومنه (IM) متوسط ومنصف الداخلي المار من M في المثلث OHM

إذن المثلث IMH قائم الزاوية في I

إذن لدينا : $(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{HI}) \equiv (\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MH}) + (\overrightarrow{MH};\overrightarrow{HI}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

أي : $(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MH}) \equiv \frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{MH},\overrightarrow{HI}) \quad [\pi]$ (2)

ولدينا : $(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HO}) \equiv (\overrightarrow{MH},\overrightarrow{HI}) \quad [2\pi]$

إذن : من (1) و (2) نستنتج أن :

$(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MH}) \equiv \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{HO};\overrightarrow{HA})\right) \quad [\pi]$

ومنه : $(\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MH}) \equiv (\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HA}) \quad [\pi]$

إذن : $2(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MH}) \equiv 2(\overrightarrow{HO};\overrightarrow{HA}) \quad [2\pi]$

بما أن المثلثين OMH و OHB متساويي الساقين في M و H على التوالي فإن (MI) و (HA) منصفي داخليين للمثلثين OMH و OHB على التوالي المارين من M و H.

ومنه نستنتج أن: $(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MH}) \equiv (\overrightarrow{HO};\overrightarrow{HB}) \quad [2\pi]$

3) لدينا : $(\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MH}) \equiv \theta \quad [2\pi]$ حيث : $\theta \in [0,2\pi[$

إذن لدينا :
$$\begin{cases} MO = MH \\ (\overrightarrow{MO};\overrightarrow{MH}) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

ومنه H هي صورة O بالدوران r الذي مركزه M وزاويته θ.

إذن : $r(O) = H \iff h - z = e^{i\theta}(z - 0) \iff z - h = e^{i\theta} z$

ومنه :
$$\frac{z-h}{z} = e^{i\theta} \quad (3)$$

ولدينا :
$$\begin{cases} HO = HB \\ (\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MH}) \equiv (\overrightarrow{HO};\overrightarrow{HB}) \quad [2\pi] \end{cases}$$
أي :
$$\begin{cases} HO = HB \\ (\overrightarrow{HO},\overrightarrow{HB}) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

ومنه B هي صورة O بالدوران r' الذي مركزه H وزاويته θ.

إذن : $r'(O) = B \iff h - 2 = e^{i\theta}(h - 0) \iff h - 2 = e^{i\theta} h$

ومنه :
$$\frac{h-2}{h} = e^{i\theta} \quad (4)$$

من (3) و(4) نستنتج أن :
$$\frac{z-h}{z} = \frac{h-2}{h} = e^{i\theta}$$

نفترض أن $\theta = 0$ إذن : $\frac{z-h}{z} = 1$ أي : $h = 0$ غير ممكن
لأن O لا ينتمي إلى $(\mathcal{D})$ و $H(h) \in (D)$

ومنه : $\theta \neq 0$.

لدينا : $\frac{h-2}{h} = e^{i\theta}$ إذن : $h = \frac{2}{1 - e^{i\theta}}$

ولدينا : $\frac{z-h}{z} = e^{i\theta}$ إذن : $z = \frac{h}{1 - e^{i\theta}}$

وبالتالي : $z = \frac{2}{(1 - e^{i\theta})^2}$.

18 في المستوى $\mathcal{P}$ نعتبر مثلثا AFB قائم الزاوية في A ولتكن θ قياس الزاوية $\hat{B}$ بالرديان بحيث : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

لتكن M نقطة من المستوى $\mathcal{P}$ ، ننشأ من M المستقيمين الموازيين لكل من (AF) و (FB) ويقطعان المستقيم (AB) في H و M' على التوالي

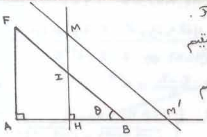
لتكن (Γ) مجموعة النقط M من $\mathcal{P}$ بحيث : $MM' = MF$

1) بين أن : $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin\theta} \iff M \in (\Gamma)$

واستنتج أن (Γ) مخروطي محددا طبيعته.

ج) في هذا السؤال نأخذ: $AF = 6cm$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$
بعد إنشاء المثلث AFB ، مثّل رؤوس و بؤرتا ومركز المخروطي (Γ) ؛ ثم أنشئ (Γ) .

الجواب : 1) لتكن M نقطة من $\mathcal{P}$.



H نقطة تقاطع المستقيم (AB) و المستقيم المار من M والموازي لـ (AF)

M' نقطة تقاطع المستقيم (AB) و المستقيم المار من M و الموازي لـ (BF) .

لدينا : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MM' = MF$

لتكن I نقطة تقاطع المستقيم (MH) و المستقيم (FB)

لدينا المثلث MHM' قائم الزاوية في H و $(MM') // (FB)$

ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{MM'}{MH} = \frac{IH}{IB}$

وبما أن : $\sin\theta = \frac{IB}{IH}$ فإن : $\frac{MM'}{MH} = \frac{1}{\sin\theta}$ أي : $MM' = \frac{1}{\sin\theta} MH$

وبالتالي : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MM' = MF$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\theta} MH = MF$$

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{1}{\sin\theta}$$

بما أن : $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ فإن : $\sin\theta < 1$ ومنه : $\frac{1}{\sin\theta} > 1$

وبالتالي (Γ) هذلول لأن : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,(AB))} = e > 1$.

ج) لنأخذ : AF و $\theta = \frac{\pi}{6}$

إذن : $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = 2$ (لأن : $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$)

بما أن : AFB مثلث قائم الزاوية في A فإن : $\frac{AF}{BF} = \sin\frac{\pi}{6}$

إذن : $FB = 2AF = 12$.

(Γ) هذلول يقبل بؤرة F ودليل (AB) .

ليكن S رأس الهذلول إذن : $S \in [AF]$ و $\frac{SF}{SA} = 2$

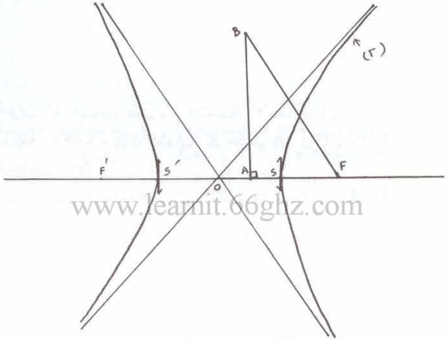
إذن : $SA=\frac{SF}{2}$ أي : $SA=\frac{AF-AS}{2}$

ومنه : $SA=\frac{AF}{3}$ أي : $SA=2$.

ليكن O مركز القطع لول (٢) لدينا : $\frac{OF}{OS}=e=2$ أي : $OF=2OS$

ومنه S منتصف $[OF]$ أي O مماثلة F بالنسبة لـ S.

الرأس الثاني S' و البؤرة الثانية F' هما مماثلتا S و F بالنسبة لـ O على التوالي.



19 ليكن (D) مستقيمًا و F نقطة من المستوى بحيث: $d(F;(D))=3$

ليكن (Δ) المستقيم المار من F والعمودي على (D).

ليكن θ عدد حقيقي بحيث : $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$

1) ليكن (Γ_θ) مجموعة النقط M من المستوى بحيث : $\frac{MF}{MH}=\cos\theta$

حيث H المسقط العمودي للنقطة M على المستقيم (D).

حدد حسب قيم θ طبيعة (Γ_θ).

2) أنشئ Γ_0 في حالة $\theta=0$.

3) أ- ليكن $\theta=\frac{\pi}{3}$ ، حدد الرؤوس A و A' لـ $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ الموجودتين على (Δ)

المركز O و البؤرة الثانية F' لـ $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$. أنشئ $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$.
ب - حدد معادلة ديكارتية لـ $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{\lambda}, \vec{j})$ حيث O مركز $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ و $\vec{\lambda}$ متجهة واحدية على المستقيم (Δ) .

الجواب : 1) لتكن M نقطة من المستوى و H المسقط العمودي لـ M على (D)

لدينا : $M \in (\Gamma_\theta) \Leftrightarrow \dfrac{MF}{MH} = \cos\theta$

ومنه (Γ_θ) مخروطي بؤرته F و دليله (D) و تباعده المركزي $e = \cos\theta$

بما أن : $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن : $0 < e = \cos\theta \leq 1$

إذا كانت : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن : $0 < e < 1$ ومنه (Γ_θ) إهليج .

إذا كانت : $\theta = 0$ فإن : $e = 1$ ومنه (Γ_0) شلجم .

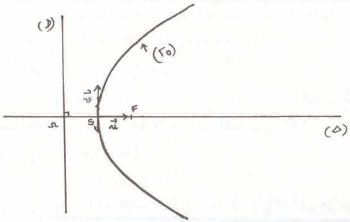
2) ليكن Ω المسقط العمودي للنقطة F على (D) و لتكن S منتصف القطعة $[\Omega F]$ ، إذن النقطة S تنتمي إلى (Γ_0) و (ΩF) محور تماثل الشلجم (Γ_0) .

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(S, \vec{u}, \vec{v})$ بحيث : $\overrightarrow{\Omega F} = 3\vec{u}$.

في هذا المعلم لدينا : $F(-\frac{3}{2}, 0)$ و $\Omega(\frac{3}{2}, 0)$

لدينا :

$$M(x,y) \in (\Gamma_0) \Leftrightarrow MH = MF$$
$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2}$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2$$
$$\Leftrightarrow y^2 = 6x$$



3) أ- إذا كان $\theta=\frac{\pi}{3}$ فإن: $\frac{MF}{MH}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow M\in(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$

ومنه $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ إهليلج تباعده المركزي $e=\frac{1}{2}$

لتكن A' و A رؤوس $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ على المستقيم (Δ) و ينقبلان نفس المسقط العمودي Ω على (D) بحيث: $\frac{MF}{M\Omega}=\frac{1}{2}$

إذن: $M\Omega=2MF$ أي: $M\Omega^2-4MF^2$

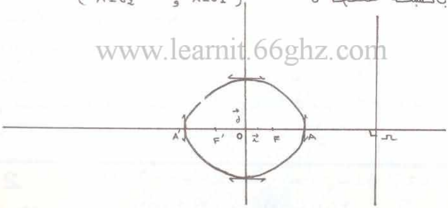
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M\Omega}-2\overrightarrow{MF}).(\overrightarrow{M\Omega}+2\overrightarrow{MF})=0$$

ليكن G_1 مرجح النقطة المتزنة $\{(\Omega,1);(F,-2)\}$

G_2 مرجح النقطة المتزنة $\{(G,1);(F,2)\}$

ومنه: $\overrightarrow{MG_1}.\overrightarrow{MG_2}=0$

إذن M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[G_1G_2]$ ومنه رؤوس $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ هما G_1 و G_2 ومركزه O منتصف $[G_1G_2]$ وبؤرته الثانية F' هي مماثلة F بالنسبة للنقطة O ($A=G_1$ و $A'=G_2$)



ب- معادلة ديكارتية $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}})$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

حيث: $a=\frac{de}{1-e^2}=2$ و $b=\frac{de}{\sqrt{1-e^2}}=\sqrt{3}$ مع $e=\frac{1}{2}$ و $d=3$

ومنه: $(\Gamma_{\frac{\pi}{3}}): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

20

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطتين : $F(1,6)$ و $F'(1,-2)$.

1) حدد المجموعة (E) للنقط M من المستوى $\mathcal{P}$ بحيث :

$$MF + MF' = 10$$

2) حدد معادلة ديكارتية لـ (E)

الجواب : 1) لدينا : $MF+MF'=10 \iff M\in(E)$

بحيث : $F(1,6)$ و $F'(1,-2)$

بما أن : $2b=10 > FF'=8$ (أي : $b=5$)

فإن : (E) إهليلج بؤرتاه F و F' ومركزه $\Omega(1,2)$ منتصف $[FF']$

ومحوره البؤري (FF') موازٍ لمحور الأراتيب (لأن : $\vec{FF'}=-8\vec{j}$)

2) معادلة ديكارتية لـ (E) تكتب على شكل : $\dfrac{(x-1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-2)^2}{b^2}=1$

حيث : $b>a>0$ و $b=5$

ونعلم أن : $2c=FF'=8$ (أي) : $c=4$

ولدينا : $a^2=b^2-c^2=9$ أي : $a=3$.

وبالتالي المعادلة المختصرة للإهليلج (E) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي :

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$$

21

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقطتين : $F(-1,1+\sqrt{2})$ و $F'(-1;1-\sqrt{2})$

1) حدد المجموعة (Γ) للنقط M من المستوى $\mathcal{P}$ بحيث :

$$|MF-MF'|=2$$

2) حدد معادلة ديكارتية لـ (Γ) .

الجواب : 1) لدينا : $|MF-MF'|=2 \iff M\in(\Gamma)$

بحيث : $F(-1,1+\sqrt{2})$ و $F'(-1,1-\sqrt{2})$

بما أن : $2b=2<FF'=2\sqrt{2}$ (أي : $b=1$)

فإن : (Γ) هذلول مركزه $\Omega(-1,1)$ منتصف $[FF']$ ومحوره البؤري (FF') موازٍ لمحور الأراتيب (لأن : $\overrightarrow{FF'}=-2\sqrt{2}\vec{j}$)

2) معادلة ديكارتية للهذلول (Γ) تكتب على شكل : $-\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2}=1$

حيث : $b=1$ و $a>0$

نعلم أن : $2c=FF'=2\sqrt{2}$ أي : $c=\sqrt{2}$

ولدينا : $a^2=c^2-b^2=1$ أي : $a=1$

وبالتالي المعادلة المختصرة للهذلول (Γ) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي :

$$-(x+1)^2+(y-1)^2=1$$

ديما ديما لعبار ماشي هو

تمارين للبحث

1

لتكن (F) مجموعة المخروطيات التي معادلتها :

$$\frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{m-3} = 1$$ ، بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم

و m بارامتر حقيقي .

1) أدرس حسب قيم m ، طبيعة مخروطيات (F) .
حدد الرؤوس و المقاربات إذا وجدت .

2) بين أن النقطة $M_0\left(\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$ تنتمي إلى إهليج (E_0) و هذلول (H_0) من (F) ثم حدد معادلة H_0 و معادلة (E_0) و أحسب أطوال محوري الإهليج (E_0) .

2

المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من $\mathcal{P}$ بحيث :

$$16x^4 + 81y^4 + 72x^2y^2 - 1296y^2 = 0$$

بين أن (Γ) هو إتحاد مخروطين (Γ_1) و (Γ_2) .

2) أ- حدد مركز و رؤوس كل من (Γ_1) و (Γ_2) .
ب- أنشئ (Γ) .

3

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) حدد المجموعة E للنقط $M(z)$ بحيث : $10z\bar{z} + 3(z^2+\bar{z}^2) = 4$
حدد بؤرتاه F و F' و دليليه .

2) لتكن f مركب التحاكي h الذي مركزه O و نسبته 2 و الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$.
حدد معادلة (E') صورة (E) بالتطبيق f .

3) بين أن (E') إهليج بؤرتاه $f(F)$ و $f(F')$.
قارن التباعد بين المركزيين لـ (E) و (E') .

4) أنشئ (E) و (E') في نفس المعلم .

4 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر الشلجم (P) الذي معادلته : $y = x^2$ والمنحنى $(\mathcal{E})$ الذي معادلته : $16x^2 + 24y - 16x^2 + 1 = 0$.

1) أ- احسب إحداثيتي F بؤرة (P) .

ب- حدد طبيعة $(\mathcal{E})$ وتحقق من أن F بؤرة له .

ج- أنشىء (P) و $(\mathcal{E})$ في نفس المعلم .

2) لتكن $M(a, b)$ نقطة من المستوى بحيث : $b < a^2$.

أ- بين أنه يمر من M مماسين للشلجم (P) في نقطتين N_1 و N_2 وحدد أفصول كل منهما .

ب- بين أنه إذا كان المستقيمان (FN_1) و (FN_2) متعامدين فإن : M تنتمي إلى $(\mathcal{E})$.

5 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

F_1 و F_2 نقطتان من $\mathcal{P}$. (E) الإهليج المعرف ب :

$M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \;;\; a \in \mathbb{R}^*_+$

1) بين أن كل تقايس في $\mathcal{P}$ يحول (E) إلى إهليج (E') .

2) اثبت وجود دوران وحيد r يخالف التطبيق المطابق في $\mathcal{P}$ ويترك (E) صامدا إجماليا .

3) أ- ليكن S_D تماثلا متعامدا محوره (D) .

بين أن S_D يترك (E) صامدا إجماليا إذا وفقط إذا كان (D) هو المستقيم (F_1F_2) أو هو واسط القطعة $[F_1F_2]$.

ب- لتكن $t_{\vec{u}}$ إزاحة متجهتها $\vec{u}$ غير منعدمة و S_Δ تماثلا متعامدا محوره (Δ) .

ماهو الشرط اللازم والكافي على $\vec{u}$ و (Δ) لكي يكون الإهليج (E) صامدا إجماليا بالتقايس $S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$.

4) حدد التقايسات التي تترك (E) صامدا إجماليا .

6

المستوي $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

ليكن (C_m) المنحنى الذي معادلته: $y^2=mx^2-(m-1)x-3(2m+1)$ حيث: $m\in\mathbb{R}$

1) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تمر من نقطة ثابتة A.

2) ناقش حسب قيم m طبيعة المنحنى (C_m).

3) أنشئ: (C_1) و (C_{-1}).

7

في المستوي الإقليدي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (C_m) مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق المعادلة:

$$m(x^2+y^2)=(2x-\sqrt{m})^2 \quad ; \text{ حيث: } m\in\mathbb{R}^*_+$$

1) بتأويل المعادلة (E) هندسياً. أثبت أن (C_m) مخروطي إحدى بؤرتيه النقطة O، والمستقيم (D_m) ذو المعادلة: $x=\frac{\sqrt{m}}{2}$ دليله المرتبط بالنقطة O.

2) حدد حسب قيم العدد m طبيعة المخروطي (C_m).

3) نأخذ $m=9$.

أ- حدد في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بؤرتي ودليلي ورؤوس المخروطي (C_9).

ب- أنشئ المخروطي (C_9) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

8

نعتبر المخروطي (Γ_m) المعرف بمعادلته الديكارتية:

$$mx^2+(2m-7)y^2+(m-4)x-m=0$$

في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، m بارمتر حقيقي يخالف 0 ويخالف $\frac{7}{2}$.

1) أ- حدد مجموعة الأعداد الحقيقية m التي يكون من أجلها (Γ_m) إهليجاً.

ب- حدد العناصر المميزة لـ (Γ_4) (البؤرتان، الدليلان، التباعد المركزي) ثم أنشئ (Γ_4).

2) لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر النقطة M_n ذات الأفصول x_n المعرفة كالتالي:

M_0 هي النقطة O، نحصل على M_{n+1} انطلاقاً بالطريقة التالية:

المستقيم المار من M_n والموازي للمستقيم (D) ذي المعادلة: $y=-x$

يقطع (Γ_4) في نقطتين إحداهما أفصولها سالب نسميها E_n ، E'_n مماثلة النقطة E_n بالنسبة لمحور التراتيب.

M'_n هي المسقط العمودي لـ E'_n على محور الفواصيل وتكون M_{n+1} هي منتصف القطعة $[M_nM'_n]$.

أ- بين أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي المتتالية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} x_0=0 \\ x_{n+1}=h(x_n) \quad ; n\in\mathbb{N} \end{cases} \quad : \text{حيث} \quad h(x)=\frac{1}{5}(\sqrt{5-x^2}+2x)$$

ب - بين أنه يوجد عدد حقيقي k من $]0,1[$ بحيث : لكل x من $[0,1]$

$$|h'(x)|\leq k$$

ج - بين باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أن لكل n من $\mathbb{N}$:

$$\left|x_{n+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\leq k\left|x_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$$

د- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونهايتها ؟

9 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطة $F(-1,1)$ والمستقيم (D) الذي معادلته : $x-y+4=0$

1) لتكن (E) مجموعة النقط M التي تحقق : $2MF=d(M,(D))$

اعط طبيعة المجموعة (E) ثم بين أن $7x^2+7y^2+2xy-8x-8y=0$ معادلة ديكارتية لـ (E) .

2) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته α

r يحول المعلم المتعامد الممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i'},\vec{j'})$.

أ- ماهي معادلة (E) في المعلم $(O,\vec{i'},\vec{j'})$ ؟

ب- حدد قيمة α ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) التي من أجلها تكون معادلة (E) في المعلم $(O,\vec{i'},\vec{j'})$ على شكل : $Ax'^2+By'^2+Cx'+Dy'+E=0$

ج - استنتج مرة أخرى طبيعة (E) .

10 المستوى $\mathcal{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر (Γ) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى $\mathcal{P}$ بحيث :

$$y=\sqrt{|x^2-2x-3|}$$

أنشئ (Γ) .

الاحتمالات

1) التعداد :

المبدأ الأساسي للتعداد : إذا كانت الاختيارات c_1 و c_2 و ..... و c_p تتم على التوالي بـ n_1 و n_2 و .... و n_p كيفية مختلفة فإن عدد الكيفيات التي تتم بها هذه الاختيارات هو : $n_1\times n_2\times\dots\times n_p$.

عدد التطبيقات من مجموعة منتهية إلى أخرى : عدد التطبيقات من مجموعة منتهية E مكونة من n عنصر ($\text{card}E=n$) نحو مجموعة منتهية F مكونة من p عنصر ($\text{card}F=p$) هو : $(\text{card}F)^{\text{card}E}=p^n$ (E مجموعة الإنطلاق و F مجموعة الوصول)

عدد الترتيبات لـ p عنصر من بين n عنصر : لتكن E مجموعة منتهية مكونة من n عنصر و $p\leq n$. كل ترتيب لـ p عنصر من E يسمى ترتيبة لـ p عنصر من بين n عنصر وعدد هذه الترتيبات (بدون تكرار) هو : $A_n^p=n\times(n-1)\times\dots\times(n-p+1)$

ملاحظة : كل ترتيبة لـ p عنصر من E هو تطبيق تباني من $\{1,2,\dots,p\}$ نحو E

عدد التبديلات لـ n عنصر من بين n عنصر : كل ترتيبة لـ n عنصر من بين n عنصر تسمى تبديلة لـ n عنصر وعدد هذه التبديلات هو : $A_n^n=n!$

عدد التأليفات لـ p عنصر من بين n عنصر : لتكن E مجموعة منتهية مكونة من n عنصر و $p\leq n$. كل جزء A من E مكون من p عنصر يسمى تأليفة لـ p عنصر من E وعدد هذه التأليفات هو : $C_n^p=\frac{A_n^p}{p!}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$

خاصيات : $C_n^0=C_n^n=1$; $C_n^1=C_n^{n-1}=n$ $(p\leq n)$; $C_n^p=C_n^{n-p}$; $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$ $(p\leq n-1)$

الصيغة الحدانية : $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 :\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

2) الاحتمالات :

تعريف احتمال : ليكن Ω كون الإمكانيات لتجربة عشوائية (Ω منتهية) كل تطبيق p من مجموعة أجزاء Ω : $\mathcal{P}(\Omega)$ نحو المجال $[0,1]$ حيث :

أ) $p(\Omega)=1$ ب) $\forall(A,B)\in(\mathcal{P}(\Omega))^2 : A\cap B=\emptyset\Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

يسمى احتمالا معرفا على Ω والزوج $(\Omega;p)$ يسمى فضاء احتماليا منتهيا.

خاصيات : * $p(\emptyset)=0$; $p(\bar{A})=1-p(A)$

$\bar{A}$ حدث مضاد لـ A

* $\forall(A,B)\in(\mathcal{P}(\Omega))^2 :\ p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

الإحتمال المنتظم : ليكن p احتمالا معرفا على كون الإمكانيات $\Omega=\{w_1;w_2;\dots,w_n\}$

* إذا كان : $p(w_1)=p(w_2)=\dots=p(w_n)$ فنقول أن الإحتمال p منتظم .
* في هذه الحالة : $p(w_i)=\dfrac{1}{card\,\Omega}$ $\quad \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$

$$p(A)=\frac{card\,A}{card\,\Omega} \quad : \quad \forall A\in \mathcal{P}(\Omega)$$

3

الإحتمال الشرطي : * احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق هو :

$$P_A(B)=p(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)} \qquad (p(A)\neq 0)$$

* لدينا : $p(B\cap A)=p(A)\times P_A(B)$ (صيغة الاحتمالات المركبة)
* ليكن A_1 و A_2 و .... و A_n تجزئة للكون Ω .

لدينا : $p(B)=p(A_1)\times P_{A_1}(B)+p(A_2)\times P_{A_2}(B)+\dots+p(A_n)\times P_{A_n}(B)$

* A و B مستقلان $\Leftrightarrow$ $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

نوع السحبات	عدد الإمكانيات
نسحب تآنيا (في آن واحد) p عنصر من بين n عنصر. (الترتيب ليس مهما)	C_n^p $\quad (p\leq n)$
نسحب بالتتابع وبإحلال (إرجاع العنصر المسحوب إلى المجموعة) p عنصر من بين n عنصر (الترتيب مهم)	n^p
نسحب بالتتابع وبدون إحلال (عدم إرجاع العنصر المسحوب إلى المجموعة) p عنصر من بين n عنصر (الترتيب مهم)	A_n^p $\quad (p\leq n)$
حالات الترتيب	
$(\underbrace{x;x;\dots;x}_{k\text{ مرة}};\underbrace{y;y;\dots;y}_{n-k\text{ مرة}})$ $(x\neq y)$	C_n^k
$(\underbrace{x;x;\dots,x}_{k\text{ مرة}};y_1;y_2;\dots,y_{n-k})$ $(y_i\neq y_j)$	$\dfrac{n!}{k!}$

الاحتمالات

1 ليكن p احتمال على الكون $\Omega=\{a,b,c\}$

بحيث : $p(\{a,b\})=\frac{4}{5}$ و $p(\{a,c\})=\frac{1}{3}$

أحسب : $p(a)$ و $p(b)$ و $p(c)$. حيث : $p(x)=p(\{x\})$

الجواب : نعلم أن : $p(\Omega)=1$ ومنه : $p(a)+p(b)+p(c)=1$

وإذن لدينا :

$$\begin{cases} p(a)+p(b)+p(c)=1 & (1) \\ p(a)+p(b)=\frac{4}{5} & (2) \\ p(a)+p(c)=\frac{1}{3} & (3) \end{cases}$$

من (2) و (3) نستنتج أن : $p(a)+(p(a)+p(b)+p(c))=\frac{4}{5}+\frac{1}{3}$

أي : $p(a)+1=\frac{17}{15}$

إذن : $p(a)=\frac{2}{15}$

ومنه : $p(b)=\frac{4}{5}-\frac{2}{15}=\frac{10}{15}$ و $p(c)=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{3}{15}$

وبالتالي : $p(a)=\frac{2}{15}$ و $p(b)=\frac{2}{3}$ و $p(c)=\frac{1}{5}$

2 ليكن p احتمال على الكون $\Omega=\{a,b,c,d,e\}$

بحيث : $p(\{a,b,c\})=\frac{3}{5}$ و $p(\{a,c,e\})=p(\{c,d\})=\frac{9}{20}$

و $p(\{a,e\})=\frac{7}{20}$

أحسب : $p(a)$ ؛ $p(b)$ ؛ $p(c)$ ؛ $p(d)$ ؛ $p(e)$.

الجواب : نعلم أن : $p(\Omega)=1$ ومنه : $p(a)+p(b)+p(c)+p(d)+p(e)=1$

وإذن لدينا :

$$\begin{cases} p(a)+p(b)+p(c)+p(d)+p(e)=1 & (1) \\ p(a)+p(b)+p(c)=\frac{3}{5} & (2) \\ p(d)+p(c)+p(e)=\frac{9}{20} & (3) \\ p(c)+p(d)=\frac{9}{20} & (4) \\ p(a)+p(e)=\frac{7}{20} & (5) \end{cases}$$

من (3) و (5) نستنتج أن : $p(c)+\frac{7}{20}=\frac{9}{20}$ أي : $p(c)=\frac{1}{10}$

لدينا : $p(d)=\frac{9}{20}-p(c)$ ومنه : $p(d)=\frac{7}{20}$

لدينا : $p(a)+p(b)=\frac{3}{5}-p(c)$ ومنه : $p(a)+p(b)=\frac{1}{2}$

ومنه : $p(e)=1-\left(p(c)+p(d)+p(a)+p(b)\right)$ ومنه : $p(e)=\frac{1}{20}$

لدينا : $p(a)=\frac{7}{20}-p(e)$ ومنه : $p(a)=\frac{3}{10}$

ولدينا : $p(b)=\frac{1}{2}-p(a)$ ومنه : $p(b)=\frac{1}{5}$

وبالتالي : $P(b)=\frac{1}{5}$; $P(a)=\frac{3}{10}$

$P(d)=\frac{7}{20}$; $P(c)=\frac{1}{10}$; $P(e)=\frac{1}{20}$

3 ليكن p احتمال على كون ح .

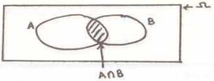
ليكن A و B حدثين من ح بحيث :

$p(A\cap\overline{B})=\frac{1}{6}$; $p(B)=\frac{2}{5}$; $P(A)=\frac{1}{3}$

أحسب : $p(A\cap B)$ ، $p(A\cup B)$

$p(\overline{A}\cap\overline{B})$ ، $p(B\cap\overline{A})$

الجواب : لدينا :



لدينا $A\cap\overline{B}$ و $A\cap B$ حدثين غير منسجمين أي : $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\phi$

و $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$

ومنه : $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})$

أي : $p(A\cap B)=p(A)-p(A\cap\overline{B})=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$

ومنه : $p(A\cap B)=\frac{1}{6}$.

لدينا : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

$p(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{6}$

ومنه : $p(A\cup B)=\frac{17}{30}$

لدينا : $B = (B\cap A) \cup (B\cap \bar{A})$ و $(B\cap A) \cap (B\cap \bar{A}) = \phi$

إذن : $p(B) = p(A\cap B) + p(B\cap \bar{A})$

$$p(B\cap \bar{A}) = p(B) - p(A\cap B)$$

$$p(B\cap \bar{A}) = \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{30}$$

ومنه : $p(B\cap \bar{A}) = \frac{7}{30}$

لدينا : $p(\bar{A}\cap \bar{B}) = p(\overline{A\cup B})$

$$p(\bar{A}\cap \bar{B}) = 1 - p(A\cup B)$$

$$p(\bar{A}\cap \bar{B}) = 1 - \frac{17}{30}$$

ومنه : $p(\bar{A}\cap \bar{B}) = \frac{13}{30}$

4 ليكن p احتمال على كون Ω . A و B حدثين من Ω بحيث :

$p(A\cup B) = 0,86$ ؛ $p(B) = 0,30$ ؛ $p(A) = 0,80$

1) أحسب : $p(A/B)$

2) هل الحدثين A و B مستقلان ؟

3) ليكن C حدث من Ω بحيث : $p((B\cap C)/A) = 0,2$

أحسب : $p(C\cup \bar{B}\cup \bar{A})$.

الجواب : 1) لدينا : $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$

وبما أن : $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ فإن : $p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B)$

ومنه : $p(A/B) = \frac{p(A) + p(B) - p(A\cup B)}{p(B)}$

$$p(A/B) = \frac{0,80 + 0,30 - 0,86}{0,30}$$

إذن : $p(A/B) = 0,80$

2) بما أن : $p(A/B) = p(A)$ أي : $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$

فإن الحدثين A و B مستقلان.

③ لدينا:

$$p(C\cup\bar{A}\cup\bar{B}) = p(C\cup(\overline{A\cap B}))$$
$$= 1 - p(\overline{C\cup(\overline{A\cap B})})$$
$$= 1 - p(\bar{C}\cap(A\cap B))$$

ولدينا: $p(\bar{C}\cap(A\cap B)) = p(A\cap B) - p(A\cap B\cap C)$

و $p(A\cap B\cap C) = p((C\cap B)/A)\times p(A)$

ومنه:

$$p(C\cup\bar{A}\cup\bar{B}) = 1 - p(A\cap B) - p((C\cap B)/A)\times p(A)$$
$$= 1 - p(A)\times p(B) - p((C\cap B)/A)\times p(A)$$

إذن:

$$p(C\cup\bar{A}\cup\bar{B}) = 1 - p(A)\left(p(B) - p((C\cap B)/A)\right)$$
$$= 1 - 0{,}80\,(0{,}30 - 0{,}2)$$

وبالتالي: $p(C\cup\bar{A}\cup\bar{B}) = 0{,}92$.

5 تحتوي صندوق على 10 كرات . n كرة من بين هذه الكرات سوداء والباقي بيضاء . نسحب تآنيا كرتين من هذا الصندوق

1) ما هو الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان :

أ- مختلفتي اللون .

ب- سوداوتي اللون .

ج- بيضاوتي اللون .

2) حدد n التي من أجلها يكون الاحتمال الأخير يساوي $\frac{7}{15}$.

n Ⓝ
(10−n) Ⓑ

الجواب : 1) ليكن Ω كون الإمكانيات .

لدينا: $card\,\Omega = C_{10}^{2} = 45$

ⓃⒷ

أ- الحدث "A" الحصول على كرتين مختلفتي اللون"

$$card\,A = C_{n}^{1}\times C_{(10-n)}^{1} = n(10-n)$$

ومنه: $p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = \frac{n(10-n)}{45}$

ب - الحدث B " الحصول على كرتين سوداوتين "

$$card B = C^2_{(10-n)} = \frac{(10-n)(9-n)}{2}$$

ومنه : $p(B) = \frac{card B}{card \Omega} = \frac{(10-n)(9-n)}{90}$

ج - الحدث C " الحصول على كرتين بيضاوتين "

$$card C = C^2_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

ومنه : $p(C) = \frac{card C}{card \Omega} = \frac{n(n-1)}{90}$

2) لدينا : $p(C) = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{90} = \frac{7}{15}$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 42 = 0$$

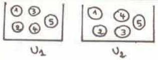
لأن : $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad p(C) = \frac{7}{15} \Leftrightarrow n = 7$

6 لدينا صندوقين U_1 و U_2 كل واحد منهما يحتوي على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5 . نسحب في آن واحد و بكيفية عشوائية كرتين من U_1 وكرة واحدة من U_2 . أحسب احتمال الأحداث التالية :

A " الحصول على رقمين فرديين ورقم زوجي .

B " الحصول على ثلاثة أرقام زوجية .

C " الحصول على ثلاثة أرقام مجموعها عدد زوجي .



الجواب : ليكن Ω كون الإمكانيات ،

$$card \Omega = C^2_5 C^1_5 = 50$$

I : فردي

P : زوجي

U_1	U_2
II	P
IP	I

لدينا : $card A = C^2_3 C^1_2 + C^1_3 C^1_3 C^1_2 = 24$

إذن : $p(A) = \frac{24}{50} = 0,48$

U_2	U_2
PP	P

لدينا : $card B = C^2_2 \times C^1_2 = 2$

إذن : $p(B) = \frac{2}{50} = 0,04$

U_1	U_2
II	P
IP	I
PP	P

لدينا : $card C = C^2_3 C^1_2 + C^1_3 C^1_2 C^1_3 + C^2_2 C^1_2 = 26$

إذن : $p(C) = \frac{26}{50} = 0,52$

7

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $n > 1$ وليكن S صندوق يحتوي على كرة واحدة تحمل الرقم 1 وكرتين تحملان الرقم 2 ، ......

و n كرة تحمل الرقم n.

1) كم عدد الكرات الموجودة في الصندوق S ؟

2) نسحب عشوائياً كرة من الصندوق S (نفترض أن العدد n زوجي)

ما هو الاحتمال لكي تكون الكرة المسحوبة

أ- تحمل رقماً زوجياً .

ب- تحمل رقماً فردياً .

3) نفترض في هذا السؤال أن عدد الكرات الموجودة في الصندوق S هو 21

ما هو الاحتمال لكي تكون الكرة المسحوبة تحمل رقماً أكبر قطعاً من 4.

الجواب : 1) عدد الكرات الموجودة هو :

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) نفترض أن : $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) ، ليكن Ω كون الامكانيات : $\text{card}\,\Omega = C^1_{\frac{n(n+1)}{2}}$

أ- الحدث A " الحصول على كرة تحمل رقماً زوجياً ". $\text{card}\,\Omega = \frac{n(n+1)}{2}$

لدينا :
$$\text{card}\,A = 2+4+6+\dots+2p$$
$$= 2(1+2+\dots+p)$$
$$= 2.\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)$$

بما أن : $p = \frac{n}{2}$ فإن : $\text{card}\,A = \frac{n(n+2)}{4}$

إذن :
$$p(A) = \frac{\frac{n(n+2)}{4}}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

أي :
$$p(A) = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

ب- الحدث B " الحصول على كرة تحمل رقماً فردياً ".

لدينا : $B = \overline{A}$ ومنه : $p(B) = 1 - p(A)$

أي :
$$p(B) = \frac{n}{2(n+1)}$$

3) إذا كان : $\frac{n(n+1)}{2} = 21$ فإن : $n^2+n-42=0$

لدينا : $n^2+n-42=0 \Leftrightarrow n=6$ أو $n=-7$

وبما أن : $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $n=6$.

الحدث C " الحصول على كرة تحمل رقمًا أكبر قطعًا من 4 "

لدينا رقمين أكبر قطعًا من 4 هما : 5 و 6 .

إذن : $card\, C = 5+6 = 11$

ومنه : $p(C) = \frac{11}{21}$

8 يحتوي صندوقاً (U) على 4 كرات حمراء تحمل الأرقام : 3 ـ 2 ـ 1 ـ 0 .
و 5 كرات خضراء تحمل الأرقام : 2 ـ 2 ـ 1 ـ 1 ـ 0 .

1) نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق (U).
أحسب احتمال الأحداث التالية :
A " الحصول بالضبط على كرتين من نفس اللون "
B " الحصول على ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى "
C " علماً أن الكرة المحصل عليها في السحبة الأولى تحمل رقم 0 فما هو الاحتمال أن تكون الثانية و الثالثة لهما نفس الرقم ".

2) نسحب تآنيًا 3 كرات من الصندوق (U) و ليكن S مجموع الأرقام المحصل عليها .
حدد قيم S و أحسب احتمال كل قيمة لـ S .

4Ⓡ : 0;1;2;3
5Ⓥ : 2;2;1;1;0

(U)

الجواب : 1) ليكن Ω كون الإمكانيات .

لدينا : $card\, \Omega = A_9^3 = 504$

A " الحصول بالضبط على كرتين من نفس اللون "

(R,R,V) أو (V,V,R) ، عدد حالات ترتيب الألوان هو : $C_3^2 = 3$

إذن : $card\, A = 3 \times A_5^2 \times A_4^1 + 3 \times A_5^1 \times A_4^2 = 420$

ومنه : $p(A) = \frac{420}{504} = \frac{5}{6}$

B " الحصول على ثلاثة أرقام مختلفة مثنى مثنى ."

$(0,1,2)$ أو $(0,1,3)$ أو $(0,2,3)$ أو $(1,2,3)$

وعدد حالات ترتيب الأرقام هو: $3! = 6$

إذن: $\text{card}\, B = 6\left(A_2^1 \times A_3^1 \times A_3^1 + A_2^1 \times A_3^1 \times A_1^1 + A_2^1 \times A_3^1 \times A_1^1 + A_3^1 \times A_3^1 \times A_1^1\right)$

$$\text{card}\, B = 234$$

ومنه: $$p(B) = \frac{234}{504} = \frac{13}{28}$$

C " علماً أن الكرة المحصل عليها في السحبة الأولى رقم 0 فما هو الاحتمال أن تكون الثانية والثالثة من نفس اللون ."

لدينا الاحتمال الشرطي .

نعتبر الحدثين: C_1 " الحصول على الرقم 0 في السحبة الأولى "

C_2 " الحصول على كرتين من نفس الرقم في السحبة الثانية والثالثة ".

$C_1 \leftarrow (0;?;?)$

$C_2 \leftarrow (?;1;1)$ أو $(?;0;0)$ أو $(?;2;2)$

الاحتمال المطلوب:
$$p(C) = p(C_2 | C_1)$$
$$p(C) = \frac{p(C_2 \cap C_1)}{p(C_1)}$$

$C_1 \cap C_2$: " الحصول على الرقم 0 في السحبة الأولى وعلى كرتين من نفس الرقم في السحبة الثانية والثالثة ."

أي: $(0;1;1)$ أو $(0;2;2)$.

لدينا: $\text{card}(C_1 \cap C_2) = A_2^1 A_3^2 + A_2^1 \cdot A_3^2 = 24$ إذن: $p(C_1 \cap C_2) = \frac{24}{504}$

$\text{card}\, C_1 = A_2^1 A_8^1 A_7^1 = 112$ إذن: $p(C_1) = \frac{112}{504}$

ومنه: $$p(C) = \frac{24}{112} = \frac{3}{14}$$

2) نلخص قيم S في الجدول التالي .

S=1	S=2	S=3	S=4	S=5	S=6	S=7
$\{0,0,1\}$	$\{0,0,2\}$ $\{0,1,1\}$	$\{0,1,3\}$ $\{0,2,2\}$ $\{1,1,1\}$	$\{0,1,3\}$ $\{0,2,2\}$ $\{1,1,2\}$	$\{0,2,3\}$ $\{1,1,3\}$ $\{1,2,2\}$	$\{1,2,3\}$ $\{2,2,2\}$	$\{2,2,3\}$

ليكن Ω كون الإمكانيات لدينا : $\text{card}\,\Omega = C_9^3 = 84$

$$p(S=1) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{84} = \frac{3}{84}$$

$$p(S=2) = \frac{C_2^2 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_3^2}{84} = \frac{9}{84}$$

$$p(S=3) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 C_1^1 + C_2^1 C_3^2 + C_3^3}{84} = \frac{20}{84}$$

$$p(S=4) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 . C_1^1 + C_2^1 . C_3^2 + C_3^2 C_3^1}{84} = \frac{21}{84}$$

$$p(S=5) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 . C_1^1 + C_3^2 . C_1^1 + C_3^1 C_3^2}{84} = \frac{18}{84}$$

$$p(S=6) = \frac{C_3^1 C_3^1 C_1^1 + C_3^3}{84} = \frac{10}{84}$$

$$p(S=7) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{84} = \frac{3}{84}$$

9

تحتوي صندوق على كرتين بيضاوتين و ثلاث كرات حمراء و خمس كرات سوداء .

نسحب بالتتابع و بإحلال ثلاث كرات من الصندوق ، ماهي احتمالات الأحداث التالية :

A " سحب كرة بيضاء ثم كرة سوداء ثم كرة حمراء "

B " سحب كرة من كل لون "

C " سحب كرة حمراء خلال السحبة الثانية "

D " سحب كرة حمراء خلال السحبة الثانية و لأول مرة "

E " سحب على الأقل كرتين سوداوتين "

F " سحب على الأكثر كرة بيضاوتين "

الجواب : ليكن Ω كون الامكانيات

2(B) 5(N) 3(R)

لدينا: $\text{card}\,\Omega = 10^3 = 1000$

A: " سحب كرة بيضاء ثم كرة سوداء ثم كرة حمراء " $(B\,;N\,;R)$

لدينا: $\text{card}\,A = 2\times5\times3 = 30$

ومنه: $p(A) = \frac{30}{1000} = 0{,}030$

B: " سحب كرة من كل لون " ← $(B;N;R)$ وعدد الترتيبات لهذه الألوان هو: $3! = 6$

إذن: $\text{card}\,B = 6(2\times5\times3) = 180$

ومنه: $p(B) = \frac{180}{1000} = 0{,}180$

C: " سحب كرة حمراء في السحبة الثانية " ← $(?\,;R\,;?)$

$\text{card}\,C = 10\times3\times10 = 300$

ومنه: $p(C) = \frac{300}{1000} = 0{,}300$

D: " سحب كرة حمراء في السحبة الثانية ولأول مرة " ← $(\bar{R}\,;R\,;?)$

$\text{card}\,D = 7\times3\times10 = 210$

ومنه: $p(D) = \frac{210}{1000} = 0{,}210$

E: " سحب على الأقل كرتين سوداوتين " ←

$(N;N;\bar{N})$ عدد الحالات الممكنة للترتيب هو: $C_3^1 = 3$

أو $(N;N;N)$

إذن: $\text{card}\,E = 3(3^2\times7) + 3^3 = 216$

ومنه: $p(E) = \frac{216}{1000} = 0{,}216$

F: " سحب على الأكثر كرتين بيضاوتين " ←

$(B;B;\bar{B})$ عدد الحالات الممكنة للترتيب هو: $C_3^1 = 3$

أو $(B;\bar{B};\bar{B})$ عدد الحالات الممكنة للترتيب هو: $C_3^2 = 3$

أو $(\bar{B};\bar{B};\bar{B})$

إذن: $\text{card}\,F = 3(2^2\times8 + 2^1\times8^2) + 8^3 = 992$ ومنه: $p(F) = \frac{992}{1000} = 0{,}992$

10 نعتبر صندوقين : U_1 يحتوي على 3 كرات بيضاء و كرتين لونهما أسود
U_2 يحتوي على كرتين لونهما أبيض وكرتين لونهما أسود

1) نعتبر التجربة ع : " سحب تآنيا كرتين من U_1 ونسحب تآنيا كرتين من U_2 "

أ - ما هو الاحتمال الحصول على الأقل كرتين لونهما أبيض ؟.

ب - نكرر التجربة ع خمس مرات متتالية وعند كل مرة نعيد الكرتين إلى الصندوق الذي سحبنا منه.
هو احتمال الحصول على الأقل كرتين لونهما أبيض بالضبط ثلاث مرات ؟

2) نسحب تآنيا كرتين من U_1 ونضعها في U_2 ثم نسحب بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من U_2.

أ - علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 بيضاوتين فما هو احتمال سحب كرتين بيضاوتين وكرة سوداء من U_2 ؟

ب - علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 لهما نفس اللون فما هو احتمال سحب كرتين بيضاوتين وكرة سوداء من U_2 ؟

الجواب :

3B 2N	2B 2N
U_1	U_2

1) عدد امكانيات التجربة ع هو : $card\,\Omega = C_5^2 \times C_4^2 = 60$

أ - الحدث A : " الحصول على الأقل كرتين لونهما أبيض ".

لدينا الحدث المضاد $\bar{A}$: " الحصول على الأكثر كرة بيضاء " ← 4N أو B,3N

الحالات الممكنة هي :

U_1	BN	NN	NN
U_2	NN	BN	NN

إذن : $card\,\bar{A} = C_3^1 C_2^1 C_2^2 + C_2^2 C_2^1 C_2^1 + C_2^2 C_2^2 = 11$

ومنه : $p(\bar{A}) = \frac{11}{60}$

إذن : $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{11}{60}$

أي : $p(A) = \frac{49}{60}$

ب - احتمال الحصول على الحدث A ثلاث مرات بالضبط خلال إعادة التجربة ع خمس مرات متتالية هو :

$$p = C_5^3 (p(A))^3 \times (1 - p(A))^2 = 10\left(\frac{49}{60}\right)^3 \times \left(\frac{11}{60}\right)^2$$

$$p = \frac{14235529}{23814} \cdot 10^{-4}$$

ع) أ- نعتبر الحدثين :

الحدث المحقق B_1 : " الحصول على كرتين بيضاوتين من U_1 "

B_2 : " الحصول على كرتين بيضاوتين وكرة سوداء من U_2 "

المطلوب حساب $P(B_2 | B_1)$.

لدينا :
$$p(B_2 | B_1) = \frac{p(B_2 \cap B_1)}{p(B_1)}$$

لدينا :
$$p(B_2 \cap B_1) = \frac{C_3^2 \times A_4^2 \times A_2^1}{C_5^2 A_6^3}$$

$$p(B_1) = \frac{C_3^2}{C_5^2}$$

ومنه :
$$p(B_2 | B_1) = \frac{A_4^2 \times A_2^1}{A_6^3} = \frac{1}{5}$$

ب- نعتبر الحدث C : " الحصول على كرتين من نفس اللون من U_1 "

المطلوب حساب $p(B_2 | C)$

لدينا :
$$p(B_2 | C) = \frac{p(B_2 \cap C)}{p(C)}$$

لدينا :
$$p(B_2 \cap C) = \frac{C_3^2 \times A_4^2 \times A_2^1 + C_2^2 \times A_2^2 A_4^1}{C_5^2 \times A_6^3} = \frac{80}{1200}$$

$$p(C) = \frac{C_3^2 + C_2^2}{C_5^2} = \frac{4}{10}$$

ومنه :
$$p(B_2 | C) = \frac{1}{6}$$

11

تتكون مجموعة من الأشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد يسمى إبراهيم و إمرأة تسمى فاطمة .

تريد هذه المجموعة وبواسطة القرعة إختيار لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام .

1) ماهو عدد اللجن التي يمكن تكوينها .؟

2) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A " تكوين لجنة تضم ثلاثة رجال "

B " تكوين لجنة تضم رجلاً وامرأتين "

C " تكوين لجنة تضم إما إبراهيم و إما فاطمة "

الجواب : 1) عدد اللجن التي يمكن تكوينها هو: $C_{12}^3 = 220$ lcndr

2) لدينا :

$$p(A) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

$$p(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$$

$$p(C) = \frac{C_1^1 C_{10}^2 + C_1^1 C_{10}^2}{C_{12}^3} = \frac{90}{220} = \frac{9}{22}$$

12

يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء و4 كرات سوداء غير قابلة للتمييز باللمس .

نجري سلسلة من السحبات : في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الكيس إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب وإذا كانت بيضاء نعيدها إلى الكيس ونسحب كرة أخرى و هكذا دواليك .

أحسب احتمال الحدثين :

A : " الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء "

B : " الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء " .

الجواب : لدينا :

$\boxed{3B \ ; \ 4N}$

$$P(A) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

$$P(B) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} = \frac{2}{7}$$

13 يجب على متسابق أن يجتاز n حاجزاً : O_1 و O_2 و ..... و O_n.
نفترض أن احتمال اجتياز الحاجز O_i بنجاح هو $\frac{1}{2^i}$ لكل $1 \leq i \leq n$.
(نفترض أن القفزات مستقلة فيما بينها)
1) ماهو الاحتمال أن يجتاز المتسابق جميع الحواجز بنجاح ؟
2) ماهو الاحتمال أن يفشل المتسابق فقط في اجتياز الحاجز رقم k ؟
3) ماهو الاحتمال أن يفشل المتسابق في اجتياز حاجز واحد فقط ؟

الجواب : 1) ليكن A الحدث : " اجتياز جميع الحواجز بنجاح ".
أي : O_1 و O_2 و .... و O_n
إذن : $p(A) = p(O_1) \times p(O_2) \times \cdots \times p(O_n)$ (لأن الأحداث $O_1, O_2, \ldots, O_n$ مستقلة)

$$p(A) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+2+\cdots+n)}$$

ومنه : $p(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (لأن : $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$)

2) B_k الحدث : " الفشل فقط في الحاجز رقم k "
أي : $O_1, \ldots, O_{k-1}, \overline{O_k}, O_{k+1}, \ldots, O_n$

$$p(B_k) = p(O_1) \times p(O_2) \times \cdots \times p(O_{k-1}) p(\overline{O_k}) \times p(O_{k+1}) \cdots p(O_n)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k (2^k - 1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه : $p(B_k) = (2^k - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3) B الحدث : " الفشل في اجتياز حاجز واحد "
أي : $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ و $B_i \cap B_j = \phi$: $i \neq j$

ومنه :
$$p(B) = \sum_{k=1}^{n} p(B_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=1}^{n} (2^k - 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times \left[2\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) - n\right]$$

وبالتالي : $p(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \times (2^{n+1} - n - 2)$

14

لدينا n صندوقاً مرقمة من 1 إلى n حيث n عدد فردي أكبر قطعاً من 1

كل صندوق يحمل رقماً i يحتوي على i كرة بيضاء وعلى $(n-i)$ كرة سوداء

نختار عشوائياً صندوقاً من بين الصناديق ثم نسحب منه عشوائياً

كرة واحدة .

1) ماهو الإحتمال اختيار صندوق يحمل رقماً فردياً ؟

2) ماهو احتمال سحب كرة بيضاء ؟

3) ماهو الاحتمال لكي تكون الكرة المسحوبة بيضاء إذا علمنا أنها مسحوبة من صندوق يحمل رقماً فردياً ؟

4) إذا علمنا أن الكرة المسحوبة سوداء فماهو الاحتمال لكي تكون مسحوبة من صندوق يحمل رقماً فردياً ؟

الجواب : 1) لدينا n صندوقاً مرقمة من 1 إلى n حيث n فردي أكبر قطعاً من 1

$\boxed{i\,B\ ;\ (n-i)\,N}$ (i) $\qquad n=2k+1$

$1 \le i \le 2k+1$

الحدث A " الصندوق يحمل رقماً فردياً " .

بما أن عدد الصناديق هو n وعدد الصناديق التي تحمل رقماً فردياً هو $k+1$.

فإن : $p(A)=\frac{k+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$ (لأن : $k=\frac{n-1}{2}$)

2) الحدث B " الكرة المسحوبة بيضاء " .

الحدث B_i " اختيار الصندوق الذي يحمل رقم i "

بما أن $B_i \cap B_j=\emptyset$ $i\neq j$ و $\bigcup_{i=1}^{n} B_i=\Omega$ و $B=B\cap\Omega$

فإن : $p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(B\cap B_i)$

وبما أن : $p(B\cap B_i)=p(B_i)\times p(B/B_i)$ و $p(B_i)=\frac{1}{n}$ لكل $1\le i\le n$

فإن : $p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(B_i)p(B/B_i)$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p(B/B_i)$

$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$ (لأن : $p(B/B_i)=\frac{i}{n}$)

وبالتالي : $p(B)=\frac{n+1}{2n}$ (لأن : $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$)

15 يحتوي صندوق على أربع كرات حمراء وثلاث خضراء (لا يمكن التمييز بين جميع الكرات باللمس)
نسحب كرة واحدة من الصندوق :
- إذا كانت حمراء نسحب تآنيا كرتين من بين الكرات المتبقية.
- إذا كانت خضراء نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من بين الكرات المتبقية.
1) أ- ماهو عدد الإمكانيات ؟
ب- أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون.
2) إذا علمت أنه حصلنا على كرتين خضراوين بالضبط ، أحسب احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة خضراء.

الجواب : 1) أ- لدينا C_4^1 إمكانية لسحب كرة حمراء من الصندوق و C_6^2 إمكانية لسحب كرتين تآنيا من بين الكرات المتبقية.

3Ⓥ	4Ⓡ

ولدينا C_3^1 إمكانية لسحب كرة خضراء من الصندوق و A_6^2 إمكانية لسحب كرتين بالتتابع وبدون إحلال من بين الكرات المتبقية.

ومنه عدد الإمكانيات هو : $card\,\Omega = C_4^1 \times C_6^2 + C_3^1 \times A_6^2 = 150$
حيث Ω كون الإمكانيات.

ب- A " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون " ⟸ 3Ⓥ أو 3Ⓡ

ليكن A_1 الحدث : " الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء "
الحدث B_1 : " الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية حمراء "
الحدث B_2 : " الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية خضراء "
الحدث $\overline{A_1}$: " الكرة المسحوبة في المرة الأولى خضراء "

لدينا : $A = (A_1 \cap B_1) \cup (\overline{A_1} \cap B_2)$ و $(A_1 \cap B) \cap (\overline{A_1} \cap B_2) = \phi$

ومنه : $p(A) = p(A_1 \cap B_1) + p(\overline{A_1} \cap B_2)$

$$= p(A_1)p(B_1 / A_1) + p(\overline{A_1})p(B_2 / \overline{A_1})$$

أي : $$p(A) = \frac{4}{7} \times \frac{C_3^2}{C_6^2} + \frac{3}{7} \times \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{7}$$

2) لنحسب احتمال سحب كرة خضراء في المرة الأولى علماً أننا حصلنا على كرتين خضراوين بالضبط. (لدينا احتمال شرطي)

A_1 الحدث: " الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء "

B_1 الحدث: " الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية خضراوين ".

C الحدث: " الكرتان المسحوبتان في المرة الثانية مختلفتا اللون ".

E " من بين الكرات الثلاثة المسحوبة كرتين خضراوين بالضبط ".

المطلوب حساب: $p(\overline{A_1}/E)$

لدينا: $p(\overline{A_1}/E) = 1 - p(A_1/E)$

$$= 1 - \frac{p(A_1 \cap E)}{p(E)} = 1 - \frac{p(A_1)p(E/A_1)}{p(E)}$$

لدينا: $E = (\overline{A_1} \cap C) \cup (A_1 \cap B_1)$ و $(A_1 \cap B_1) \cap (\overline{A_1} \cap C) = \phi$

ومنه: $p(E) = p(\overline{A_1} \cap C) + p(A_1 \cap B_1)$

$$= p(\overline{A_1})p(C/\overline{A_1}) + p(A_1)p(B_1/A_1)$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{2A_2^1 A_4^1}{A_6^2} + \frac{4}{7} \times \frac{C_3^2}{C_6^2}$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{8}{15} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{15}.$$

ومنه: $p(E) = \frac{12}{35}$

$$p(E/A_1) = \frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

إذن: $p(\overline{A_1}/E) = 1 - \dfrac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{5}}{\frac{12}{35}}$

وبالتالي: $p(\overline{A_1}/E) = \frac{2}{3}$.

16 نعتبر نرداً له وجه يحمل رقم 1 ووجهان يحملان رقم 2 وثلاثة وجوه تحمل رقم 3. نعتبر صندوقاً يحتوي على 3 كرات حمراء وعلى 4 كرات خضراء. نعتبر التجربة (ع): "نرمي النرد فنحصل على رقم k ثم نسحب تآنياً k كرة من الصندوق" $(k \in \{1,2,3\})$

1) ماهو احتمال الحصول على كرات حمراء فقط؟

2) ماهو احتمال الحصول على كرات خضراء فقط علماً أن النرد أعطى رقماً فردياً؟

الجواب: لدينا:

$\boxed{3Ⓡ \quad 4Ⓥ}$ (U)

النرد D: 1 ؛ $2-2$ ؛ $3-3-3$

1) نعتبر الحدث: D_i " النرد D أعطى رقم i " $i\in\{1,2,3\}$

و الحدث: R " الحصول على كرات حمراء "

لدينا: $p(R) = p(D_1)p(R|D_1) + p(D_2)p(R|D_2) + p(D_3)p(R|D_3)$

$$p(R) = \frac{1}{6}\times\frac{C_3^1}{C_7^1} + \frac{2}{6}\times\frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{3}{6}\times\frac{C_3^3}{C_7^3} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$$

2) احتمال الحصول على كرات خضراء فقط علما أن النرد أعطى رقما فرديا

هو: $$p(V/D_1\cup D_3) = \frac{p(V\cap(D_1\cup D_3))}{p(D_1\cup D_3)}$$

حيث V الحدث " الحصول على كرات خضراء "

لدينا: $$p(V|D_1\cup D_3) = \frac{p(D_1)p(V|D_1) + p(D_3)p(V|D_3)}{p(D_1)+p(D_3)}$$

$$p(V|D_1\cup D_3) = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{C_4^1}{C_7^1} + \frac{3}{6}\times\frac{C_4^3}{C_7^3}}{\frac{1}{6}+\frac{3}{6}} = \frac{8}{5}$$

17

تضم طائرة سياحية صغيرة الحجم 20 مقعدا مرقمة من 1 إلى 20.
بعد دراسات متعددة تبين أن النسبة المتوسطة للمقاعد المحجوزة ساعة قبل الإقلاع هي 70%.

تقدم مسافر، ساعة قبل الإقلاع، لحجز مقعد.

1) نفترض أن كل المقاعد لها نفس الإحتمال لكي تكون محجوزة.

ماهو الاحتمال لكي يجد المسافر:

أ- مقعدا ما شاغرا ؟

ب- ثلاثة مقاعد بالضبط شاغرة ؟

2) نفترض أن النسبة المتوسطة للمقاعد المحجوزة التي تحمل رقما زوجيا هو ضعف النسبة المتوسط للمقاعد المحجوزة التي تحمل رقما فرديا.

ماهو الإحتمال لكي يجد المسافر مقعدا شاغرا يحمل رقما قابلا للقسمة على 5؟

الجواب: 1) أ- الحدث A: " المسافر يجد مقعدا ما شاغرا "

الحدث $\bar{A}$: " المسافر يجد مقاعد محجوزة "

لدينا : $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{70}{100}$ (لأن : $p(\bar{A}) = \frac{70}{100}$)

ومنه : $p(A) = 0,30$

ب ـ الحدث B " المسافر يجد بالضبط ثلاثة مقاعد شاغرة "

أي : " المسافر يجد 17 مقعد محجوز " .

بما أن أن الاحتمال يحسب بالنسبة المتوسطة فإنه لدينا :

$$20 \times \frac{7}{100} = 14 \longrightarrow \frac{70}{100}$$

$$17 \longrightarrow p(B)$$

ومنه : $p(B) = \frac{70 \times 17}{100 \times 14}$ أي : $p(B) = 0,85$

ج) ليكن C الحدث " المسافر يجد مقعد " يحمل رقما قابلا للقسمة على 5 . "

لدينا : $C = C_1 \cup C_2$ حيث : $C_1 = \{5, 15\}$ و $C_2 = \{10, 20\}$

ولدينا : $C = (C \cap A) \cup (C \cap \bar{A})$ حيث : $(C \cap A) \cap (C \cap \bar{A}) = \emptyset$

A الحدث : " المسافر يجد مقعد " شاغر "

إذن : $p(C) = p(C \cap A) + p(C \cap \bar{A})$

$$p(C \cap A) = p(C) - p(C \cap \bar{A})$$

$$= p(C) - p(\bar{A})\, p(C / \bar{A})$$

$$= \frac{4}{20} - \frac{70}{100} \times p(C / \bar{A})$$

لدينا : $p(C / \bar{A}) = p(C_1 / \bar{A}) + p(C_2 / \bar{A})$

ليكن : $p(C_1 / \bar{A}) = 2p$ و $p(C_2 / \bar{A}) = 2q$

p و q هما احتمال سحب مقعد " علما أنهما يحملان على التوالي

رقم عدد فردي ورقم زوجي بحيث : $\begin{cases} 5(2p + 2q) = 1 \\ q = 2p \end{cases}$

إذن : $30p = 1$ أي : $p = \frac{1}{30}$ ومنه : $q = \frac{2}{30}$

وبالتالي : $p(C \cap A) = \frac{4}{20} - \frac{70}{100} \times \frac{1}{5}$ أي : $p(C \cap A) = 0,06$

18 يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كرات خضراء وكرتين حمراوين ويحتوي صندوق U_2 على ثلاث كرات حمراء وكرتين خضراوين.

نسحب كرة واحدة من الصندوق U_1 و نسحب تآنيا كرتين من الصندوق U_2.

(نعتبر أنه لا يمكن التمييز عند السحب بين جميع الكرات)

1) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A "الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء"

B "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

2) أحسب احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل علما أن الكرة المسحوبة من الصندوق U_1 حمراء.

الجواب: 1) ليكن Ω كون الامكانيات.

$3V$ $2R$	$3R$ $2V$
U_1	U_2

لدينا: $card\,\Omega = C_5^1 \times C_5^2 = 50$

A "الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء"

$cardA = C_2^1 C_3^1 C_2^1 + C_3^1 C_3^2 = 21$

ومنه: $p(A) = \frac{21}{50}$

U_1	R	V
U_2	RV	RR

B "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

$cardB = C_2^1 C_3^2 + C_3^1 C_2^2 = 9$

ومنه: $p(B) = \frac{9}{50}$

U_1	R	V
U_2	RR	VV

2) لنحسب احتمال الحصول على كرة خضراء على الأقل علما أن الكرة المسحوبة من الصندوق U_1 حمراء. (احتمال شرطي)

ليكن C: "الحصول على كرة خضراء على الأقل"

D: "الكرة المسحوبة من U_1 حمراء"

إذن المطلوب هو حساب: $p(C/D) = \frac{p(C\cap D)}{p(D)}$

لدينا: $p(D) = \frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5} = \frac{20}{50}$

$C\cap D$: "الحصول على الأقل كرة خضراء والكرة المسحوبة من U_1 حمراء".

$p(C\cap D) = \frac{C_2^1 C_3^1 C_2^1 + C_2^1 C_3^2}{50} = \frac{18}{50}$

U_1	R	R
U_2	RV	RR

إذن: $p(C/D) = \frac{\frac{18}{50}}{\frac{20}{50}}$ أي: $p(C/D) = 0,90$

19 في مصنع ، نقوم باستدعاء تقني لإصلاح الآلات التي وقعت فيها عطب . فكل اسبوع نقرر بالنسبة لكل آلة تستدعي التقني أم لا . بالنسبة لبعض الآلات لاحظ التقني أنه :

* يجب التدخل في الأسبوع الأول .

* وإذا تدخل في الأسبوع n ، احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$ هو $\frac{3}{4}$ ،

* وإذا لم يتدخل في الأسبوع n ، احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$ هو $\frac{1}{10}$ ،

نرمز بـ E_n بالحدث : " التقني تدخل في الأسبوع n "

ونرمز بـ P_n باحتمال حصول الحدث E_n أي : $P_n = P(E_n)$

1) أحسب الاحتمالات التالية :

$P(E_1)$ ؛ $P(E_{n+1}/E_n)$ ؛ $P(E_{n+1}/\overline{E_n})$

2) حدد بدلالة P_n الاحتمالين :

$P(E_{n+1} \cap E_n)$ ؛ $P(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$

3) استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : P_{n+1} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10}$

4) حدد P_n بدلالة n . (يمكنك وضع $q_n = P_n - \frac{2}{7}$)

5) ما هي قيم n لكي يكون احتمال تدخل التقني في الأسبوع n ، أصغر من أو يساوي $\frac{3}{10}$.

الجواب : 1) E_n الحدث : " التقني تدخل في الأسبوع n " . $n \in \mathbb{N}^*$

إذن : E_1 الحدث : " التقني تدخل في الأسبوع الأول " .

ومنه : $P_1 = P(E_1) = 1$.

* " إذا تدخل التقني في الأسبوع n فإن احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$ هو : $\frac{3}{4}$ " يعني أن : $P(E_{n+1} / E_n) = \frac{3}{4}$ (احتمال الشرطي)

* " إذا لم يتدخل التقني في الأسبوع n فإن احتمال التدخل في الأسبوع $(n+1)$ هو : $\frac{1}{10}$ " يعني أن : $P(E_{n+1} / \overline{E_n}) = \frac{1}{10}$ (احتمال الشرطي)

حيث : $\overline{E_n}$ الحدث المضاد لـ E_n أي : " التقني لم يتدخل في الأسبوع n " .

2) نعلم أن : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$: صيغة الاحتمالات المركبة

إذن : $P(E_{n+1} \cap E_n) = P(E_n) \times P(E_{n+1} / E_n)$

وبما أن : $\begin{cases} P(E_{n+1} | E_n) = \frac{3}{4} \\ P_n = P(E_n) \end{cases}$ فإن : $P(E_{n+1} \cap E_n) = \frac{3}{4} P_n$

ولدينا : $P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = P(\bar{E}_n) \times P(E_{n+1} | \bar{E}_n)$

بما أن : $\begin{cases} P(E_{n+1} | \bar{E}_n) = \frac{1}{10} \\ P(\bar{E}_n) = 1 - P(E_n) = 1 - P_n \end{cases}$ فإن : $P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = \frac{1}{10}(1 - P_n)$

3) لدينا : $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$ و $(E_{n+1} \cap E_n) \cap (E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = \phi$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = P(E_{n+1}) = P(E_{n+1} \cap E_n) + P(E_{n+1} \cap E_n)$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : P(E_{n+1} \cap E_n) = \frac{3}{4} P_n$ و $P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = \frac{1}{10}(1 - P_n)$

فإن : $P_{n+1} = \frac{3}{4} P_n + \frac{1}{10}(1 - P_n)$

أي : $P_{n+1} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

4) لدينا لكل n من $\mathbb{N}^*$: $P_{n+1} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10}$

نضع : $q_n = P_n - \frac{2}{7}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$:

لدينا : $q_{n+1} = P_{n+1} - \frac{2}{7} = \frac{13}{20} P_n + \frac{1}{10} - \frac{2}{7}$

$q_{n+1} = \frac{13}{20} P_n - \frac{13}{20} = \frac{13}{20}\left(P_n - \frac{2}{7}\right)$

ومنه : $q_{n+1} = \frac{13}{20} q_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

إذن : $(q_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{13}{20}$ وحدها الأول $q_1 = \frac{5}{7}$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N}^* : q_n = \frac{5}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}$

وبما أن : $q_n = P_n - \frac{2}{7}$ فإن : $P_n = q_n + \frac{2}{7}$

ومنه : $P_n = \frac{5}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} + \frac{2}{7}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$:

5) لنحدد n بحيث يكون لدينا : $P_n \leq \frac{3}{10}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

لدينا : $P_n \leq \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{7}\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} + \frac{2}{7} \leq \frac{3}{10}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{50}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} \leq \ln\left(\frac{1}{50}\right)$

$\Leftrightarrow (n-1)\ln\left(\frac{13}{20}\right) \leq -\ln 50$

إذن : $n-1 \geq -\dfrac{\ln 50}{\ln\frac{13}{20}}$ أي ، $n \geq 1+\dfrac{\ln 50}{\ln\frac{20}{13}} \simeq 10{,}08$

لنأخذ إذن : $n \geq 11$.

20 نرمي ثلاثة نرود مكعبة وغير مغشوشة ؛ وجوهها مرقمة من 1 إلى 6.

نعتبر الحدثين : A " الحصول على الأقل على الرقم 6 "

B " نردين على الأقل يعطون نفس الرقم "

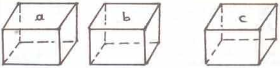
1) أ- أحسب احتمال كل من الأحداث التالية : $\bar{A}$ و $\bar{B}$ و A و B .

ب- أحسب احتمال الحدث $\bar{A}\cap\bar{B}$.

2) لاحظ أن : $\bar{A} = (\bar{A}\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$ ، استنتج من السؤال 1) احتمال الحدث $\bar{A}\cap B$.

3) بطريقة مماثلة أحسب احتمال الحدث $A\cap B$ ؛ هل الحدثين A و B مستقلان؟

الجواب :



$\Rightarrow (a;b;c)$

ليكن Ω كون الإمكانيات لدينا : $\mathrm{card}\,\Omega = 6^3 = 216$

1) A : " الحصول على الأقل على الرقم 6 "

$\bar{A}$: " عدم الحصول على الرقم 6 ".

لدينا : $\mathrm{card}\,\bar{A} = 5^3$ إذن : $p(\bar{A}) = \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{125}{216}$

B : " نردين على الأقل يعطون نفس الرقم "

$\bar{B}$: " النرود الثلاثة تعطي أرقام مختلفة مثنى ، مثنى "

لدينا : $\mathrm{card}\,\bar{B} = A_6^3 = 120$ إذن : $p(\bar{B}) = \dfrac{120}{216} = \dfrac{5}{9}$

بما أن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$ فإن : $p(A) = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}$

و بما أن : $p(B)=1-p(\overline{B})$ فإن : $p(B)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

ب - لدينا : $\overline{A}\cap\overline{B}$ الحدث " الأرقام مختلفة مثنى مثنى و لا تأخذ على الرقم 6 "

لدينا : $card(\overline{A}\cap\overline{B})=A_5^3=60$ إذن : $p(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{60}{216}=\frac{5}{18}$

2) بما أن : $\overline{A}=(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$ و $(\overline{A}\cap B)\cap(\overline{A}\cap\overline{B})=\emptyset$

فإن : $p(\overline{A})=p(\overline{A}\cap B)+p(\overline{A}\cap\overline{B})$

ومنه : $p(\overline{A}\cap B)=p(\overline{A})-p(\overline{A}\cap\overline{B})$

$$p(\overline{A}\cap B)=\frac{125}{216}-\frac{5}{18}$$

أي : $p(\overline{A}\cap B)=\frac{65}{216}$

3) بالمثل لدينا : $B=(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})$ و $(B\cap A)\cap(B\cap\overline{A})=\emptyset$

إذن : $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})$

ومنه : $p(A\cap B)=p(B)-p(B\cap\overline{A})$

$$p(A\cap B)=\frac{4}{9}-\frac{65}{216}$$

أي : $p(A\cap B)=\frac{31}{216}$.

لدينا : $P(A)\times P(B)=\frac{91}{216}\times\frac{4}{9}=\frac{91}{486}$

إذن : $P(A)\times P(B)\neq P(A\cap B)$

ومنه الحدثان A و B غير مستقلان .

21 صندوق U يحتوي على كرتين بيضاوين وأربع كرات سوداء .
نسحب بالتتابع وبإحلال n كرة من الصندوق . ($n\geq 2$). (نفترض أنه لا يمكن التمييز بين جميع الكرات باللمس) .
ليكن P_n احتمال حصول على كرة بيضاء للمرة الثانية في السحبة n .
1) نعتبر الحالات الخاصة : $n=2$ ؛ $n=3$ ؛ $n=4$

أحسب الاحتمالات : p_2 ؛ p_3 ؛ p_4 .

2) أحسب احتمال كل من الاحتمالات التالية :

E_n : " الحصول على كرة بيضاء بالضبط خلال $(n-1)$ سحب أول " .

E'_n : " الحصول على كرة بيضاء في السحبة n "

واستنتج قيمة p_n بدلالة n .

3) نضع : $S_n = p_2 + p_3 + \dots + p_n$ $(n \geq 2)$

أ- اعط تعبير مبسط لـ S_n بدلالة n

(يمكنك استعمال المتساوية : $1+2x+\dots+(n-1)x^{n-2} = \frac{(n-1)x^n - nx^{n-1}+1}{(1-x)^2}$ (1) $x\neq 1$)

ب- بين أن لكل $n\geq 2$: $S_n \leq 1$ و أن : $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

الجواب : 1) حساب p_2 ؛ p_3 ؛ p_4

2(B) 4(N)
U

احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق U

هو : $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

واحتمال سحب كرة سوداء من الصندوق U هو : $p(N) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

لدينا :
$$p_2 = p(\{BB\}) = p(B)\times p(B) = \frac{1}{9}$$
$$p_3 = p(\{BNB ; NBB\}) = 2(p(B))^2\times p(N) = \frac{4}{27}$$
$$p_4 = p(\{BNNB ; NBNB , NNBB\})$$
$$p_4 = 3(p(B))^2\times(p(N))^2$$

2) حساب p_n :

لدينا الحدث : E_n : " الحصول على كرة بيضاء بالضبط خلال $(n-1)$ سحب أول"

إذن : $p(E_n) = C^1_{n-1}\, p(B)(p(N))^{n-2}$

$$p(E_n) = (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

الحدث : E'_n : " سحب كرة بيضاء في السحبة n "

$$p(E'_n) = p(B) = \frac{1}{3}$$

لدينا : $E_n\cap E'_n$ " حصول على كرة بيضاء للمرة الثانية في السحبة n "

ومنه : $p_n = p(E_n\cap E'_n)$

بما أن الحدثين E_n و E'_n مستقلان فإن : $P_n = P(E_n) \times P(E'_n)$

ومنه : $P_n = \frac{n-1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$: $\forall n \geq 2$

3) أ- حساب S_n :

لدينا : $$S_n = \sum_{k=2}^{n} P_k = \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n}(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2}}$$ (حسب المتساوية (1))

$$= n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \left(\frac{2}{3}-1\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1$$

وبالتالي : $$S_n = -\frac{n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1$$

بما أن : $-\frac{n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \leq 0$ فإن : $S_n \leq 1$: $\forall n \geq 2$

لنبين أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$: لدينا : $S_n = -\frac{n}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1$

بما أن : $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ فإن : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 0$

لنبين إذن أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = 0$.

نضع : $u_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

لدينا : $$\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \to +\infty}\left(\ln n + n\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \to +\infty}\left[n\left(\frac{\ln n}{n} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)\right] = -\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{\ln(u_n)} = 0$ (لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$)

وبالتالي : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

22 يحتوي صندوق على مائة كرة مرقمة من 1 إلى 100
نسحب عشوائياً وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .
1) أ- أحسب P_0 احتمال الحصول على أعداد ليست مربعات كاملة .
ب - أحسب P' احتمال الحصول على الأقل على عدد مربع كامل.
2) أحسب P_i احتمال الحصول بالضبط على i عدد مربعات كاملة $(i \in \{1,2,3\})$
3) قارن العددين : P' و $P_1+P_2+P_3$
وأحسب : $P_0+P_1+P_2+P_3$.

الجواب : من بين مائة عدد من 1 إلى 100 لدينا عشرة أعداد مربعات كاملة وهي : 1^2 ، 2^2 ، 3^2 ، ...... ، 10^2 .

1) ليكن Ω كون الإمكانيات لدينا : $card\,\Omega = C_{100}^3 = \frac{100 \times 99 \times 98}{6}$

أ- ليكن A الحدث : " الحصول على أعداد ليست مربعات كاملة "

لدينا : $card\,A = C_{90}^3 = \frac{90 \times 89 \times 88}{6}$

إذن : $P_0 = p(A) = \frac{90 \times 89 \times 88}{100 \times 99 \times 98} = \frac{178}{245}$

ب - ليكن B الحدث : " الحصول على الأقل على عدد مربع كامل "

لدينا : $B = \overline{A}$ ومنه : $p' = p(B) = 1 - p(A)$

أي : $p' = \frac{67}{245}$.

2) ليكن A_i الحدث : " الحصول بالضبط على i عدد مربعات كاملة "

لدينا : $card\,A_i = C_{10}^i C_{90}^{3-i}$

إذن :

$$P_1 = \frac{C_{10}^1 C_{90}^2}{C_{100}^3} = \frac{267}{1078}$$

$$P_2 = \frac{C_{10}^2 C_{90}^1}{C_{100}^3} = \frac{27}{1078}$$

$$P_3 = \frac{C_{10}^3}{C_{100}^3} = \frac{2}{2695}$$

3) لنقارن العددين : P' و $P_1+P_2+P_3$

لدينا :
$$P_1+P_2+P_3=\frac{267}{1078}+\frac{27}{1078}+\frac{2}{2695}$$
$$=\frac{294}{1078}+\frac{2}{2695}$$
$$=\frac{147}{539}+\frac{2}{2695}=\frac{737}{2695}$$
إذن : $P_1+P_2+P_3=\frac{67}{245}$

ومنه : $P_1+P_2+P_3=P'$

إذن : $P_0+P_1+P_2+P_3=P_0+P'$

وبما أن : $P_0+P'=1$ فإن : $P_0+P_1+P_2+P_3=1$.

23 تحتوي كيس على خمس بيدقات خضراء مرقمة من 1 إلى 5 وعلى 4 بيدقات حمراء مرقمة من 1 إلى 4 .
نسحب عشوائيًا وفي آن واحد 3 بيدقات من الكيس .

1) أحسب احتمال الأحداث التالية :
A_1 : " الحصول على 3 بيدقات خضراء "
B_1 : " الحصول على 3 بيدقات حمراء . "
C_1 : " الحصول على 3 بيدقات لها نفس اللون "
D_1 : " الحصول على الأكثر بيدقتين حمراوين . "

2) أحسب احتمال الأحداث التالية :
A_2 : " الحصول على البيدقة الخضراء الحاملة للرقم 1 "
B_2 : " الحصول على البيدقة الحمراء الحاملة للرقم 1 "
C_2 : " الحصول على البيدقة الحمراء الحاملة للرقم 1 و البيدقة الخضراء الحاملة الرقم 1 ".
D_2 : " الحصول على بيدقة واحدة تحمل الرقم 1 ".
E_2 : " الحصول على بيدقات تحمل أرقام فردية ولها نفس اللون ".

V_1	V_4	R_1	R_4
V_2	V_5	R_2	
V_3		R_3	

Ω

الجواب : ليكن Ω كون الامكانيات

لدينا : $card\,\Omega = C_9^3 = 84$

1) لدينا :

$\{V,V,V\} \rightarrow p(A_1) = \dfrac{C_5^3}{84} = \dfrac{5}{42}$

$\{R,R,R\} \rightarrow p(B_1) = \dfrac{C_4^3}{84} = \dfrac{2}{42}$

$\{V,V,V\}$ أو $\{R,R,R\} \rightarrow p(C_1) = \dfrac{C_5^3 + C_4^3}{84} = \dfrac{1}{6}$

$\{R,R,V\}$ أو $\{R,V,V\}$ أو $\{V,V,V\} \rightarrow p(D_1) = \dfrac{C_4^2C_5^1 + C_4^1C_5^2 + C_5^3}{84} = \dfrac{20}{21}$

2)

$\{V_1, \overline{V_1}, \overline{V_1}\} \rightarrow p(A_2) = \dfrac{C_1^1 C_8^2}{84} = \dfrac{28}{84} = \dfrac{1}{3}$

$\{R_1, \overline{R_1}, \overline{R_1}\} \rightarrow p(B_2) = \dfrac{C_1^1 C_8^2}{84} = \dfrac{1}{3}$

$\{R_1, V_1 ; X\} \rightarrow p(C_2) = \dfrac{C_1^1 C_1^1 C_7^1}{84} = \dfrac{7}{84} = \dfrac{1}{12}$

$X \neq V_1$ و $X \neq R_1$

$\{1, \overline{1}, \overline{1}\} \longrightarrow p(D_2) = \dfrac{C_2^1 C_7^2}{84} = \dfrac{42}{84} = \dfrac{1}{2}$

$\{V_I ; V_I ; V_I\} \rightarrow p(E_2) = \dfrac{C_3^3}{84} = \dfrac{1}{84}$

24

لدينا 3 صناديق A و B و C بحيث :

الصندوق A يحتوي على 3 كرات حمراء و 5 كرات سوداء .

الصندوق B يحتوي على كرتين حمراوتين و كرة واحدة سوداء .

الصندوق C يحتوي على كرتين حمراوتين و 3 كرات سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا ثم نسحب منه كرة .

إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما هو الاحتمال لكي تكون من بين كرات الصندوق A ؟

الجواب :

(A)	(B)	(C)
3Ⓡ 5Ⓝ	2Ⓡ 1Ⓝ	2Ⓡ 3Ⓝ

نعتبر الأحداث التالية : A : " اختيار الصندوق A "

B : " اختيار الصندوق B "

C : " اختيار الصندوق C "

D : " الكرة المسحوبة حمراء "

المطلوب هو حساب : $P(A/D)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}$

بما أن : $P(A\cap D)=P(A)P(D/A)$ فإن : $P(A/D)=\dfrac{P(A)P(D/A)}{P(D)}$

لدينا : $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$ و $P(D/A)=\frac{3}{8}$

ولدينا : $(D\cap A)\cap(D\cap\bar{A})=\phi$ و $D=(D\cap A)\cup(D\cap\bar{A})$

إذن : $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap\bar{A})$

(لأن : $\bar{A}=B\cup C$) $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap(B\cup C))$

$P(D)=P(D\cap A)+P((D\cap B)\cup(D\cap C))$

لأن : $((D\cap B)\cap(D\cap C)=\phi)$ $P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$

$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)$

$P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{173}{360}$

وبالتالي : $P(A/D)=\dfrac{3/8}{\frac{173}{360}}=\dfrac{135}{173}$

25 من بين مجتمعاً مكوناً من 60% من الرجال و 40% من النساء .
نعلم أن 20% من الرجال و 10% من النساء يتكلمون اللغة الفرنسية .
اخترنا عشوائياً شخصاً من هذا المجتمع . ماهو الاحتمال لكي يكون
هذا الشخص : 1) رجلاً ويتكلم الفرنسية ؟
2) رجلاً ولا يتكلم الفرنسية ؟
3) امرأة ولا تتكلم الفرنسية ؟
4) إمرأة علماً أن الشخص يتكلم الفرنسية ؟

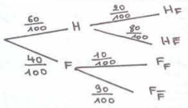
الجواب : نرمز لـ H_F الحدث " رجل يتكلم الفرنسية "

$H_{\bar{F}}$ الحدث " رجل لا يتكلم الفرنسية "

F_F الحدث : " امرأة تتكلم الفرنسية "

$F_{\bar{F}}$ الحدث : " امرأة لا تتكلم الفرنسية "

www.learnit.66ghz.com



1) $p(H_F) = \frac{60}{100} \times \frac{20}{100} = 0,12$

2) $p(H_{\bar F}) = \frac{60}{100} \times \frac{80}{100} = 0,48$

3) $p(F_{\bar F}) = \frac{40}{100} \times \frac{90}{100} = 0,36$

4) المطلوب حساب $p(F/A)$

حيث: A الحدث "الشخص يتكلم الفرنسية"

لدينا: $p(F/A) = \frac{p(F \cap A)}{p(A)} = \frac{p(F_F)}{p(A)}$

لدينا: $p(F_F) = \frac{40}{100} \times \frac{10}{100}$ و $p(A) = p(H_F) + p(F_F)$

$p(F_F) = 0,40$ و $p(A) = 0,12 + 0,40 = 0,52$

ومنه: $p(F/A) = \frac{0,40}{0,52} = \frac{10}{13}$

26 ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم وزوجي.

نعتبر صندوقاً U يحتوي على n كرة بيضاء و n كرة سوداء.

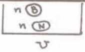
نسحب n كرة من الصندوق بالتتابع حيث: إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء لا نعيدها إلى الصندوق وإذا كانت الكرة سوداء نعيدها إلى الصندوق.

1) أ- ماهو احتمال الحصول على كرة واحدة بيضاء؟

ب- ماهو الاحتمال لكي يكون نصف الكرات المسحوبة الأولى لونها أبيض؟

ج- ليكن k من $[\![1,n]\!]$. ماهو احتمال الحصول بالضبط على k كرة بيضاء في السحبات الأولى؟

2) نفترض أن الكرات البيضاء والكرات السوداء مرقمة من 1 إلى n نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الصندوق، ماهو الاحتمال لكي يكون مجموع الرقمين المحصل عليهما يساوي n ؟



<u>الجواب:</u> 1) أ- الحدث A "الحصول على كرة واحدة بيضاء"

الكرة البيضاء يمكن أن تظهر في السحبة 1 أو 2 أو ..... أو n

لنعتبر الحدث A_i " الكرة البيضاء تظهر فقط في السحبة i " $1 \leq i \leq n$

$A_i : \underbrace{NN \ldots N}_{i-1} \, B \, \underbrace{N \ldots N}_{n-i}$

لدينا : $p(A_i) = \frac{n^{i-1}}{(2n)^{i-1}} \times \frac{C_n^1}{C_{2n}^1} \times \frac{n^{n-i}}{(2n-1)^{n-i}}$

$$p(A_i) = \frac{n^{n-1} \times n}{(2n)^i \times (2n-1)^{n-i}} = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^i$$

وبما أن : $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ و $A_j \cap A_k = \phi$. $j \neq k$

فإن : $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^i$$

$$= \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right) \times \frac{1 - \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n}{1 - \left(\frac{2n-1}{2n}\right)}$$

ومنه : $p(A) = \frac{2n-1}{2(1-n)} \times \left[\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n - 1\right]$

ب ـ الحدث B : " الحصول على نصف الكرات المسحوبة الأولى لونها أبيض "

$B :\ \underbrace{BB\ldots B}_{n/2}\underbrace{NN\ldots N}_{n/2}$

$p(B) = \frac{A_n^{\frac{n}{2}}}{A_{2n}^{\frac{n}{2}}} \times \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(\frac{3}{2}n)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(2p)!\,(3p)!}{p!\,(4p)!} \times \left(\frac{2}{3}\right)^p$ (حيث : $n=2p$)

ج ـ الحدث C : " الحصول بالضبط على k كرة بيضاء في السحبات الأولى "

$C :\ \underbrace{BB\ldots B}_{k}\underbrace{NN\ldots N}_{(n-k)}$

$$p(C) = \frac{A_n^k}{A_{2n}^k} \times \frac{n^{n-k}}{(2n-k)^{n-k}} = \frac{n!\,(2n-k)!}{(2n)!\,(n-k)!} \times \left(\frac{n}{2n-k}\right)^{n-k}$$

د) الحدث D " الحصول على رقمين مجموعهما يساوي n "

$D :\ (k ; n-k) \ / \ 1 \le k \le n$

الكرات البيضاء B : $1 ; 2 ; \ldots ; \frac{n}{2} ; \ldots\ldots ; n-1$.

الكرات السوداء N : $1 ; 2 ; \ldots\ldots ; \frac{n}{2} ; \ldots\ldots ; n-1$.

$$p(D) = \frac{(n-2)C_2^1C_2^1 + C_2^1C_1^1}{A_{2n}^2} = \frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(2n)!}$$

27 للوصول إلى الثانوية تلميذ له الاختيار على أربع مسارات a وb وc وd

احتمال اختيار التلميذ المسار a هو $\frac{1}{3}$.

و احتمال اختيار التلميذ المسار b هو $\frac{1}{4}$.

احتمال اختيار التلميذ المسار c هو $\frac{1}{12}$.

و احتمال وصول التلميذ متأخراً عند اختياره المسار a هو $\frac{1}{20}$.

احتمال وصول التلميذ متأخراً عند اختياره المسار b هو $\frac{1}{10}$.

و احتمال وصول التلميذ متأخراً عند اختياره المسار c هو $\frac{1}{5}$.

وعند اختيار التلميذ المسار d لا يصل متأخراً.

نعتبر الأحداث التالية:

A " التلميذ اختار المسار a "

B " التلميذ اختار المسار b "

C " التلميذ اختار المسار c "

D " التلميذ اختار المسار d "

R " التلميذ وصل متأخراً "

1) أحسب احتمال الحدث D : $p(D)$

2) ليكن E_i الحدث " التلميذ وصل متأخراً و اختار المسار i "

حيث : $i \in \{a, b, c, d\}$

أ- اكتب كلاً من E_a و E_b و E_c بدلالة R ، A ، B ، C ، D .

ب- أحسب احتمال الحدث E_a : $p(E_a)$

ج- حدد $p(E_b)$ ، $p(E_c)$ ، $p(E_d)$.

3) حدد احتمال الحدث R : $p(R)$

4) التلميذ وصل متأخراً ، ما هو الاحتمال اختياره المسار c ؟

الجواب : 1) ليكن Ω كون الامكانيات .

لدينا : $\{A, B, C, D\}$ تجزئة للكون Ω

ومنه : $p(A)+p(B)+p(C)+p(D)=1$

بما أن : $p(A)=\frac{1}{3}$ و $p(B)=\frac{1}{4}$ و $p(C)=\frac{1}{12}$

فإن : $p(D) = 1 - [p(A)+p(B)+p(C)] = \frac{1}{3}$

2) أ- لدينا : $E_d = R \cap D$ ؛ $E_c = R \cap C$ ؛ $E_b = R \cap B$ ؛ $E_a = R \cap A$

ب- لدينا : $p(E_a) = p(R \cap A) = p(A)\,p(R/A)$

بما أن : $p(A) = \frac{1}{3}$ و $p(R|A) = \frac{1}{20}$

فإن : $p(E_a) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{60}$

ج- لدينا : $p(E_b) = p(B)\,p(R/A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$

$p(E_c) = p(C)\,p(R|C) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$

$p(E_d) = p(D)\,p(R|D) = p(R \cap D) = 0$ (لأن : $R \cap D = \phi$)

3) بما أن : $R = \bigcup_{i \in \{a,b,c\}} E_i$ و $E_i \cap E_j = \phi$ ، $i \neq j$

فإن : $p(R) = p(E_a) + p(E_b) + p(E_c)$

$p(R) = \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{60} = \frac{7}{120}$

4) المطلوب هو حساب : $p(C|R)$

لدينا : $p(C/R) = \frac{p(C \cap R)}{p(R)} = \frac{p(E_c)}{p(R)}$

ومنه : $p(C/R) = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{7}{120}} = \frac{2}{7}$

28 نعتبر صندوقين A و B بحيث : الصندوق A يحتوي على 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء، والصندوق B يحتوي على 10 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء . (نفترض لا يمكن التمييز بين جميع الكرات باللمس)
نسحب عشوائياً صندوقاً من بين الصندوقين A و B ثم نسحب من هذا الصندوق عشوائياً كرة ثم نعيدها في نفس الصندوق.
إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء نعيد السحب من نفس الصندوق ،
وإذا كانت الكرة المسحوبة سوداء نسحب كرة من الصندوق الآخر.

نعتبر الحدث E_n : " في السحبة n نسحب من الصندوق A "

نرمز بـ p_n لاحتمال الحدث E_n أي : $p_n=p(E_n)$

1) أحسب : p_1 .

2) أ- أحسب احتمال الحدث E_2 علما أن E_1 أي : $p(E_2|E_1)$

ب- أحسب $p(E_2|\overline{E_1})$.

ج- استنتج : $p(E_2\cap E_1)$ و $p(E_2\cap\overline{E_1})$ ثم p_2

3) أ- أحسب $p(E_{n+1}|E_n)$ و $p(E_{n+1}|\overline{E_n})$

ب- استنتج $p(E_{n+1}\cap E_n)$ و $p(E_{n+1}\cap\overline{E_n})$ بدلالة p_n

4) حدد الأعداد الحقيقية a و b بحيث : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\ p_{n+1}=ap_n+b$

الجواب : 1) لدينا احتمال سحب الصندوق A هو : $p_1=p(E_1)=\frac{1}{2}$

2)

6Ⓑ 4Ⓝ	10Ⓑ 5Ⓝ
(A)	(B)

أ- الحدث $E_2|E_1$ محقق إذا كانت الكرة المسحوبة من A في السحبة الأولى بيضاء . إذن : $p(E_2|E_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

ب- الحدث $E_2|E_1$ محقق إذا كانت الكرة المسحوبة من B في السحبة الأولى سوداء . إذن : $p(E_2|\overline{E_1})=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

ج- لدينا :

$$p(E_2\cap E_1)=p(E_1)\times p(E_2|E_1)$$
$$p(E_2\cap E_1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

و

$$p(E_2\cap\overline{E_1})=p(\overline{E_1})\times p(E_2|\overline{E_1})$$
$$p(E_2\cap\overline{E_1})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

بما أن : $E_2=(E_2\cap\overline{E_1})\cup(E_2\cap E_1)$ و $(E_2\cap E_1)\cap(E_2\cap\overline{E_1})=\emptyset$

فإن :

$$p_2=p(E_2)=p(E_2\cap E_1)+p(E_2\cap\overline{E_1})$$
$$p_2=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{14}{30}$$

ومنه : $p_2=\frac{7}{15}$.

3) أ- بما أن الكرات تعاد إلى أماكنها فإن :

$$p(E_{n+1}|E_n) = p(E_2|E_1) = \frac{3}{5}$$

$$p(E_{n+1}|\bar{E}_n) = p(E_2|\bar{E}_1) = \frac{1}{3}$$

ب- لدينا : $P(E_{n+1} \cap E_n) = P(E_{n+1}|E_n) \times p(E_n)$

وبما أن : $p(E_n) = P_n$ و $p(E_{n+1}|E_n) = \frac{3}{5}$

فإن : $P(E_{n+1} \cap E_n) = \frac{3}{5} P_n$

ولدينا : $P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = P(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) P(\bar{E}_n)$

$$p(E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = \frac{1}{3}(1 - P_n)$$

وبما أن : $\begin{cases} E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \bar{E}_n) \\ (E_{n+1} \cap E_n) \cap (E_{n+1} \cap \bar{E}_n) = \phi \end{cases}$

فإن : $p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$

ومنه : $P_{n+1} = \frac{3}{5} P_n + \frac{1}{3}(1 - P_n)$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* : P_{n+1} = \frac{4}{15} P_n + \frac{1}{3}$

ومنه : $a = \frac{4}{15}$ و $b = \frac{1}{3}$

29 رمينا نرداً مكعباً (وجوهه مرقمة من 1 إلى 6) ثلاث مرات متتابعة . نرمز بـ a نتيجة الرمية الأولى و b للثانية و للثالثة c. نعتبر المعادلة : $x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0$

ماهو الاحتمال كي يكون لهذه المعادلة حل مزدوج ؟

الجواب : ليكن Ω كون الامكانيات هي مجموعة المثلوثات (a, b, c) بحيث a و b و c من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

إذن : $\text{card}\,\Omega = 6^3 = 216$

المعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حل مزدوج إذا وفقط إذا كان :

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ أي : $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac$

إذن b عدد زوجي ومنه : $b \in \{2, 4, 6\}$

* إذا كان $b=2$ فإن : $ac=1$ ومنه : $a=1$ و $c=1$

ومنه : $(a,b,c)=(1,2,1)$

* إذا كان $b=4$ فإن : $ac=4$ ومنه :

$(a=1$ و $c=4)$ أو $(a=4$ و $c=1)$ أو $(a=2$ و $c=2)$

ومنه : $(a,b,c)\in\{(1,2,4);(4,2,1);(2,2,2)\}$

* إذا كان $b=6$ فإن : $ac=9$ ومنه $(a=3$ و $c=3)$

ومنه : $(a,b,c)=(3,6,3)$

الحدث A " المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلا مزدوجا في $\mathbb{R}$ "

$card A=5$

وبالتالي : $p(A)=\frac{5}{216}$

30 نعتبر المجموعة $\Omega=\{1,...,n\}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

ليكن A_d مجموعة مضاعفات d في Ω . نفترض أن $d|n$

وليكن p احتمال على Ω .

1) حدد $p(A_d)$

2) ليكن d_1 و d_2 ، .... ، d_r قواسم أولية لـ n ومختلفة مثنى مثنى .

بين أن الأحداث A_{d_1} ، A_{d_2} ---- و A_{d_r} مستقلة مثنى مثنى .

3) نضع : $K_n=\{m\in\Omega \mid m\wedge n=1\}$

أ- بين أن : $p(K_n)=(1-\frac{1}{d_1})(1-\frac{1}{d_2})\times\cdots\times(1-\frac{1}{d_r})$

ب- استنتج $card K_n$.

الجواب : 1) بما أن $d|n$ فإنه يوجد q من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $n=qd$

إذن : $A_d=\{d,2d,...,qd\}$

ومنه : $card A_d=q=\frac{n}{d}$

إذن : $p(A_d)=\frac{card A_d}{card\Omega}=\frac{1}{d}$

2) لدينا : $\begin{cases} d\wedge\delta=1 \\ d|n \text{ و } \delta|n \end{cases}\Rightarrow d\delta|n$

إذن : $p(A_{d\delta}) = \frac{1}{d\delta} = \frac{1}{d}\times\frac{1}{\delta}$

ومنه : $p(A_d\cap A_\delta) = p(A_{d\delta}) = p(A_d)\times p(A_\delta)$

وبالتالي : الأحداث A_{d_1} و A_{d_2} و ..... و A_{d_r} مستقلة مثنى مثنى .

ب- ليكن $x\in\overline{K_n}$ إذن : $x\in\Omega$ و $x\notin K_n$

ومنه x و n غير أوليان فيما بينهما ، إذن x يقبل على الأقل قاسما من بين الأعداد الصحيحة d_1 ، d_2 ، ..... ، d_r

إذن : $\overline{K_n} = A_{d_1}\cup A_{d_2}\cup\dots\cup A_{d_r}$ و $A_{d_i}\cap A_{d_j}$ $(i\neq j)$

ومنه $K_n = \overline{A_{d_1}\cup A_{d_2}\cup\dots\cup A_{d_r}}$

$K_n = \overline{A_{d_1}}\cap\overline{A_{d_2}}\cap\dots\cap\overline{A_{d_r}}$

وبما أن الأحداث $\overline{A_{d_1}}$ و $\overline{A_{d_2}}$ ،..... ، $\overline{A_{d_r}}$ مستقلة مثنى مثنى ،

فإن : $p(K_n) = p(\overline{A_{d_1}})\times p(\overline{A_{d_2}})\times\dots\times p(\overline{A_{d_r}})$

$p(K_n) = \left(1-\frac{1}{d_1}\right)\times\left(1-\frac{1}{d_2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{1}{d_r}\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{d_i}\right)$

ب- لدينا : $p(K_n) = \frac{card\,K_n}{card\,\Omega} = \prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{d_i}\right)$

ومنه : $card\,K_n = n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{d_i}\right)$

تمارين للبحث

1 يحتوي صندوق ص على كرات مرقمة على النحو التالي: كرة تحمل الرقم 1، كرتين تحملان الرقم 2، ....، n كرة تحمل الرقم n. ($n \in \mathbb{N}^*$)

1) أحسب عدد الكرات.

2) نسحب عشوائياً كرة من الصندوق.

أ- نفترض أن n زوجياً. أحسب بدلالة احتمال سحب كرة تحمل رقماً زوجياً.

ب- نفترض أن عدد الكرات الموجودة في الصندوق ص يساوي 28. ما هو احتمال سحب كرة تحمل رقماً أكبر قطعاً من 4؟

2 يحتوي صندوق على 8 كرات مرقمة من 1 إلى 8. نسحب عشوائياً بالتتابع وبدون إحلال 4 كرات من الصندوق أحسب إحتمالات الأحداث التالية:

1) الكرة رقم 1 تظهر في السحبة الأولى.

2) الكرة رقم 1 تظهر في السحبة الأولى والكرة رقم 4 تظهر في السحبة الرابعة.

3) الكرة رقم ن تظهر في السحبة رقم ن، لكل $1 \le ن \le 4$.

4) كرة واحدة على الأقل تحمل رقماً ن وتظهر في السحبة رقم ن و $ن \ge 2$

3 نعتبر صندوقاً ص$_1$ يحتوي على 8 كرات من بينها 3 بيضاء وصندوقاً ص$_2$ يحتوي 7 كرات من بينها 4 بيضاء. نختار عشوائياً صندوقاً من الصندوقين ونسحب منه كرة واحدة. الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس

1) إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء، ماهو احتمال سحبها من الصندوق ص$_1$؟

2) حدد حدثاً يكون احتمال وقوعه يساوي $\frac{11}{16}$.

4 يحتوي صندوق على 4 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 4 و 5 كرات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 و 4 كرات حمراء مرقمة من 1 إلى 4.

نسحب عشوائياً وتآنياً ثلاث كرات من الصندوق.

1) أ- ماهو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون؟

ب- ماهو احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل؟

ج- ماهو احتمال الحصول على 3 أرقام متساوية؟

2) ماهو احتمال الحصول على 3 أرقام زوجية علما أن الكرات المسحوبة مختلفة اللون مثنى ، مثنى ؟

5 نعتبر $2n$ كرة $(n \geq 3)$ بحيث $2n-3$ كرة لونها أبيض وثلاث كرات لونها أسود ، نضع كل هذه الكرات ($2n$ كرة) في صندوق A .

1) نسحب تآنيا 4 كرات من الصندوق A .

أ- ماهو احتمال سحب 4 كرات من نفس اللون ؟

ب- ماهو احتمال سحب على الأقل كرة بيضاء ؟

2) نأخذ $(n-1)$ كرة بيضاء وكرة واحدة سوداء من الصندوق ونضعها في الصندوق B .

أ- نسحب كرة واحدة من الصندوق A وكرتين من الصندوق B .

أحسب الاحتمال p_1 لكي نسحب بالضبط كرة واحدة بيضاء .

ب- نعيد العملية السابقة 4 مرات وفي كل مرة نرجع الكرات المسحوبة إلى صناديقها .

أحسب الإحتمال p_2 لكي نحصل بالضبط مرتين على كرة واحدة بيضاء .

6 يحتوي صندوق على 12 كرة مرقمة من 1 إلى 12 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق .

1) أحسب احتمال الحصول على كرة واحدة فقط تحمل رقما يقبل القسمة على 3

2) أحسب احتمال الحصول على 3 كرات تكون أرقامها تقبل القسمة على 3 .

3) أحسب احتمال الحصول على 3 كرات أرقامها تكون حدود متتالية حسابية أساسها $r=3$ (بعد ترتيب مناسب)

7 يحتوي صندوق على n بيدقة $(n>1)$ مرقمة من 1 إلى n

نسحب من الصندوق جميع البيدقات بالتتابع وبدون إحلال وبكيفية عشوائية .

1) حدد رئيسي كون الامكانيات .

2) ليكن A الحدث : " أرقام البيدقات المسحوبة هي على التوالي : $1 ; 2 ; \ldots\ldots , n$ " . أحسب $p(A)$.

3) ليكن B الحدث : " رقم البيدقة الأولى هو 1 والأخيرة هو n " . أحسب $P(B)$

4) متى يكون لدينا : $p(A)=p(B)$.

8 تم تلقيح ثلث سكان إحدى القرى ضد مرض الزكام. لاحظ الأطباء أنه في كل 15 مريضاً بالزكام هناك شخصان ملقحان.

1) هل يمكن اعتبار هذا التلقيح فعالاً ؟

2) أحسب احتمال إصابة شخص غير ملقح بالمرض.

9 يشرون عداء على مجاب (Parcours) يحتوي على 4 حواجز موقمة من 1 إلى 4 بحيث أن احتمال إسقاط الحاجز الذي يحمل الرقم i هو $\frac{1}{2i}$ مع $i \in \{1,2,3,4\}$.

يوصل العداء قطع المجاب إلى آخر حاجز مهما كان عدد الحواجز المسقطة.

1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A " لا يسقط العداء أي حاجز "

B " يسقط العداء الحاجز الأول والحاجز الرابع "

C " يسقط العداء جميع الحواجز "

2) يربح العداء نقطتين لكل حاجز غير مقلوب ويخسر نقطتين لكل حاجز مقلوب.

أ- أحسب الاحتمال P_1 لكي يربح العداء 8 نقط.

ب- أحسب الاحتمال P_2 لكي يربح العداء 4 نقط.

10 يحتوي كيس على a كرة بيضاء و b كرة سوداء. يسحب لاعبان بالتوالي كرة واحدة من الكيس ويعتبر اللاعب رابحاً إذا كان أول سحب كرة بيضاء.

1) أ- ماهو احتمال ربح كل واحد منهما ؟

ب- تطبيق عدد : $a=2$ و $b=8$

2) يرمي اللاعبان على التوالي نرداً في الهواء مرقماً من 1 إلى 6.

يعتبر اللاعب رابحاً إذا كان أول من حصل على الرقم 1.

أ- ماهو احتمال ربح كل واحد منهما ؟

ب- ماهو الاحتمال لكي ينتهي اللعب قبل 20 رمية.

11 ليكن S_n^p هو عدد التطبيقات الشمولية من مجموعة E رئيسها n نحو مجموعة F رئيسها p ($p \leq n$)

1) أحسب : S_n^1 و S_n^2.

2) أثبت أن : $\sum_{k=1}^{p} C_p^k S_n^k = p^n$

3) تطبيق : نوزع عشوائياً 5 كرات على 3 حفر.
أحسب الاحتمال لكي توجد كرة واحدة على الأقل في كل حفرة.

12 ليكن n عنصراً من $\mathbb{N}^*$; نضع : $S=\{1,\dots,n\}$
نختار عشوائياً جزءاً من المجموعة S ونفترض أن جزء S لها نفس الاحتمال. ليكن A جزءاً من S. نعتبر الأحداث التالية :

E : " الجزء الذي اختير يوجد ضمن A "

F : " الجزء الذي اختير يوجد ضمنه A "

G : " تقاطع A و الجزء الذي اختير هو المجموعة الفارغة "

1) أحسب احتمال الحدث E بدلالة n و card E

2) أحسب احتمال الحدثين F و G.

13 يحتوي كل واحد من n صندوق U_1 ، U_2 ، ..... ، U_n على a كرة بيضاء و b كرة سوداء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائياً كرة من الصندوق U_2 ونضعها في الصندوق U_3 وهكذا إلى أن نسحب كرة من الصندوق U_{n-1} ونضعها في الصندوق U_n.
نربط كل عنصر k من $\{1,\dots,n\}$ بالحدث B_k : " الكرة المسحوبة من الصندوق U_k بيضاء. "

لكل k من $\{1,\dots,n\}$ نضع : $u_k = p(B_k)$.

1) أحسب u_1.

2) اثبت أنه مهما يكن k من $\{1,\dots,n-1\}$
فإن : $u_{k+1} = \frac{1}{a+b+1} u_k + \frac{a}{a+b+1}$

3) استنتج $p(B_n)$.

14 ليكن m و n من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $m > n$ و $m+n$ عدد فردي
يحتوي كيس n كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى n و $m+n$ كرة سوداء
مرقمة من 1 إلى $m+n$. نربط كل عنصر من $\{1, \dots, m+n-1\}$ بالحدث A_k
نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرتين من الكيس .
A_k " الحصول على كرة رقمها k وكرة رقمها $m+n-k$ "

1) ليكن k عنصراً من $\{1, \dots, n+m-k\}$ و P_k احتمال الحدث A_k .

أ- بين أنه إذا كان $k \leq n$ فإن :
$$P_k = \frac{4}{(2n+m)(2n+m-1)}$$

ب- أحسب P_k إذا كان $k > n$.

ج- أثبت أن : $A_{n+m-k} = A_k$ لكل k من $\{1, \dots, n+m-1\}$

2) ليكن A الحدث " الحصول على كرتين مجموع رقميهما هو $m+n$ "

أ- أحسب احتمال الحدث A .

ب- أحسب احتمال الحدث A علماً أن كرة واحدة من بين الكرتين المسحوبتين بيضاء .

15 يحتوي كيس على n كرة سوداء و n كرة بيضاء ($n \geq 6$) . نسحب عشوائياً وفي آن واحد 6 كرات من الكيس .

1) ما هو الاحتمال P_n لكي نحصل على 3 كرات بيضاء بالضبط ؟

2) أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

16 يحتوي كيس S_1 كرتين لونهما أبيض ويحملن الرقم 1 وكرتين لونهما أسود ويحملن الرقم -1 .
يحتوي كيس S_2 على كرتين لونهما أبيض ويحملن الرقم -1 وثلاث كرات سوداء يحملن الرقم 1 .
نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرة من S_1 و كرتين من S_2 .
ليكن x رقم الكرة المسحوبة من S_1 و y و z الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين من S_2 .

1) أ- أحسب احتمال الحدثين التاليين :

17 A : " الكرات الثلاث المسحوبة تحمل نفس اللون "

B : " كرتان وكرتان فقط من الكرات الثلاث تحمل نفس اللون "

2) اعطي Ω مجموعة القيم التي يأخذها العدد $x(y+z)$.

3) لكل i من Ω نرمز بـ A_i للحدث الحصول على :

$$x(y+z)=i \quad \text{و} \quad P_i = p(A_i)$$

أحسب P_i لكل i من Ω .

18 تضم عائلة n طفلا $(n \geq 2)$. نفترض أن للذكر والأنثى نفس الاحتمال انتمائهما إلى هذه العائلة .

نعتبر الحدثين التاليين :

A : " تضم هذه العائلة أولاد و بنات "

B : " تضم هذه العائلة على الأكثر فتاة "

C : " تضم هذه العائلة على الأكثر فتاتين "

1) أحسب احتمال الأحداث A و B و C

2) حدد قيمة n بحيث يكون الحدثان A و B مستقلان .

3) حدد قيمة n بحيث يكون الحدثان A و C مستقلان .

19 نرمي نرد "أربع مرات متتالية (وجوهه مرقمة من 1 إلى 6)

أحسب احتمال الحصول على عدد قابل للقسمة على 3 ثلاث مرات بالضبط .

20 نعتبر ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 بحيث : الصندوق U_1 يحتوي على 5 كرات خضراء وكرتين حمراوين و 3 كرات بيضاء و يحتوي الصندوق U_2 على 5 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء ويحتوي الصندوق U_3 على 3 كرات بيضاء و 6 كرات خضراء. نسحب كرة من U_1 ونضعها في U_2 وبعد ذلك نسحب كرة من U_2 ونضعها في U_3 وبعد ذلك نسحب كرة من U_3 ونضعها في U_1.

ما هو احتمال أن نجد بعد هذه التجربة نفس التركيبة التي كانت في U_1 ؟

21 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بمايلي :

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{2x^2+3x+1}$$

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$. يحتوي صندوق على n كرة بيضاء و $n+2$ كرة سوداء . نسحب عشوائياً وتآنيا كرتين من الصندوق .

ليكن $p(n)$ احتمال الحصول على كرتين لهما نفس اللون .

أ- بين أن : $p(n)=f(n)$

ب- بين أن : $p(n)<\frac{1}{2}$

ج- ماهي قيمة n لكي تكون $p(n)$ دنوية ؟

د- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n)$.

22 1) ليكن A و B حدثين غير منعدمين و p احتمال على الكون .

بين أن :

$$P_A(B)=\frac{P(B)\times P_B(A)}{P(B)\times P_B(A)+P(\bar{B})\times P_{\bar{B}}(A)}$$

2) في قسم للثالثة علوم رياضية يوجد 30 تلميذ من بينهم 10 تلميذ متفوقين و 20 تلميذ متوسطين .

احتمال تلميذ متفوق أن يحصل على نقطة جيدة في الرياضيات هي : 0,70

احتمال تلميذ متوسط أن يحصل على نقطة جيدة في الرياضيات هي 0,40

نأخذ ورقة من الأوراق عشوائياً بعد تصحيحها ووجدنها جيدة .

أ- ماهو الاحتمال P_1 لأن تكون لتلميذ متفوق ؟

ب- ماهو الاحتمال P_2 لأن تكون لتلميذ متوسط ؟

23 ليكن n عدداً فردياً بحيث : $n\geq 3$.

يحتوي كيس على n كرة بيضاء مرقمة من 1 إلى n وعلى $(n+1)$ كرة سوداء مرقمة من 1 إلى $(n+1)$. نسحب عشوائياً وفي آن واحد كرتين . أحسب احتمالات الأحداث :

A : " الحصول على كرتين من نفس اللون " .

B : " الحصول على كرتين لهما نفس الرقم " .

C : " الحصول على كرتين يكون مجموع رقميهما عدد زوجي " .

24

نرمي نرداً عدة مرات متتالية. نرمز بـ P_n احتمال حصول الحدث: " الوجه رقم 1 يظهر للمرة الأولى في الرمية n "

1) أحسب P_1 و P_2

2) حدد P_n بدلالة n.

3) ليكن S_n احتمال حصول الحدث: "الوجه رقم 1 يظهر على الأقل مرة عند الرميات n الأولى".

أ- أحسب S_n.

ب- حدد n_0 من $\mathbb{N}$ أصغر ما يمكن بحيث لدينا: $n \geq n_0 \Rightarrow S_n \geq 0,99$

4) ليكن q_n احتمال الحدث: " الوجه رقم 1 يظهر مرة واحدة عند الرميات n الأولى"

أ- أحسب q_n بدلالة n.

ب- أحسب: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{q_n}{n}$.

25

في قسم للثالثة علوم رياضية، تم استجواب الطلبة وكانت النتائج كما يلي:

- احتمال الطالب أن يحب الرياضيات هي 0,70.
- احتمال الطالب أن يحب الفيزياء هي 0,50.
- احتمال الطالب أن يحب الرياضيات والفيزياء هو 0,30.

حدد احتمال أن يكون الطالب:

أ- يحب الرياضيات ولا يحب الفيزياء.

ب- يحب الرياضيات أو الفيزياء.

ج- أن لا يحب الرياضيات ولا فيزياء.

26

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}^*$ و n عنصراً من $\mathbb{N}^*$ بحيث: $n \leq a \leq b$.

يحتوي صندوق على a كرة بيضاء و b كرة سوداء. نسحب من الصندوق عشوائياً وفي آن واحد n كرة.

1) ليكن p هو احتمال الحصول على اللونين الأحمر والأسود.

أثبت أن: $p = \frac{1}{C_{a+b}^n} \times \sum_{k=1}^{n-1} C_a^k C_b^{n-k}$

2) ليكن q هو احتمال الحصول على لون واحد. بين أن: $q = \frac{C_a^n + C_b^n}{C_{a+b}^n}$

3) استنتج أن: $\sum_{k=1}^{n-1} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n - (C_a^n + C_b^n)$

27

توصل مكتب للبريد بـ p تلغرافاً وزعت عشوائياً على n خط للمواصلة.

1) أحسب احتمال A " كل خط المواصلة يرسل فقط تلغرافاً على الأكثر ".
في حالة $n > p$.

2) نفترض أن خطوط المواصلة مرقمة من 1 إلى n
أحسب احتمال أن يستقبل الخط رقم i ؛ p_i تلغرافاً حيث : $1 \leq i \leq n$ و $\sum_{i=1}^{n} p_i = p$

3) نفترض أن : $p = n$. أحسب الاحتمال p_n لكي يستقبل كل خط على تلغراف واحد فقط
تحقق من أن لكل n من $\mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (حيث : $x \geq 0$)
وأن : $p_{n+1} \leq \frac{1}{2} p_n$ ثم حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

28

يتوفر شخص في حقيبته على n مفاتيح (حيث : $n \geq 3$) من بينها فقط مفتاحين يفتحان باب المنزل لصديقه .

1) سحب الشخص تآنياً مفتاحين عشوائياً من الحقيبة
أ- ماهو الاحتمال أن يفتح بأحدهما الباب ؟
ب- ماهو الاحتمال ألا يفتح أي منهما الباب ؟

2) سحب الشخص على التوالي 3 مفاتيح بدون إعادة أي مفتاح إلى الحقيبة
أ- ماهو الاحتمال أن لا يتمكن من فتح الباب ؟
ب- ماهو الاحتمال أن يتمكن الشخص من فتح الباب بواحد فقط من المفاتيح ؟

3) أخذ الشخص يجرب المفاتيح الواحد تلو الآخر .
ماهو الاحتمال أن يتمكن الشخص من فتح الباب في التجربة رقم k $(1 \leq k \leq n)$ ؟

4) أخذ الشخص يجرب المفاتيح الواحد تلو الآخر ماعدا اثنين من بين المفاتيح بقيتا في الحقيبة .
ماهو الاحتمال أن يكون واحد فقط من بين المفتاحين المتبقيين يفتح الباب ؟

29

يحتوي صندوق U_1 على بيدقة حمراء وبيدقة بيضاء و n بيدقة سوداء (حيث : $n \geq 2$) ويحتوي صندوق U_2 على بيدقة حمراء وبيدقة بيضاء.
نسحب عشوائياً وتآنياً بيدقتين من U_1 ونضعهما في U_2 ثم نسحب تآنياً بيدقتين من U_2 .

1) أحسب الاحتمال p_n الحصول على بيدقتين لهما نفس اللون من U_2 ؟

2) أحسب الاحتمال q_n للحصول على بيدقة سوداء على الأقل من U_2 ثم حدد n إذا علمت أن : $q_n = \frac{17}{36}$.

البُنيات الجبرية

قوانين التركيب الداخلية

I- قانون تركيب داخلي :

تعريف : كل تطبيق : $f: E\times E \longrightarrow E$
$(a,b) \longmapsto f(a;b)$ يسمى قانون تركيب داخلي في E.

ونرمز لـ $f(a;b)$ بأحد الرموز : aTb أو $a*b$ أو $a\perp b$ .....

إذا كانت المجموعة E مزودة بالقانون التركيب الداخلي T فنكتب : $(E;T)$

خاصيات في $(E;T)$:

* التجميعية : القانون T تجميعي في E $\Leftrightarrow \forall(a,b,c)\in E^3 : aT(bTc)=aT(bTc)$
* التبادلية : القانون T تبادلي في E $\Leftrightarrow \forall(a,b)\in E^2 : aTb=bTa$
* العنصر المحايد : e عنصر محايد للقانون T $\Leftrightarrow \forall a\in E : aTe=a$ و $eTa=e$
* العنصر المماثل : ليكن e العنصر المحايد للقانون T و $x\in E$.
x يقبل مماثلا x' في E $\Leftrightarrow xTx'=e$ و $x'Tx=e$

خاصيات : * وحدانية العنصر المحايد :

إذا كان (E,T) يقبل عنصراً محايداً e فإن e وحيد في E.

* وحيدانية العنصر المماثل :

إذا كان $(E;T)$ يقبل عنصراً محايداً e وكان T تجميعياً وكان x من E يقبل مماثلاً x' في E فإن x' وحيد.

* إذا كان x' مماثل x و y' مماثل y في (E,T)
فإن : $y'Tx'$ مماثل xTy أي : $(xTy)'=y'Tx'$

التشاكلات : ليكن f تطبيق من E نحو F

f تشاكل من $(E;T)$ نحو $(F,*)$ $\Leftrightarrow \forall(x,y)\in E^2 \quad f(xTy)=f(x)*f(y)$

خاصيات : ليكن f تشاكلا من $(E;T)$ نحو $(F;*)$.

- T تجميعياً في E $\Leftarrow$ * تجميعياً في $f(E)$.
- T تبادلياً في E $\Leftarrow$ * تبادلياً في $f(E)$.
- e محايداً في $(E;T)$ $\Leftarrow$ $f(e)$ محايداً في $(f(E);*)$.
- x' مماثل x في $(E;T)$ $\Leftarrow$ $f(x')$ مماثل $f(x)$ في $(f(E);*)$.

جزء مستقر من $(E;T)$: لتكن $(E;T)$ و $S \subset E$

S جزء مستقر من $(E;T)$ $\Leftrightarrow$ $\forall (x;y) \in S^2 \quad xTy \in S$

خاصية : ليكن f تشاكلاً من $(E;T)$ نحو $(F;*)$

لدينا: $f(E)$ جزء مستقر من $(F,*)$.

العنصر المنتظم : ليكن $(E;T)$ و $a \in E$

a عنصر منتظم $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y) \in E^2: \begin{cases} aTx = aTy \Rightarrow x = y \\ xTa = yTa \Rightarrow x = y \end{cases}$

II - الزمرة : ليكن $(G;T)$

$(G;T)$ زمرة $\Leftrightarrow$
- T تجميعيا.
- T يقبل عنصراً محايداً.
- كل عنصر من E يقبل مماثلاً.

الزمرة الجزئية : لتكن (G,T) زمرة و H جزء من G $(H \subset G)$

نقول إن $(H;T)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;T)$ إذا كان :

H جزءاً مستقراً من (G,T) و $(H;T)$ زمرة .

خاصية :

$(H;T)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;T)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} H \neq \phi \text{ و } e \in H \\ \forall x \in H \ ; \ x' \in H \\ \forall (x,y) \in H^2 \ ; \ xTy \in H \end{cases}$

خاصية مميزة :

$(H;T)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;T)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} H \neq \phi \\ \forall (x,y) \in H^2 ; xTy' \in H \end{cases}$

y' مماثل y .

الزمرة والتشاكل : ليكن f تشاكلا من $(E;T)$ نحو $(F,*)$.

إذا كانت : $(E;T)$ زمرة فإن : $(f(E);*)$ زمرة .

حل معادلات في زمرة : لتكن (G,T) زمرة لدينا:

- كل عنصر من G منتظم .
- المعادلة : $aTx = b$ $\Leftrightarrow$ $x = a'Tb$
- المعادلة : $xTa = b$ $\Leftrightarrow$ $x = bTa'$

حيث : a' مماثل a .

III - الحلقة : لتكن A مجموعة مزودة بقانونين داخليين T و $*$.

توزيعية * بالنسبة لـ T : نقول أن * توزيعي بالنسبة لـ T إذا وفقط إذا كان:

$$\forall (x,y)\in A^2 : x*(yTz)=(x*y)T(x*z)$$
و
$$(yTz)*x=(y*x)T(z*x)$$

تعريف حلقة $(A;T;*)$:

نقول أن $(A;T;*)$ حلقة $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} (A,T) \text{ زمرة تبادلية.} \\ * \text{ تجميعي.} \\ * \text{ توزيعي بالنسبة لـ } T. \end{cases}$$

لتكن $(A;T,*)$ حلقة.

- إذا كان * تبادلياً فنقول أن الحلقة $(A,T,*)$ تبادلية.
- إذا كان * له عنصر محايد فنقول أن الحلقة $(A;T;*)$ واحدية.

خاصيات في حلقة $(A;T,*)$:

ليكن a و b عنصران من A و a' و b' مماثلاهما في الزمرة $(A;T)$ و e العنصر المحايد بالنسبة لـ T لدينا:

$$a*e=e*a=e \qquad (1)$$
$$a*b'=(a*b)' \qquad (2)$$
$$a'*b'=a*b \qquad (3)$$

(4) $(U;*)$ زمرة حيث $U=\left\{x\in A \mid \exists x'\in A : \begin{cases} x*x'=e \\ x'*x=e \end{cases}\right\}$ و $(A;T;*)$ حلقة واحدية، e العنصر المحايد لـ * .

الحلقة الكاملة : لتكن $(A;T;*)$ حلقة عنصرها المحايد e بالنسبة لـ T

- نقول أن عنصر a من A قاسماً للصفر $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists b\in A\setminus\{e\} \\ a\neq e \\ a*b=e \end{cases}$
- إذا كانت الحلقة $(A;T;*)$ لا تحتوي على قواسم للصفر فنقول أن $(A;T;*)$ حلقة كاملة.

حلقة المصفوفات المربعة :

- كل جدول : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ يسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 2 ومجموعة هذه المصفوفات نرمز لها بـ : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\left((a;b;c;d)\in\mathbb{R}^4\right)$
- كل جدول : $\begin{pmatrix} a & d & j \\ b & e & i \\ c & g & k \end{pmatrix}$ يسمى مصفوفة مربعة من الرتبة 3 ومجموعة هذه المصفوفات نرمز لها بـ : $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

الجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & j \\ b & e & i \\ c & f & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & d' & j' \\ b' & e' & i' \\ c' & f' & k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & d+d' & j+j' \\ b+b' & e+e' & i+i' \\ c+c' & f+f' & k+k' \end{pmatrix}$$

الضرب في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & j \\ b & e & i \\ c & f & k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & d' & j' \\ b' & e' & i' \\ c' & f' & k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+db'+ic' & ad'+de'+if' & ai'+dj'+ik' \\ ba'+eb'+jc' & bd'+ee'+jf' & bi'+ej'+jk' \\ ca'+fb'+kc' & cd'+fe'+kf' & ci'+fj'+kk' \end{pmatrix}$$

خاصية : لدينا : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) ; + ; \times)$ و $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; + , \times)$
حلقتان واحديتان ولكن غير تبادليتان وغير كاملتان.

III ـ الجسم $(K ; T ; *)$:

لتكن K مجموعة مزودة بقانونين داخليين T و $*$.

نقول أن $(K ; T ; *)$ جسم $\Leftrightarrow$
- $(K ; T)$ زمرة تبادلية.
- $(K - \{e\} ; *)$ زمرة حيث e العنصر المحايد لـ T
- $*$ توزيعي بالنسبة لـ T.

خاصيات : ليكن $(K ; T ; *)$ جسماً لدينا :

- كل عنصر من K منتظم بالنسبة لـ T.
- كل عنصر من $K - \{e\}$ منتظم بالنسبة لـ $*$.
- $x = b \, T \, a' \Leftrightarrow b = x \, T \, a$
- $x = a' \, T \, b \Leftrightarrow b = a \, T \, x$
- $x = b * a'' \Leftrightarrow b = x * a$ $\quad (b \in K^*)$
- $x = a'' * b \Leftrightarrow b = a * x$

a' مماثلة a بالنسبة لـ T و a'' مماثلة a بالنسبة لـ $*$.

- $(K ; T ; *)$ حلقة كاملة أي :

$$\forall (a,b) \in K^2 : \quad a * b = e \Leftrightarrow a = e \text{ أو } b = e$$

حيث : e العنصر المحايد لـ T.

قوانين التركيب الداخلية

1 ليكن * قانون تركيب داخلي معرف على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$

1) بين أن القانون * تبادلي .

2) بين أن القانون * غير تجميعي .

3) بين أن القانون * يقبل عنصراً محايداً .

4) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين :

أ- $2 * x = 5$ ب- $x * x = 1$

الجواب : 1) لدينا لكل x و y من $\mathbb{R}$:

$$x * y = xy + (x^2-1)(y^2-1)$$
$$= yx + (y^2-1)(x^2-1)$$

$x * y = y * x$ (لأن الضرب تبادلي في $\mathbb{R}$)

ومنه القانون * تبادلي .

2) لدينا : $(-1 * 0) * 2 = 0 * 2 = -3$

$$-1 * (0 * 2) = -1 * -3 = 3$$

إذن : $(-1 * 0) * 2 \neq -1 * (0 * 2)$

ومنه القانون * غير تجميعي .

3) لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $x * 1 = 1 * x = x$

ومنه 1 هو العنصر المحايد للقانون * .

4) أ- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2 * x = 5$

لدينا : $2 * x = 5 \Leftrightarrow 2x + 3(x^2-1) = 5$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ أو } x = \frac{4}{3}$$

مجموعة حلول المعادلة : $2 * x = 5$ هي : $S_1 = \{-2 ; \frac{4}{3}\}$

ب- لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x * x = 1$

لدينا : $x * x = 1 \Leftrightarrow x^2 + (x^2-1)^2 = 1$

$$x * x = 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x^2 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = -1 \text{ أو } x = 1$$

مجموعة حلول المعادلة : $x * x = 1$ هي : $S_2 = \{-1 ; 0 ; 1\}$

2

نعرف على $\mathbb{N}^*$ القانون التركيب الداخلي T بما يلي :
$$\forall (x ; y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \; x T y = x^y$$

1) هل القانون T تجميعي ؟

2) حدد العناصر المنتظمة بالقانون T .

الجواب : 1) لدينا :
$$(2T1)T3 = 2^1 T3 = 2T3 = 2^3 = 8$$
$$2T(1T3) = 2T1^3 = 2T1 = 2^1 = 2$$

إذن :
$$(2T1)T3 \neq 2T(1T3)$$

ومنه القانون T غير تجميعي .

2) لنحدد العناصر المنتظمة بالقانون T .

ليكن a عنصر منتظم بالقانون T

لدينا :
$$\forall (x , y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \begin{cases} xTa = yTa \Rightarrow x = y \\ aTx = aTy \Rightarrow x = y \end{cases}$$

لدينا :
$$(1) \quad xTa = yTa \Leftrightarrow a^x = a^y$$
$$\Rightarrow x = y \quad (c \neq 1)$$

ولدينا :
$$(2) \quad aTx = aTy \Leftrightarrow x^a = y^a$$
$$\Rightarrow x = y \quad (\text{لأن} : x > 0 , y > 0)$$

من (1) و (2) نستنتج أن كل عنصر a من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ هو عنصر منتظم بالنسبة للقانون T .

3

ليكن T قانون تركيب داخلي تجميعي على مجموعة E .

1) بين أن مجموعة العناصر المنتظمة جزء مستقر من (E , T) .

2) نعتبر المجموعة : $C = \{a \in E \mid \forall x \in E : aTx = xTa\}$

بين أن C جزء مستقر من (E , T) .

الجواب: 1) ليكن a و b عنصران منتظمان من E .

لنبين أن aTb عنصراً منتظماً من E .

لدينا لكل x و y من E : $xT(aTb) = yT(aTb)$

(لأن T قانون تجميعي) $\Leftrightarrow (xTa)Tb = (yTa)Tb$

(لأن b عنصر منتظم) $\Rightarrow xTa = yTa$

(لأن a عنصر منتظم) $\Rightarrow x = y$

بالمثل نبين أن : $(aTb)Tx = (aTb)Ty \Rightarrow x = y$

ومنه : aTb عنصر منتظم

وبالتالي مجموعة العناصر المنتظمة جزء مستقر من (E,T).

2) ليكن a و b عنصران من C ، لنبين أن : $aTb \in C$

لكل x من E لدينا : (لأن T تجميعي) $(aTb)Tx = aT(bTx)$

(لأن : $b \in C$) $= aT(xTb)$

(لأن : T تجميعي) $= (aTx)Tb$

(لأن : $a \in C$) $= (xTa)Tb$

(لأن : T تجميعي) $(aTb)Tx = xT(aTb)$

ومنه : $aTb \in C$

و بالتالي C جزء مستقر من (E,T) .

4 ليكن $*$ قانون تركيب داخلي على $\mathbb{R}$ بحيث لكل a و b و c من $\mathbb{R}$

لدينا العلاقتين :

$(R_1) : \quad 0 * a = -a$

$(R_2) : \quad a*(b*c) = c*(b*a)$

1) بين أن لكل a و b و c من $\mathbb{R}$: $a*(b*c) = (a*b)*(-c)$

2) اعط مثال لقانون اعتيادي في $\mathbb{R}$ يحقق شروط القانون $*$.

الجواب : 1) لتكن a و b و c من $\mathbb{R}$ لدينا :

(حسب العلاقة (R_1)) $a*(b*c) = (0*(-a))*(b*c)$

(حسب العلاقة (R_1)) $= (0*(0*a))*(b*c)$

(حسب العلاقة (R_2)) $= (a*(0*0))*(b*c)$

$a*(b*c)=(a*0)*(b*c)$ (حسب العلاقة (R_1))

$=c*(b*(a*0))$ (حسب العلاقة (R_2))

$=c*(0*(a*b))$ (حسب العلاقة (R_2))

$=(a*b)*(0*c)$ (حسب العلاقة (R_2))

$=(a*b)*(-c)$ (حسب العلاقة (R_1))

و بالتالي : $a*(b*c)=(a*b)*(-c)$

2) لدينا القانون $-$ (الطرح في $\mathbb{R}$) قانون تركيب داخلي يحقق شروط القانون $*$: $a-(b-c)=c-(b-a)$ و $0-a=-a$

5 لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ تجميعي بحيث : $\forall(x,y)\in E^2 : (x*y)^3=y*x$

بين أن القانون $*$ تبادلي.

الجواب : لكل x و y من E لدينا:

$x*y=(y*x)^3$

$=[(y*x)^3]^3$

$=[(y*x)(x*y)^2]^3$

$=(x*y)^2*(x*y)$

$=(x*y)^3=y*x$

ومنه: $x*y=y*x$

و بالتالي القانون $*$ تبادلي.

6 نزود $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $*$ يحقق العلاقات التالية :

لكل x و y و z من $\mathbb{R}$:

(R_1) : $x*y=y*x$

(R_2) : $x*1=x$

(R_3) : $\exists k\in\mathbb{N}^* : (xz)*(yz)=z^k(x*y)$

1) بين أن : $k=2$.

2) استنتج أن : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x*y=xy$

الجواب : 1) ليكن x من $\mathbb{R}^*$ و y من $\mathbb{R}^*$ لدينا :

$$x*y=\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)*(1\cdot y)=y^k\left(\frac{x}{y}*1\right)=y^k\cdot\frac{x}{y}=xy^{k-1}$$

وبالمثل نبين أن : $y*x=yx^{k-1}$

ومنه : $x*y=y*x \iff xy^{k-1}=yx^{k-1}$

إذن : $\forall(x,y)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : \quad xy^{k-1}=yx^{k-1}$

وبالخصوص إذا كان : $x=1$ و $y=\frac{1}{2}$

فإن : $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{2}$ أي : $k-1=1$

وبالتالي : $k=2$.

2) لدينا : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \quad x*y=xy^{k-1}$

$=xy$ (لأن : $k=2$)

وبما أن : $0*0=0^2(1*1)=0$

فإن : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x*y=xy.$

7 لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ تجميعي.

نفترض أن كل عنصر من E هو عنصر منتظم بالقانون $*$

و $\exists\alpha\in E : \quad \alpha*\alpha=\alpha$

بين أن α وحيد .

الجواب : نفترض أنه يوجد β من E بحيث : $\beta*\beta=\beta$ و $\alpha\neq\beta$

لدينا : $(\alpha*\alpha)*\beta=\alpha*\beta$

$=\alpha*(\beta*\beta)$

$(\alpha*\alpha)*\beta=(\alpha*\beta)*\beta$ (لأن $*$ تجميعي)

وبما أن β منتظم بالقانون $*$ فإن : $\alpha*\alpha=\alpha*\beta$

وبما أن α منتظم بالقانون $*$ فإن : $\alpha=\beta$ تناقض مع كون $\alpha\neq\beta$

وبالتالي : α وحيد .

8 لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ يحقق:

$$(R) : \forall(w,x,y,z)\in E^4 : (w*x)*(y*z) = w*z$$

1) بين أن لكل a و b و c من E لدينا: $c=a*b \Rightarrow c*c=c$

2) استنتج أن لكل a و b و x من E لدينا: $(a*b)*x = a*x$

الجواب: 1) لكل a و b و c من E لدينا بحيث: $c=a*b$

$$c*c = (a*b)*(a*b) = a*b = c$$

2) لكل a و b و x من E لدينا:

$$a*x = (a*b)*(a*x) \quad \text{(حسب العلاقة (R))}$$
$$= [(a*b)*(a*b)]*(a*x) \quad \text{(حسب السؤال 1)}$$
$$a*x = (a*b)*x \quad \text{(حسب العلاقة (R))}$$

9 لتكن (E,T) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي T بحيث:

i) كل عنصر من E هو منتظم.

ii) $\forall(x,y,z)\in E^3 : (yTz)Tx = (yTx)T(zTx)$

بين أن: $\forall y\in E : yTy = y$

الجواب: ليكن x و y من E لدينا:

$$(xTy)Ty = (xTy)T(yTy)$$

وبما أن كل عنصر من E منتظم فإن:

$$(xTy)Ty = (xTy)T(yTy) \Rightarrow y = yTy$$

10 لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ بحيث:

$$(R_1) : \forall x\in E : x*x = x$$

$$(R_2) : \forall(x,y,z)\in E^3 : (x*y)*z = (y*z)*x$$

بين أن $*$ تبادلي.

الجواب: ليكن x و y من E لدينا:

$$y*x = (y*y)*x \quad \text{(حسب العلاقة } (R_1))$$

$$y*x=(x*y)*y \quad \text{(حسب العلاقة } (R_2))$$
$$=[(x*x)*y]*y \quad \text{(حسب العلاقة } (R_1))$$
$$=[(x*y)*x]*y \quad \text{(حسب العلاقة } (R_2))$$
$$=(x*y)*(x*y) \quad \text{(حسب العلاقة } (R_2))$$
$$y*x=x*y \quad \text{(حسب العلاقة } (R_1))$$

وبالتالي القانون * تبادلي.

11 نزود المجموعة E بقانون تركيب داخلي بحيث:

$$\forall (x,y)\in E^2 : \quad x*(x*y)=(y*x)*x=y$$

بين أن القانون * تبادلي.

<u>الجواب</u> لكل x و y من E لدينا:

$$x*y=[(x*y)*x]*x$$

وذلك بتعويض y بـ $x*y$ في العلاقة: $(y*x)*x=y$

وبما أن: $x=(x*y)*y$

فإن:

$$x*y=[(x*y)*x]*x$$
$$=[(x*y)*((x*y)*y)]*x$$

وبما أن: $(x*y)*((x*y)*y)=y$

فإن: $x*y=y*x$

ومنه القانون * تبادلي.

12 لتكن $(E;*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي ليكن t من E ؛ نعتبر العلاقة (R) المعرفة بـ: $t*t=t$

1) بين أنه إذا كان x و y يحققان العلاقة (R) و $x*y=y*x$ فإن: $x*y$ يحقق العلاقة (R).

2) نفترض أن * يقبل عنصرا محايدا و x عنصر يقبل مماثل ويحقق العلاقة (R).

بين أن مماثل x يحقق العلاقة (R).

الجواب : 1) ليكن x و y من E بحيث : $x*x=x$ و $y*y=y$

لدينا :
$$(x*y)*(x*y) = (x*(y*x))*y$$
$$= (x*(x*y))*y \quad (x*y=y*x \text{ :لأن})$$
$$= ((x*x)*y)*y \quad (\text{تجميعي} *)$$
$$= (x*x)*(y*y) \quad (\text{تجميعي} *)$$
$$(x*y)*(x*y) = x*y \quad (x*x=x \text{ و } y*y=y)$$

ومنه $x*y$ يحقق العلاقة (R)

2) لتكن x' مماثل x بالنسبة للقانون $*$ لدينا :
$$x'*x' = (x*x)' = x' \quad (x*x=x \text{ :لأن})$$

ومنه x' يحقق العلاقة (R).

13 لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي

1) بين أن كل عنصر يقبل مماثل بالقانون $*$ فهو عنصر منتظم.

2) بين بإعطاء مثال مضاد أن عكس هذه الخاصية خاطئ.

الجواب : ليكن x عنصرا من E يقبل مماثل بالقانون $*$

لدينا لكل y و z من E :
$$x*y=x*z \Rightarrow x^{-1}*(x*y)=x^{-1}*(x*z)$$
$$\Rightarrow (x^{-1}*x)*y=(x^{-1}*x)*z \quad (\text{تجميعي} * \text{ :لأن})$$
$$\Rightarrow e*y=e*z \quad (e \text{ العنصر المحايد لـ} *)$$
$$\Rightarrow y=z$$

إذن x منتظم على اليسار بالنسبة لـ $*$

و بنفس الطريقة نبين أن x منتظم على اليمين بالنسبة لـ $*$

ومنه فإن x عنصر منتظم بالنسبة للقانون $*$.

2) لدينا : $(\mathbb{N},+)$ كل عنصر من $\mathbb{N}$ هو عنصر منتظم بالنسبة للجمع $+$

و لكنه لا يقبل مماثل.

14 لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ تجميعي يحقق الشرطين :

أ) $\exists (a,e)\in E^2 : \quad a*e=e$

ب) التطبيق : $\gamma_a : E \longrightarrow E$ تباني .
$x \longmapsto a*x$

1) بين أن : $\forall x\in E : \quad e*x=x$

2) نفترض أنه يوجد b من E بحيث : $a*b=e$.
بين أن : $b*a=e$

الجواب : 1) لدينا لكل x من E :

$\gamma_a(e*x) = a*(e*x)$
$= (a*e)*x$ (لأن $*$ قانون تجميعي)
$= a*x$ (لأن : $a*e=a$)

ومنه : $\gamma_a(e*x) = \gamma_a(x)$

وبما أن γ_a تطبيق تباني فإن : $\forall x\in E : \quad e*x=x$

2) لدينا :
$\gamma_a(b*a) = a*(b*a)$
$= (a*b)*a$ (لأن : $a*b=e$)
$= e*a = a$ (لأن : $e*a=a$)
$= a*e$

ومنه : $\gamma_a(b*a) = \gamma_a(e)$

وبما أن γ_a تباني فإن : $b*a=e$

15 نعتبر قانون التركيب الداخلي $*$ المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x*y = x+y-xy$

نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 1-x$

1) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},*)$ نحو $(\mathbb{R},\times)$.

2) استنتج ما يلي : أ - $*$ تجميعي .

ب - $*$ يقبل عنصر محايد ينتم تحديده .

3) حدد مجموعة العناصر التي تقبل مماثل بالقانون $*$.

4) ليكن a من $\mathbb{R}$ أحسب : $A = \underbrace{a*a*\cdots\cdots*a}_{n \text{ مرة}}$

الجواب : 1) لدينا : $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists! \, x = 1-y \in \mathbb{R} \quad : f(x) = y$

ومنه f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f(x*y) = 1 - x*y$$
$$= 1 - (x+y-xy)$$
$$= 1-x+xy-y = (1-x) - y(1-x)$$
$$= (1-x)(1-y)$$

ومنه : $f(x*y) = f(x) \times f(y)$

وبالتالي : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},*)$ نحو $(\mathbb{R},\times)$

2) أ- بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},*)$ نحو $(\mathbb{R},\times)$ فإن بنية المجموعة $(\mathbb{R},*)$ هي نفس بنية المجموعة $(\mathbb{R},\times)$

و بما أن $\times$ تجميعي في $\mathbb{R}$ فإن $*$ تجميعي في $\mathbb{R}$.

ب- بما أن 1 هو العنصر المحايد بالنسبة $(\mathbb{R},\times)$ فإن $f^{-1}(1)$ هو العنصر المحايد بالنسبة لـ $(\mathbb{R},*)$

و بما أن : $f^{-1}(x) = f(x)$ فإن $f(1) = 0$ ومنه 0 هو العنصر المحايد بالنسبة لـ $(\mathbb{R},*)$

3) لدينا 0 هو العنصر الوحيد الذي لا يقبل مماثل بالنسبة لـ $(\mathbb{R},\times)$

و بما أن $f(0) = 1$ فإن مجموعة العناصر التي تقبل مماثل بالنسبة لـ $(\mathbb{R},*)$ هي : $\mathbb{R} - \{1\}$.

4) لدينا لكل a من $\mathbb{R}$:

$$f(A) = f(\underbrace{a*a*\cdots\cdots*a}_{n \text{ مرة}}) = \underbrace{f(a)\times f(a) \times \cdots\cdots \times f(a)}_{n \text{ مرة}}$$

$$f(A) = (f(a))^n = (1-a)^n$$

ومنه : $A = f^{-1}((1-a)^n)$

و بما أن ، $f^{-1}(x) = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ فإن : $A = 1 - (1-a)^n$

16

نضع : $I =]0, +\infty[$ ، نعرف على I قانون التركيب الداخلي $*$ ب :

$$\forall (x, y) \in I^2 : \quad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

نعتبر التطبيق f المعرف من I نحو I بمايلي : $f(x) = x^2$

1) بين أن لكل x و y من I : $f(x*y) = f(x) + f(y)$

2) أ- هل القانون $*$ تجميعي ؟

ب - هل القانون $*$ يقبل عنصر محايد ؟

3) ليكن a من I ، أحسب : $A = \underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}$

الجواب : 1) ليكن x و y من I لدينا :

$$f(x*y) = f(\sqrt{x^2+y^2}) = x^2 + y^2$$

ومنه : $f(x*y) = f(x) + f(y)$

2) ملاحظة هامة : f تشاكل تقابلي من $(I, *)$ نحو $(I, +)$

إذن بنية المجموعة $(I, +)$ هي بنية المجموعة $(I, *)$

أ- بما أن القانون $+$ تجميعي على I فإن $*$ تجميعي على I .

ب - بما أن $(I, +)$ لا يقبل عنصر محايد فإن $*$ لا تقبل عنصر محايد في I

3) لدينا : $f(\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ مرة}}) = \underbrace{f(a) + f(a) + \dots + f(a)}_{n \text{ مرة}}$

$$= \underbrace{a^2 + a^2 + \dots + a^2}_{n \text{ مرة}} = n a^2$$

ومنه : $a * a * \dots * a = f^{-1}(n a^2)$ (لأن : f تقابل من I نحو I)

وبما أن لكل x من I : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

فإن : $a * a * \dots * a = a\sqrt{n}$

17

نزود المجموعة $\mathbb{R}^2$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بمايلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) * (x', y') = (xx' ; yy')$$

1) بين أن القانون $*$ تجميعي و تبادلي .

2) بين أن القانون $*$ يقبل عنصراً محايداً ثم حدد عناصر $\mathbb{R}^2$ التي تقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$.

3) نعتبر المجموعة : $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

أ- بين أن S جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2, \times)$.

ب- بين أن $(S, *)$ يقبل عنصراً محايداً ". قارن العنصرين المحايدين لكل من $(\mathbb{R}^2, *)$ و $(S, *)$

الجواب : 1) لنبين أن القانون * تبادلي .

لكل (x, y) و (x', y') من $\mathbb{R}^2$ لدينا :

$$(x, y) * (x', y') = (xx'; yy') = (x'x; y'y) = (x', y') * (x, y)$$

ومنه * قانون تبادلي .

لنبين * قانون تجميعي .

ليكن (x, y) و (x', y') و (x'', y'') من $\mathbb{R}^2$ لدينا :

$$\begin{aligned}[(x,y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', yy') * (x'', y'') \\ &= (xx'x'' ; yy'y'') \\ &= (x(x'x'') ; y(y'y'')) \\ &= (x, y) * (x'x'' ; y'y'')\end{aligned}$$

$$[(x,y) * (x', y')] * (x'', y'') = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')]$$

ومنه فإن القانون * تجميعي .

2) لنبين أن القانون * يقبل عنصر محايد

لكل (x, y) من $\mathbb{R}^2$ لدينا : $(x, y) * (1, 1) = (x, y)$

وبما أن * قانون تبادلي فإن $(1, 1)$ هو العنصر المحايد للقانون *

لنحدد العناصر التي تقبل مماثل بالنسبة *.

ليكن (x, y) و (x', y') من $\mathbb{R}^2$ لدينا :

$$(x, y) * (x', y') = (1, 1) \Leftrightarrow (xx', yy') = (1, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ yy' = 1 \end{cases}$$

إذا كان : $x \neq 0$ و $y \neq 0$ فإن : $x' = \frac{1}{x}$ و $y' = \frac{1}{y}$

إذن كل عنصر (x, y) من $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ يقبل مماثل $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ بالنسبة لـ *

3) أ- نضع : $S = \mathbb{R} \times \{0\}$

لنبين أن S جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2, *)$.

ليكن $(x,0)$ و $(y,0)$ عنصران من S لدينا :

$$(x,0)*(y,0)=(xy,0)$$

ومنه : $(x,0)*(y,0)\in S$

وبالتالي S جزء مستقر من $(\mathbb{R}^2,*)$.

ب - لكل $(x,0)$ من S لدينا : $(x,0)*(1,0)=(x,0)$

$$(1,0)*(x,0)=(0,x)$$

ومنه $(S,*)$ يقبل $(1,0)$ كعنصر محايد .

لدينا $(1,0)$ عنصر محايد لـ $(S;*)$ و $(1,1)$ عنصر محايد لـ $(\mathbb{R}^2;*)$

ومنه : $(1,1)\neq(1,0)$.

ملاحظة :

$$\left\{\begin{array}{l}(S,*)\ \text{جزء مستقر}\ (G,*)\\ e_S\ \text{عنصر محايد لـ}\ (S,*)\\ e_G\ \text{عنصر محايد لـ}\ (G,*)\end{array}\right. \not\Rightarrow e_S=e_G$$

18 نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ قانون التركيب الداخلي T المعرف بمايلي : $\forall(z,z')\in\mathbb{C}^2:\ zTz'=z\bar{z}'$

($\bar{z}$ مرافق z)

1) أدرس تبادلية وتجميعية القانون T .

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(zTz)Tz=i$.

الجواب : 1) لدينا : $iT1=i$ و $1Ti=-i$

ومنه : $1Ti\neq iT1$

وبالتالي القانون T غير تبادلي .

لدينا : $iT(1Ti)=iT(-i)=i.i=-1$

$$(iT1)Ti=iTi=i.(-i)=1$$

ومنه : $iT(1Ti)\neq(iT1)Ti$

وبالتالي T قانون غير تجميعي .

2) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ (zTz)Tz=i$

لدينا : $(zTz)Tz=(z\bar{z})Tz=z\bar{z}.\bar{z}=|z|^2.\bar{z}$

$(\bar{z} T z) T z = i \Leftrightarrow |z|^2 \bar{z} = i$: لدينا

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ حيث : $z = x + iy$: نضع

$|z|^2 \bar{z} = i \Leftrightarrow (x^2+y^2)(x - iy) = i$: ومنه

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)x - i(x^2+y^2)y = i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)x = 0 \\ (x^2+y^2)y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ أو } x^2+y^2 = 0 \\ (x^2+y^2)y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = -1 \end{cases}$$

غير ممكن

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{-i\}$

19 نرمز بـ $\mathcal{A}$ لمجموعة الدوال التآلفية ولعناصرها بـ : $f_{(a,b)}$

بحيث : $f_{(a,b)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax+b$

نزود $\mathcal{A}$ بعملية تركيب الدوال $\circ$ ونزود $\mathbb{R}^2$ بقانون تركيب داخلي T.

نعتبر التطبيق : $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$f_{(a,b)} \longmapsto (a,b)$

حدد القانون T إذا علمت أن التطبيق h تشاكلا من $(\mathcal{A}, \circ)$ نحو $(\mathbb{R}^2, T)$

<u>الجواب</u> : لدينا h تشاكلا من $(\mathcal{A}, \circ)$ نحو $(\mathbb{R}^2, T)$ إذا وفقط إذا كان :

لكل $f_{(a,b)}$ و $f_{(a',b')}$ من $\mathcal{A}$ لدينا :

$$h(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = h(f_{(a,b)}) \, T \, h(f_{(a',b')})$$
$$= (a,b) \, T \, (a',b')$$

لنحدد $f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}$.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')})(x) = f_{(a,b)}(f_{(a',b')}(x))$$
$$= f_{(a,b)}(a'x+b') = a(a'x+b') + b$$
$$= aa'x + ab' + b = f_{(aa' ; ab'+b)}(x)$$

ومنه : $f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')} = f_{(aa', ab'+b)}$

إذن : $h(f_{(a,b)} \circ f_{(a',b')}) = (aa', ab'+b)$

ومنه القانون T معرف بمايلي : لكل (a,b) و (a',b') من $\mathbb{R}^2$:

$$(a,b) T (a',b') = (aa', ab'+b)$$

20 لتكن (F,T) مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي T تجميعيا وليكن a من F.

ليكن $*$ قانون تركيب داخلي معرف على F بمايلي :

$$\forall (x,y) \in F^2 : \quad x * y = x T a T y$$

1) بين أنه إذا كان T تبادلي فإن $*$ تبادلي.

2) بين أن $*$ تجميعي.

3) نفترض أن T تبادلي ويقبل عنصرًا محايدًا e وأن كل عنصر من F يقبل مماثل بالنسبة للقانون T.

أ- بين أن $*$ يقبل عنصرًا محايدًا يتم تحديده.

ب- بين أن كل عنصر من F يقبل مماثلا بالنسبة لـ $*$.

الجواب : 1) نفترض أن T تبادلي.

لدينا لكل x و y من F :

$$x * y = x T a T y$$

$$= (x T a) T y \quad \text{(لأن : } T \text{ تجميعي)}$$

$$= (a T x) T y \quad \text{(لأن : } T \text{ تبادلي)}$$

$$= a T (x T y) \quad \text{(لأن : } T \text{ تجميعي)}$$

$$= a T (y T x) = (a T y) T x = (y T a) T x$$

$$= y T a T x$$

إذن : $x * y = y * x$ ومنه $*$ قانون تبادلي.

2) لنبين أن $*$ تجميعي.

لكل x و y و z من F لدينا :

$$(x*y)*z=(xTaTy)*z=(xTaTy)TaTz$$

$$=xTaT(yTaTz) \quad (\text{لأن } T \text{ تجميعي})$$

$$=xTaT(y*z)$$

إذن: $(x*y)*z = x*(y*z)$

ومنه القانون $*$ تجميعي .

3) أ- لنبين أن القانون $*$ يقبل عنصراً محايداً .

أي: $\exists e_0 \in \mathbb{F} \quad \forall x \in \mathbb{F} \quad x*e_0 = x$ (لأن $*$ تبادلي)

لكل x من $\mathbb{F}$: $x*e_0 = x \Leftrightarrow xTaTe_0 = x$

بما أن كل عنصر من $\mathbb{F}$ يقبل مماثل بالنسبة للقانون T

نرمز لـ x^{-1} لمماثل x بالنسبة للقانون T .

إذن: $xTaTe_0 = x \Leftrightarrow x^{-1}T(xTaTe_0) = x^{-1}Tx$

$$\Leftrightarrow (x^{-1}Tx)T(aTe_0) = e$$

$$\Leftrightarrow eT(aTe_0) = e$$

$$\Leftrightarrow aTe_0 = e$$

$$\Leftrightarrow (a^{-1}Ta)Te_0 = a^{-1}Te$$

$$\Leftrightarrow eTe_0 = a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e_0 = a^{-1}$$

إذن e_0 هو مماثل a بالنسبة للقانون T .

ب- لنبين أن كل عنصر x من $\mathbb{F}$ يقبل مماثل بالنسبة $*$.

بما أن $*$ تبادلي يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{F} \ \exists x' \in \mathbb{F} : x*x' = e_0$

(x' مماثل x بالنسبة $*$)

أي: $\forall x \in \mathbb{F} \quad \exists x' \in \mathbb{F} \quad : \quad xTaTx' = e_0$

لدينا: (x^{-1} مماثل x بالنسبة لـ T) $xTaTx' = e_0 \Leftrightarrow x^{-1}T(xTaTx') = x^{-1}Te_0$

$$\Leftrightarrow (x^{-1}Tx)T(aTx') = x^{-1}Te_0$$

$$\Leftrightarrow eT(aTx') = x^{-1}Te_0$$

$$\Leftrightarrow aTx' = x^{-1}Te_0 \Leftrightarrow (a^{-1}Ta)Tx' = a^{-1}T(x^{-1}Te_0)$$

$$\Leftrightarrow aTx' = a^{-1}Tx^{-1}Te_0 = a^{-1}Te_0Tx^{-1}$$

بما أن: $e_0 = a^{-1}$ فإن: $x' = a^{-1}Ta^{-1}Tx^{-1}$

21 نزود المجموعة $G=\mathbb{C}-\{-i\}$ بقانون تركيب داخلي $\perp$ المعرف بمايلي:

$$\forall(z,z')\in G^2 :\quad z\perp z' = zz' + i(z+z') - (1+i)$$

1) حدد العنصر المحايد بالقانون $\perp$.

2) بين أن كل عنصر من G يقبل مماثلاً.

3) نعتبر التطبيق:
$$f : (\mathbb{C}^*, \times) \longrightarrow (G, \perp)$$
$$z \longmapsto z-i$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي.

ب- استنتج أن القانون $\perp$ تجميعي.

الجواب: 1) ليكن e عنصر من G بحيث: $\forall z\in G :\ z\perp e = z$

($\perp$ تبادلي)

$\Leftrightarrow \forall z\in G:\ ze + i(z+e) - 1 - i = z$

$\Leftrightarrow \forall z\in G:\ z(e+i-1) + ie - 1 - i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e+i-1=0 \\ ie-1-i=0 \end{cases} \Leftrightarrow e = 1-i$

إذن القانون $\perp$ يقبل عنصراً محايداً $e=1-i$

2) لنبين أن: $\forall z\in G\ \ \exists z'\in G :\ z\perp z' = 1-i$ ($\perp$ تبادلي)

ليكن z من G لنحل المعادلة: $z\perp z' = 1-i$ ذات المجهول z'

إذن: $z\perp z' = 1-i \Leftrightarrow zz' + i(z+z') - (1+i) = 1-i$

$\Leftrightarrow z'(z+i) = 2 - iz$

$\Leftrightarrow z' = \dfrac{2-iz}{z+i}$ (لأن: $z\neq -i$)

وبالتالي كل عنصر من G يقبل مماثل بالنسبة للقانون $\perp$.

3) أ- لنبين أن f تشاكل تقابلي.

ليكن z_1 و z_2 من $\mathbb{C}^*$ لدينا: $f(z_1\times z_2) = z_1z_2 - i$

$f(z_1)\perp f(z_2) = (z_1-i)\perp(z_2-i)$

$= (z_1-i)(z_2-i) + i(z_1-i+z_2-i) - (1+i)$

$= z_1z_2 - iz_1 - iz_2 - 1 - iz_1 + 1 + iz_2 + 1 - 1 - i$

إذن: $f(z_1)\perp f(z_2) = z_1z_2 - i$

ومنه: $f(z_1\times z_2) = f(z_1)\perp f(z_2)$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(G, \perp)$

لدينا بديهيا f تقابل من $\mathbb{C}^*$ نحو G.

و بالتالي f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(G, \perp)$.

ب- بما أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(G, \perp)$ فإن $(G, \perp)$ لها نفس بنية $(\mathbb{C}^*; \times)$

وبما أن $\times$ تجميعي في $\mathbb{C}^*$ فإن القانون $\perp$ تجميعي في G.

22 لتكن $(E, *)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ تجميعي بحيث: لكل a من E التطبيق $\gamma_a : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto a * x \end{array}$ تبايني.

1) ليكن μ من E بحيث: $\mu * \mu = \mu$

بين أن: $\forall x \in E : \mu * x = x$

2) ليكن α و β من E بحيث: $\alpha * \alpha = \beta$ و $\beta * \beta = \beta$ و $\alpha \neq \beta$

بين أنه لا يوجد أي زوج (x, y) من E^2 بحيث: $x * \alpha = y * \beta$

الجواب: 1) لكل x من E لدينا:

$\gamma_\mu(\mu * x) = \mu * (\mu * x) = (\mu * \mu) * x$ ($*$ تجميعي)

$= \mu * x$ (لأن: $\mu * \mu = \mu$)

ومنه: $\gamma_\mu(\mu * x) = \gamma_\mu(x)$

وبما أن γ_μ تطبيق تبايني فإن: $\forall x \in E : \mu * x = x$

2) نفترض أنه يوجد زوج (x, y) من E^2 بحيث: $x * \alpha = y * \beta$

بما أن $\alpha * \alpha = \alpha$ فإنه حسب السؤال 1) لدينا: $\alpha * \beta = \beta$

ولدينا: $\gamma_x(\alpha) = x * \alpha = y * \beta = y * (\beta * \beta)$

$= (y * \beta) * \beta = (x * \alpha) * \beta$

$\gamma_x(\alpha) = x * (\alpha * \beta)$

ومنه: $\gamma_x(\alpha) = \gamma_x(\alpha * \beta)$

بما أن γ_x تطبيق تبايني فإن: $\alpha = \alpha * \beta$

أي: $\alpha = \beta$ (لأن: $\alpha * \beta = \beta$)

وهذا تناقض مع كون $\alpha \neq \beta$.

وبالتالي $\nexists$ يوجد أي زوج (x,y) من E^2 بحيث : $x*\alpha=y*\beta$.

23 لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و A و B جزئين من E نرمز بـ : $A*B$ بالمجموعة :

$$A*B=\{x\in E \ / \ \exists(a,b)\in A\times B : x=a*b\}$$

نفترض أن $*$ تجميعي و A و B جزئين مستقرين من E .

1) بين أن $A*B$ ليس بالضرورة جزء مستقر من E .

2) بين أنه إذا كان : $B*A\subset A*B$ فإن $A*B$ جزء مستقر من E .

الجواب : 1) مثال مضاد : ليكن $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ و $*=\times$

نعتبر : $A=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ و $B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$

نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ و $K=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

لدينا : $K^2=I$ و $J^2=I$ و $IJ=J$ و $IK=K$

ومنه A و B جزئين مستقرين بالنسبة للقانون $\times$ في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

ولدينا : $A*B=\{I,J,K;JK\}$

ولدينا : $(JK)^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I\notin A*B$

ومنه $A*B$ جزء غير مستقر في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بالنسبة لـ $*$.

2) لدينا : $X\in A*B \Leftrightarrow \exists(a,b)\in A\times B : \quad X=a*b$

$Y\in A*B \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta)\in A\times B \ : \ Y=\alpha*\beta$

ومنه : $X*Y=(a*b)*(\alpha*\beta)$

$=a*(b*\alpha)*\beta$ (لأن : $*$ تجميعي)

لدينا : $\begin{cases}b\in B\\ \alpha\in A\end{cases}\Rightarrow b*\alpha\in B*A\subset A*B.$

ومنه : $\exists(\alpha_0,\beta_0)\in A\times B \ : \ b*\alpha=\alpha_0*\beta_0$

إذن : $X*Y=a*(\alpha_0*\beta_0)*\beta$

$=(a*\alpha_0)*(\beta_0*\beta)$

لدينا : $\begin{cases}a\in A\\ \alpha_0\in A\\ A \text{ جزء مستقر من } E\end{cases}\Rightarrow a*\alpha_0\in A$

$\begin{cases}\beta_0\in B\\ \beta\in B\\ B \text{ جزء مستقر من } E\end{cases}\Rightarrow \beta_0*\beta\in B$

ومنه : $x*y \in A*B$

وبالتالي $A*B$ جزء مستقر من E .

24

ليكن f تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F;T)$

وليكن A جزء مستقر من $(E,*)$ و B جزء مستقر من (F,T)

1) بين أن $f^{-1}(B)$ جزء مستقر من $(E;*)$.

2) بين أن $f(A)$ جزء مستقر من $(F;T)$.

الجواب : 1) ليكن x و y من $f^{-1}(B)$ إذن : $f(x)\in B$ و $f(y)\in B$

وبما أن B جزء مستقر من (F,T) فإن : $f(x)Tf(y)\in B$

وبما أن f تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T) فإن : $f(x)Tf(y)=f(x*y)$

إذن : $f(x*y)\in B$ ، ومنه : $x*y\in f^{-1}(B)$

وبالتالي $f^{-1}(B)$ جزء مستقر من $(E,*)$.

2) ليكن y و z من $f(A)$ إذن : $\exists(\alpha,\beta)\in A^2 : z=f(\alpha)$ و $y=f(\beta)$

وبما أن : $zTy=f(\alpha)Tf(\beta)=f(\alpha*\beta)$ (لأن f تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T))

وبما أن A جزء مستقر من $(E,*)$ فإن : $\alpha*\beta\in E$

ومنه : $f(\alpha*\beta)\in f(A)$ أي : $zTy\in f(A)$

وبالتالي : $f(A)$ جزء مستقر من (F,T) .

25

ليكن f تشاكل من $(E,*)$ نحو (F,T) .

نضع : $C=\{a\in E \mid \forall x\in E : a*x=x*a\}$

$C'=\{b\in F \mid \forall y\in F : bTy=yTb\}$

المجموعة C تسمى مركز $(E,*)$ و C' تسمى مركز (F,T)

1) بين أن : f تبايني $\Longrightarrow f^{-1}(C')\subset C$.

2) بين أن : f شمولي $\Longrightarrow f(C)\subset C'$.

الجواب : 1) نفترض أن f تبايني.

لدينا : $x\in f^{-1}(C') \Leftrightarrow f(x)\in C'$

ليكن x من $\bar{f}^{1}(C')$ و y من E لدينا:

$f(x*y)=f(x)\top f(y)$ (لأن f تشاكل من $(E,*)$ نحو $(F,\top)$)

$=f(y)\top f(x)$ ($f(x)\in C'$:لأن)

$f(x*y)=f(y*x)$

وبما أن f تباينى فإن: $x*y=y*x$ $\forall y\in E$

ومنه: $x\in C$

وبالتالي: $\bar{f}^{1}(C')\subset C$.

2) نفترض أن f شمولي.

لدينا: $x'\in f(C) \Leftrightarrow \exists x\in C : x'=f(x)$

لكل y' من F يوجد y من E بحيث: $y'=f(y)$ (لأن f شمولي من E نحو F)

ومنه: $x'\top y' = f(x)\top f(y)=f(x*y)$

$=f(y*x)$ ($x\in C$:لأن)

$=f(y)\top f(x)$

إذن: $\forall y'\in F$ $x'\top y'=y'\top x'$

ومنه: $x'\in C'$

وبالتالي: $f(C)\subset C'$.

26 نعرف على $\mathbb{N}$ القانون التركيب الداخلي $*$ بمايلي:

أ- $\forall y\in\mathbb{N} : 0*y=y+1$

ب- $\forall x\in\mathbb{N} : (x+1)*0=x*1$

ج- $\forall (x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : (x+1)*(y+1)=x*[(x+1)*y]$

1) أحسب: $0*0$ ، $0*1$ ، $1*x$ ، $1*1$ ، $2*0$

2) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N} : 1*n=n+2$

3) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N} : 2*n=2n+3$

4) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي: $\forall n\in\mathbb{N} : u_n=3*n$

أ- أحسب: u_0.

ب- بين أن: $\forall n\in\mathbb{N} : u_{n+1}=2u_n+3$

الجواب : 1) لدينا حسب (أ) $0*y=y+1 \quad : \quad \forall y\in\mathbb{N}$

بأخذ $y=0$ نحصل على : $0*0=0+1=1$

وبأخذ $y=1$ نحصل على : $0*1=1+1=2$

وبأخذ $x=0$ في (ب) نحصل على : $1*0=0*1=2$

وبأخذ $x=y=0$ في (ج) نحصل على : $1*1=0*[1*0]$

$=0*2=2+1=3$

وبأخذ $x=1$ في (ب) نحصل على : $2*0=1*1=3$

2) لنبين أن : $\forall n\in\mathbb{N} : 1*n=n+2$

بالترجع : - من أجل $n=0$ لدينا : $1*0=0+2=2$ الخاصية صحيحة .

- نفترض أن : $1*n=n+2$ و نبين أن : $1*(n+1)=n+3$

حسب (ج) بأخذ : $y=n$ و $x=0$ نحصل على :

$1*(n+1)=0*[1*n]=0*(n+2)$

$=(n+2)+1$ (حسب (أ))

ومنه : $1*(n+1)=n+3$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} : 1*n=n+2$

3) لنبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} : 2*n=2n+3$

- من أجل $n=0$ لدينا ، $2*0=3=2\times0+3$ الخاصية صحيحة .

- نفترض أن : $2*n=2n+3$ و نبين أن ، $2*(n+1)=2n+5$

لدينا بأخذ : $y=n$ و $x=1$ في (ب) نحصل على :

$2*(n+1)=1*[2*n]=2*(2n+3)$

$=(2n+3)+2$

ومنه : $2*(n+1)=2n+5$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} : 2*n=2n+3$

4) لدينا : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n=3*n$

أ- لدينا : $u_0=3*0=(2+1)*0=2*1=2\times1+3=5$

ب- ليكن n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_{n+1}=3*(n+1)=(2+1)*(n+1)$

$u_{n+1}=2*[3*n]=2(3*n)+3$

وبالتالي : $u_{n+1}=2u_n+3$.

29

لتكن E مجموعة مزودة بقانونين تركيب داخليين $*$ و $\top$.
و ليكن e_1 العنصر المحايد للقانون $*$.
و ليكن e_2 العنصر المحايد للقانون $\top$.
نفترض أن لكل x و y و u و v من E:

$$(R):\quad (x*y)\top(u*v)=(x\top u)*(y\top v)$$

1) بين أن: $e_1=e_2$.

2) بين أن: $x\top v=x*v \quad \forall(x,v)\in E^2$

3) بين أن القانونين $\top$ و $*$ تبادليين وتجميعيين.

الجواب: 1) بتطبيق العلاقة (R) و ذلك بأخذ: $y=u=e_1$ و $x=v=e_2$

نحصل على: $(e_2*e_1)\top(e_1*e_2)=(e_2\top e_1)*(e_1\top e_2)$

و بما أن: $e_2\top e_1=e_1$ و $e_2*e_1=e_2$

$e_1\top e_2=e_1$ و $e_1*e_2=e_2$

فإن: $e_2\top e_2=e_1*e_1$ ومنه: $e_2=e_1$

2) بتطبيق العلاقة (R) و ذلك بأخذ: $y=u=e_1$

نحصل على: $(x*e_1)\top(e_1*v)=(x\top e_1)*(e_1\top v)$

و بما أن e_1 هو العنصر المحايد للقانونين $*$ و $\top$

فإن: $x\top v=x*v$

3) من خلال الأسئلة السابقة نستنتج أن القانونين $*$ و $\top$ منطبقين

ومنه العلاقة (R) تصبح باستعمال القانون $*$ فقط:

$$(R')\quad (x*y)*(u*v)=(x*u)*(y*v)\qquad \forall(x,y)\in E^2,\ \forall(u,v)\in E^2$$

و بأخذ $x=v=e_1$ نحصل على:

$$(e_1*y)*(u*e_1)=(e_1*u)*(y*e_1)$$

أي: $y*u=u*y$ ومنه $*$ قانون تبادلي.

في العلاقة (R') بأخذ: $u=e_1$ نحصل على:

$$(x*y)*(e_1*v)=(x*e_1)*(y*v)$$

أي: $(x*y)*v=x*(y*v)$

ومنه $*$ قانون تجميعي.

الزمرة

1 لتكن $(G,*)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ تجميعي وتقبل عنصراً محايداً e على اليمين.
نفترض أن كل عنصر من G يقبل مماثل على اليمين.
بين أن $(G,*)$ زمرة.

الجواب: ليكن x من G، نرمز x_d لمماثل x على اليمين.

لدينا: $x*x_d=e$

لدينا x_d في G ومنه x_d يقبل مماثلاً x'_d على اليمين أي: $x_d*x'_d=e$

ومنه: $(x*x_d)*x'_d=x*(x_d*x'_d)$

$=x*e=x$ (لأن e عنصر محايد على اليمين)

وبما أن: $(x*x_d)*x'_d=e*x'_d$

فإن: $e*x'_d=x$

ولدينا: $x_d*x=x_d*(e*x'_d)=(x_d*e)*x'_d$

$=x_d*x'_d$

أي: $x_d*x=x_d*x'_d$

وبما أن: $x_d*x'_d=e$ فإن: $x_d*x=e$

إذن: x_d هو مماثل x على اليسار.

ولدينا كذلك $e*x=(x*x_d)*x$

(لأن $*$ تجميعي) $=x*(x_d*x)$

(لأن e عنصر محايد على اليمين) $e*x=x*e=x$

وبالتالي فإن e هو عنصر محايد على اليسار

إذن G يقبل عنصر محايد e وكل عنصر من G يقبل مماثل و$*$ تجميعي
وبالتالي $(G,*)$ زمرة.

2 نزود $\mathbb{R}^2$ بالقانون التركيب الداخلي T المعرف بمايلي :

لكل (x,y) و (x',y') من $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y)T(x',y') = (x+x' ; ye^{x'}+y'e^{-x})$$

بين أن $(\mathbb{R}^2,T)$ زمرة غير تبادلية .

الجواب :

* تجميعية T : ليكن (x,y) و (x',y') و (x'',y'') من $\mathbb{R}^2$

$$[(x,y)T(x',y')]T(x'',y'') = (x+x', ye^{x'}+y'e^{-x})\,T\,(x'',y'')$$
$$= (x+x'+x'' ; (ye^{x'}+y'e^{-x})e^{x''}+y''e^{-(x+x')})$$
$$= (x+x'+x'' ; ye^{x'+x''}+y'e^{x''-x}+y''e^{-(x+x')})$$

ولدينا : $(x,y)T[(x',y')T(x'',y'')] = (x,y)T(x'+x'' ; y'e^{x''}+y''e^{-x'})$

$$= (x+x'+x'' ; (y'e^{x''}+y''e^{-x'})e^{-x}+ye^{x'+x''})$$
$$= (x+x'+x'' ; y'e^{x''-x}+y''e^{-(x+x')}+ye^{x'+x''})$$

إذن : $[(x,y)T(x',y')]T(x'',y'') = (x,y)T[(x',y')T(x'',y'')]$

ومنه T تجميعي .

* العنصر المحايد لـ T : ليكن (e_1,e_2) عنصراً محايداً بالنسبة لـ T

إذن لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases}(x,y)T(e_1,e_2) = (x,y)\\(e_1,e_2)T(x,y) = (x,y)\end{cases}$

لدينا : $(x,y)T(e_1,e_2) = (x,y) \Leftrightarrow (x+e_1, ye^{e_1}+e_2e^{-x}) = (x,y)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+e_1 = x\\ ye^{1}+e_2e^{-x} = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e_1 = 0\\ e_2e^{-x} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e_1 = 0\\ e_2 = 0\end{cases}$$

ولدينا لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$: $(0,0)T(x,y) = (x,y)$

ومنه $(0,0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون T .

* العنصر المماثل لـ T :

ليكن (x,y) من $\mathbb{R}^2$ ، لنبين أنه يوجد (x',y') من $\mathbb{R}^2$ بحيث :

$$(x,y)T(x',y') = (x',y')T(x,y) = (0,0)$$

لدينا : $(x,y)\,T\,(x',y') = (0,0) \Leftrightarrow (x+x' \,;\, ye^{x'}+y'e^{-x}) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+x'=0 \\ ye^{x'}+y'e^{-x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x \\ e^{-x}(y+y')=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$$

ولدينا كذلك : $(-x,-y)\,T\,(x,y) = (0,0)$.

ومنه $(-x,-y)$ مماثل (x,y) بالنسبة للقانون T

وبالتالي $(\mathbb{R}^2;T)$ زمرة .

بما أن : $(1,1)T(1,0)=(2;e)$ و $(1,0)\,T\,(1,1) = (2\,;\,e^{-1})$

فإن : $(1,0)\,T\,(1,1) \neq (1,1)\,T\,(1,0)$

ومنه T غير تبادلي.

وبالتالي $(\mathbb{R}^2,T)$ زمرة غير تبادلية .

3 لتكن $(G,\times)$ زمرة عنصرها المحايد e بحيث : $\forall x\in G \quad x^3=e$

1) بين أن : $\forall (x,y)\in G^2 \;:\; (xy)^2 = y^2x^2$

2) بين أن : $\forall (x,y)\in G^2 \;:\; xy^2x = yx^2y$

الجواب : 1) لكل x و y من G لدينا :

$$\begin{aligned} y(xy)^2x &= yxyxyx \\ &= (yx)(yx)(yx) \\ &= (yx)^3 = e = e.e = y^3x^3 \end{aligned}$$

ومنه : $y(xy)^2x = y^3x^3 = y(y^2x^2)x$

وبما أن $(G,\times)$ زمرة فإن كل عنصر هو منتظم

ومنه : $(xy)^2 = y^2x^2$

2) لكل x و y من G لدينا : $xy^2xy^2 = (xy^2)^2$

وحسب السؤال السابق : $(xy^2)^2 = (y^2)^2x^2$

ومنه : (لأن : $y^3=e$) $xy^2xy^2 = (y^3y)x^2 = yx^2$

$$= (e.y).x^2 = yx^2$$

ومنه : $(xy^2.xy^2).y = yx^2y$

أي : $xy^2xy^3 = yx^2y$ ، ومنه : $xy^2x = yx^2y$ $(y^3 = e : \text{لأن})$

4 لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها المحايد e وليكن A جزء مستقر من G ومنتهي وغير فارغ . نضع : $x^n = \underbrace{x*x*\cdots*x}_{n \text{ مرة}}$

1) ليكن a من A ، بين أن : $\exists (p,q)\in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : a^p = a^q$

2) استنتج أن : $e\in A$.

3) ليكن x من A ، بين أن : $\exists s\in\mathbb{N}^* : x^{-1} = x^{s-1}$

حيث : x^{-1} هو مماثل x بالنسبة للقانون $*$

4) استنتج أن $(A,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$

الجواب : 1) لدينا : $a\in A$ و A جزء مستقر من G

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N} \quad a^n\in A$

وبما أن A منتهية فإن $\exists (p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : a^p = a^q$

2) لدينا حسب السؤال السابق : $\exists (p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* : a^p = a^q$

نفترض أن $p>q$ إذن : $r = p-q\in\mathbb{N}$

ومنه : $a^p = a^q \Leftrightarrow a^{p-q} = e$

$\Leftrightarrow a^r = e$

وبما أن : $a^r\in A$ فإن : $e\in A$

3) ليكن x من A و $e\in A$ و A جزء مستقر من G

إذن : $\exists s\in\mathbb{N}^* : x^s = e$

إذا كان $s=1$ فإن : $x = e$ و $x^{-1} = e$

إذا كان $s>1$ فإن : $x^s = x^{s-1}*x = e$

ومنه : $x^{-1} = x^{s-1}$

4) بما أن : A جزء مستقر من G و $A\neq\emptyset$ و $\forall x\in A : x^{-1}\in A$

فإن : $(A,*)$ زمرة جزئية من $(G,*)$.

5 نزود $\mathbb{R}$ بالقانون تركيب داخلي $*$ المعرف بمايلي :

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 : \quad x*y = x+y+\frac{1}{2}xy$$

1) أحسب : $(-1)*2$ ، $(\frac{1}{2})*(\frac{4}{5})$ ، $\sqrt{2}*3$

2) أ- هل القانون $*$ تبادلي؟

ب - هل القانون $*$ تجميعي؟

3) بين أن القانون $*$ يقبل عنصر محايد.

4) حدد العناصر القابلة للمماثلة بالقانون $*$.

5) بين أن $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ جزء مستقر بالقانون $*$ واستنتج أن $(\mathbb{R}\setminus\{-2\},*)$ زمرة تبادلية.

6) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x*2=1$

<u>الجواب</u> : 1) لدينا : $(-1)*2 = -1+2+\frac{1}{2}(-1)2 = 0$

$$(\frac{1}{2})*\frac{4}{5} = \frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})(\frac{4}{5}) = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2}*3 = \sqrt{2}+3+\frac{1}{2}(\sqrt{2})3 = \frac{5}{2}\sqrt{2}+3$$

2) أ- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$x*y = x+y+\frac{1}{2}xy = y+x+\frac{1}{2}yx$$ (لأن : $\times$ و $+$ تبادليان في $\mathbb{R}$)

إذن : $x*y = y*x$

ومنه : القانون $*$ تبادلي.

ب - لكل x و y و z من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= (x*y)+z+\frac{1}{2}(x*y)z\\ &= x+y+\frac{1}{2}xy+z+\frac{1}{2}(x+y+\frac{1}{2}xy)z\\ &= x+y+z+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xz+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{4}xyz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x*(y*z) &= x+(y*z)+\frac{1}{2}x(y*z)\\ &= x+y+z+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}x(y+z+\frac{1}{2}yz)\\ &= x+y+z+\frac{1}{2}yz+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xz+\frac{1}{4}xyz\end{aligned}$$

إذن : $(x*y)*z = x*(y*z)$ ومنه : القانون $*$ تجميعي.

3) ليكن e عنصر محايد بالقانون * ولدينا * تبادلي إذن :

$$\forall x\in\mathbb{R} : x*e=x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} : x+e+\frac{1}{2}xe=x$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} : \left(\frac{1}{2}x+1\right)e=0 \Leftrightarrow e=0$$

ومنه : 0 هو العنصر المحايد بالقانون *.

5) ليكن x من $\mathbb{R}$ ، قابل للمماثلة بالقانون * إذن يوجد x' من $\mathbb{R}$

بحيث : $x*x'=0$ (لأن * تبادلي)

أي : $x+x'+\frac{1}{2}xx'=0$

$$x'(x+2)=-2x$$

إذا كان : $x=-2$ فإن : $0=4$ غير ممكن ومنه -2 غير قابل للمماثلة بالقانون *.

إذا كان : $x\neq-2$ فإن : $x'=\dfrac{-2x}{x+2}$

ومنه مجموعة العناصر القابلة للمماثلة بالقانون * هي $\mathbb{R}-\{-2\}$

5) لنبين أن $\mathbb{R}-\{-2\}$ جزء مستقر بالقانون *.

ليكن x و y عنصرين من $\mathbb{R}-\{-2\}$ لدينا :

$$x*y=x+y+\frac{1}{2}xy$$

$$x*y+2=x+2+\frac{1}{2}y(x+2)=\frac{1}{2}(x+2)(y+2)$$

بما أن : $y\neq-2$ و $x\neq-2$ فإن : $x*y+2\neq0$

أي : $x*y\neq-2$ أي : $x*y\in\mathbb{R}-\{-2\}$

وبالتالي : $\mathbb{R}-\{-2\}$ جزء مستقر بالقانون *.

بما أن * قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}-\{-2\}$ ، تجميعي ، تبادلي ، يقبل عنصر محايد 0 وكل عنصر من $\mathbb{R}-\{-2\}$ قابل للمماثلة ب *

فإن : $(\mathbb{R}-\{-2\};*)$ زمرة تبادلية.

6) لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x*2=1$. ليكن $2^{-1}=-1$ مماثل 2 بالقانون *.

إذن : $x*2=1 \Leftrightarrow (x*2)*2^{-1}=1*2^{-1} \Leftrightarrow x*(2*2^{-1})=1*1$

$$\Leftrightarrow x=1*1=\frac{5}{4}$$

ومنه : $S=\left\{\frac{5}{4}\right\}$

6 لتكن $(G,\circ)$ زمرة منتهية عنصرها المحايد e بحيث ،

$card\, G = 2n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

نفترض أنه توجد زمرتين جزئيتين H و K يحققان مايلي :

أ- $K \cap H = \{e\}$ و $K \neq H$

ب- $card\, H = card\, K = n$

1) بين أن : $\exists \alpha \in G \quad : G = H \cup K \cup \{\alpha\}$

2) ليكن $a \in K \setminus \{e\}$ و $b \in H \setminus \{e\}$

أ- بين أن : $ab \notin K$ و $ab \notin H$

ب- استنتج أن : $ab = \alpha$.

ج- استنتج أن : $n = 2$

3) حدد جدول القانون .

الجواب : 1) لنبين أن : $\exists \alpha \in G : \; G = H \cup K \cup \{\alpha\}$

لدينا : $card(H \cup K) = card\, H + card\, K - card(H \cap K)$
$= n + n - 1$

ومنه ، $card(H \cup K) = 2n - 1$

وبما أن $card\, G = 2n$ فإن : $\exists \alpha \in G : \; G = H \cup K \cup \{\alpha\}$

بحيث : $\alpha \notin H \cup K$.

2) أ- البرهان بالخلف : نفترض أن : $ab \in K$

بما أن $b = a^{-1}(ab)$ حيث a^{-1} مماثل a بالنسبة للقانون .

(لأن $(G,\circ)$ زمرة)

لدينا : $ab \in K$ و $a^{-1} \in K$ (لأن K زمرة جزئية من G)

ومنه : $b \in K$ ، إذن $b \in H$ و $b \in K$

وبالتالي $b \in H \cap K = \{e\}$ أي $b = e$ وهذا تناقض مع كون $b \neq e$

إذن : $ab \notin K$ وبالمثل $ab \notin H$.

ب- لدينا ، $G = H \cup K \cup \{\alpha\}$

بما أن $ab \notin K$ و $ab \notin H$ فإن : $ab = \alpha$

ج - لدينا: $\operatorname{card} G = 2n$ و $n \in \mathbb{N}^*$

لدينا: $n \neq 1$ لأن: $G = H \cup K \cup \{\alpha\}$

نفترض أن $n > 2$ أي: $n \geq 3$ ومنه: $\operatorname{card} G \geq 6$

$\exists(\alpha_0, \beta_0) \in (H \setminus \{e\})^2 \; ; \; \exists \gamma_0 \in K - \{e\} \; : \; \alpha_0 \neq \beta_0$

إذن حسب السؤال السابق: $\beta_0\gamma_0 = \alpha$ و $\alpha_0\gamma_0 = \alpha$

أي: $\alpha_0\gamma_0 = \beta_0\gamma_0 \Longrightarrow \alpha_0 = \beta_0$ (γ_0 عنصر منتظم بالقانون $\bullet$ لأن $(G,\cdot)$ زمرة)

وهذا تناقض مع كون $\alpha_0 \neq \beta_0$

ومنه: $n = 2$

3) جدول القانون $\bullet$:

بما أن $n = 2$ فإن $\operatorname{card} G = 4$

ومنه: $G = \{e, \alpha, \beta, \gamma\}$

مع: $H = \{e, \beta\}$ و $K = \{e, \beta\}$

لدينا: $\alpha = \beta\gamma = \gamma\beta \; ; \; \beta^2 = \gamma^2 = \alpha^2 = e \; ; \; \alpha\gamma = \beta \; ; \; \alpha\beta = \gamma$

ومنه:

$\cdot$	e	α	β	γ
e	e	α	β	γ
α	α	e	γ	β
β	β	γ	e	α
γ	γ	β	α	e

7

ليكن $(G,\cdot)$ زمرة تبادلية وعنصرها المحايد e.

ليكن a من G نرمز بـ: $a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n\text{ مرة}}$ و $a^0 = e$

ليكن a و b عنصران من G بحيث:

$\exists n \in \mathbb{N}^* \quad \exists k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \; : \; a^n = e \;$ و $\; b = a^k$

نضع:

$G_1 = \{x \in G \mid \exists p \in \mathbb{Z} \; : \; x = a^p\}$

$G_2 = \{x \in G \mid \exists q \in \mathbb{Z} \; : \; x = b^q\}$

1) بين أن $(G_1,\cdot)$ و $(G_2,\cdot)$ زمرتان جزئيتان من $(G,\cdot)$.

2) بين أن $n \wedge k = 1 \Rightarrow G_1 = G_2$

الجواب : 1) لدينا : $G_1 \neq \emptyset$ لأن : $e \in G_1$ $(e = a^0)$

ليكن x و y من G_1 إذن : $\exists (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$: $x = a^{p_1}$ و $y = a^{p_2}$

ومنه :
$$x y^{-1} = a^{p_1} \cdot (a^{p_2})^{-1}$$
$$= a^{p_1} \cdot a^{-p_2} = a^{p_1 - p_2}$$

وبما أن $p_1 - p_2 \in \mathbb{Z}$ فإن : $xy^{-1} \in G_1$

وبالتالي $(G_1, \cdot)$ زمرة جزئية من $(G, \cdot)$.

وبالمثل نبين أن لكل x و y من G_2 : $xy^{-1} \in G_2$

ومنه $(G_2, \cdot)$ زمرة جزئية من $(G, \cdot)$.

2) نفترض أن $n \wedge k = 1$ و نبين أن : $G_1 = G_2$.

لدينا ،
$$x \in G_2 \iff \exists p \in \mathbb{Z} : x = b^q$$
$$\iff \exists q \in \mathbb{Z} : x = (a^k)^q \quad (\text{لأن : } b = a^k)$$
$$\iff \exists q \in \mathbb{Z} : x = a^{kq}$$
$$\Rightarrow x \in G_1 \quad (\text{بأخذ : } p = kq)$$

ومنه : $G_2 \subset G_1$

لنبين أن : $G_1 \subset G_2$.

ليكن : $x \in G_1 \iff \exists p \in \mathbb{Z} : x = a^p$

بما أن : $n \wedge k = 1$ فإنه حسب مبرهنة Bezout :
$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 : \alpha n + \beta k = 1$$

ومنه :
$$p\alpha n + p\beta k = p$$

إذن :
$$x = a^p = a^{p\alpha n + p\beta k}$$
$$x = (a^n)^{p\alpha} \cdot (a^k)^{p\beta}$$
$$x = (e)^{p\alpha} \cdot (b)^{p\beta} \quad (\text{لأن : } a^n = e \text{ و } a^k = b)$$
$$x = b^{p\beta}$$

ومنه : $x \in G_2$ إذن : $G_1 \subset G_2$

وبالتالي : $G_1 = G_2$.

8 ليكن G زمرة جزئية من $(\mathbb{C},+)$ بحيث :

$$\forall x\in[0,1] : \quad x+ix^2\in G$$

1) بين أن : $\forall x\in[0,1] : \quad (2x-1)(1+i)\in G$

2) استنتج أن : $\forall x\in[0,1] : \quad x+ix\in G$

3) بين أن : $\forall x\in[0,1] : \quad x-x^2\in G$

4) استنتج أن : $[0,\frac{1}{4}]\subset G$

5) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exists n\in\mathbb{Z} \ \exists y\in[0,\frac{1}{4}] : x=ny$

6) استنتج أن : $\mathbb{R}\subset G$

7) بين أن : $\forall x\in[0,1] : \quad i(x-x^2)\in G$

8) بين أن : $\mathbb{C}=G$

الجواب : 1) ليكن x من $[0,1]$ لدينا : $x+ix^2\in G$

بما أن : $1-x\in[0,1]$ فإن : $(1-x)+i(1-x)^2\in G$

ومنه : $x+ix^2-(1-x)-i(1-x)^2\in G$

أي : $x+ix^2-1+x-i-ix^2+2ix\in G$

ومنه : $2x(1+i)-(1+i)\in G$

أي : $(2x-1)(1+i)\in G$

2) لدينا التطبيق $\varphi : \begin{array}{l}[0,1]\to[0,1]\\ t\mapsto 2t-1\end{array}$: تقابل

إذن : $\forall x\in[-1,1] \quad \exists! t\in[0,1] : x=2t-1$

وبما أن : $(2t-1)(1+i)\in G$

فإن : $x(1+i)\in G$

وبالخصوص : $\forall x\in[0,1] : \quad x(1+i)\in G$

3) لكل x من $[0,1]$ لدينا : $\begin{cases}x+ix^2\in G\\ x^2+ix^2\in G\end{cases} \Rightarrow x-x^2\in G$

4) التطبيق : $h : \begin{array}{l}[0,1]\longrightarrow[0,\frac{1}{4}]\\ t\longmapsto t-t^2\end{array}$ شمولي

ومنه : $\forall x\in[0,\frac{1}{4}] \quad \exists! t\in[0,1] : x=t-t^2$

بما أن $t\in[0,1]$ فإن : $t-t^2\in G$ أي $x\in G$

وبالتالي : $[0,1] \subset G$

5) ليكن x من $\mathbb{R}$ ، نضع : $n = [4x]+1$ $(x \neq 0)$

لدينا : $n \geq 4x$ و x و n لهما نفس الإشارة .

ومنه : $\frac{x}{n} \leq 4$ أي : $\frac{x}{n} \in]0, \frac{1}{4}]$

و بوضع $y = \frac{x}{n}$ نحصل على $x = ny$ مع $y \in]0, \frac{1}{4}]$

إذا كان $x = 0$ نعتبر $n = 0$ و $y = 0$

وبالتالي : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in [0, \frac{1}{4}] : x = ny$

6) ليكن x من $\mathbb{R}$ حسب السؤال 5) : $\exists n \in \mathbb{Z} \; \exists y \in [0, \frac{1}{4}] : x = ny$

وبما أن $y \in [0, \frac{1}{4}]$ فإن : $y \in G$ ، ومنه : $\underbrace{y + y + \dots + y}_{n \text{ مرة}} \in G$

أي : $x \in G$

وبالتالي : $\mathbb{R} \subset G$

7) ليكن x من $[0,1]$ لدينا . $\begin{cases} x + ix^2 \in G \\ x + ix \in G \end{cases} \Rightarrow i(x - x^2) \in G$

8) لدينا : $G \subset \mathbb{C}$

لنبين أن : $\mathbb{C} \subset G$

لدينا . $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists! (x, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : z = x + i\alpha$

بما أن : $\begin{cases} \mathbb{R} \subset G \\ i\mathbb{R} \subset G \end{cases}$ فإن : $\begin{cases} x \in G \\ i\alpha \in G \end{cases}$

إذن : $x + i\alpha \in G$ ومنه $z \in G$

إذن : $\mathbb{C} \subset G$

وبالتالي : $\mathbb{C} = G$.

9 ليكن $(G, \cdot)$ زمرة و H و K زمرتين جزئيتين من G .

بين أن : $H \cup K = G \Leftrightarrow H = G$ أو $K = G$

الجواب : $(\Leftarrow)$ إذا كان $K = G$ أو $H = G$ فإن : $H \cup K = G$

لأن : $K \subset G$ و $H \subset G$.

$(\Rightarrow)$ نفترض أن : $H \cup K = G$ ونبين أن : $H = G$ أو $H = K$

البرهان بالخلف نفترض أن : $H \neq G$ و $H \neq K$

إذن : $\exists (x,y)\in G^2 : \quad x\notin H$ و $y\notin K$

بما أن : $H\cup K = G$ فإن : $x\in K$ و $y\in H$

لدينا : $(x,y)\in G^2 \Rightarrow xy\in G = H\cup K$

$\Rightarrow xy\in H$ أو $xy\in K$

الحالة 1 : إذا كان $xy\in K$ نحصل على :

$$\left\{\begin{array}{l} xy\in K \\ x\in K \\ (K,.) \text{ زمرة جزئية من } (G,.) \end{array}\right. \Rightarrow y = x^{-1}.(xy)\in K$$

وهذا تناقض مع كون $y\notin K$

الحالة 2 : إذا كان $xy\in H$ نحصل على :

$$\left\{\begin{array}{l} xy\in H \\ y\in H \\ (H,.) \text{ زمرة جزئية من } (G,.) \end{array}\right. \Rightarrow x = (xy).y^{-1}\in H$$

وهذا تناقض مع كون $x\notin H$

وبالتالي : $H\cup K = G \Rightarrow H = G$ أو $H = K$

10 لتكن $(G,.)$ زمرة منتهية و ليكن x من G و A جزء من G

نضع : $A^{-1}x = \{a^{-1}x \mid a\in A\}$

1) بين أن : $\text{card}\,A^{-1}x = \text{card}\,A$.

2) ليكن B جزء من G بحيث : $\text{card}\,A + \text{card}\,B > \text{card}\,G$

أ- بين أن : $\forall x\in G \quad (A^{-1}x)\cap B \neq \phi$

ب- استنتج أن : $\forall x\in G \quad \exists (a,b)\in A\times B : x = ab$

<u>الجواب</u> : 1) نعتبر التطبيق

$$\varphi : \begin{array}{l} A \longrightarrow A^{-1}x \\ a \longmapsto a^{-1}x \end{array}$$

لدينا φ شمولي وذلك حسب بناء التطبيق φ .

ليكن a_1 و a_2 عنصرين من A لدينا :

$$\varphi(a_1) = \varphi(a_2) \Rightarrow a_1^{-1}x = a_2^{-1}x$$

$$\Rightarrow a_1^{-1} = a_2^{-1} \quad (\text{لأن كل عنصر من } G \text{ منتظم})$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2$$

ومنه φ تبايني .

وبالتالي φ تقابل من A نحو $A^{-1}x$ ، ومنه : $\text{card}\,A = \text{card}\,A^{-1}x$

ج) 1- لدينا : $\text{card}A + \text{card}B > \text{card}G$

وبما أن لكل x من G لدينا : $\text{card}A = \text{card}A^{-1}x$

فإن : $\text{card}A^{-1}x + \text{card}B > \text{card}G$

نفترض أن : $\exists x \in G \quad A^{-1}x \cap B = \phi$ إذن $\text{card}A^{-1}x \cap B = 0$

وبما أن : $(A^{-1}x) \cup B \subset G$

فإن : $\text{card}(A^{-1}x) + \text{card}B - \text{card}(Ax \cap B) \leq \text{card}G$

أي : $\text{card}(A^{-1}x) + \text{card}B \leq \text{card}G$

وهذا يناقض مع كون $\text{card}(A^{-1}x) + \text{card}B > \text{card}G$

وبالتالي : $\forall x \in G \quad : \quad A^{-1}x \cap B \neq \phi$

ب- ليكن x من G لدينا : $A^{-1}x \cap B \neq \phi$

ومنه : $\exists b \in G : \quad b \in A^{-1}x \cap B \Leftrightarrow b \in A^{-1}x$ و $b \in B$

إذن : $\exists a \in A \quad : \quad b = a^{-1}x$

وبالتالي : $\exists (a,b) \in A \times B \quad : \quad x = ab$

11 لتكن $(G,\cdot)$ زمرة منتهية وليكن H زمرة جزئية من G

بحيث : $\text{card}H > \frac{1}{2}\text{card}G$

بين أن : $H = G$.

الجواب : نفترض أن : $H \neq G$ ، إذن يوجد x من G بحيث : $\exists x \in G \mid x \notin H$

نعتبر التطبيق f من H نحو Hx بحيث : $f(t) = t.x$

مع : $Hx = \{t.x \mid t \in H\}$

لدينا f تقابل من H نحو Hx ومنه : $\text{card}H = \text{card}Hx$

وبالتالي : $\text{card}Hx + \text{card}(H) = 2\text{card}H > \text{card}G$

ومنه : $(Hx) \cap H \neq \phi$

إذن : $\exists y \in (Hx) \cap H$ أي : $y \in Hx$ و $y \in H$

إذن : $\exists z \in H \quad : \quad y = zx$ ومنه : $x = z^{-1}y$

بما أن : $\begin{cases} z \in H \\ y \in H \\ H \text{ زمرة جزئية من } G \end{cases}$

فإن : $x = z^{-1}.y \in H$ وهذا تناقض مع كون $x \notin H$

وبالتالي : $H = G$.

12 لتكن $(E,.)$ مجموعة مزودة بقانون التركيب الداخلي . وليكن e عنصراً من E . نفترض أن :

ذ) $\forall (x,y,z) \in E^3 : \quad (x.y).z = (y.z).x$

ذذ) $\forall x \in E : \quad x.e = x$

ذذذ) $\forall x \in E \ \exists x' \in E : \quad x.x' = e$

1) بين أن القانون . تبادلي.

2) بين أن $(E,.)$ زمرة تبادلية .

الجواب : 1) ليكن x و y من E لدينا :

$y.x = (y.x).e$ (حسب ذذ)

$y.x = (x.e).y$ (حسب ذ)

$y.x = x.y$ (حسب ذذ)

ومنه القانون . تبادلي .

2) لدينا لكل x و y من E : $(x.y).z = (y.z).x$

$= x.(y.z)$ (لأن . تبادلي)

ومنه القانون . تجميعي .

ليكن x من E لدينا حسب ذذذ : $\exists x' \in E : x.x' = e$

$\exists x'' \in E : x'.x'' = e$

ولدينا :
$$\begin{aligned} e.x &= e.(x.e) \\ &= (e.x).e \\ &= (e.x).(x'.x'') \\ &= e.(xx')x'' \\ &= (e.e).x'' \end{aligned}$$

ومنه : $e.x = e.x''$

ولدينا :
$$\begin{aligned} xx' &= (x'.e).x \\ &= x'.(e.x) \\ &= x'.(ex'') \\ x.x' &= x'.x'' = e \end{aligned}$$

ولدينا : $e.x = (xx').x = x(x'.x)$

$$e.x = x.e = x$$

وبالتالي e عنصر محايد للقانون . ولكل عنصر x يقبل مماثل

ومنه $(E,.)$ زمرة تبادلية .

13 نضع : $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

نزود $(G,*)$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بمايلي :

$$\forall (x,y) \in G \;,\; \forall (x',y') \in G \;:\; (x,y)*(x',y') = (xx' ; xy'+y)$$

1) بين أن $(G,*)$ زمرة غير تبادلية .

2) بين أن $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$ زمرة جزئية من G .

<u>الجواب :</u> 1) تجميعية $*$: ليكن (x,y) و (x',y') و (x'',y'') من G

لدينا :

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (xx', xy'+y)*(x'',y'')$$
$$= (xx'x'' ; xx'y''+xy'+y)$$

و

$$(x,y)*[(x',y')*(x'',y'')] = (x,y)*(x'x'' ; x'y''+y')$$
$$= (xx'x'' ; xx'y'+xy'+y)$$

إذن $[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (x,y)*[(x',y')*(x'',y'')]$

ومنه القانون $*$ تجميعي .

- العنصر المحايد لـ $*$: ليكن $e = (\alpha,\beta)$ عنصر محايد لـ $*$

إذن لكل (x,y) من G لدينا :

$$(x,y)*(\alpha,\beta) = (x,y) \quad \text{و} \quad (\alpha,\beta)*(x,y) = (x,y)$$

لدينا :

$$(\alpha,\beta)*(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow (\alpha x ; \alpha y+\beta) = (x,y)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x = x \\ \alpha y + \beta = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-1)x = 0 \\ (\alpha-1)y+\beta = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e = (1,0)$$

وبما أن : $(x,y)*(1,0) = (x,y)$ فإن $e(1,0)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$.

- العنصر المماثل: ليكن (x,y) من G : لنجد مماثل (x,y) بالقانون $*$
أي نحل المعادلتين ذات المجهول (x',y') :

$(x,y)*(x',y')=(1,0)$ و $(x',y')*(x,y)=(1,0)$

أي :

$$\begin{cases} (xx', xy'+y)=(1,0) \\ (x'x ; x'y+y')=(1,0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xx'=1 \\ xy'+y=0 \\ x'y+y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=\frac{1}{x} \\ y'=-\frac{y}{x} \end{cases} \quad (x\neq 0)$$

وبالتالي كل عنصر (x,y) من G يقبل مماثل هو $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$.

ولدينا : $(1,1)*(2,0)=(2,1)$ و $(2,0)*(1,1)=(2,2)$

إذن : $(1,1)*(2,0)\neq(2,0)*(1,1)$

ومنه القانون $*$ غير تبادلي.

وبالتالي $(G;*)$ زمرة غير تبادلية.

2) لدينا : $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\neq\phi$ لأن : $(1,0)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

نرمز بـ $(x,y)^{-1}$ لمماثل (x,y) في G

لكل (x,y) من $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ لدينا : $(x,y)^{-1}=\left(\frac{1}{x} ; -\frac{y}{x}\right)$

بما أن : $x>0$ فإن : $\frac{1}{x}>0$

ومنه : $(x,y)^{-1}\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$

لكل (x,y) و (x',y') من $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ لدينا :

$(x,y)*(x',y')=(xx', xy'+y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ (لأن : $xx'>0$)

وبالتالي $(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G,*)$.

14 نزود $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x*y=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$$

1) نعتبر التطبيق f من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

ب- بين أن : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x+y)=f(x)*f(y)$

2) استنتج بنية المجموعة $(\mathbb{R},*)$.

الجواب : 1) أ- لدينا f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

ومنه f متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

ب- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :
$$f(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$f(x) * f(y) = f(x)\sqrt{1+f^2(y)} + f(y)\sqrt{1+f^2(x)}$$

لدينا :
$$1 + f^2(y) = 1 + \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2y} + 2 + e^{-2y}}{4}$$
$$= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2$$

ومنه :
$$\sqrt{1+f^2(x)} = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

وبالمثل :
$$\sqrt{1+f^2(y)} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

ومنه :
$$f(x) * f(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-(x+y)}\right)$$

ومنه :
$$f(x+y) = f(x) * f(y)$$

2) لدينا f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathbb{R},*)$.

وبما أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية فإن $(\mathbb{R},*)$ زمرة تبادلية.

15

لتكن $(E,\cdot)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي تجميعي

بحيث : $\forall (x,y) \in E^2 \; : \; x^2 \cdot y = y$ و $yx^2 = y$

1) بين أن $(E,\cdot)$ يقبل عنصر محايد e .

2) بين أن : $\forall x \in E : \; x \cdot x = e$

3) استنتج أن $(E,\cdot)$ زمرة تبادلية .

الجواب : 1) ليكن a من E لدينا : $a^2 \in E$ (لأن . قانون تركيب داخلي)

ومنه : $\exists e \in E \; : \; e = a^2$

لدينا لكل x من G بحيث : $a^2 \cdot x = x \cdot a^2 = x$

أي : $e \cdot x = x \cdot e = x$

وبالتالي $e = a^2$ عنصر محايد للقانون . .

2) ليكن x من E لدينا : $x \cdot x = x^2 \cdot e = x \cdot (x \cdot e) = e = (x \cdot e) \cdot x$

وبالتالي كل عنصر من E يقبل مماثل هو نفسه

3) لدينا في E القانون $\cdot$ تجميعي و e عنصر محايد وكل عنصر يقبل مماثل

ومنه $(E,\cdot)$ زمرة.

لنبين أن $\cdot$ قانون تبادلي.

ليكن x و y من E لدينا:

$$y.x = e.(yx).e$$
$$= x^2(y.x)y^2 \quad (\quad x^2 = y^2 = e \quad :\text{لأن})$$
$$= x(xy).(xy) = x(xy).(xy)y$$
$$= x(xy)^2 y = x e . y \quad (\quad (xy)^2 = e \quad :\text{لأن})$$
$$y.x = xy$$

إذن القانون $\cdot$ تبادلي

وبالتالي $(E,\cdot)$ زمرة تبادلية.

16 لتكن $(G,\cdot)$ زمرة منتهية تبادلية عنصرها المحايد e و K جزء مستقر من G وغير فارغ. ليكن a من K، نعتبر التطبيق γ_a المعرف من K نحو K بمايلي: $\gamma_a(x) = ax$

1) بين أن التطبيق γ_a تباينى.

2) استنتج أن K زمرة جزئية من $(G,\cdot)$.

الجواب: 1) ليكن x و y من K لدينا:

$$\gamma_a(x) = \gamma_a(y) \Rightarrow a.x = a.y \Rightarrow x = y \quad (\text{لأن: } a \in G \text{ و } (G,\cdot) \text{ زمرة} \Leftarrow a \text{ منتظم})$$

ومنه γ تطبيق تباينى.

2) بما أن K مجموعة منتهية و γ_a تباينى من K نحو K

فإن γ_a تقابلي.

ليكن a من K لنبين أن: $a^{-1} \in K$

لدينا $a \in K$ وبما أن γ_a تقابلي فإن: $\exists x \in K : \gamma_a(x) = a$

أي: $a.x = a = a.e$ وبما أن a من G فإنه منتظم

ومنه $x = e$ إذن: $e \in K$

بما أن a كلا شمولي فإن $\exists a_1 \in K : \quad \gamma_a(a_1) = a \cdot a_1 = e$

ومنه : $a_1 = a^{-1}$

بما أن $a_1 \in K$ فإن : $a^{-1} \in K$

وبما أن K جزء مستقر من G فإن $(K, \cdot)$ زمرة جزئية من $(G, \cdot)$

17

1) بين أنه لا يوجد تشاكل تقابلي من الزمرة $(\mathbb{Q};+)$ نحو الزمرة $(\mathbb{Q}_+^*; \times)$

2) بين أنه لا يوجد تشاكل تقابلي من الزمرة $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو الزمرة $(\mathbb{C}^*, \times)$

الجواب :

1) نفترض أنه يوجد f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Q},+)$ نحو $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$

ومنه : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q} : \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

نضع : $\alpha = f^{-1}(2)$ (f^{-1} التقابل العكسي لـ f)

ومنه : $2 = f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \left(f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$

أي : $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ وهذا تناقض مع كون $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

وبالتالي لا يوجد تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Q},+)$ نحو $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$.

2) نفترض أنه يوجد g تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(\mathbb{C}^*, \times)$

نضع : $\alpha = g^{-1}(i)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

ومنه : $g(\alpha^2) = g(\alpha) g(\alpha) = (g(\alpha))^2 = i^2 = -1$

إذن : $g(\alpha^2) = -1$

ولدينا : $g(1) = g(-1 \times -1) = g(-1) \times g(-1) = (g(-1))^2$

$g(1) = g(1 \cdot 1) = g(1) \times g(1) = (g(1))^2$

ومنه : $(g(1))^2 = (g(-1))^2$ أي : $g(1) = g(-1)$ أو $g(1) = -g(-1)$

بما أن g تباينى فإن : $g(-1) = -g(1)$ ($g(-1) \neq g(1)$ ؛ $-1 \neq 1$ لأن)

ولدينا : $(g(1))^2 = g(1)$ ، ومنه : $g(1)(g(1) - 1) = 0$

أي : $g(1) = 0$ أو $g(1) = 1$

بما أن $g(1) \neq 0$ فإن : $g(1) = 1$

ونعلم أن : $g(\alpha^2) = -1$ إذن : $g(\alpha^2) = -g(1)$

$g(\alpha^2) = g(-1)$

بما أن g تباينبي فإن: $\alpha^2=-1$ وهذا تناقض مع كون $\alpha\in\mathbb{R}$
وبالتالي لا يوجد تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$.

18 ليكن $(G,*)$ زمرة و $a\in G$ ، نعتبر التطبيق φ_a من G نحو G
المعرف بمايلي : $\varphi_a(x)=a*x*a^{-1}$ (a^{-1} هو مماثل a في $(G,*)$)

1) بين أن φ_a تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(G,*)$.
2) بين أن : $\forall(a,b)\in G^2:\ \varphi_a\circ\varphi_b=\varphi_{a*b}$
3) نعتبر المجموعة : $H=\{\varphi_a \mid a\in G\}$
والتطبيق f المعرف من G نحو H بمايلي : $f(a)=\varphi_a$
أ- بين أن f تشاكل شمولي من $(G,*)$ نحو $(H,\circ)$.
ب- استنتج بنية المجموعة $(H,\circ)$

الجواب : 1) ليكن x و y من G لدينا :

$$\varphi_a(x*y)=a*(x*y)*a^{-1}=(a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1})$$

ومنه : $\varphi_a(x*y)=\varphi_a(x)*\varphi_a(y)$

لدينا :

$$\varphi_a\circ\varphi_{a^{-1}}(x)=\varphi_a(\varphi_{a^{-1}}(x))=\varphi_a(a^{-1}*x*a)$$

$$=a*(a^{-1}*x*a)*a^{-1}=(a*a^{-1})*x*(a*a^{-1})$$

$$\varphi_a\circ\varphi_{a^{-1}}(x)=x$$

بالمثل نبين أن : $\varphi_{a^{-1}}\circ\varphi_a(x)=x \qquad \forall x\in G$

ومنه : $\varphi_a\circ\varphi_{a^{-1}}=\varphi_{a^{-1}}\circ\varphi_a=Id_G$

إذن : φ_a تقابل من G نحو G و $(\varphi_a)^{-1}=\varphi_{a^{-1}}$.

وبالتالي φ_a تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(G,*)$.

2) ليكن a و b من G لدينا:

$$\forall x\in G,\ (\varphi_a\circ\varphi_b)(x)=\varphi_a(\varphi_b(x))=\varphi_a(b*x*b^{-1})$$

$$=a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}$$

$$=(a*b)*x*(b^{-1}*a^{-1})$$

$$=(a*b)*x*(a*b)^{-1} \qquad \text{لأن: } ((a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1})$$

$$(\varphi_a\circ\varphi_b)(x)=\varphi_{a*b}(x)$$

و بالتالي : $\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{a*b}$

3) أ- ليكن a و b من G لدينا : $f(a*b) = \varphi_{a*b} = \varphi_a \circ \varphi_b$

و منه : $f(a*b) = f(a) \circ f(b)$

وبالتالي f تشاكل من $(G,*)$ نحو $(H,\circ)$.

ولدينا : $\forall \varphi \in H \quad \exists a \in G \quad : \quad \varphi = f(a)$

إذن f شمولي .

ب- بما أن f تشاكل من $(G,*)$ نحو $(H,\circ)$ و $(G,*)$ زمرة

فإن : $(f(G),\circ)$ زمرة .

وبما أن : $f(G)=H$ فإن : $(H,\circ)$ زمرة .

19 نعتبر المجموعة : $G=\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;/\; a^2+b^2=1 \text{ و } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

1) بين أن : $G \neq \emptyset$.

2) بين أن : $G=\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;/\; \theta\in\mathbb{R} \right\}$

3) بين أن G جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R});\times)$.

4) هل G جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),+)$ ؟

5) نضع : $M(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

أحسب $M^n(\theta)$ حيث : $M^n(\theta)=\underbrace{M(\theta)\times M(\theta)\times\dots\times M(\theta)}_{n \text{ مرة}}$ و $n\in\mathbb{N}^*$

6) نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}$ نحو G بمايلي : $f(\theta)=M(\theta)$

أ- بين أن f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(G,\times)$

ب- ما هي بنية المجموعة $(G,\times)$ ؟

7) نعتبر المجموعة : $\mathbb{U}=\{ z\in\mathbb{C}^* \;/\; |z|=1 \}$

أ- بين أن : $\mathbb{U}=\{ e^{i\theta} \;/\; \theta\in\mathbb{R} \}$

ب- بين أن $(\mathbb{U},\times)$ زمرة تبادلية .

8) بين أنه يوجد تشاكل من $(\mathbb{U},\times)$ نحو $(G,\times)$.

الجواب : 1) لدينا : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in G$ (لأن : $0^2+1^2=1$)

ومنه : $G\neq\emptyset$

2) لدينا : $M\in G \Leftrightarrow \exists (a;b)\in\mathbb{R}^2 : M=\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ و $a^2+b^2=1$

بما أن : $a^2+b^2=1$ فإن : $\exists\theta\in\mathbb{R} : a=\cos\theta$ و $b=\sin\theta$

ومنه : $M\in G \Leftrightarrow M=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

وبالتالي : $G=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \mid \theta\in\mathbb{R}\right\}$

3) ليكن $M_1=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$ عنصرين من G

لدينا :

$$M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\sin\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{pmatrix}$$

ومنه : $M_1\times M_2\in G$

وبالتالي G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

4) لدينا : $M_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ عنصرين من G

و $M_1+M_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\notin G$

ومنه G جزء غير مستقر في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

5) لدينا : $M(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ إذن $M^2(\theta)=\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}$

لنبين بالترجع أن : $M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

من أجل $n=1$ لدينا الخاصية صحيحة.

نفترض أن $M^n(\theta)=M(n\theta)$ ، ونبين أن: $M^{n+1}(\theta)=M((n+1)\theta)$

لدينا:

$$M^{n+1}(\theta)=M(\theta)\times M^n(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta & -\cos n\theta\sin\theta-\sin n\theta\cos\theta\\ \cos\theta\cos n\theta+\sin\theta\sin n\theta & -\sin n\theta\sin\theta+\cos n\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(n\theta+\theta) & -\sin(n\theta+\theta)\\ \sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta\\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta\end{pmatrix}=M((n+1)\theta)$$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^* : M^n(\theta)=M(n\theta)$

6) أ- ليكن θ_1 و θ_2 من $\mathbb{R}$ لدينا : $f(\theta_1+\theta_2) = M(\theta_1+\theta_2)$

$= M(\theta_1)\times M(\theta_2)$

ومنه : $f(\theta_1+\theta_2) = f(\theta_1)\times f(\theta_2)$

إذن f تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(G,\times)$.

ولدينا : $\forall M\in G \quad \exists \theta\in\mathbb{R} \ : \ M = M(\theta) = f(\theta)$

ومنه : f شمولي

وبالتالي f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(G,\times)$.

ب- بما أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية و f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(G,\times)$

فإن $(G,\times)$ زمرة تبادلية . (لأن : $f(\mathbb{R}) = G$)

7) أ- لنبين أن $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \ / \ \theta\in\mathbb{R}\}$

لدينا : $z\in\mathbb{U} \Leftrightarrow |z| = 1$

$\Leftrightarrow |x+iy| = 1 \quad / \quad (z = x+iy \ / (x,y)\in\mathbb{R}^2)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 1 \quad / \quad z = x+iy$

$\Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R} \ : x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ و $z = x+iy$

$\Leftrightarrow z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \ / \ \theta\in\mathbb{R}$

وبالتالي : $\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \ / \theta\in\mathbb{R}\}$

ب- لنبين أن $(\mathbb{U},\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}^*,\times)$

لدينا : $\mathbb{U}\subset\mathbb{C}^*$ و $\mathbb{U}\neq\phi$ (لأن : $1\in\mathbb{U}$)

ليكن z_1 و z_2 من $\mathbb{U}$: $z_1 = e^{i\theta_1}$ و $z_2 = e^{i\theta_2}$ $\exists(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$:

ومنه : $z_1\cdot z_2^{-1} = e^{i\theta_1}\cdot e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث : $\theta_2-\theta_1\in\mathbb{R}$

إذن : $z_1\cdot z_2^{-1}\in\mathbb{U}$.

ومنه $(\mathbb{U};\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}^*,\times)$

وبما أن $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية فإن $(\mathbb{U},\times)$ زمرة تبادلية .

8) نعتبر التطبيق g المعرف من $\mathbb{U}$ نحو G المعرفة بمايلي :

$$g : z = e^{i\theta} \longmapsto \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} = M(\theta)$$

ليكن $z_1 = e^{i\theta_1}$ و $z_2 = e^{i\theta_2}$ حيث : $(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$

$$g(z_1 \times z_2) = g(e^{i(\theta_1+\theta_2)}) = M(\theta_1+\theta_2) = M(\theta_1)\times M(\theta_2)$$

ومنه : $g(z_1 \times z_2) = g(z_1).g(z_2)$

وبالتالي g تشاكل من $(\mathbb{U},\times)$ نحو $(G,\times)$.

20 لتكن $\mathcal{A}$ مجموعة المصفوفات M_α بحيث :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\alpha+\frac{1}{\alpha}) & \frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{\alpha}) \\ \frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{\alpha}) & \frac{1}{2}(\alpha+\frac{1}{\alpha}) \end{pmatrix} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^*)$$

1) أ- تحقق أن $\mathcal{A}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

ب- نعتبر التطبيق h المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو $\mathcal{A}$ بمايلي : $h(\alpha) = M_\alpha$

بين أن h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(\mathcal{A},\times)$.

ج- حدد $h(\frac{1}{\alpha})$ و M_α^{-1} .

2) نضع : $M_\alpha^1 = M_\alpha$ و $M_\alpha^n = M_\alpha^{n-1}\times M_\alpha \quad (\forall n\geq 2)$

حدد M_α^n .

3) لتكن $E = \mathbb{R}^*\times\{0\}$.

نعتبر التطبيق φ المعرف من E نحو $\mathcal{A}$ بمايلي : $\varphi(\alpha,0) = M_\alpha$

عرف قانونا تركيب داخليا $*$ في E حيث يكون φ تشاكلا تقابليا من $(E,*)$ نحو $(\mathcal{A},\times)$.

الجواب : 1) أ- ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$ لدينا : M_a و M_b عنصرين من $\mathcal{A}$

لدينا :
$$M_a\times M_b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+\frac{1}{a} & a-\frac{1}{a} \\ a-\frac{1}{a} & a+\frac{1}{a} \end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix} b+\frac{1}{b} & b-\frac{1}{b} \\ b-\frac{1}{b} & b+\frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})+(a-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b}) & (a+\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})+(a-\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b}) \\ (a-\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})+(a+\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b}) & (a-\frac{1}{a})(b-\frac{1}{b})+(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2ab+\frac{2}{ab} & 2ab-\frac{2}{ab} \\ 2ab-\frac{2}{ab} & 2ab+\frac{2}{ab} \end{pmatrix}$$

$$M_a\times M_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(ab+\frac{1}{ab}) & \frac{1}{2}(ab-\frac{1}{ab}) \\ \frac{1}{2}(ab-\frac{1}{ab}) & \frac{1}{2}(ab+\frac{1}{ab}) \end{pmatrix} = M_{ab}$$

ومنه : $M_a\times M_b \in \mathcal{A}$ وبالتالي $\mathcal{A}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

ب- ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$ لدينا : $h(a\times b) = M_{ab} = M_a\times M_b$ (حسب السؤال أ)

إذن : $h(a\times b)=h(a)\times h(b)$

ومنه h تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(A,\times)$.

لدينا : $h(\mathbb{R}^*)=A$ ومنه h شمولي .

لنبين h تباييني .

ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$ بحيث : $h(a)=h(b)$

لدينا : $h(a)=h(b) \Leftrightarrow M_a=M_b \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b} \\ a-\frac{1}{a}=b-\frac{1}{b} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)\left(\frac{ab-1}{ab}\right)=0 \\ (a-b)\left(\frac{ab+1}{ab}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(ab-1)=0 \\ (a-b)(ab+1)=0 \end{cases}$$

بما أن : $(ab-1\,;ab+1)\neq(0,0)$ فإن : $a-b=0$ أي : $a=b$

وبالتالي h تباييني .

إذن : h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(A,\times)$

ج - ليكن α من $\mathbb{R}^*$ لدينا : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)=M_{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}+\alpha & \frac{1}{\alpha}-\alpha \\ \frac{1}{\alpha}-\alpha & \frac{1}{\alpha}+\alpha \end{pmatrix}$

بما أن h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(A,\times)$

فإن بنية $(\mathbb{R}^*,\times)$ هي بنية $(A,\times)$ وبما أن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة

تبادلية فإن $(A,\times)$ زمرة تبادلية .

بما أن $\alpha^{-1}=\frac{1}{\alpha}$ مماثل α في $(\mathbb{R}^*,\times)$ فإن $h\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ هو مماثل

ومنه : $M_{\frac{1}{\alpha}}$ مماثل M_α أي : $M_\alpha^{-1}=M_{\frac{1}{\alpha}}$.

د) لدينا : $M_a\times M_b=M_{ab}$ لكل a و b من $\mathbb{R}^*$

ومنه : $M_\alpha^2=M_{\alpha^2}$

لنبين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad M_\alpha^n=M_{\alpha^n}$

- من أجل $n=1$ لدينا : $M_\alpha^1=M_\alpha$

- نفترض أن $M_\alpha^n=M_{\alpha^n}$ ونبين أن $M_\alpha^{n+1}=M_{\alpha^{n+1}}$

لدينا : $M_\alpha^{n+1}=M_\alpha^n.M_\alpha=M_{\alpha^n}.M_\alpha$

$M_\alpha^{n+1}=M_{\alpha^{n+1}}$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad M_\alpha^n=M_{\alpha^n}$

3) φ تشاكل تقابلي من $(E,*)$ نحو $(A,\times)$ لدينا:

$\forall(x,y)\in E^2 \quad \varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

نضع : $x=(\alpha,0)$ و $y=(\beta,0)$

إذن: $\varphi(x)=M_\alpha$ و $\varphi(y)=M_\beta$

إذن: $\varphi(x*y)=M_\alpha\times M_\beta=M_{\alpha\beta}=\varphi(\alpha\beta,0)$

بما أن: φ تقابل فإن: $x*y=(\alpha\beta,0)$

$\Leftrightarrow \quad (\alpha,0)*(\beta,0)=(\alpha\beta,0)$

وبالتالي: $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* \quad : \quad (\alpha,0)*(\beta,0)=(\alpha\beta,0)$

21

لتكن $(G,\cdot)$ زمرة.

1) بين أنه إذا كان لكل a و b من G : $(ab)^2=a^2b^2$ فإن القانون . تبادلي

2) بين أنه إذا كان لكل x من G ؛ $x^2=e$ (e العنصر المحايد لـ .)
فإن القانون . تبادلي.

الجواب : 1) لدينا: $\forall(a,b)\in G^2 : (ab)^2=a^2b^2$

إذن: $abab=aabb$

بما أن $(G,\cdot)$ زمرة فإن كل عنصر من G منتظم فإن:

$ba=ba$. ومنه القانون . تبادلي.

2) لدينا: $\forall x\in G : x^2=e$

إذن: $\forall(x,y)\in G^2 : (xy)^2=e$

أي: $xyxy=e$ إذن: $x^2yxy=x.e$ إذن: $x^2yxy^2=x.y$

وبما أن: $x^2=e$ و $y^2=e$ فإن: $yx=xy$

ومنه القانون . تبادلي.

22

لتكن $(G,\cdot)$ زمرة غير تبادلية ولتكن G' المجموعة:

$$G'=\{x\in G \mid \forall a\in G : xa=ax\}$$

بين أن G' زمرة جزئية لـ G.

الجواب : لنبين أن لكل x و y من G' : $xy^{-1}\in G'$

ليكن x و y من G' لدينا لكل a من G :

$$a(xy^{-1}) = (ax)y^{-1} = (xa)y^{-1} = x(ay^{-1})$$

لدينا : $ay^{-1} = (ya^{-1})^{-1}$

بما أن : $y\in G'$ فإن : $ya^{-1} = a^{-1}y$ إذن : $(ya^{-1})^{-1} = (a^{-1}y)^{-1}$
$= y^{-1}a$

ومنه : $a(xy^{-1}) = x(y^{-1}a)$

أي : $a(xy^{-1}) = (xy^{-1})a$

وبالتالي $xy^{-1} \in G'$

ومنه $(G',\cdot)$ زمرة جزئية لـ $(G,\cdot)$.

23 لتكن $E=\mathbb{R}^*$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\forall (a,b)\in E^2 \,;\, \forall (a',b')\in E^2 : (a,b)*(a',b') = (aa' \,;\, ba'+b'\varphi(a))$$

حدد الدالة φ التي من أجلها تكون $(E,*)$ زمرة ، حدد دالة بسيطة φ تحقق هذا الشرط .

الجواب : $(E,*)$ زمرة إذا كانت تحقق ما يلي :

* قانون تجميعي :

$$[(a,b)*(a',b')]*(a'',b'') = (aa' \,;\, ba'+b'\varphi(a))*(a'',b'')$$
$$= [aa'a'' \,;\, (ba'+b'\varphi(a))a''+b''\varphi(aa')]$$
$$(a,b)*[(a',b')*(a'',b'')] = (a,b)*(a'a'' \,;\, b'a''+b''\varphi(a'))$$
$$= [aa'a'' \,;\, ba'a''+(b'a''+b''\varphi(a'))\varphi(a)]$$

* تجميعي إذا كان : $(ba'+b'\varphi(a))a''+b''\varphi(aa') = ba'a''+(b'a''+b''\varphi(a'))\varphi(a)$

أي : $\varphi(aa') = \varphi(a)\cdot\varphi(a')$ (1)

العنصر المحايد لـ $*$: ليكن (x,y) عنصر محايد لـ $*$.

إذن لكل (a,b) من E لدينا :

$$\begin{cases} (a,b)*(x,y) = (ax \,;\, bx+y\varphi(a)) = (a,b) \\ (x,y)*(a,b) = (xa \,;\, ya+b\varphi(x)) = (a,b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax = a \\ bx+y\varphi(a) = ya+b\varphi(x) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ \varphi(1)=1 \end{cases}$$

ومنه $(1,0)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ و $\varphi(1)=1$ (2)

العنصر المماثل : ليكن (a,b) من E و (a',b') مماثلته بالقانون $*$

إذن : $\begin{cases}(aa', ba'+b'\varphi(a))=(1,0)\\(a'a, b'a+b\varphi(a'))=(1,0)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b)*(a',b')=(1,0)\\(a',b')*(a,b)=(1,0)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}aa'=1\\ba'+b'\varphi(a)=0\\b'a+b\varphi(a')=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a'=\frac{1}{a}\\b+ab'\varphi(a)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a'=\frac{1}{a}\\b'=-\frac{b}{a\varphi(a)}\end{cases}$ (لأن : $1=\varphi(a\times\frac{1}{a})=\varphi(a)\times\varphi(\frac{1}{a})$ ، $\varphi(a)\neq 0 \Rightarrow \varphi(\frac{1}{a})=\frac{1}{\varphi(a)}$)

وبالتالي $(E,*)$ زمرة إذا وفقط إذا كان :

$\varphi(1)=1$ و $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^* : \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$

مثال للدالة φ : نعتبر $\varphi(x)=x^n$ حيث : $n\in\mathbb{Z}$.

24

لتكن $(G,.)$ زمرة.

1) بين أن إذا كان $\exists p\in\mathbb{N}\ \forall a\in G\ \forall b\in G : (ab)^p=a^p b^p$ (1)

فإن : $\forall a\in G\ \forall b\in G : (ba)^{p-1}=a^{p-1}.b^{p-1}$ (2)

2) بين أن اذا وجد n من $\mathbb{N}^*$ و كانت العلاقة (1) من أجل $p=n+1$ ؛ $p=n$ ، $p=n+1$ فإن $(G,.)$ زمرة تبادلية.

الجواب : لدينا : $\exists p\in\mathbb{N}\ \forall(a,b)\in G^2 : (ab)^p=a^p b^p$ (1)

- إذا كان القانون . تبادلي فإن العلاقة (2) محققة لكل p من $\mathbb{N}$
- إذا كان القانون . غير تبادلي لدينا :

$$(ab)^p=\underbrace{(ab)(ab)\ldots\ldots(ab)}_{p\text{ مرة}}=a\underbrace{(ba)\ldots\ldots(ba)}_{(p-1)\text{ مرة}}b=a(ba)^{p-1}.a$$

حسب العلاقة (1) لدينا : $a(ba)^{p-1}a=aa^{p-1}.b^{p-1}.b$

بما أن $(G,.)$ زمرة فإن كل عنصر من G هو عنصر منتظم

ومنه : $(ba)^{p-1}=a^{p-1}.b^{p-1}$

وبالتالي : $\forall(a,b)\in G^2 : (ba)^{p-1}=a^{p-1}.b^{p-1}$ (2)

2) حسب السؤال 1) بما أن $(ab)^{n+1}=a^{n+1}.b^{n+1}$ فإن : $(ba)^n=a^n b^n$

بما أن $(ab)^n=a^n b^n$ فإن : $(ba)^{n-1}=a^{n-1}.b^{n-1}$

بما أن : $(ab)^{n-1} = a^{n-1}b^{n-1}$ فإن : $(ab)^{1-n} = (ba)^{1-n}$

إذن لدينا : $(ab)^n = (ba)^n$ و $(ab)^{1-n} = (ba)^{1-n}$

ومنه : $(ab)^n(ab)^{1-n} = (ba)^n(ba)^{1-n}$

أي : $ab = ba$

وبالتالي $(G,\circ)$ زمرة تبادلية .

25 نعتبر المجموعة $I =]-1,1[$ ومجموعة المصفوفات التالية :

$$\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} / x \in I \right\}$$

1) بين أن التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{M}$$
$$x \longmapsto M(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}$$

تقابلي .

2) نعرف في I القانون $*$ المعرف بمايلي : $\forall (x,y) \in I^2 : x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

أ- بين أن $*$ هو فعلاً قانون تركيب داخلي في I .

ب- بين أن $(\mathbb{M},\times)$ زمرة تبادلية .

ج- استنتج أن $(I,*)$ زمرة تبادلية ، محدداً عنصرها المحايد ومماثل عنصر x من I .

الجواب : 1) لدينا التطبيق $\varphi : \begin{matrix} I \longrightarrow \mathbb{M} \\ x \longmapsto M(x) \end{matrix}$ شمولي لأن : $\mathbb{M} = \varphi(I)$

لنبين أن φ تبايني .

ليكن x و y من I بحيث : $\varphi(x) = \varphi(y)$

إذن :

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\begin{pmatrix} 1 & -y \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-y}{\sqrt{1-y^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

ومنه φ تطبيق تبايني وبالتالي φ تقابل من I نحو $\mathbb{M}$.

2) ليكن x و y من I لدينا : $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

لدينا : $x*y-1=\dfrac{x+y}{1+xy}-1=\dfrac{(x-1)(1-y)}{1+xy}$

بما أن : $|x|<1$ و $|y|<1$ فإن : $|xy|<1$ أي : $-1<xy<1$

إذن : $0<1+xy<2$

ولدينا : $-1<x<1$ و $-1<y<1$ إذن : $x-1<0$ و $1-y>0$

ومنه : $x*y-1<0$ أي : $x*y<1$ (1)

لدينا : $x*y+1=\dfrac{x+y}{1+xy}+1=\dfrac{(x+1)(y+1)}{1+xy}>0$

لأن : $0<x+1<2$ و $0<y+1<2$ و $0<1+xy<2$

إذن : $-1<x*y$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $x*y\in I \quad : \quad \forall(x,y)\in I^2$

وبالتالي القانون $*$ هي قانون تركيب داخلي في I .

ب - لدينا : $\mathbb{M}\subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ و $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ زمرة

حيث $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة في $\mathbb{R}$

لكي نبين أن $(\mathbb{M},\times)$ زمرة يكفي أن نبينها زمرة جزئية من $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

ليكن x و y من I لدينا : $M(x)\times M(y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix}1 & -x\\ -x & 1\end{pmatrix}\times\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\begin{pmatrix}1 & -y\\ -y & 1\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}\begin{pmatrix}1+xy & -x-y\\ -x-y & 1+xy\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)^2}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{x+y}{1+xy}\\ -\frac{x+y}{1+xy} & 1\end{pmatrix}$$

ومنه : $M(x)\times M(y)=M\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$ و $M(x)\times M(y)=M(y)\times M(x)$

إذن : $M(x)\times M(y)\in \mathbb{M}$

لدينا : $M(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathbb{M}$

ولدينا : $M(x)\times M(-x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

ومنه $M(-x)$ هو مماثل لـ $M(x)$ في $\mathbb{M}$ و $M(-x)\in\mathbb{M}$

إذن $(\mathbb{M},\times)$ زمرة تبادلية جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

ج - لدينا : $M(x)\times M(y)=M\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ $\forall(x,y)\in I$

ومنه : $\varphi(x*y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$

إذن φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ نحو $(\mathbb{M},\times)$

ومنه بنية $(I,*)$ هي بنية $(\mathbb{M},\times)$

بما أن $(\mathbb{M},\times)$ زمرة تبادلية فإن $(I,*)$ زمرة تبادلية

- بما أن $M(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ العنصر المحايد لـ $\times$ في $\mathbb{M}$

فإن : $\varphi^{-1}(M(0))=0$ هو العنصر المحايد لـ $*$ في I .

و بما أن $M(-x)$ هو العنصر المماثل لـ $M(x)$ في $(\mathbb{M};\times)$

فإن : $\varphi^{-1}(M(-x))=-x$ هو العنصر المماثل لـ x في $(I;*)$

26

لتكن $(G,\cdot)$ زمرة تبادلية ؛ نرمز لـ : $x^n=\underbrace{x.x.\ldots.x}_{n\ \text{مرة}}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

نفترض أن : $\forall a\in G\ ;\ a^n=e$ $(n\geq 2)$ و e العنصر المحايد .

نضع : $n=rs$ بحيث : $r\wedge s=1$ و $r\in\mathbb{N}$ و $s\in\mathbb{N}$

$G_r=\{x\in G\ |\ x^r=e\}$ و $G_s=\{x\in G\ |\ x^s=e\}$

1) بين أن : G_r و G_s هما زمرتين جزئيتين لـ G .

2) بين أن : $G_r\cap G_s=\{e\}$

3) بين أن : $\forall x\in G_r\ \exists y\in G_r\ :\ x=y^s$

4) بين أن : $\forall a\in G\ \exists b\in G_r\ :\ a^s=b^s$

5) بين أن : $\forall a\in G\ \exists!(x,y)\in G_r\times G_s\ :\ a=xy$

6) بين أن : $\text{card}\,G=\text{card}\,G_r\times\text{card}\,G_s$

الجواب : 1) لنبين أن G_r و G_s زمرتين جزئيتين لـ G :

لدينا : $G_r\neq\emptyset$ لأن : $e\in G_r$ $(e^r=e)$

ليكن x و y من G_r لدينا : $(xy^{-1})^r=x^r.y^{-r}=e.e^{-1}=e.e=e$

إذن : $x.y^{-1}\in G_r$ (لأن . تبادلية)

ومنه $(G_r,\cdot)$ زمرة جزئية لـ $(G,\cdot)$.

بالمثل نبرهن أن $(G_s,\cdot)$ زمرة جزئية لـ $(G,\cdot)$.

2) لنبين أن : $G_r \cap G_s = \{e\}$

لدينا : $\{e\} \subset G_r \cap G_s$ (لأن: $e \in G_r$ و $e \in G_s$)

لنبين أن : $G_r \cap G_s \subset \{e\}$

بما أن : $r \wedge s = 1$ فإنه حسب مبرهنة مبرهنة Bezout

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2 : pr + qs = 1$$

لدينا :

$$x \in G_r \cap G_s \Rightarrow x = x^1 = x^{pr+qs}$$
$$\Rightarrow x = (x^r)^p \cdot (x^s)^q = e^p \cdot e^q = e \cdot e$$
$$\Rightarrow x = e$$

ومنه : $G_r \cap G_s \subset \{e\}$

وبالتالي : $G_r \cap G_s = \{e\}$.

3) لنبين أن : $\forall x \in G_r \ \exists y \in G_r : x = y^s$

لدينا :

$$x \in G_r \Rightarrow x = x^1 = x^{pr+qs} = (x^r)^p \cdot (x^q)^s$$
$$\Rightarrow x = e^p \cdot (x^q)^s = e \cdot (x^q)^s$$
$$\Rightarrow x = (x^q)^s$$

نضع : $y = x^q$ لنبين أن : $x^q \in G_r$

لدينا : $y^r = x^{qr} = (x^r)^q = e^q = e$

ومنه : $y \in G_r$

وبالتالي : $\forall x \in G_r \ \exists y \in G_r : x = y^s$

4) لنبين أن : $\forall a \in G \ \exists b \in G_r : a^s = b^s$

ليكن a من G ؛ نضع : $x = a^s$ لدينا حسب السؤال 3) :

$$x^r = a^{rs} = a^n = e \Rightarrow x \in G_r$$

إذن : $x \in G_r \quad \exists b \in G_r : x = a^s = b^s$

وبالتالي : $\forall a \in G \quad \exists b \in G_r : a^s = b^s$

5) لنبين أن $\forall a \in G \ \exists! (x,y) \in G_r \times G_s : a = xy$

- الوجودية : لدينا : $a = a^1 = a^{pr+qs} = a^{pr} \cdot a^{qs}$

نضع : $y = a^{pr}$ و $x = a^{qs}$ لدينا : $a = x*y$

و $y^s = a^{prs} = (a^{rs})^p = e$ و $x^r = a^{qsr} = (a^{sr})^q = e$

ومنه : $(x,y)\in G_n\times G_p$ و $a=x.y$

- الوحدانية : نفترض أن : $a=x\cdot y=x'\cdot y'$

مع $(x,x')\in G_n^2$ و $(y,y')\in G_p^2$

لدينا : $y'\cdot y^{-1}=x'\cdot x^{-1}$

إذن : $x'x^{-1}\in G_n\cap G_p$ و $y'y^{-1}\in G_n\cap G_p$

وبما أن : $G_n\cap G_p=\{e\}$ فإن : $y'\cdot y^{-1}=e$ و $x'\cdot x=e$

أي : $x'=x$ و $y'=y$

وبالتالي : $\forall a\in G\ \exists!(x,y)\in G_n\times G_p\ :\ a=x\cdot y$

6) لنبين أن : $\operatorname{card}G=\operatorname{card}G_n\times\operatorname{card}G_p$:

لذلك يكفي أن نبين أن G و $G_n\times G_p$ متشاكلان تقابلياً.

نعتبر التطبيق :
$$\varphi:\ G_n\times G_p\longrightarrow G$$
$$(x,y)\longmapsto xy$$

ونعرف قانون تركيب داخلي في $G_n\times G_p$ بمايلي :
$$(x,y)\times(x',y')=(xx',yy')$$

حسب السؤال 5) لدينا φ تقابل وبعد الحساب يمكن أن نبين أن :
$$\varphi((x,y)\times(x',y'))=\varphi(x)\varphi(y)$$

ومنه φ تشاكل تقابل من $G_n\times G_p$ نحو G

إذن $G_n\times G_p$ و G متقارنتان أي $G_n\times G_p\simeq G$

وبالتالي : $\operatorname{card}G=\operatorname{card}G_n\times\operatorname{card}G_p$

27

ليكن n من $\mathbb{N}$ نرمز ب $n\mathbb{Z}$ للمجموعة :
$$n\mathbb{Z}=\{nx\mid x\in\mathbb{Z}\}$$

1) بين أن $(n\mathbb{Z},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$.

2) لتكن G زمرة جزئية من $(\mathbb{Z},+)$ بحيث : $G\neq\phi$

نضع : $n=\min(G\cap\mathbb{N}^*)$

أ- بين أن n له معنى (أي موجود)

ب- بين أن : $n\mathbb{Z}\subset G$

ج - ليكن x من G باستعمال القسمة الإقليدية لـ x على n في $\mathbb{Z}$.

بين أن : $G \subset n\mathbb{Z}$.

3) ماذا يمكنك أن تستنتج ؟

الجواب : 1) لدينا : $n\mathbb{Z} \neq \phi$ (لأن : $0 = n.0 \in \mathbb{Z}$)

ليكن x و y من $n\mathbb{Z}$ لدينا : $x = n\alpha$ و $y = np$ حيث : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$

إذن : $x - y = n(\alpha - \beta) \in n\mathbb{Z}$

ومنه $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

2) أ- لدينا : $G \cap \mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^*$ و $G \cap \mathbb{N}^* \neq \phi$ (لأن : $G \neq \phi$)

إذن : $G \cap \mathbb{N}^*$ تقبل أصغر عنصر n (لأن $G \cap \mathbb{N}^*$ مصغورة بالعدد 0)

ومنه n له معنى .

ب - لنبين أن $n\mathbb{Z} \subset G$

ليكن x من $n\mathbb{Z}$ لدينا : $x = n\alpha$: $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$

بما أن n من G فإن : $n\alpha = \underbrace{n + n + \dots + n}_{\alpha \text{ مرة } n}$

وبما أن $(G, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$ فإن $n\alpha \in G$

أي : $x \in G$ ومنه : $n\mathbb{Z} \subset G$

ج - ليكن x من G لدينا : $x = qn + r$ و $0 \leq r < n$: $\exists ! (q, r) \in \mathbb{Z}^2$:

ومنه : $r = x - qr$

بما أن : $x \in G$ و $qn \in G$ فإن : $x - qn \in G$

لأن G زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$.

ومنه : $r \in G$

إذا كان $r \neq 0$ فإن : $0 < r < n$ وهذا يناقض مع كون $n = \min(G \cap \mathbb{N}^*)$

إذن : $r = 0$ أي : $x = qn \in n\mathbb{Z}$

إذن : $G \subset n\mathbb{Z}$

3) حسب السؤال 1) لدينا : $(n\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

وحسب السؤال 2) أنه إذا كانت G زمرة جزئية من $(\mathbb{Z}, +)$

فإنه يوجد n من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $G = n\mathbb{Z}$

الحلقة - الجسم

1 لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية، عنصر المحايد 1_A بالنسبة للضرب وليكن x من A.

نقول إن x يحقق العلاقة (R) إذا وفقط إذا كان: $\exists n\in\mathbb{N} : x^n = 0_A$

1) ليكن x و y عنصران من A يحققان العلاقة (R) بحيث: $xy=yx$

بين أن $x+y$ يحقق العلاقة (R).

2) بين أنه إذا كان x يحقق العلاقة (R) و $xy=yx$ فإن xy يحقق العلاقة (R).

3) بين أنه إذا كان x يحقق العلاقة (R) فإن 1_A-x يقبل مقلوب يتم تحديده.

الجواب: 1) x يحقق العلاقة (R) $\Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N} : x^n=0_A$

y يحقق العلاقة (R) $\Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{N} : y^m=0_A$

بما أن $yx=xy$ وبتطبيق الصيغة الحدانية داخل الحلقة A لدينا:

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{m+n}^{k}\, x^{k}\cdot y^{m+n-k}$$

$$= y^m\left(\sum_{k=0}^{n} C_{m+n}^{k}\, x^{k}\cdot y^{n-k}\right) + x^n\left(\sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^{k}\, x^{k-m}\cdot y^{m+n-k}\right)$$

وبما أن: $x^n=0_A$ و $y^m=0_A$ فإن: $(x+y)^{n+m}=0_A$

ومنه $x+y$ يحقق العلاقة (R).

2) بما أن: $xy=yx$ فإن لكل p من $\mathbb{N}$: $(xy)^p=x^p\cdot y^p$

بما أن: x يحقق العلاقة (R) فإن: $\exists n\in\mathbb{N} : x^n=0_A$

ومنه: $(xy)^n = x^n\cdot y^n = 0_A\cdot y^n = 0_A$

وبالتالي: xy يحقق العلاقة (R)

3) نفترض أن x يحقق العلاقة (R) أي: $\exists n\in\mathbb{N} : x^n=0_A$

لدينا: $1_A-x^n=(1_A-x)(1_A+x+x^2+\dots+x^{n-1})$

$1_A=(1_A+x+x^2+\dots+x^{n-1})(1_A-x)$ (لأن $x^n=0_A$)

ومنه 1_A-x يقبل مقلوب هو: $(1_A-x)^{-1}=\sum_{k=1}^{n-1}x^k \in A$

2 نعتبر حلقة واحدية $(A,+,\cdot)$ و 1_A هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون الداخلي .

ليكن a و b عنصرين من A بحيث :

أ) $ab+ba=1_A$

أأ) $a^2b+ba^2=a$

1) بين أن : $a^2b=ba^2$

2) بين أن : $aba+aba=a$

3) استنتج أن : $ab=ba$.

<u>الجواب :</u> 1) لدينا : $a^2b+ba^2=a$
$$= a\cdot 1_A$$
$$= a\cdot(ab+ba)$$
$$= a^2b+aba$$

ومنه : $a^2b+ba=a^2b+aba$

وبالتالي : $ba^2=aba \quad (1)$

ولدينا ، $a^2b+ba^2=a$
$$=1_A\cdot a$$
$$=(ab+ba)\cdot a$$

ومنه : $a^2b+ba^2=aba+ba^2$

وبالتالي : $a^2b=aba \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $a^2b=ba^2$

2) لدينا حسب ماسبق : $aba=ba^2$ و $aba=a^2b$

ومنه : $aba+aba=a^2b+ba^2$

إذن : $aba+aba=a$ (حسب أأ))

3) لدينا : $(ab)(ab)=(1_A-ba)(1_A-ba)$

(لأن : $ab=1_A-ba$)

$(ab)(ab)=(aba)b=(ba^2)b$ (لأن : $aba=ba^2$)

$(ba)(ba)=b(aba)=b(a^2b)$ (لأن : $aba=a^2b$)

لدينا : $(ab)(ab)=(1_A-ba)(1_A-ba)$
$$=1_A-ba-ba+(ba)(ba)$$

$$ba^2b = 1_A - ba - ba + ba^2b$$

لأن : $(ab)(ab) = (ba)(ba) = ba^2b$

ومنه : $ba + ba = 1_A$

وبما أن : $ba + ab = 1_A$

فإن : $ab = ba$

3

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة ، نضع :

$C(A) = \{x \in A / \forall a \in A : xa = ax\}$ و $E(A) = \{x \in A / x^2 = x\}$

الجزء الأول : نفترض في هذا الجزء فقط أن :

$$\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \quad : \quad xy \in E(A)}$$

1) بين أن : $\forall (x,y) \in A^2 : \ xy = 0 \Rightarrow yx = 0$

2) استنتج أن : $E(A) \subset C(A)$

3) بين أن : $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية .

الجزء الثاني : نفترض في هذا الجزء فقط أن :

$$\boxed{\forall (x,y) \in A^2 \ : \ xy - yx \in E(A)}$$

1) بين أن : $\forall (x,y) \in A^2 : \ xy = 0 \Rightarrow yx = 0$

2) استنتج أن : $E(A) \subset C(A)$

3) بين أن : $\forall (x,y) \in A^2 \ : \ xy - yx = yx - xy$

4) بين أن : $\forall x \in A \ : \ x^2 \in C(A)$

الجواب : الجزء الأول :

1) نفترض أن : $xy = 0$ و لنبين أن : $yx = 0$.

لكل x و y من A لدينا : $yx \in E(A) \Leftrightarrow yx = (yx)^2$

$$\Leftrightarrow yx = yx\,yx = y\,(xy)\,x = 0$$

ومنه : $\forall (x,y) \in A^2 : \ xy = 0 \Rightarrow yx = 0$

2) ليكن x من $E(A)$ لدينا : $x^2 = x$

لكل a من A لدينا : $x^2a = xa$

إذن : $x^2a - xa = 0 \Leftrightarrow x(xa-a) = 0$

$\Rightarrow (xa-a).x = 0$ (حسب 1)

$\Rightarrow xax - ax = 0$

$\Rightarrow \boxed{xax = ax}$ (1)

ولدينا : $ax^2 = ax \Leftrightarrow ax^2 - ax = 0$

$\Rightarrow (ax-a)x = 0$

$\Rightarrow x(ax-a) = 0$

$\Rightarrow xax - xa = 0$

$\Rightarrow \boxed{xax = xa}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $xa = ax$ ومنه : $x \in C(A)$

وبالتالي : $E(A) \subset C(A)$

3) ليكن x و y من E لدينا : $xy \in E(A)$

ومنه : $xy = (xy)^2 = x(yxy)$

وبما أن $yxy \in E(A) \subset C(A)$ فإن $xy = x(yxy)$

$= (yxy)x = (yx)(yx) = (yx)^2 = yx$

إذن : $xy = yx$

بالتالي $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية

الجزء الثاني :

1) نفترض أن : $xy = 0$ مع $(x,y) \in A^2$

لدينا : $yx = yx - xy$ (لأن : $xy = 0$)

بما أن $yx - xy \in E(A)$ فإن :

$yx = yx - xy = (yx-xy)^2 = (yx)^2 - yxxy - xyyx + (xy)^2$

$= (yx)^2$ (لأن : $xy = 0$)

$= yxyx = y(xy)x$

ومنه : $yx = 0$.

2) نفس الطريقة المتبعة في السؤال رقم الجزء الأول .

3) ليكن x و y من A لدينا : $xy - yx \in E(A)$

ومنه : $xy - xy = (xy-yx)^2 = (yx-xy)^2 = yx - xy$: (لأن : $yx - xy \in E(A)$)

4) لنبين أن لكل x من A : $x^2 \in C(A)$

لدينا : $xa - ax \in E(A) \subset C(A)$

$$\Rightarrow x(xa-ax) = (xa-ax)x$$
$$= (ax - xa)x$$
$$\Rightarrow x^2a - xax = xx^2 - xax$$
$$\Rightarrow x^2a = ax^2$$

أي : $x^2 \in C(A)$.

4

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة و $I \subset A$.

نقول أن I مثالي من A إذا وفقط إذا احقق الشروط التالية :

ا) $I \neq \phi$

اا) $x - y \in I$ $\quad \forall (x,y)\in I^2$:

ااا) $xa \in I$ $\quad \forall (x,a) \in I\times A$:

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية و I و J مثاليان من A.

نضع : $\mathcal{R}(I) = \{x \in A \ / \ \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in I\}$

1) أ- بين أن ، $\mathcal{R}(I)$ مثالي من A .

ب- بين أن : $I \subset \mathcal{R}(I)$

2) بين أن : $\mathcal{R}(A) = A$

3) بين أن : $I \subset J \Rightarrow \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}(J)$

4) بين أن : $\mathcal{R}(\mathcal{R}(I)) = \mathcal{R}(I)$

5) بين أن : $\mathcal{R}(I\cap J) = \mathcal{R}(I) \cap \mathcal{R}(J)$.

<u>الجواب :</u> 1) أ- لدينا : $I \neq \phi$ ومنه $\exists x \in I : x^1 = x \in I$

ومنه $\mathcal{R}(I) \neq \phi$

ليكن x و y من $\mathcal{R}(I)$ إذن : $\exists (n,m) \in I^2 : x^n \in I$ و $y^m \in I$

لنبين أن : $(x-y)^{n+m} \in I$

لدينا : $(x-y)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} (-1)^{m+n-p} \cdot C_{m+n}^{p} x^p y^{m+n-p}$

$$= y^m \left(\sum_{p=0}^{n} (-1)^{m+n-p} \cdot C_{m+n}^{p} x^p y^{n-p} \right) + x^n \left(\sum_{p=n+1}^{m+n} (-1)^{m+n-p} \cdot C_{m+n}^{p} x^{p-n} \cdot y^{m+n-p} \right)$$

لدينا : $0 \leq p \leq n \ , \ m+n-p \geq m \Rightarrow x^p \cdot y^{n-p} \in A$

$n+1 \leq p \leq m+n \Longrightarrow x^{p-n} y^{m+n-p} \in A$

ومنه : $a_1 = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{m+n-p} \cdot C_{n+m}^{p} x^p y^{n-p} \in A$ و $a_2 = \sum_{p=n+1}^{n+m} (-1)^p C_{n+m}^{p} x^{p-n} \cdot y^{m+n-p} \in A$

إذن : $(x-y)^{n+m} = y^m a_1 + x^n a_2$

وبما أن $x^n \in I$ و $y^m \in I$ فإن : $y^m a_1 \in I$ و $x^n a_2 \in I$

لأن : I مثالي في A) ، ومنه : $x^n a_2 + y^m a_1 \in I$

أي : $(x-y)^{n+m} \in I$

وبالتالي : $x-y \in R(I)$

ليكن a من A إذن : $(ax)^n = a^n x^n$ (لأن A حلقة تبادلية)

بما أن $x^n \in I$ و $a^n \in A$ ، I مثالي من A

فإن : $a^n . x^n \in I$ أي : $(ax)^n \in I$

ومنه : $ax \in R(I)$

وبالتالي R(I) مثالي من A .

ب - لدينا : $x \in I \Rightarrow x^1 \in I$
$\Rightarrow x \in R(I)$

ومنه : $I \subset R(I)$.

2) لدينا : $A \subset R(A)$ (لأن A مثالي من A)

وبما أن : $R(A) \subset A$ فإن : $R(A) = A$.

3) نفترض أن $I \subset J$:

ليكن x من R(I) إذن : $\exists n \in \mathbb{N} : \quad x^n \in I$

إذن : $\exists n \in \mathbb{N} : x^n \in J$ (لأن : $I \subset J$)

ومنه : $x \in R(J)$

وبالتالي : $R(I) \subset R(J)$.

4) لنبين أن : $R(R(I)) = R(I)$

لدينا : $I \subset R(I)$ ، ومنه : $R(I) \subset R(R(I))$ (حسب السؤال 3)

لنبين أن : $R(R(I)) \subset R(I)$

لدينا : $y \in R(R(I)) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad : y^n \in R(I)$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ \exists p \in \mathbb{N} : (y^n)^p \in I$

$\Rightarrow \exists np \in \mathbb{N} \ : \ y^{np} \in I$

$\Rightarrow y \in R(I)$

ومنه : $R(R(I)) \subset R(I)$

وبالتالي : $R(R(I)) = R(I)$

5) لنبين أن : $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$

لدينا : $(I \cap J \subset I$ و $I \cap J \subset J) \Rightarrow \begin{cases} R(I \cap J) \subset R(I) \\ R(I \cap J) \subset R(J) \end{cases}$

إذن : $R(I \cap J) \subset R(I) \cap R(J)$

لنبين أن : $R(I) \cap R(J) \subset R(I \cap J)$

لدينا : $x \in R(I) \cap R(J) \Leftrightarrow \exists (n,p) \in \mathbb{N} : x^n \in I$ و $x^p \in J$

لدينا : $\begin{cases} x^n \in I \\ x^p \in J \subset A \end{cases} \Rightarrow x^n . x^p \in I$ (لأن I مثالي من A)

$\begin{cases} x^p \in J \\ x^n \in I \subset A \end{cases} \Rightarrow x^p . x^n \in J$ (لأن J مثالي من A)

ومنه : $x^{n+p} \in I \cap J$

أي : $x \in R(I \cap J)$

ومنه : $R(I) \cap R(J) \subset R(I \cap J)$

وبالتالي : $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$.

5

ليكن $(K,+,\times)$ جسم نرمز ب 1_K بالعنصر المحايد بالنسبة للضرب $\times$.

نفترض أنه يوجد f تشاكل تقابلي من $(K,+)$ نحو $(K \setminus \{0_K\} ; \times)$

1) نفترض أن : $1_K + 1_K = 0_K$

بين أن : $f(K) = \{1_K\}$

2) نفترض أن : $1_K + 1_K \neq 0_K$ ونضع : $\alpha = f^{-1}(1_K)$ و $\beta = f^{-1}(-1_K)$

أ- بين أن : $\alpha + \alpha = \beta + \beta$

ب- استنتج أن : $\alpha = \beta$.

3) استنتج أنه لا يوجد تشاكل تقابلي من $(K,+)$ نحو $(K \setminus \{0_K\} ; \times)$

الجواب : 1) إذا كان : $1_K + 1_K = 0_K$ فإن لكل x من K لدينا :

$x + x = x(1_K + 1_K) = x . 0_K = 0_K$

ومنه: $f(x+x) = (f(x))^2 = f(0_K) = 1_K$ (لأن f تشاكل تقابلي)

إذن: $f(x) = 1_K$ أو $f(x) = -1_K = 1_K$

وبالتالي: $f(K) = \{1_K\}$.

2) أ- لدينا: $f(\alpha) = 1_K \Leftrightarrow f^{-1}(1_K) = \alpha$

$f(\beta) = -1_K \Leftrightarrow f^{-1}(-1_K) = \beta$

ومنه: $f(\alpha+\alpha) = (f(\alpha))^2 = 1_K^2 = 1_K$

$f(\beta+\beta) = (f(\beta))^2 = (-1_K)^2 = 1_K$

إذن: $f(\alpha+\alpha) = f(\beta+\beta)$

وبما أن f تقابل فإن: $\alpha+\alpha = \beta+\beta$

ب- لدينا: $\alpha+\alpha = \beta+\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)+(\alpha-\beta) = 0_K$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(1_K+1_K) = 0_K$

$\Leftrightarrow \alpha-\beta = 0_K$ أو $1_K+1_K = 0_K$ (K جسم)

$\Leftrightarrow \alpha-\beta = 0$ (لأن: $1_K+1_K \neq 0_K$)

$\Leftrightarrow \alpha = \beta$

3) إذا كان هناك تشاكل تقابلي من $(K,+)$ نحو $(K-\{0_K\},\times)$

لدينا حالتين بالنسبة للمجموع 1_K+1_K

الحالة 1: إذا كان: $1_K+1_K = 0_K$ ؛ حسب السؤال 1) لدينا:

$\forall x \in K \quad f(x) = \{1_K\}$

أي: $f(K) = \{1_K\} \Leftrightarrow f^{-1}(\{1_K\}) = K$

أي K مجموعة منتهية

ومنه: $card\, K = card(K-\{0_K\})$، وهذا تناقض.

الحالة 2: إذا كان: $1_K+1_K \neq 0_K$ حسب السؤال 2

بأخذ: $\alpha = f^{-1}(1_K)$ و $\beta = f^{-1}(-1_K)$ نحصل على $\alpha = \beta$.

أي: $f(-1_K) = f(1_K)$ وبما أن f تباين

فإن: $-1_K = 1_K$ أي: $1_K+1_K = 0_K$ تناقض مع كون $1_K+1_K \neq 0_K$

وبالتالي لا يوجد تشاكل تقابلي من $(K,+)$ نحو $(K-\{0\};\times)$.

6 ليكن $(K,+,\times)$ جسم و x و y عنصران من $K-\{0_K\}$ يحققان ما يلي :

i) $x+y=-1_K$ (العنصر المحايد للقانون $\times$ 1_K)

ii) $x^{-1}+y^{-1}=1_K$ (x^{-1} مقلوب x في K)

1) بين أن : $xy=yx=-1_K$

2) بين أن : $x^4+y^4=7$ $\left(7=\underbrace{1_K+1_K+\cdots+1_K}_{\text{7 مرات}}\right)$

الجواب : 1) لدينا لكل x و y من K :

$$xy=x(x^{-1}+y^{-1})y=xx^{-1}y+xyy^{-1}=y+x=-1_K$$

$$yx=y(y^{-1}+x^{-1})x=yy^{-1}x+yx^{-1}x=x+y=-1_K$$

ومنه : $xy=yx=-1_K$

2) لدينا :

$$1_K=(x+y)^2$$
$$=x^2+xy+yx+y^2$$
$$=x^2-1_K-1_K+y^2$$

أي : $x^2+y^2=3$ $(3=1_K+1_K+1_K)$

ومنه :

$$9=(x^2+y^2)^2$$
$$=x^4+x^2y^2+y^2x^2+y^4$$
$$=x^4+1_K+1_K+y^4$$

ومنه : $x^4+y^4=7$.

7 نعرف على $E=\mathbb{R}^2$ القانونين الداخليين $\cdot$ و $+$ كما يلي :

$\forall (a,b)\in E\ ;\ \forall (a',b')\in E$:

$$(a,b)+(a',b')=(a+a';b+b')$$
$$(a,b)\cdot(a',b')=(aa'-bb',ab'+a'b)$$

بين أن : $(E;+;\cdot)$ جسم تبادلي .

الجواب : بنية $(E,+)$.

ليكن (a,b) و (a',b') و (a'',b'') من E

لدينا: $(a,b)+[(a',b')+(a'',b'')] = (a,b)+(a'+a'', b'+b'')$

$$= (a+a'+a'', b+b'+b'')$$

$$= (a+a', b+b') + (a'', b'')$$

$$= [(a,b)+(a',b')]+(a'',b'')$$

ومنه القانون + تجميعي.

لدينا: $(a,b)+(0,0) = (0,0)+(a,b) = (a,b)$

ومنه: $(0,0)$ العنصر المحايد بالنسبة للقانون +.

$$(a,b)+(-a,-b) = (-a,-b)+(a,b) = (0,0)$$

ومنه: $(-a,-b)$ مماثلة لـ (a,b) بالنسبة لـ +

ولدينا: $(a,b)+(a',b') = (a',b')+(a,b)$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة تبادلية.

بنية $(E,.)$:

ليكن (a,b) و (a',b') و (a'',b'') من E لدينا:

$$(a,b).[(a',b').(a'',b'')] = (a,b).(a'a''-b'b''; a'b''+b'a'')$$

$$=[a(a'a''-b'b'')-b(a'b''+b'a''); a(a'b''+b'a'')+b(a'a''-b'b'')]$$

$$[(a,b).(a',b')].(a'',b'') = (aa'-bb'; ab'+ba').(a'',b'')$$

$$=[(aa'-bb')a''-(ab'+ba')b''; (aa'-bb')b''+(ab'+ba')a'']$$

$$=[a(a'a''-b'b'')-b(a'b''+b'a''); a(a'b''+b'a'')+b(a'a''-b'b'')]$$

إذن: $(a,b).[(a',b').(a'',b'')]=[(a,b).(a',b')].(a'',b'')$

ومنه القانون . تجميعي.

العنصر المحايد للقانون .:

لدينا لكل (a,b) من E لدينا: $(a,b).(1,0) = (1,0).(a,b)=(a,b)$

ومنه $(1,0)$ هو العنصر المحايد للقانون .

مقلوب (a,b): ليكن (x,y) مقلوب (a,b).

لدينا: $(a,b).(x,y) = (1,0) \Leftrightarrow (ax-by; bx+ay)=(1,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

هذه النظمة تقبل حل إذا كان $(a,b)\neq(0,0)$ ومنه:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{-b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

9 ليكن $(K,+,\times)$ جسم بحيث : $K\neq\{0\}$ و e العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$. ويحقق ما يلي : $(1)\ \forall a\in K\setminus\{0\} : a^{-1}=-a$

1) بين أن : $\forall a\in K \quad a+a=0$

2) بين أن ، بدراسة $(a+e)^2$ ، أن الجسم K الذي يحقق الشرط (1) هو الجسم $K=\{0,e\}$.

3) أعط جدول الجمع والضرب في K .

- أعط مثالاً بسيطاً لجسم K يحقق (1)

الجواب : 1) لدينا : $\forall a\in K\setminus\{0\} : a^{-1}=-a$

نعتبر $a=e$ إذن : $e^{-1}=-e$ أي : $e+e=0$ (لأن : $e^{-1}=e$)

ليكن a من K لدينا : $a+a=ae+ae=a(e+e)$

وبما أن : $e+e=0$ فإن : $a+a=a.0=0$

وبالتالي : $\forall a\in K \quad a+a=0$.

2) ليكن $a\in K-\{0\}$ لدينا :

$$(a+e)^2=a^2+e^2+ae+ea=a^2+e+e(a+a)$$

بما أن : $a+a=0$ و $a^2=aa=-aa^{-1}=-e$

(لأن : $a=-a^{-1}$)

فإن : $(a+e)^2=0$ أي : $a+e=0$

ومنه : $a=-e=e$ (لأن : $-e=e^{-1}=e$)

وبالتالي : $K=\{0,e\}$.

3) جدول الجمع والضرب في K :

$+$	0	e
0	0	e
e	e	0

$\times$	0	e
0	0	0
e	0	e

مثال لجسم K : $K=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad K=\{\bar{0},\bar{1}\}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

ومنه كل (a,b) من $E\setminus\{(0,0)\}$ له مقلوب $\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

بنية $(E,+,\cdot)$:

لكل (a,b) و (a',b') و (a'',b'') من E .

لدينا :
$$(a,b)\cdot[(a',b')+(a'',b'')]=(a,b)\cdot(a'+a'',b'+b'')$$
$$=[a(a'+a'')-b(b'+b'')\,;\,a(b'+b'')+b(a'+a'')]$$
$$=[(aa'-bb')+(aa''-bb'')\,;\,(ab'+ba')+(ab''+ba'')]$$
$$=(aa'-bb'\,;\,ab'+ba')+(aa''-bb''\,;\,ab''+ba'')$$
$$=(a,b)\cdot(a',b')+(a,b)\cdot(a'',b'')$$

ومنه القانون $\cdot$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$.

وبالتالي : $(E,+,\cdot)$ جسم تبادلي .

8

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة و $I\subset A$ (نفترض أن A واحدية)

نقول إن I مثالي من A إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

i) $I\neq\phi$

ii) $\forall(x,y)\in I^2:\quad x-y\in I$

iii) $\forall(x,a)\in I\times A\quad:\quad xa\in I$

1) ليكن I مثالي لـ A ، بين أن : $1_A\in I \Leftrightarrow I=A$

2) نعتبر أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية ، وليكن f التطبيق من A نحو $\mathbb{R}^+$ حيث :
$$\begin{cases}\forall x\in A:\ f(x)=0\Leftrightarrow x=0\\ \forall(x,y)\in A^2:\ f(xy)=f(x)\cdot f(y)\\ \forall(x,y)\in A^2:\ f(x+y)\leq Max(f(x);f(y))\end{cases}$$

نضع : $F=\{x\in A\mid f(x)\leq 1\}$ و $U=\{x\in A\mid f(x)<1\}$

أ- بين أن $(F;+,\times)$ حلقة تبادلية .

ب- بين أن $\forall(x,y)\in U^2:\quad x-y\in U$

__الجواب :__ 1) ليكن I مثالي لـ A لنبين أن : $1_A\in I \Leftrightarrow I=A$

($\Rightarrow$) نفترض أن $1_A\in I$. ولنبين أن $I=A$.

لدينا : $I\subset A$ يكفي أن نبين أن : $A\subset I$

ليكن x من A لدينا : $x = 1_A . x$

وبما أن $1_A \in I$ و $x \in A$ فإن $x \in I$ (لأن: I مثالي)

إذن : $A \subset I$

وبالتالي : $I = A$

($\Leftarrow$) بما أن $I = A$ فإن : $1_A \in I$.

ع) أ- لنبين أن $(F, +, \times)$ حلقة .

لنبين أن $(F, +)$ زمرة جزئية من $(A, +)$ و F جزء مستقر بالنسبة للضرب $\times$.

لدينا : $f(0_A) = 0 \leq 1$ ومنه : $0_A \in F$ إذن : $F \neq \emptyset$

ليكن x و y من F لدينا : $f(x) \leq 1$ و $f(y) \leq 1$

ومنه : $f(x-y) = f(x+(-y)) \leq Max(f(x) ; f(-y))$

ولدينا : $f(-y) = f(-1_A . y) = f(-1_A) f(y)$

$f(1_A) = f(-1_A \times -1_A) = f(-1_A) f(-1_A)$

ولدينا : $f(1_A) = f(1_A \times 1_A) = f(1_A) f(1_A)$

أي $f(1_A)(1_A - f(1_A)) = 0_A$

$f(1_A) = 0_A$ أو $f(1_A) = 1_A$

بما أن : $1_A \neq 0_A$ فإن : $f(1_A) \neq 0_A$

ومنه : $f(-1_A) f(-1_A) = 1_A$

$f^2(-1_A) - 1_A = 0_A \Leftrightarrow f(-1_A) = 1_A$ أو $f(-1_A) = -1_A$

وبالتالي : $f(x-y) \leq max(f(x) ; f(-y))$

لدينا : $f(x) \leq 1$ و $f(-y) = f(-1_A) f(y) \leq 1$

ومنه : $Max(f(x), f(-y)) \leq 1$

إذن : $f(x-y) \leq 1$

ومنه : $x - y \in F$

وبالتالي $(F, +)$ زمرة جزئية من $(A, +)$

لنبين أن F جزء مستقر بالنسبة للقانون $\times$.

ليكن x و y من F لدينا : $f(xy)=f(x)f(y)$

بما أن: $0\leq f(x)\leq 1$ و $0\leq f(y)\leq 1$ فإن : $f(x)f(y)\leq 1$

ومنه : $xy\in F$

بما أن $\times$ تجميعي في A وبالخصوص على F (لأن: $F\subset A$)

- لدينا $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ (لأن F جزء مستقر في A)

- لدينا $\times$ تبادلي في A فإنه تبادلي في F .

وبالتالي $(F,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية

ب - لنبين أن $\mho$ مثالي من F ؛ لهذا الغرض نبين أن :

$*$ $\mho\neq\emptyset$ $**$ $x-y\in\mho$ $\forall(x,y)\in\mho^2$

$***$ $ax\in\mho$: $\forall(x,a)\in\mho\times F$ (لأن $\times$ تبادلي في F)

$*$ لدينا : $f(0_A)=0<1$ إذن: $0_A\in\mho$

ومنه : $\mho\neq\emptyset$.

$**$ ليكن x و y من $\mho$ لدينا : $f(x-y)=f(x+(-y))$

$\leq\max(f(x),f(-y))$

بما أن: $f(-1_A)=1$ و $f(y)<1$ فإن: $f(-y)<1$

ولدينا : $f(x)<1$

إذن : $f(x-y)\leq\max(f(x),f(-y))<1$

ومنه : $x-y\in\mho$

9 ليكن $(A,+,\times)$ حلقة بحيث : $\forall x\in A \quad x^2=x$

"هذه الحلقة تسمى حلقة بول Anneau de Boole"

1) أحسب : $(x+x)^2$

2) استنتج أن : $x+x=0_A$

3) ليكن x و y عنصران من A :

أ- أحسب $(x+y)^2$.

ب- استنتج أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية .

ج- استنتج قيمة $xy(x+y)$

4) نفترض أن : $x\neq 0_A$ و $y\neq 0_A$ و $x\neq y$

بين أن : أ- $x+y\neq 0_A$

ب- $x+y\neq x$

ج- $x+y\neq y$

5) حدد جدول الجمع بالنسبة للعناصر 0 ؛ x ؛ y ؛ $x+y$.

الجواب : 1) لديناً لكل x من A : $(x+x)^2=(x+x)(x+x)$

$$=xx+xx+xx+xx$$

$$=x^2+x^2+x^2+x^2$$

$$=x+x+x+x \qquad (\text{لأن: } x^2=x)$$

2) لدينا: $(x+x)^2=x+x$ و $(x+x)^2=x+x+x+x$

ومنه : $x+x+x+x=x+x$

إذن : $x+x=0_A$

3) ليكن x و y من A لدينا:

أ- $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2$
$=x+xy+yx+y$ (لأن: $x^2=x$)

ب- لدينا: $(x+y)^2=x+xy+yx+y$ و $(x+y)^2=x+y$

إذن : $x+xy+yx+y=x+y$

$x+xy+yx+y=x+y$

ومنه : $xy+yx=0_A$

وبما أن : $xy+xy=0_A$ فإن : $xy+yx=xy+xy$

ومنه : $xy = yx$

وبالتالي : $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية .

ج - ليكن x و y من A لدينا :

$$xy(x+y) = xyx + xy^2 = xxy + xy^2 = x^2y + xy^2 = xy + xy$$

وبما أن : $xy + xy = 0_A$ فإن : $xy(x+y) = 0_A$

4) ليكن x و y من A بحيث : $x \neq 0_A$ و $y \neq 0_A$ و $x \neq y$

أ- نفترض أن : $x+y = 0_A$ ، وبما أن : $x+x = 0_A$

فإن : $x+y = x+x$ أي : $y = x$ تناقض

مع كون $x \neq y$ وبالتالي : $x+y \neq 0_A$

ب- نفترض أن : $x+y = x$ إذن : $y = 0_A$ تناقض مع كون

$y \neq 0_A$ وبالتالي : $x+y \neq x$.

ج- نفترض أن : $x+y = y$ إذن : $x = 0_A$ تناقض

ومنه : $x+y \neq y$.

5) الحلقة A تقبل أربعة عناصر : 0_A ، x ، y ، $x+y$

لدينا : $x + x = 0_A$ و $x + 0_A = 0_A + x = x$: $\forall x \in A$

$+$	0	x	y	$x+y$
0	0	x	y	$x+y$
x	x	0	$x+y$	y
y	y	$x+y$	0	x
$x+y$	$x+y$	y	x	0

10 لتكن $(A,+,\times)$ حلقة وليكن f تشاكل شمولي من $(A,+,\times)$ نحو $(A,+,\times)$ بحيث : $f(x) = x^2$: $\forall x \in A$

بين أن : $xy = xy$: $\forall (x,y) \in A^2$

الجواب : ليكن x و y من A ، بما أن f شمولي فإن :

$\exists (u,v) \in A^2$: $x = u^2$ و $y = v^2$

إذن : $xy = u^2.v^2$.

وبما أن f تشاكل فإن : $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$f(uv) = f(u)f(v)$

إذن : $(u+v)^2 = u^2 + v^2$ و $(uv)^2 = u^2v^2$

أي : $u^2 + uv + vu + v^2 = u^2 + v^2$ و $(uv)^2 = u^2v^2$

ومنه : $uv + vu = 0_A$ و $(uv)^2 = u^2v^2$

$vu = -uv$ و $(uv)^2 = xy$

ومنه : $(uv)^2 = (vu)^2$

إذن : $xy = (vu)^2 = v^2u^2 = yx$

أي : $xy = yx$

وبالتالي : $\forall (x,y) \in A^2 : \quad xy = yx$

11 لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة غير تبادلية .

نعرف القانون $*$ المعرف على A بمايلي :

$\forall (x,y) \in A^2 : \quad x*y = xy - yx$

1) بين أن القانون $*$ غير تجميعي و لا يقبل عنصر محايد .

2) بين أن : $\forall (x,y) \in A^2 : \quad x*y = -y*x$

وأن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$.

3) بين أن : $\forall (x,y,z) \in A^2 : \ x*(y*z) = (x*y)*z - (x*z)*y \quad (1)$

واستنتج قيمة التعبير التالي :

$S = x*(y*z) + y*(z*x) + z*(x*y)$

الجواب : 1) ليكن x و y و z من A لدينا :

$(x*y)*z = (xy-yx)*z = (xy-yx)z - z(xy-yx)$

$= xyz - yxz - zxy + zyx$

$x*(y*z) = x*(yz-zy) = x(yz-zy) - (yz-zy)x$

$= xyz - xzy - yzx + zyx$

بما أن $(A,+,\cdot)$ حلقة غير تبادلية فإن : $(x*y)*z \neq x*(y*z)$

ومنه: * قانون غير تجميعي .

إذا كان e عنصر محايد للقانون * فإن: $0 = ee - ee =$

إذن لكل x من A لدينا: $x*e = 0$ و $x*e \neq x$

ومنه القانون * لا يقبل عنصر محايد .

2) - ليكن x و y من A لدينا: $x*y = xy - yx = -(yx - xy)$

ومنه: $x*y = -y*x$

- ليكن x و y و z من A لدينا:

$$x*(y+z) = x(y+z) + (y+z)x = (xy - yx) + (xz - zx)$$

إذن: $x*(y+z) = x*y + x*z$

$$(y+z)*x = -x*(y+z) = -x*y - x*z = y*x + z*x$$

ومنه: القانون * توزيعي بالنسبة القانون + .

3) ليكن x و y و z من A لدينا:

$$x*(y*z) = xyz - xzy - yzx + zyx$$

$$(x*y)*z = xyz - yxz - zxy + zyx$$

$$(x*z)*y = xzy - zxy - yxz + yzx$$

إذن: $(x*y)*z - (x*z)*y = xyz + zyx - xzy - yzx$

ومنه: $x*(y*z) = (x*y)*z - (x*z)*y$

حساب S :

لدينا: $x*(y*z) = -z*(x*y) + y*(x*z)$

$$= -z*(x*y) - y*(z*x)$$

ومنه: $x*(y*z) + y*(z*x) + z*(x*y) = 0$

وبالتالي: $S = 0$

12

نعتبر المجموعة : $A=\{a+\sqrt{2}b \mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$

1) بين أن إذا كان a و b من $\mathbb{Z}$ فإن : $a+\sqrt{2}b=0 \Leftrightarrow a=b=0$

2) بين أن $(A,+)$ زمرة تبادلية.

3) بين أن : أ- $(A,+,\times)$ حلقة.

ب- هل $(A,+,\times)$ جسم ؟

4) نعتبر التطبيق φ المعرف من A نحو $\mathbb{Z}$ بمايلي :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2 : \quad \varphi(a+\sqrt{2}b)=a^2-2b^2$$

بين أن : $\forall(x,y)\in A^2 : \quad \varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$

5) بين أن : $(\varphi(x))^2=1 \Leftrightarrow x$ يقبل مماثل في A بالنسبة للقانون $\times$.

6) بين أن المجموعة التي تقبل مماثل في A هي زمرة ضربية.

الجواب : 1) لنبين أن : $a+\sqrt{2}b=0 \Leftrightarrow a=b=0$: $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

$(\Rightarrow)$ نفترض أن : $a+b\sqrt{2}=0$ ومنه : $b\sqrt{2}=-a$

إذا كان $b\neq 0$ فإن : $\sqrt{2}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ وهذا تناقض مع كون $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

وبالتالي : $b=0$ ومنه $a=0$.

$(\Leftarrow)$ إذا كان : $a=b=0$ فإن : $a+\sqrt{2}b=0$

وبالتالي : $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2 : \quad a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$

2) لنبين أن $(A,+)$ زمرة تبادلية إذن يكفي أن نبين أن $(A,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$.

لدينا : $A\neq\emptyset$ لأن : $0=0+0.\sqrt{2}\in A$

ليكن x و y من A لدينا :

$$x\in A \Leftrightarrow \exists(a_1,b_1)\in\mathbb{Z}^2 : x=a_1+b_1\sqrt{2}$$
$$y\in A \Leftrightarrow \exists(a_2,b_2)\in\mathbb{Z}^2 : y=a_2+b_2\sqrt{2}$$

ومنه : $x-y=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{2}$

وبما أن : $a_1-a_2\in\mathbb{Z}$ و $b_1-b_2\in\mathbb{Z}$

فإن : $x-y\in A$

وبالتالي : $(A,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R},+)$ وبما أن $+$ تبادلي

3) أ- لنبين أن $(A,+,\times)$ حلقة .

بما أن $(A,+)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن القانون $\times$ تركيب داخلي في A و $(\mathbb{R},+,\times)$ حلقة ($A\subset\mathbb{R}$: لأن)

ليكن $x=a_1+b_1\sqrt{2}$ و $y=a_2+b_2\sqrt{2}$ عنصران من A

لدينا : $xy=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$

وبما أن : $a_1a_2+2b_1b_2\in\mathbb{Z}$ و $a_1b_2+a_2b_1\in\mathbb{Z}$

فإن : $xy\in A$

وبما أن : $\times$ تجميعي في $(\mathbb{R},\times)$ فإن $\times$ تجميعي في $(A,\times)$

وبما أن : $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $(\mathbb{R},+,\times)$ فهو كذلك داخل $(A,+,\times)$

وبالتالي $(A,+,\times)$ حلقة

ب- لدينا $(A,+,\times)$ حلقة .

يكون $(A,+,\times)$ جسم إذا كان لكل x من $A\setminus\{0\}$ مقلوب في A .

لدينا : $x\in A\setminus\{0\}\Leftrightarrow x=a+\sqrt{2}b$ و $(a,b)\neq(0,0)$ ، $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

لدينا :
$$x^{-1}=\frac{1}{a+\sqrt{2}b}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2+2b^2}$$
$$=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}$$

العددان $\frac{a}{a^2-2b^2}$ و $-\frac{b}{a^2-2b^2}$ ليسا بالضرورة عنصران من $\mathbb{Z}$

(مثلا : $x^{-1}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\notin A$ و $x=2+\sqrt{2}\neq0$)

ومنه $(A,+,\times)$ ليس جسماً .

4) نعتبر التطبيق :
$$\varphi: A\longrightarrow\mathbb{Z}$$
$$a+b\sqrt{2}\longmapsto a^2-2b^2$$

ليكن x و y من A بحيث : $x=a_1+b_1\sqrt{2}$ و $y=a_2+b_2\sqrt{2}$

مع a_1 ، a_2 ، b_1 و b_2 من $\mathbb{Z}$.

لدينا : $xy=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)\sqrt{2}$

ولدينا :
$$\varphi(xy) = (a_1a_2+2b_1b_2)^2 - 2(a_2b_1+a_1b_2)^2$$
$$\varphi(x)\varphi(y) = (a_1^2-2b_1^2)(a_2^2-2b_2^2)$$
$$= a_1^2a_2^2 + 4a_1a_2b_1b_2 + 4b_2^2b_1^2 - 2(a_2^2b_1^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_1^2b_2^2)$$
$$= a_1^2a_2^2 + 4b_1^2b_2^2 - 2a_2^2b_1^2 - 2a_1^2b_2^2$$
$$= (a_1^2-2b_1^2)(a_2^2-2b_2^2)$$

ومنه :
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

5) ليكن x من A حيث : $x = a+b\sqrt{2}$ و $(a,b)\neq(0,0)$ و $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$

لدينا : x يقبل مماثل في A $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{a+b\sqrt{2}} \in A$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2} \in A$$

$$\left(\frac{a}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Z} \text{ و } \frac{-b}{a^2-2b^2}\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow |a^2-2b^2| = 1$$

$$\Leftrightarrow |\varphi(x)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi^2(x) = 1$$

6) نرمز بـ U لمجموعة الأعداد التي تقبل مماثل في A .

$$U = \{a+b\sqrt{2} \mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2 \text{ و } |a^2-2b^2| = 1\}$$

لنبين أن $(U,\times)$ زمرة ، يكفي أن يبين أن : $(U,\times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*,\times)$.

لدينا : $U\neq\phi$ لأن $1 = 1+0\sqrt{2}\in U$ $(|1^2-2.0^2|=1)$

ليكن x و y من U لدينا :

$$\begin{cases} x = a_1+b_1\sqrt{2} \\ |a_1^2-2b_1^2| = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = a_2+b_2\sqrt{2} \\ |a_2^2-2b_2^2| = 1 \end{cases}$$

نعلم أن : $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

وبما أن : $|\varphi(x)| = 1 \Leftrightarrow |a_1^2-2b_1^2| = 1$

$|\varphi(y)| = 1 \Leftrightarrow |a_2^2-2b_2^2| = 1$

ومنه : $|\varphi(xy)| = 1$ أي : xy يقبل مقلوب في A

إذن : $xy\in A$.

لنبين أن $x^{-1} \in A$

لدينا : $x = a + b\sqrt{2}$ و $|\varphi(x)| = 1$

و $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$

نضع : $A = \frac{a}{a^2 - 2b^2}$ و $B = \frac{-b}{a^2 - 2b^2}$

لدينا : $|A^2 - 2B^2| = \left| \frac{a^2}{(a^2 - 2b^2)} - 2 \cdot \frac{b^2}{(a^2 - 2b^2)^2} \right|$

$$= \left| \frac{a^2}{(\varphi(x))^2} - 2 \frac{b^2}{(\varphi(x))^2} \right|$$

$$= |a^2 - 2b^2| \quad (\text{لأن : } |\varphi(x)| = 1)$$

$$= |\varphi(x)| = 1$$

إذن : $\frac{1}{x} \in \mho$

و بالتالي $(\mho, \times)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{R}^*, \times)$

ومنه : $(\mho, \times)$ زمرة .

13 نعتبر المجموعة : $\mathbb{K} = \left\{ M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -3\beta & \alpha \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1) بين أن $(\mathbb{K}, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدية .

2) بين أن $(\mathbb{K}, +, \times)$ جسم .

3) ليكن $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

أ ـ بين أن : $J \in \mathbb{K}$

ب ـ أحسب : J^n $(n \in \mathbb{N}^*)$

<u>الجواب :</u> 1) يكفي أن نبين أن $(\mathbb{K}, +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$

و أن $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{K}$.

لدينا : $\mathbb{K} \neq \emptyset$ لأن : $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$

لدينا : $M_1 \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 : M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -3\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$

$M_2 \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \exists (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 : M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -3\beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}$

ومنه : $M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & \beta_1 - \beta_2 \\ -3(\beta_1 - \beta_2) & \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$

ومنه : $(\mathbb{K},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$

$$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -3\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -3\beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 - 3\beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 \\ -3\beta_1\alpha_2 - 3\alpha_1\beta_2 & -3\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{pmatrix}$$

نضع : $\alpha = \alpha_1\alpha_2 - 3\beta_1\beta_2$ و $\beta = \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2$

إذن : $M_2 \times M_1 = M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -3\beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$

ومنه : $(\mathbb{K},+)$ جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

وبما أن $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة لـ $+$ في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ فإنه كذلك في $\mathbb{K}$ ؛ وبالتالي $(\mathbb{K},+,\times)$ حلقة تبادلية.

2) لنبين أن $(\mathbb{K},+,\times)$ جسم

بما أن : $(\mathbb{K},+,\times)$ حلقة يكفي أن نبين أنه إذا كان : $M \in \mathbb{K}$ و $M \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإن M له مقلوب في $\mathbb{K}$.

لدينا : $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -3\beta & \alpha \end{pmatrix}$ حيث : $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$

بما أن : $\det M = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -3\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 3\beta^2 \neq 0$ (لأن : $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$)

فإن M له مقلوب في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$ هو :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\det M} & -\frac{\beta}{\det M} \\ \frac{3\beta}{\det M} & \frac{\alpha}{\det M} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

ومنه M يقبل مقلوب في $(\mathbb{K},\times)$

وبالتالي : $(\mathbb{K},+,\times)$ جسم.

3) أ- لدينا : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$ بأخذ : $\alpha = 0$ و $\beta = 1$

ب- لدينا : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

إذن : $J^2 = -3I$ مع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ومنه : $J^{2n} = (-3I)^n$

أي : $J^{2n} = (-3)^n . I$

$J^{2n+1} = (-3)^n . J$

وبالتالي : $\begin{cases} J^{2n} = (-3)^n . I \\ J^{2n+1} = (-3)^n . J \end{cases}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

14

نعتبر المجموعة : $A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} / (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) بين أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2) هل $(A,+,\times)$ جسم ؟

3) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* : \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^n=\alpha^n I+n\alpha^{n-1}\beta J$

مع $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

الجواب : 1) *لنبين أن $(A,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$

لدينا : $A\neq\emptyset$ لأن $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in A$ $(\alpha=1;\beta=0)$

لتكن M_1 و M_2 من A حيث : $M_2=\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}$ و $M_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix}$

ومنه : $M_1-M_2=\begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_2 & \beta_1-\beta_2\\ 0 & \alpha_1-\alpha_2\end{pmatrix}\in A$

إذن $(A,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$

وبالتالي $(A,+)$ زمرة تبادلية (لأن + تبادلي)

** لنبين أن $\times$ قانون تركيب داخلي في A.

ليكن M_1 و M_2 من A حيث : $M_2=\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}$ و $M_1=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix}$

لدينا : $M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ 0 & \alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2\\ 0 & \alpha_2\alpha_1\end{pmatrix}$

نضع : $\alpha=\alpha_1\alpha_2$ و $\beta=\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2$ نحصل على : $M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\in A$

ومنه $\times$ قانون تركيب داخلي في A.

وبما أن $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة لـ + في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$

فإنه كذلك في $(A,+,\times)$ (لأن : $A\subset\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$)

وبالتالي : $(A,+,\times)$ حلقة.

وبما أن : $M_1\times M_2=M_2\times M_1$ و $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in A$

فإن : $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية.

3) لدينا : $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$=\alpha\cdot I+\beta\cdot J$

بما أن : $J^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $I\times J=J\times I=J$

فإن : $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^n=(\alpha\cdot I+\beta\cdot J)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\alpha I)^{n-k}(\beta J)^k$

$=C_n^0\alpha^n\cdot I+C_n^1\alpha^{n-1}\beta J$ (لأن : $k\geq 2 : J^k=0$)

ومنه : $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^n=\alpha^n\cdot I+n\alpha^{n-1}\beta J$

15

نضع : $M(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha+\beta & \alpha-\beta\\ \alpha-\beta & \alpha+\beta\end{pmatrix}$ و $L=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ ، $J=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة E المعرفة بمايلي :

$$E=\{M(\alpha,\beta)\ \mid (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$$

1) بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية .

2) بين أن E مستقر بالنسبة للقانون الضرب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

3) استنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية .

4) هل الحلقة $(E,+,\times)$ كاملة ؟

5) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $(M(\alpha,\beta))^n=2^{n-1}\cdot(\alpha^n\cdot L+\beta^n\cdot J)$

<u>الجواب :</u> 1) لنبين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية ، لهذا يكفي أن نبين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من الزمرة $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

لدينا : $E\neq\phi$ لأن : $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in E$ $(\alpha=\beta=0)$

ليكن M_1 و M_2 من E حيث :

$M_1=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_1-\beta_1\\ \alpha_1-\beta_1 & \alpha_1+\beta_1\end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix}\alpha_2+\beta_2 & \alpha_2-\beta_2\\ \alpha_2-\beta_2 & \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix}$ ، $(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\in\mathbb{R}^4$

لدينا :

$$M_1\times M_2=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1-\alpha_2-\beta_2 & \alpha_1-\beta_1-\alpha_2+\beta_2\\ \alpha_1-\beta-\alpha_2+\beta_2 & \alpha_1+\beta_1-\alpha_2-\beta_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2) & (\alpha_1-\alpha_2)-(\beta_1-\beta_2)\\ (\alpha_1-\alpha_2)-(\beta_1-\beta_2) & (\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\end{pmatrix}\in E$$

ومنه $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

بما أن + تبادلي في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$ فإن $(E,+)$ زمرة تبادلية .

2) ليكن $M_1=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1 & \alpha_1-\beta_1\\ \alpha_1-\beta_1 & \alpha_1+\beta_1\end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix}\alpha_2+\beta_2 & \alpha_2-\beta_2\\ \alpha_2-\beta_2 & \alpha_2+\beta_2\end{pmatrix}$ من E

ومنه :

$$M_1=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta_1\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\alpha_1 L+\beta_1 J$$

$$M_2=\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\beta_2\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\alpha_2\cdot L+\beta_2\cdot J$$

ومنه :

$$M_1\cdot M_2=(\alpha_1\cdot L+\beta_1\cdot J)(\alpha_2\cdot L+\beta_2\cdot J)$$

$$=\alpha_1\alpha_2L^2+\alpha_1\beta_2 L\times J+\beta_1\alpha_2 J\times L+\beta_1\beta_2 L^2$$

لدينا ،

$$L^2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=2L$$

$$J^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=2J$$

$$L\times J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$J\times L=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

ومنه : $M_1 \times M_2 = 2\alpha_1\alpha_2 . L + 2\beta_1\beta_2 . J \in E$

إذن : E جزء مستقر بالنسبة لـ $\times$ في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

3) لدينا $(E, +)$ زمرة تبادلية و بما أن $\times$ قانون داخلي في E و $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة لـ $+$ في $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ فإنه كذلك في $(E, +, \times)$.

وبما أن $I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E$ هو العنصر المحايد في $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ فإن I هو كذلك العنصر المحايد في $(E, \times)$

وبالتالي $(E, +, \times)$ حلقة واحدية.

4) لدينا $(E, +, \times)$ حلقة غير كاملة لأن :

$$J \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad L \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و $L \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) لنبين بالترجع : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad M^n(\alpha, \beta) = 2^{n-1} . (\alpha^n . L + \beta^n . J)$

من أجل $n = 1$ لدينا : $M^1(\alpha, \beta) = 2^{1-1} . (\alpha^1 . L + \beta^1 . J)$ صحيحة.

نفترض أن : $M^n(\alpha, \beta) = 2^{n-1} . (\alpha^n . L + \beta^n . J)$

ونبين أن : $M^{n+1}(\alpha, \beta) = 2^n . (\alpha^{n+1} . L + \beta^{n+1} . J)$

لدينا :
$$\begin{aligned} M^{n+1}(\alpha, \beta) &= M^n(\alpha, \beta) \times M(\alpha, \beta) \\ &= 2^{n-1} (\alpha^n L + \beta^n J)(\alpha . L + \beta . J) \\ &= 2^{n-1} (\alpha^{n+1} L^2 + \alpha^n \beta L \times J + \beta^n \alpha J \times L + \beta^{n+1} . J^2) \end{aligned}$$

بما أن : $J^2 = 2J$ و $L^2 = 2L$ و $L \times J = J \times L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

فإن : $M^{n+1}(\alpha, \beta) = 2^n (\alpha^{n+1} . L + \beta^{n+1} . J)$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} : M^n(\alpha, \beta) = 2^{n-1} (\alpha^n . L + \beta^n . J)$

16

لتكن $(G,*)$ زمرة و H_1 و H_2 زمرتين جزئيتين لـ G.

1) بين أن $H_1 \cap H_2$ زمرة جزئية لـ G.

2) ليكن f تشاكل من الزمرة $(G,*)$ نحو الزمرة (G',T).

نفترض أن e هو العنصر المحايد للقانون $*$ في G و e' هو العنصر المحايد للقانون T في G'.

نضع: $Ker f = \{x \in G \,/\, f(x) = e'\}$ و $Im f = \{f(x) \,/\, x \in G\}$

أ- بين أن $Ker f$ زمرة جزئية لـ G و $Im f$ زمرة جزئية لـ G'

ب- بين أن: $(\forall x \in Ker f)(\forall y \in Ker f) \quad x*y*x^{-1} \in Ker f$

ج- بين أن: f تباينى $\Leftrightarrow$ $Ker f = \{e\}$

الجواب: 1) لدينا: $H_1 \cap H_2 \neq \phi$ لأن: $e \in H_1 \cap H_2$

ليكن x و y من $H_1 \cap H_2$

لدينا:

$$x \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow x \in H_1 \text{ و } x \in H_2$$

$$y \in H_1 \cap H_2 \Leftrightarrow y \in H_1 \text{ و } y \in H_2$$

بما أن H_1 و H_2 زمرتين جزئيتين لـ G فإن:

$$x*y^{-1} \in H_1 \quad \text{و} \quad x*y^{-1} \in H_2$$

إذن: $x*y^{-1} \in H_1 \cap H_2$

وبالتالي $H_1 \cap H_2$ زمرة جزئية لـ G.

2) أ- لدينا: $f(e) = e'$ لأن f تشاكل من $(G,*)$ نحو (G',T)

إذن: $e \in Ker f$ ومنه: $Ker f \neq \phi$

ليكن x و y من $Ker f$ لدينا: $f(y) = e'$ و $f(x) = e'$

بما أن f تشاكل فإن: $f(x*y^{-1}) = f(x) \, T \, f(y^{-1})$

$$= f(x) \, T \, (f(y))^{-1} = e' \, T \, e' = e$$

ومنه: $x*y^{-1} \in Ker f$

وبالتالي $Ker f$ زمرة جزئية لـ G

لدينا $Im f \neq \phi$ لأن: $f(e) = e' \in Im f$

ليكن y_1 و y_2 من $Im f$ لدينا:

$$y_1 \in Im f \Leftrightarrow \exists x_1 \in G : y_1 = f(x_1)$$

$$y_2 \in Im f \Leftrightarrow \exists x_2 \in G : y_2 = f(x_2)$$

إذن: $$y_1 T y_2^{-1} = f(x_1) T (f(x_2))^{-1} = f(x_1) T f(x_2^{-1})$$

$$y_1 T y_2^{-1} = f(x_1 * x_2^{-1})$$

بما أن: $x_1 * x_2^{-1} \in G$ ، فإن $y_1 T y_2^{-1} \in Im f$

وبالتالي $Im f$ زمرة جزئية لـ G'.

ب- ليكن x و y من $Ker f$ لدينا:

$$f(x*y*x^{-1}) = f(x) T f(y) T f(x^{-1})$$

$$= f(x) T f(y) T (f(x))^{-1}$$

بما أن: $f(x) = e'$ و $f(y) = e'$ فإن:

$$f(x*y*x^{-1}) = e' T e' T (e')^{-1} = e' T e' T e' = e'$$

ومنه: $x*y*x^{-1} \in Ker f$

ج- لنبين أن $Ker f = \{e'\} \Leftrightarrow f$ تباينى

($\Rightarrow$) نفترض أن f تباينى ولنبين أن $Ker f = \{e'\}$

لدينا: $\{e\} \subset Ker f$ (لأن: $f(e) = e'$)

ليكن x من $Ker f$ لدينا: $f(x) = e' = f(e)$

بما أن f تباينى فإن: $x = e$

ومنه: $Ker f \subset \{e\}$

وبالتالي: $Ker f = \{e\}$

($\Leftarrow$) نفترض أن: $Ker f = \{e\}$. لنبين أن f تباينى.

ليكن x و y من G بحيث: $f(x) = f(y)$

إذن: $f(x) T (f(y))^{-1} = e'$ أي: $f(x*y^{-1}) = e'$

وبما أن: $Ker f = \{e\}$ فإن: $x*y^{-1} = e$

: $x = y$ ومنه f تباينى.

وبالتالي: f تباينى $\Leftrightarrow Ker f = \{e\}$

17 نعتبر المجموعة : $\mathbb{M}=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1) بين أن $(\mathbb{M},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية ، هل هي كاملة ؟

2) حدد شرط لازم وكافي لكي يقبل $M(a,b)$ مقلوب في $\mathbb{M}$

3) استنتج مجموعة عناصر $\mathbb{M}$ التي تقبل مقلوب في $\mathbb{M}$

4) نضع : $I(p)=\{M(a,b)\in\mathbb{M} \mid p / a+b\}$ $(p\in\mathbb{N}^*)$

بين أن : $(I(p),+,\times)$ حلقة تبادلية .

<u>الجواب</u> : 1) - لنبين أن : $(\mathbb{M},+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$

لدينا : $\mathbb{M}\neq\emptyset$ لأن : $M(0,0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\in\mathbb{M}$

ليكن $M_1=M(a_1,b_1)$ و $M_2=(a_2,b_2)$ من $\mathbb{M}$

حيث : $(a_1,a_2,b_1,b_2)\in\mathbb{Z}^4$ لدينا :

$$M_1-M_2=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\b_1&a_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_2&b_2\\b_2&a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-a_2&b_1-b_2\\b_1-b_2&a_1-a_2\end{pmatrix}$$

إذن : $M_1-M_2=M(a_1-a_2,b_1-b_2)\in\mathbb{M}$ (لأن : $\begin{cases}a_1-a_2\in\mathbb{Z}\\ b_1-b_2\in\mathbb{Z}\end{cases}$)

ومنه : $(\mathbb{M},+)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

إذن : $(\mathbb{M},+)$ زمرة .

- لنبين أن القانون $\times$ تركيب داخلي في $\mathbb{M}$ لدينا :

$$M_1\times M_2=M(a_1,b_1)\times M(a_2,b_2)=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\b_1&a_1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_2&b_2\\b_2&a_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1a_2+b_1b_2 & a_1a_2+b_1b_2\\ b_1a_2+a_1b_2 & b_1a_2+a_1b_2\end{pmatrix}$$

$$=M(a_1a_2+b_1b_2\,;\,b_1a_2+a_1b_2)\in\mathbb{M}$$

لأن : $a_1a_2+b_1b_2\in\mathbb{Z}$ و $b_1a_2+a_1b_2\in\mathbb{Z}$

ومنه القانون $\times$ تركيب داخلي في $\mathbb{M}$.

بما أن $\times$ تجميعي وتوزيعي بالنسبة لـ $+$ في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ فإنه

كذلك في $\mathbb{M}$ (لأن $\mathbb{M}$ جزء مستقر بالنسبة لـ $\times$ في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$)

ولدينا : $M_1\times M_2=M_2\times M_1$ و $I=M(1,0)\in\mathbb{M}$ العنصر المحايد لـ $\times$

وبالتالي $(\mathbb{M},+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

لدينا: $M_1 = M(1,-1) \neq \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $M_2 = M(1,1) \neq \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

و $M_1 \times M_2 = M(0,0) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

ومنه: $(\mathbb{M},+,\times)$ حلقة غير كاملة.

2) ليكن $M=M(a,b)$ من $\mathbb{M}$ له مقلوب في $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

يعني أن: $\det M \neq 0$ و $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\det M} & -\frac{b}{\det M} \\ \frac{-b}{\det M} & \frac{a}{\det M}\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $a^2-b^2\neq 0$ و $M^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{a}{a^2-b^2} & \frac{-b}{a^2-b^2}\\ \frac{-b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2}\end{pmatrix}$

إذن M يقبل مقلوب في $\mathbb{M}$ إذا وفقط إذا كان: $|a^2-b^2|=1$

أي: $a^2-b^2\in\{-1,1\}$ أي: $|\det M| = 1$

3) لتكن U مجموعة عناصر $\mathbb{M}$ التي تقبل مقلوب في $\mathbb{M}$.

لدينا: $M(a,b)\in U \Leftrightarrow |\det(M(a,b))|=1$

$\Leftrightarrow a^2-b^2=1$ أو $a^2-b^2=-1$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)=1$ أو $(a+b)(a-b)=-1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=1\\a-b=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a+b=-1\\a-b=-1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a+b=-1\\a-b=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a+b=1\\a-b=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=0\\b=-1\end{cases}$

وبالتالي: $U=\{M(1,0); M(-1,0); M(0,1); (0,-1)\}$

4) لنبين أن $(I(p);+;\times)$ حلقة تبادلية.

- لنبين أن $(I(p);+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M};+)$

لدينا: $I(p)\neq\emptyset$ (لأن: $M(0,0)\in I(p)$ ؛ $p\mid 0+0=0$)

ليكن $M_1=M(a_1,b_1)$ و $M_2=M(a_2,b_2)$ من $I(p)$

لدينا: $p\mid a_1+b_1$ و $p\mid a_2+b_2$

ومنه: $p\mid (a_1+b_1)-(a_2+b_2)$ أي: $p\mid(a_1-a_2)+(b_1-b_2)$

: $M_1-M_2 = M(a_1-a_2, b_1-b_2)$

ومنه: $M_1-M_2\in I(p)$ إذن: $(I(p);+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M},+)$

- لنبين أن $\times$ قانون تركيب داخلي في $I(p)$

لدينا : $M_1 = M(a_1, b_1) \in I(p) \Leftrightarrow p \mid a_1 + b_1$

$M_2 = M(a_2, b_2) \in I(p) \Leftrightarrow p \mid a_2 + b_2$

ولدينا : $M_1 \times M_2 = M(a_1a_2 + b_1b_2 \,;\, a_1b_2 + b_1a_2)$

لدينا : $p \mid a_1 + b_1 \Rightarrow p \mid a_2(a_1 + b_1) = a_1a_2 + a_2b_1$

$p \mid a_2 + b_2 \Rightarrow p \mid b_1(a_2 + b_2) = b_1a_2 + b_1b_2$

إذن : $p \mid a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2 + b_1a_2$

ومنه : $M_1 \times M_2 \in I(p)$

وبما أن $\times$ تجميعي وتبادلي وتوزيعي بالنسبة لـ $+$ في $(\mathbb{M}, +, \times)$

فإنه كذلك في $(I(p); +, \times)$

وبالتالي $(I(p); +; \times)$ حلقة تبادلية .

18 نعتبر المصفوفات التالية :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) بين أن A يقبل مقلوب ثم حدد هذا المقلوب .

2) حدد مصفوفة X التي تحقق $AX = B$.

3) أحسب C^2 ، C^3 ، C^4 .

4) نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ بمايلي :

$$f(x) = \frac{x^2}{2}.C^2 + x.C + I \quad : \forall x \in \mathbb{R}$$

حيث : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

أ- أحسب : $f(x+y)$ و $f(x)f(y)$.

ب- استنتج أن المصفوفة $\frac{x^2}{2}.C^2 + x.C + I$ تقبل مقلوب ؛ حدده.

<u>الجواب</u> : 1) A يقبل مقلوب في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \times) \Leftrightarrow \det A \neq 0$

لدينا : $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= 2(6-4) - (-3+1) + 2(4-2) = 10 \neq 0$

ومنه A يقبل مقلوب .

لنحدد A^{-1} : لهذا الغرض نحدد المصفوفة $Com(A)$ المعرفة كمايلي :

$$com(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

ومنه :
$$com(A) = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

ثم نحدد المصفوفة $t(com(A))$ المعرفة كمايلي :

$$t(com(A)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -11 & 4 & 9 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$ (الأفقي يصبح عموديًا والعمودي يصبح أفقي)

ومنه :
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, t(com(A))$$

وبالتالي :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{11}{10} & \frac{2}{5} & \frac{9}{10} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2) لنحدد مصفوفة X التي تحقق : $AX = B$

لدينا :
$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{11}{10} & \frac{2}{5} & \frac{9}{10} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنه :
$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) لنحسب C^2 ، C^3 ، C^4

لدينا :
$$C^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix} ; \quad C^3 = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad C^4 = C^3 \times C = 0$$

4) أ- ليكن x و y من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f(x)f(y) = \left(I + x.C + \frac{x^2}{2}.C^2\right)\left(I + y.C + \frac{y^2}{2}.C^2\right)$$
$$= I + (x+y)C + \left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}\right).C^2 + \frac{x^2y + xy^2}{2}.C^3 + \frac{x^2y^2}{2}C^4$$
$$f(x)f(y) = I + (x+y)C + \frac{(x+y)^2}{2}.C^2$$ (لأن : $C^3 = C^4 = 0$)

ومنه : $f(x)f(y)=f(x+y)$

ب - لدينا : $f(0)=I$ ولكل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)f(-x)=f(0)=I$$

إذن المصفوفة $f(x)$ تقبل مقلوبًا في $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ وهو $f(-x)$

أي : $\left(I+x.C+\frac{x^2}{2}.C^2\right)^{-1}=I-x.C+\frac{x^2}{2}.C^2$

19 نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

1) تحقق من أن : $(A-I)(A+3I)=0$ حيث : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

2) استنتج أن A قابلة للقلب وحدد A^{-1} .

3) أحسب A^2 بدلالة A و I .

4) بين أن : $A^n=u_n.A+v_n.I$: $\forall n\in\mathbb{N}$ $(A^0=I)$

حيث : (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بمايلي :

$$\begin{cases}u_0=0 \text{ و } v_0=1\\ u_{n+1}=-2u_n+v_n \text{ و } v_{n+1}=3u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

5) نضع : $w_n=u_n+v_n$ ، أحسب w_{n+1} بدلالة w_n ثم استنتج w_n

6) استنتج u_{n+1} بدلالة u_n .

7) حدد u_n بدلالة n ، ثم v_n بدلالة n.

8) أحسب A^n بدلالة n .

الجواب : 1) لدينا : $A-I=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ و $A+3I=\begin{pmatrix}5&-2&1\\2&0&2\\-1&2&3\end{pmatrix}$

ومنه : $(A-I)(A+3I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$

2) لدينا : $(A-I)(A+3I)=0 \Leftrightarrow A^2+3A-A-3I=0$

$$\Leftrightarrow A^2+2A=3I$$

$$\Leftrightarrow A\left(\tfrac{1}{3}A+\tfrac{2}{3}I\right)=I$$

ومنه : A قابل للقلب و $A^{-1}=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I$

3) لدينا : $A^2+2A=3I$ ومنه : $A^2=3I-2A$

4) الاستدلال بالترجع :

من أجل $n=0$ لدينا : $A^0 = I = 0.A + 1.I$ ومنه : $u_0=0$ و $v_0=1$

نفترض أن : $A^n = u_n A + v_n . I$

لدينا : $A^{n+1} = A^n \times A = (u_n A + v_n . I)\times A$

$= u_n A^2 + v_n . A = u_n(3I - 2A) + v_n . A$

$A^{n+1} = (-2u_n + v_n).A + 3u_n . I$

ومن جهة أخرى لدينا : $A^{n+1} = u_{n+1}.A + v_{n+1} I$

و بالتالي :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ v_0 = 1 \\ u_{n+1} = -2u_n + v \ ; \ v_{n+1} = 3u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : \ w_n = u_n + v_n$

ومنه :

$w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = -2u_n + v_n + 3u_n$

$w_{n+1} = u_n + v_n = w_n$

و بالتالي (w_n) متتالية ثابتة.

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : \ w_n = w_0 = u_0 + v_0 = 1$

6) لدينا لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = -2u_n + v_n = -2u_n + (w_n - u_n)$

ومنه : $u_{n+1} = -3u_n + 1$.

7) لنحدد u_n بدلالة n.

بما أن : $u_{n+1} = -3u_n + 1$ و $\frac{1}{4} = -3\times\frac{1}{4} + 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

فإن : $u_{n+1} - \frac{1}{4} = -3\left(u_n - \frac{1}{4}\right)$

نضع : $\alpha_n = u_n - \frac{1}{4}$ إذن : $\alpha_{n+1} = -3\alpha_n$ $\quad \forall n \in \mathbb{N} :$

إذن (α_n) متتالية هندسية أساسها $q=-3$ وحدها الأول $\alpha_0 = u_0 - \frac{1}{4}$

$\alpha_0 = -\frac{1}{4}$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : \ \alpha_n = (-3)^n \alpha_0 = -\frac{1}{4}(-3)^n$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}$

ولدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n = w_n - u_n$

ومنه : $v_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(-3)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

8) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad A^n = u_n A + v_n . I$

ومنه :
$$A^n = \begin{pmatrix} 2u_n+v_n & -2u_n & u_n \\ 2u_n & -3u_n+v_n & 2u_n \\ -u_n & 2u_n & v_n \end{pmatrix}$$

حيث : $u_n = -\frac{1}{4}(-3)^n + \frac{1}{4}$ و $v_n = \frac{1}{4}(-3)^n + \frac{3}{4}$.

20

نضع : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n \end{pmatrix}$

2) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ A^n يقبل مقلوب في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ ثم تحديده.

الجواب : 1) الاستدلال بالترجع : نضع : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n = 2^n - 1$

لنبين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix}$

من أجل $n=1$ لدينا : $A^1 = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ -2a_1 & -2a_0 \end{pmatrix}$

نفترض أن : $A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix}$ ونبين أن : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ -2a_{n+1} & -2a_n \end{pmatrix}$

لدينا :
$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3a_{n+1}-2a_n & a_{n+1} \\ -6a_n+4a_{n-1} & -2a_n \end{pmatrix}$$

بما أن : $3a_{n+1} - 2a_n = 3(2^{n+1}-1) - 2(2^n-1) = 2^{n+2}-1 = a_{n+2}$

$-6a_n + 4a_{n-1} = -6(2^n-1) + 4(2^{n-1}-1) = -2(2^{n+1}-1) = -2a_{n+1}$

ومنه : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} & a_{n+1} \\ -2a_{n+1} & -2a_n \end{pmatrix}$

وبالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad A^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ -2a_n & -2a_{n-1} \end{pmatrix}$

2) لدينا : $\det(A^n) = (2^{n+1}-1)(2-2^n) - (2^n-1)(2-2^{n+1})$
$$= -2(2^n)^2 + 7.2^n - 4 = -2\left[\left(2^n - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{17}{16}\right] \neq 0 \left(\text{لأن } 2^n \neq \frac{\sqrt{17}+7}{4}\right)$$

ومنه A^n يقبل مقلوباً في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ و $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2a_{n-1}}{\det A^n} & -\frac{a_n}{\det A^n} \\ \frac{2a_n}{\det A^n} & \frac{a_{n+1}}{\det A^n} \end{pmatrix}$

21 نعتبر المجموعة: $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & t & e \\ 0 & y & f \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} / (x,y,z,t,e,f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$

1) ليكن M عنصراً من A.

حدد شرطاً لازماً وكافياً لكي تقبل M مقلوباً في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$

2) هل M^{-1} تنتمي الى A ؟

<u>الجواب:</u> 1) لتكن M من A إذن: $M = \begin{pmatrix} x & t & e \\ 0 & y & f \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$

M تقبل مقلوباً في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$ $\Leftrightarrow \det M \neq 0$

$\Leftrightarrow xyz \neq 0$

2) لنحدد M^{-1} إذا كان $M \in A$ و $xyz \neq 0$.

ليكن $X\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ و $X'\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

لدينا: $X = M^{-1} \cdot X' \Leftrightarrow M \cdot X = X'$

$$M \cdot X = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & t & e \\ 0 & y & f \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + t\beta + e\gamma = \alpha' \\ \beta y + f\gamma = \beta' \\ z\gamma = \gamma' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\beta'}{y} - \dfrac{f\gamma'}{zy} \\ \gamma = \dfrac{\gamma'}{z} \\ \alpha = \dfrac{\alpha'}{x} - \dfrac{t\beta'}{xy} + \left(\dfrac{tf}{xyz} - e\right)\gamma' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{xy} & \frac{tf}{xyz} - e \\ 0 & \frac{1}{y} & -\frac{f}{zy} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

ومنه: $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{xy} & \frac{tf}{xyz} - e \\ 0 & \frac{1}{y} & -\frac{f}{zy} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix} \in A$

22

نضع : $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1) أحسب : A^2 و A^3

2) بين أن : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) بين أن : $(A-I)^2=0$.

4) استنتج A^{-1} .

الجواب : 1) لدينا : $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

2) لنبين بالترجع أن : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

- من أجل $n=0$ لدينا : $A^0=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ صحيحة .

نفترض أن $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ونبين أن : $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2(n+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

لدينا : $A^{n+1}=A^n\times A=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2n+2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

إذن : $A^{n+1}=\begin{pmatrix}1 & 2(n+1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

وبالتالي : $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

3) لدينا : $(A-I)^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

ومنه : $(A-I)^2=0$

4) لدينا : $(A-I)^2=A^2-2A+I=0$

أي : $(2I-A)\times A=A\times(2I-A)=I$

ومنه A يقبل مقلوب هو : $A^{-1}=2I-A$.

23

نعتبر المتتاليات (u_n) و (v_n) و (w_n) المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases}u_0=1\\ v_0=2\\ w_0=3\end{cases} \text{ و } \begin{cases}u_n=u_{n-1}+v_{n-1}\\ v_n=u_{n-1}+w_{n-1}\\ w_n=w_{n-1}\end{cases} ; \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

الهدف من هذا التمرين هو تحديد u_n و v_n و w_n بدلالة n.

1) بين أن : $\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_{n-1}\\ v_{n-1}\\ w_{n-1}\end{pmatrix}$

حيث : A مصفوفة من $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ يتم تحديدها .

2) استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$: $\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\\ w_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\\ w_0\end{pmatrix}$

3) نضع : $A = I + B$ حيث: $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

أ- أحسب : B^2 و B^3.

ب- استنتج أن : $A^n = I + n.B + \frac{n(n-1)}{2}.B^2$

4) أحسب : u_n و v_n و w_n بدلالة n.

<u>الجواب :</u> 1) لدينا : $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{n-1}\\v_{n-1}\\w_{n-1}\end{pmatrix}$

ومنه : $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

إذن : $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=A.\begin{pmatrix}u_{n-1}\\v_{n-1}\\w_{n-1}\end{pmatrix}$

2) بالترجع نبين أن : $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=A^n.\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا : $\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}=A^0.\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$ حيث، $A^0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

نفترض أن : $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=A^n.\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$ و نبين أن $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix}=A^{n+1}.\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$

لدينا :
$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$$
$$=A\times A^n\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$$
$$=A^{n+1}.\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$$

و بالتالي : $\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}=A^n.\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

3) نضع: $A=I+B$.

أ-
$$B^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$B^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ب- لدينا : $A^n=(I+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k B^k$ (لأن : $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة)

$A^n=\sum_{k=0}^{2}C_n^k B^k$ (لأن : $B^k=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\forall k\geq 3$)

$$A^n=I+C_n^1.B+C_n^2B^2$$
$$A^n=I+n.B+\frac{n(n-1)}{2}.B^2$$

4) لدينا :

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}.B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ومنه :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = u_0 + n v_0 + \frac{n(n-1)}{2} w_0 \\ v_n = v_0 + n w_0 \\ w_n = w_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 1 + 2n + \frac{3}{2}(n^2 - n) \\ v_n = 2 + 3n \\ w_n = 3 \end{cases}$$

و بالتالي لكل n من $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} + 1 \\ v_n = 3n + 2 \\ w_n = 3 \end{cases}$$

24

نضع: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مع $a + d = -1$ و $ad - bc = -2$

$E = \{ xA + yI \ / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$ و $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) بين أن : $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad A \neq \lambda I$

2) بين أن : $A^2 = -A + 2I$.

3) استنتج أن : $A^{-1} \in E$.

4) بين أن $(E ; + ; \times)$ حلقة تبادلية ، هل هي كاملة ؟

5) أحسب $\det(xA + yI)$

6) أ- بين أن المعادلة : $X^2 = X \quad \forall X \in E$ ، تقبل 4 حلول وهي :

I و P و Q و $\mathbb{O}$ يتم تحديدها. حيث: $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ب- أحسب $P \times Q$. هل P و Q قابلان للقلب.

7) ليكن x و y و x' و y' عناصر من $\mathbb{R}$.

أ- أحسب بدلالة P و Q الجداء التالي: $(xP+yQ).(x'P+y'Q)$

ب- استنتج أن كل مصفوفة U من $\mathbb{E}$ قابلة للقلب فإن مقلوبها U^{-1} يبقى عنصراً من $\mathbb{E}$.

<u>الجواب :</u> 1) نفترض أن : $\exists \lambda \in \mathbb{R} : A=\lambda I$

إذن : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ، ومنه : $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

أي : $ad-bc=\lambda^2$ ، وبما أن $ad-bc=-2$

فإن : $\lambda^2=-2$ . . غير ممكن

وبالتالي : $\forall \lambda \in \mathbb{R} : A \neq \lambda . I$

2) لدينا :
$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ad+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+ad+2 & b(a+d) \\ c(a+d) & ad+d^2+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a(a+d)+2 & -b \\ -c & d(a+d)+2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -a+2 & -b \\ -c & -d+2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a+d=-1 \text{ لأن } \\ ad-bc=-2 \end{pmatrix}$$

ومنه : $A^2 = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

أي : $A^2 = -A+2.I$

3) لدينا : $A^2=-A+2.I \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^2+A)=I$

$\Leftrightarrow A.\left(\frac{1}{2}.(A+I)\right)=I$

ومنه : $A^{-1}=\frac{1}{2}.(A+I)$ و $A^{-1}\in\mathbb{E}$ نأخذ : $x=y=\frac{1}{2}$

4) لنبين أن $(\mathbb{E};+;\times)$ حلقة تبادلية .

- لدينا : $E \neq \emptyset$ لأن : $I \in \mathbb{E}$

ليكن $M_1=x_1.A+y_1.I$ و $M_2=x_2.A+y_2.I$

لدينا : $M_1-M_2=(x_1-x_2).A+(y_1-y_2).I$

$M_1-M_2=x_3.A+y_3.I \in \mathbb{E}$ $\quad (x_3=x_1-x_2 ; y_3=y_1-y_2)$

ومنه $(E;+)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(M_2(\mathbb{R});+)$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة تبادلية

لنبين أن $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{E}$.

ليكن $M_1 = x_1 A + y_1 . I$ و $M_2 = x_2 A + y_2 . I$ من $\mathbb{E}$

لدينا :

$$M_1 \times M_2 = x_1 x_2 A^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) . A + y_1 y_2 . I$$
$$= x_1 x_2 (-A + 2I) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) . A + y_1 y_2 . I$$
$$= (-x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1) . A + (2 x_1 x_2 + y_1 y_2) . I$$

ومنه : $M_1 \times M_2 \in \mathbb{E}$

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{E}$

بما أن $\mathbb{E} \subset \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ فإن $(\mathbb{E} ; + ; \times)$ حلقة .

لدينا : $I \in \mathbb{E}$ و $M_1 \times M_2 = M_2 \times M_1$

وبالتالي $(\mathbb{E} ; + ; \times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

لدينا : $A^2 + A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ إذن : $(A + \frac{1}{2} I)^2 - \frac{9}{4} . I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومنه : $(A - I) \times (A + 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

وبما أن $A \neq \lambda I$; $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ فإن : $\forall \lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda I \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذن : $A - I \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $A + 2I \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و $(A + 2I)(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

وبالتالي $(E ; + ; \times)$ حلقة غير كاملة .

5) لنحدد $\det(xA + yI)$

لدينا :

$$\det(x.A + y.I) = \begin{vmatrix} xa + y & xb \\ xc & xd + y \end{vmatrix}$$
$$= (xa + y)(xd + y) - x^2 bc = x^2 ad + xya + xyd + y^2 - x^2 bc$$
$$= x^2 (ad - bc) + xy(a + d) + y^2$$
$$= -2x^2 - xy + y^2$$

(لأن : $a + d = -1$ و $ad - bc = -2$)

6) أ- لنحل في $\mathbb{E}$ المعادلة : $X^2 = X$.

نضع : $X = x.A + y.I$

لدينا :

$$X^2 = X \iff (2xy - x^2) A + (2x^2 + y^2) I = x.A + y.I$$
$$\iff (2xy - x^2 - x) A = (y - 2x^2 - y^2) I$$

حسب السؤال 1) لدينا : $A \neq \lambda I \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ومنه : $\begin{cases} 2xy - x^2 - x = 0 \\ y - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(2y - x - 1) = 0 \\ y^2 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ أو } 2y - x - 1 = 0 \\ y^2 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ أو } x = 2y - 1 \\ y^2 - 2x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

ومنه: $X = I$ أو $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ أو $X = P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$

أو $X = Q = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I$

ب- لدينا : $PQ = (\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I)(-\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ولدينا : $P \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $Q \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومنه P و Q قاسمان للصفر وبالتالي P و Q غير قابلان للقلب .

7) أ- لدينا: $(xP + yQ)(x'P + y'Q) =$

$= xx'P^2 + xyP \times Q + yx'Q \times P + yy'Q^2$

$= xx'P^2 + yy'Q^2$ (لأن: $P \times Q = Q \times P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

لدينا: $P^2 = (\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I)^2 = \frac{1}{9}(A^2 + 4A + 4I) = \frac{1}{3}(A + 2I) = P$

$Q^2 = \frac{1}{9}(A^2 - 2A + I) = \frac{1}{3}(-A + I) = Q$

وبالتالي : $(xP + yQ)(x'P + y'Q) = xx'P + yy'Q$

ب- لتكن U مصفوفة من E : $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad U = xA + yI$

بما أن: $P = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I$ و $Q = -\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I$

فإن : $I = P + Q$ و $A = P - 2Q$

إذن : $U = x(P - 2Q) + y(P + Q) = (x + y)P + (-2x + y)Q$

ونعلم أن مما سبق : $(xP + yQ)(x'P + y'Q) = xx'P + yy'Q$

بأخذ : $yy'=1$ و $xx'=1$ أي :

$$(xP+yQ)\left(\frac{1}{x}P+\frac{1}{y}Q\right)=P+Q=I$$

ومنه : $(xP+yQ)^{-1}=\frac{1}{x}P+\frac{1}{y}Q$

حسب السؤال 5) لدينا : $\det U=\det(xA+yI)=-2x^2+xy+y^2$

U قابل للقلب في $M_2(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $\det U\neq 0 \Leftrightarrow -2x^2+xy+y^2\neq 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(-2x+y)\neq 0$

$\Leftrightarrow -2x+y\neq 0$ و $x+y\neq 0$

ومنه : $U^{-1}=\frac{1}{x+y}.P+\frac{1}{-2x+y}.Q$

وبما أن : $P\in E$ و $Q\in E$

فإن : $U^{-1}\in E$.

الفضاءات المتجهية

I - قانون تركيب خارجي : لتكن E و A مجموعتان غير فارغتين .

كل تطبيق : $f: A\times E \longrightarrow E$; $(\alpha;x) \longmapsto f(\alpha;x)$ يسمى قانوناً خارجياً على E ذو المعاملات في A ونكتب : $f(\alpha;x)=\alpha.x$

ملاحظة : نعتبر فيما يلي E مجموعة مزودة :
- بقانون داخلي "+".
- بقانون خارجي ".".
- $A=\mathbb{R}$, ونضع $x=\vec{x}$ لكل x من E.

II - فضاء متجهي حقيقي $(E;+,.)$:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & (E;+) \text{ زمرة تبادلية.} \\
2) & \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ \forall\vec{x}\in E:\ (\alpha\beta).\vec{x}=\alpha.(\beta.\vec{x}) \\
3) & (\alpha+\beta).\vec{x}=\alpha.\vec{x}+\beta.\vec{x} \\
4) & \forall\alpha\in\mathbb{R}\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2:\ \alpha.(\vec{x}+\vec{y})=\alpha.\vec{x}+\alpha.\vec{y} \\
5) & \forall\vec{x}\in E:\ 1.\vec{x}=\vec{x}
\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي .

بعض الفضاءات المتجهية الإعتيادية :

المجموعة	القانون الخارجي	البنية
$\mathcal{V}_2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$	$\alpha.(a;b)=(\alpha a;\alpha b)$	$(\mathbb{R}^2;+;.)$ فضاء متجهي
$\mathcal{V}_3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$	$\alpha.(a;b;c)=(\alpha a;\alpha b;\alpha c)$	$(\mathbb{R}^3;+;.)$ فضاء متجهي
$\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$	$\forall x\in I\quad (\alpha.f)(x)=\alpha f(x)$	$(\mathcal{F};+;.)$ فضاء متجهي
$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	$\alpha.\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha c \\ \alpha b & \alpha d \end{pmatrix}$	$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ فضاء متجهي .
$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$	$\alpha.\begin{pmatrix} a & d & j \\ b & e & i \\ c & f & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha d & \alpha j \\ \alpha b & \alpha e & \alpha i \\ \alpha c & \alpha f & \alpha k \end{pmatrix}$	$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+;.)$ فضاء متجهي .

التأليفات الخطية : لتكن $\vec{x}_1$ و $\vec{x}_2$ و ... و $\vec{x}_n$ متجهات من E .
و α_1 و α_2 و ... و α_n أعداداً حقيقية .

المتجهة : $\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$ تسمى تأليفة خطية للمتجهات $\vec{x}_i$ ذات المعاملات α_i .

- نقول أيضاً أن الأسرة $B=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ تولد $\vec{x}$.

- نقول أن الأسرة β تولد E إذا كان كل عنصر $\vec{x}$ من E مولداً بالأسرة β.

الارتباط والاستقلال الخطي : لتكن $\beta=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ أسرة من متجهات فضاء متجهي $(E,+,\cdot)$.

- نقول أن β مرتبطة خطياً أو مقيدة $\Leftrightarrow$ $\exists(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n : \begin{cases}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\neq(0,0,\dots,0)\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0}\end{cases}$

- نقول أن β مستقلة خطياً أو حرة $\Leftrightarrow$ $\forall(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i=\vec{0}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\dots=0$

خاصيات : لتكن β أسرة من متجهات الفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$

- $\beta_1\subset\beta$ و β_1 مقيدة $\Leftarrow$ β مقيدة.
- $\beta_1\subset\beta$ و β حرة $\Leftarrow$ β_1 حرة.
- β حرة $\Leftarrow$ جميع عناصر β غير منعدمة ومختلفة مثنى مثنى.

أساسات فضاء متجهي $(E,+,\cdot)$: لتكن $\beta=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ أسرة من E

β أساس لـ E $\Leftrightarrow$ $\forall\vec{x}\in E\ \exists!(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n : \vec{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

β أساس لـ E $\Leftrightarrow$ β حرة ومولدة لـ E.

العدد n يسمى بعد E ونكتب : $\dim E=n$

خاصية :

- $\dim E=n$ $\Leftarrow$ جميع أساسات E مكونة من n متجهة.
- $\dim E=2$ $\Leftarrow$ $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ أساس لـ E $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ حرة $\Leftrightarrow \det(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\neq0$
- $\dim E=3$ $\Leftarrow$ $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ اساس لـ E $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ حرة $\Leftrightarrow \det(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\neq0$

النظمات الخطية من p معادلة و n مجهول x_i :

نعتبر النظمة (S) :

$$(S):\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 & (L_1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 & (L_2)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=b_i & (L_i)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\dots+a_{pn}x_n=b_n & (L_n)\end{cases}$$

طريقة كوس (Gauss) لحل النظمة (S) :

نعوض السطر L_i بالسطر $L_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$ $(2\leq i\leq p)$ فنحصل على نظمة (S_1) بحيث لا يظهر x_1 إلا في السطر L_1 ونعيد نفس العملية على (S_1) إلى أن نحصل على نظمة سطرها الأخير يتضمن فقط المجهول x_n ثم نحل هذه النظمة ابتداءً من المعادلة الأخيرة.

الفضاءات المتجهية

1 ليكن A و B جزئيين من $\mathbb{R}^3$ بحيث :

$A=\{(a;a+b;2b)\mid(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ و $B=\{(2h+k;2h,3h)\mid(h,k)\in\mathbb{R}^2\}$

1) بين أن $(A,+,\cdot)$ و $(B;+;\cdot)$ فضائين متجهيين على $\mathbb{R}$.

2) حدد $A\cap B$.

__الجواب :__ 1) لنبين أن $(A,+,\cdot)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

لدينا : $A\neq\emptyset$ لأن : $(0,0,0)\in A$

ليكن $x=(a_1;a_1+b_1;2b_1)$ و $y=(a_2;a_2+b_2;2b_2)$ من A

لدينا : $x-y=(a_1-a_2;(a_1-a_2)+(b_1-b_2);2(b_1-b_2))$

$(\alpha=a_1-a_2\in\mathbb{R}$ و $\beta=b_1-b_2\in\mathbb{R})$ $\quad x-y=(\alpha;\alpha+\beta;2\beta)\in A$

ومنه : $(A;+)$ زمرة جزئية تبادلية من $(\mathbb{R}^3;+)$

إذن $(A;+)$ زمرة تبادلية .

ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$ لدينا : $\lambda x=\lambda.(a\ ;a+b\ ;2b_1)=(\lambda a;\lambda a+\lambda b;2\lambda b)$

ومنه : $\lambda x\in A$ $\forall x\in A$

إذن A جزء مستقر بالنسبة القانون الخارجي .

بما أن $A\subset\mathbb{R}^3$ و $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ فضاء متجهي

فإن جميع الخاصيات المتبقية بالنسبة للقانون الخارجي . في $\mathbb{R}^3$ تبقى صالحة في A .

وبالتالي $(A;+;\cdot)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

بنفس الطريقة نبين أن $(B,+)$ زمرة تبادلية وأن B جزء مستقر بالنسبة القانون الخارجي . ومنه نستنتج أن $(B,+,\cdot)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$.

2) لنحدد $A\cap B$.

لدينا : $(a,b,h,k)\in\mathbb{R}^4$ / $(x,y,z)\in A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x=a &= 2k+h \\ y=a+b &= 2h \\ z=2b &= 3h \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2}h \\ a=2k+h \\ 2k+\frac{5}{2}h=2h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2k+h \\ b=\frac{3}{2}h \\ h=-4k \end{cases}$$

ومنه : $(2k+h\,;\,2h,3h)\in A \Leftrightarrow h=-4k$

وبالتالي : $A\cap B=\{(-2k;-8k;-12k)\mid k\in\mathbb{R}\}$.

2 نعتبر المجموعة : $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x-y+3z=0\}$

1) بين أن $(E;+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

2) ليكن : $e_1=(1,1,0)$ و $e_2=(0,3,1)$

أ- بين أن الأسرة $\{e_1,e_2\}$ تولد الفضاء المتجهي $(E;+;\cdot)$

ب- بين أن الأسرة $\{e_1,e_2\}$ حرة .

ج- استنتج $\dim E$.

الجواب : 1) لدينا $E\neq\emptyset$ لأن $(0,0,0)\in E$

ليكن $X=(x_1,y_1,z_1)$ و $Y=(x_2,y_2,z_2)$ من E

بحيث : $x_1-y_1+3z_1=0$ و $x_2-y_2+3z_2=0$

لدينا : $X-Y=(x_1-x_2\,;\,y_1-y_2\,;\,z_1-z_2)\in E$

لأن : $(x_1-x_2)-(y_1-y_2)+3(z_1-z_2)=0$

ومنه $(E;+)$ زمرة جزئية وتبادلية من $(\mathbb{R}^3;+)$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة تبادلية.

ليكن $X=(a,b,c)\in E$ بحيث : $a-b+3c=0$, و λ من $\mathbb{R}$

لدينا : $\lambda.X=(\lambda a\,;\lambda b\,;\,\lambda c)$ و $(\lambda a)-(\lambda b)+3(\lambda c)=0$

ومنه : $\lambda.X\in E$ إذن E مستقر بالقانون الخارجي .

بما أن $E\subset\mathbb{R}^3$ و $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

إذن جميع خاصيات القانون الخارجي تبقى صالحة في E

وبالتالي : $(E;+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

ج) ليكن $X=(x,y,z)$ من E بحيث : $x-y+3z=0$

إذن : $y=x+3z$ و $(x;y;z)=(x;x+3z;z)$

$= (x;x,0)+(0;3z;z)$

$= x.(1;1;0)+z.(0;3;1)$

ومنه : $X=x.e_1+z.e_2$: $\forall X\in E$

إذن : $\{e_1,e_2\}$ أسرة تولد الفضاء المتجهي $(E;+;\cdot)$

ب - ليكن (x,z) من $\mathbb{R}^2$ بحيث : $xe_1+ze_2=0_E$

لنبين أن : $x=z=0$.

لدينا : $xe_1+z.e_2=0_E \Leftrightarrow (x;x+3z;z)=(0,0,0)$

$\Leftrightarrow x=0$ و $x+3z=0$ و $z=0$

$\Leftrightarrow x=z=0$

وبالتالي الأسرة $\{e_1;e_2\}$ حرة .

ج - بما أن الأسرة $\{e_1;e_2\}$ حرة وتولد الفضاء المتجهي $(E;+;\cdot)$

فإن $\{e_1,e_2\}$ أساس للفضاء المتجهي $(E;+;\cdot)$

وبالتالي : $\dim E=2$.

3 نعتبر المجموعات التالية :

$A=\{f\in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(5)=f(1)\}$

$B=\{f\in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(5)=2+f(1)\}$

$C=\{f\in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x\in\mathbb{R} : f(x)\geq 0\}$

نزود هذه المجموعات بقانوني الجمع والضرب في عدد حقيقي

حدد من بين هذه المجموعات ، المجموعة التي تتوفر على بنية فضاء متجهي .

الجواب : - لدينا : $A\neq\emptyset$ لأن $f=0\in A$ الدالة المنعدمة .

ليكن f و g عنصرين من A إذن : $f(5)=f(1)$ و $g(5)=g(1)$

ومنه : $f(5)-g(5)=f(1)-g(1)$ إذن : $f-g\in A$

ليكن f من A و λ من $\mathbb{R}$ إذن : $f(5)=f(1)$ ومنه : $\lambda f(5)=\lambda f(1)$

إذن : $\lambda.f\in A$ ومنه : A جزء مستقر بالقانون الخارجي .

و بما أن : $A\in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

فإن جميع خاصيات القانون الخارجي . في $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ تبقى صالحة

في A ؛ وبالتالي $(A;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي .

- لدينا : $B\neq\emptyset$ لأن : $f_1 : x\longmapsto \frac{1}{2}x$ تنتمي إلى B.

ولدينا : $2.f_1 : x\longmapsto x$ لا تنتمي إلى B

ومنه B غير مستقر بالقانون الخارجي .

وبالتالي $(B;+;.)$ ليس فضاء متجهي .

- لدينا : $C\neq\emptyset$ لأن : $f_2 : x\longmapsto x^2$ تنتمي إلى C

ولدينا : $-2.f_2 : x\longmapsto -2x^2$ لا تنتمي إلى C.

ومنه C غير مستقر بالقانون الخارجي .

وبالتالي $(C;+,.)$ ليس فضاء متجهي .

4 نعتبر المجموعة : $E=\left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b\end{pmatrix} \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) بين أن $(E;+,.)$ فضاء متجهي حقيقي ثم حدد أسرة مولدة لـ E

2 - حدد أساساً للفضاء المتجهي $(E;+;.)$ ثم استنتج بعده .

<u>الجواب :</u> 1) لدينا : $E\neq\emptyset$ لأن : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in E$ بأخذ : $a=b=0$

ليكن $M_1=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1-b_1\end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix} a_2+b_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2-b_2\end{pmatrix}$ من E

لدينا :
$$M_1-M_2=\begin{pmatrix} (a_1-a_2)+(b_1-b_2) & (b_1-b_2) \\ -(b_1-b_2) & (a_1-a_2)-(b_1-b_2)\end{pmatrix}$$

ومنه : $M_1-M_2\in E$ إذن $(E;+)$ زمرة جزئية تبادلية من

الزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+)$

وبالتالي $(E;+)$ زمرة تبادلية .

ليكن λ عدد حقيقي و $M=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b\end{pmatrix}$ من E لدينا :

$$\lambda.M=\begin{pmatrix} (\lambda a)+(\lambda b) & (\lambda b) \\ -(\lambda b) & (\lambda a)-(\lambda b)\end{pmatrix}\in E$$

ومنه E جزء مستقر بالقانون الخارجي .

بما أن $E \subset M_2(\mathbb{R})$ و $(M_2(\mathbb{R});+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

فإن جميع خاصيات القانون الخارجي . تبقى صالحة في E

وبالتالي : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

ليكن M من E لدينا : $M=\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}$$

$$= a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad / (a,b)\in\mathbb{R}^2$$

نضع : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

إذن : $\{I;J\}$ أسرة مولدة لـ E.

4) لنبين $\{I;J\}$ أسرة حرة .

ليكن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $a.I+b.J=0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -b=0 \\ b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$$

ومنه : $\{I;J\}$ أسرة حرة ، وبما أنها مولدة لـ E

فإن $\{I;J\}$ أساسا للفضاء المتجهي $(E;+;\cdot)$

وبالتالي : $\dim E=2$.

5 نعتبر المجموعة : $\mathbb{M}=\left\{\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} / (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

بين أن $(\mathbb{M};+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ثم حدد بعده .

<u>الجواب :</u> - لدينا : $\mathbb{M}\neq\emptyset$ لأن : $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{M}$

ليكن $M_1=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 & y_1 \\ y_1 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 & y_2 \\ y_2 & y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ من $\mathbb{M}$

لدينا : $M_1-M_2=\begin{pmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & y_1-y_2 \\ y_1-y_2 & x_1-x_2 & y_1-y_2 \\ y_1-y_2 & y_1-y_2 & x_1-x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{M}$

ومنه $(\mathbb{M};+)$ زمرة جزئية تبادلية من الزمرة التبادلية $(M_3(\mathbb{R});+)$

وبالتالي : $(\mathbb{M};+)$ زمرة تبادلية .

- ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$ لدينا : $\lambda.M_1=\begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda y_1 \\ \lambda y_1 & \lambda x_1 & \lambda y_1 \\ \lambda y_1 & \lambda y_1 & \lambda x_1 \end{pmatrix}\in\mathbb{M}$

إذن E جزء مستقر بالقانون الخارجي • .

بما أن : $E \subset \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ و $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

فإن جميع خاصيات القانون الخارجي • في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ تبقى صالحة في E

وبالتالي $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لدينا : $\begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

إذن : $\{I;J\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(E;+;\cdot)$

ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $x.I + y.J = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ومنه $\{I,J\}$ أسرة حرة ، وبالتالي $\{I,J\}$ أساس للفضاء

المتجهي $(E;+;\cdot)$ ومنه : $\dim E = 2$.

6 في $\mathbb{R}^3$ نعتبر الأسرة $\mathcal{B} = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ بحيث :

$\vec{e_1} = (1,0,0)$ و $\vec{e_2} = (0,1,0)$ و $\vec{e_3} = (0,0,1)$

1) بين أن $\mathcal{B}$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$

2) نعتبر المتجهات : $\vec{x_1} = (1,1,1)$ و $\vec{x_2} = (1,-1,1)$ و $\vec{x_3} = (1,2,3)$

أ- بين أن $\mathcal{B}' = (\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3})$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

ب- لتكن $\vec{x} = (3,4,5)$ متجهة من $\mathbb{R}^3$.

- حدد إحداثيات المتجهة $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

- حدد إحداثيات المتجهة $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}'$.

<u>الجواب :</u> 1) لدينا لكل (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)$$

$$(x,y,z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1)$$

$$(x,y,z) = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2} + z.\vec{e_3}$$

إذن : $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

لدينا : $x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2} + z.\vec{e_3} = 0 \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

ومنه $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ أسرة حرة وبالتالي $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ أساس لـ $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

ج) أ) لنبين أن $\mathcal{B}'$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$

لدينا :
$$\det(\vec{x_1};\vec{x_2};\vec{x_3})=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&3\end{vmatrix}=-4\neq0$$

وبالتالي $\mathcal{B}'$ حرة ، وبما أن $\dim\mathbb{R}^3=\mathrm{card}\,\mathcal{B}'=3$ فإن :

$\mathcal{B}'=(\vec{x_1};\vec{x_2};\vec{x_3})$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3;+;\cdot)$

ب - لدينا : $\vec{x}=(3,4,5)=3\vec{e_1}+4\vec{e_2}+5\cdot\vec{e_3}$

ومنه : $(3,4,5)$ هو مثلوث إحداثيات $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

ليكن (α,β,γ) مثلوث إحداثيات $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}'$.

إذن : $\vec{x}=\alpha\cdot\vec{x_1}+\beta\cdot\vec{x_2}+\gamma\cdot\vec{x_3}$

$$(3,4,5)=(\alpha+\beta+\gamma;\alpha-\beta+2\gamma;\alpha+\beta+3\gamma)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3\\\alpha-\beta+2\gamma=4\\\alpha+\beta+3\gamma=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=0\\\gamma=1\end{cases}$$

ومنه : $(2,0,1)$ هو مثلوث إحداثيات $\vec{x}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}'$

7 في الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ نعتبر المتجهات :

$\vec{u}=(m;2;1-m)$ و $\vec{v}=(1;2;m)$ و $\vec{w}=(1;2;3)$

أدرس حسب قيم m ارتباط المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$.

الجواب : لدينا :
$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}m&1&1\\2&2&2\\1-m&m&3\end{vmatrix}$$
$$=m\begin{vmatrix}2&2\\m&3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\m&3\end{vmatrix}+(1-m)\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}$$

$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=2(3-m)(m-1)$

إذا كان : $m=3$ أو $m=1$ فإن : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$

ومنه الأسرة $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ مقيدة.

إذا كان : $m\neq3$ و $m\neq1$ فإن : $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq0$

ومنه الأسرة $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ حرة.

8

لتكن P_4 مجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر من أو تساوي 4 بحيث: $B_0=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ أساس للفضاء المتجهي $(P_4;+;\cdot)$

1) بين أن الأسرة:

$$B=\{(1+x)^4, x(1+x)^3, x^2(1+x)^2, x^3(1+x), x^4\}$$

أساس للفضاء المتجهي $(P_4;+;\cdot)$.

2) حدد إحداثيات الحدودية: $f(x)=x^3+2x^2-x+1$ بالنسبة للأساس B.

الجواب: 1) لنبين أن B أساس للفضاء المتجهي $(P_4;+;\cdot)$

نضع: $\vec{e_1}=(1+x)^4$ ، $\vec{e_2}=x(1+x)^3$

$\vec{e_3}=x^2(1+x)^2$ ؛ $\vec{e_4}=x^3(1+x)$ ؛ $\vec{e_5}=x^4$

لدينا: $(1+x)-x=1$ و $x^4=x^4=\vec{e_5}$

$$x^3=x^3[(1+x)-x]=x^3(1+x)-x^4=\vec{e_4}-\vec{e_5}$$

$$x^2=x^2[(1+x)-x]^2=x^2[(x+1)^2-2x(1+x)+x^2]$$

$$x^2=x^2(1+x)^2-2x^3(1+x)+x^4=\vec{e_3}-2\vec{e_4}+\vec{e_5}$$

$$x=x[(1+x)-x]^3=x[(1+x)^3-3x(1+x)^2+3x^2(1+x)-x^3]$$

$$x=x(1+x)^3-3x^2(1+x)^2+3x^3(1+x)-x^4$$

$$x=\vec{e_2}-3\vec{e_3}+3\vec{e_4}-\vec{e_5}$$

$$1=[(1+x)-x]^4=[(1+x)^2-2x(1+x)+x^2]^2$$

$$1=(1+x)^4-4x(1+x)^3+6x^2(1+x)^2-4x^3(1+x)+x^4$$

$$1=\vec{e_1}-4\vec{e_2}+6\vec{e_3}-4\vec{e_4}+\vec{e_5}$$

بما أن جميع عناصر B_0 تكتب بدلالة عناصر B فإن:

B أساس للفضاء المتجهي $(P_4;+;\cdot)$.

2) إحداثيات f بالنسبة للأساس B.

لدينا:

$$f(x)=x^3+2x^2-x+1$$

$$=(\vec{e_4}-\vec{e_5})+2(\vec{e_3}-2\vec{e_4}+\vec{e_5})-(\vec{e_2}-3\vec{e_3}+3\vec{e_4}-\vec{e_5})$$

$$f(x)=\vec{e_1}-5\vec{e_2}+11\vec{e_3}-10\vec{e_4}+3\vec{e_5}$$

ومنه: $(1,-5,11,-10;3)$ هي إحداثيات f بالنسبة للأساس B

9

لتكن P_2 مجموعة الدوال الحدودية التي درجتها أصغر من أو تساوي 2. الفضاء المتجهي $(P_2,+,\cdot)$ منسوب إلى الأساس $B_0=\{1,x,x^2\}$.

نعتبر الدوال الحدودية التالية:

$f:x\mapsto x^2+x+1$ ؛ $g_m:x\mapsto mx^2+3$ ؛ $h:x\mapsto -x^2-x+3$

1) حدد قيم العدد m لكي تكون الأسرة $\{f;g_m;h\}$ أساسا الفضاء المتجهي P_2

2) لتكن $p=(-5,2,1)$ في الأساس B_0

حدد إحداثيات p في الأساس $\{f,g_2,h\}$

<u>الجواب</u>: 1) لدينا:

$$\det(f;g_m;h)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}=4m$$

الأسرة $\{f;g_m;h\}$ حرة $\Leftrightarrow \det(f;g_m;h)\neq 0$

$\Leftrightarrow m\neq 0$

2) لدينا: $\{f;g_2;h\}$ أساسا للفضاء المتجهي $(P_2;+;\cdot)$.

لتكن $(\alpha;\beta;\gamma)$ إحداثيات p في الأساس $\{f;g_2;h\}$.

$$-5+2x+x^2=\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g_2+\gamma h(x)$$

$$-5+2x+x^2=\alpha(x^2+x+1)+\beta(2x^2+3)+\gamma(-x^2-x+3)$$

$$=(\alpha+3\beta+\gamma)+(\alpha-\gamma)x+(\alpha+2\beta-\gamma)x^2$$

ومنه:

$$\begin{cases}\alpha+3\beta+\gamma=-5\\ \alpha-\gamma=2\\ 2\alpha+2\beta-\gamma=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=7\\ \beta=-5\\ \gamma=5\end{cases}$$

إذن: $p=7\cdot f-5\cdot g_2+5h(x)$

10

نرمز ب $(\mathcal{C})$ لمجموعة الدوال المتصلة على $[a,b]$ بحيث: $ab<0$

نعتبر المجموعة $\mathbb{E}=\{f\in\mathcal{C}\mid \exists A>0\ \forall x\in[a,b]:|f(x)|\leq A|x|\}$

1) بين أن: $f(0)=0$. $\forall f\in\mathbb{E}$

2) بين أن $(\mathbb{E};+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

3) بين أن الدالة f المعرفة بمايلي: $f(x)=\sin x$ هي عنصر من $\mathbb{E}$.

<u>الجواب</u>: 1) لدينا: $f\in\mathbb{E}\Leftrightarrow\begin{cases}\exists A>0\ \forall x\in[a,b]: |f(x)|\leq A|x|\\ f\in\mathcal{C}\end{cases}$

بما أن: $0\in[a,b]$ فإن: $|f(0)|\le A\times 0=0$ (لأن $ab<0$)

ومنه: $f(0)=0$

2) لنبين أن $(\mathbb{E};+,.)$ فضاء متجهي حقيقي:

لدينا: $\mathbb{E}\neq\emptyset$ لأن الدالة المنعدمة تنتمي إلى $\mathbb{E}$.

لدينا: $f\in\mathbb{E}\Leftrightarrow f\in\mathcal{C}$ و $(\exists A>0\ \forall x\in[a,b]: |f(x)|\le A|x|)$

$g\in\mathbb{E}\Leftrightarrow g\in\mathcal{C}$ و $(\exists B>0\ \forall x\in[a,b]: |g(x)|\le B|x|)$

بما أن $(f,g)\in\mathcal{C}^2$ فإن: $f-g\in\mathcal{C}$.

لدينا: $\forall x\in[a;b]: |f(x)-g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|$

$$\le A|x|+B|x|$$
$$\le (A+B)|x|$$

إذن $\forall x\in[a,b]: |(f-g)(x)|\le C|x|$، حيث: $C=A+B>0$

وبالتالي: $f-g\in\mathbb{E}$

ومنه $(\mathbb{E};+)$ زمرة جزئية تبادلية من الزمرة التبادلية $(\mathcal{C},+)$ ، إذن $(\mathbb{E};+)$ زمرة تبادلية.

ليكن $\lambda\in\mathbb{R}$ لدينا: $\lambda f\in\mathcal{C}$ و $\forall x\in[a,b]\ |(\lambda f)(x)|\le|\lambda A||x|$

إذن: $\lambda f\in\mathbb{E}$

ومنه $\mathbb{E}$ جزء مستقر بالقانون الخارجي. و بما أن $(\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R});+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $\mathbb{E}\subset\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R})$ فإن جميع خاصيات القانون الخارجي. في $\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R})$ تبقى صالحة في $\mathbb{E}$

وبالتالي $(\mathbb{E};+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

3) لنبين أن: $f\in\mathbb{E}$ حيث: $f(x)=\sin x$ ، $ab<0$ ، $x\in[a,b]$

- لدينا: $f\in\mathcal{C}$ لكل a و b حيث $ab<0$

- $\forall x\in[a,b]\ |f(x)|\le|x|$ (لأن: $|\sin x|\le|x|$)
نعتبر: $A=1$

وبالتالي: $f\in\mathbb{E}$.

11 ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نرمز بـ $\mathbb{R}_n[X]$ لمجموعة الحدوديات التي درجتها أصغر أو يساوي n.

1) بين أن $(\mathbb{R}_n[X];+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) نضع: $\mathcal{B}=(f_0;f_1;\dots;f_n)$ مع $f_0:x\mapsto 1$ ؛ $\forall k: 1\leq k\leq n \quad f_k:x\mapsto x^k$

بين أن $\mathcal{B}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}_n[X];+,\cdot)$

3) ليكن a من $\mathbb{R}$. نعتبر الحدوديات g_k المعرفة بمايلي:

$g_0:x\mapsto 1$ و $\forall k: 1\leq k\leq n: \quad g_k:x\mapsto (x-a)^k$

أ- ليكن $0\leq k\leq n$ ، أكتب f_k بدلالة: g_0 ؛ g_1 ؛ ..... ؛ g_n

ب- استنتج أن: $\mathcal{B}'=(g_0;g_1;\dots;g_n)$ أساس للفضاء $(\mathbb{R}_n[X];+;\times)$

4) لتكن f دالة حدودية تنتمي إلى $\mathbb{R}_n[X]$.

نضع $\tilde{f}: \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\end{array}\begin{cases}\tilde{f}(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x}f(t)\,dt & ; x\neq 0\\ \tilde{f}(0)=f(0) & ; x=0\end{cases}$

أ- بين أن $\tilde{f}$ متصلة على $\mathbb{R}$

ب- حدد $\tilde{f}_k$ لكل k من $[\![0,n]\!]$.

ج- استنتج أن: $\tilde{f}\in\mathbb{R}_n[X]$ ؛ $\forall f\in\mathbb{R}_n[X]$

د- حدد إحداثيات $\tilde{f}_k$ في الأساس $\mathcal{B}'$.

4) لتكن f من $\mathbb{R}_n[X]$ بحيث $\tilde{f}$ هي الحدودية المنعدمة.

أ- بين أن: $f(x)=2f(2x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ب- استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)=2^n\cdot f(x)$

ج- استنتج أن f هي الدالة المنعدمة.

<u>الجواب</u>: 1) لتكن $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

نعلم أن $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

بما أن $\mathbb{R}_n[X]\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ لكي نبين أن $(\mathbb{R}_n[X];+;\cdot)$ فضاء متجهي يكفي

أن نبين أن: * $(\mathbb{R}_n[X];+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

** $\mathbb{R}_n[X]$ جزء مستقر بالقانون الخارجي "$\cdot$".

لدينا: $f-g \in \mathbb{R}_n[X]$: $\forall (f,g) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$

ومنه: $(\mathbb{R}_n[X];+)$ زمرة جزئية تبادلية من الزمرة $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

لدينا: $\lambda . f \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad \forall f \in \mathbb{R}_n[X] \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ومنه: $\mathbb{R}_n[X]$ جزء مستقر بالقانون الخارجي . .

و بالتالي $(\mathbb{R}_n[X];+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

2) لدينا: $\forall f \in \mathbb{R}_n[X] \ \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ومنه $\mathcal{B} = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ أسرة تولد الفضاء المتجهي $(\mathbb{R}_n[X];+,\cdot)$

لتكن $(d_0, d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ بحيث: $\sum_{k=0}^{n} d_k X^k = 0$

$$\forall X \in \mathbb{R} : \ d_n X^n + d_{n-1} X^{n-1} + \dots + d_1 X + d_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d_n = 0 \\ d_{n-1} = 0 \\ \vdots \\ d_0 = 0 \end{cases}$$

ومنه $\mathcal{B}$ أسرة حرة وبالتالي فإن $\mathcal{B}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}_n[X];+;\cdot)$ ومنه: $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

3) أ- لدينا: $f_k(x) = x^k$ و $g_k(x) = (x-a)^k$

لدينا: $f_0 = g_0 + 0.g_1 + \dots + 0.g_n$

و $\forall k \geq 1 :$

$$f_k(x) = x^k = [(x-a)+a]^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} . (x-a)^i$$

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i} . g_i(x)$$

ومنه:

$$f_k = \sum_{i=1}^{k} C_k^i a^{k-i} . g_i$$

ب- لدينا: $\forall f \in \mathbb{R}_n[X] \ \exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : f = \sum_{k=0}^{n} a_k . f_k$

إذن:

$$f = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} (a_k C_k^i a^{k-i}) g_i$$

ومنه $\mathcal{B}' = (g_0, g_1, \dots, g_n)$ أسرة تولد الفضاء $\mathbb{R}_n[X]$

وبما أن: $\operatorname{card} \mathcal{B}' = \dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

فإن $\mathcal{B}'$ أساس الفضاء المتجهي $\mathbb{R}_n[X]$.

4) أ- لدينا f دالة حدودية إذن فهي متصلة على $\mathbb{R}$ ، لتكن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$ إذن: $\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad \tilde{f}(x) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{x}$

F هي كذلك دالة حدودية ومنه $\tilde{f}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$.

لدينا:

$$\lim_{x \to 0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to 0} 2\left(\frac{F(2x) - F(0)}{2x}\right) - \left(\frac{F(x) - F(0)}{x}\right)$$

$$= 2F'(0) - F'(0) = 2f(0) - f(0) = f(0) = \tilde{f}(0)$$

ومنه $\tilde{f}$ متصلة في $x_0 = 0$ ، وبالتالي $\tilde{f}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

ب- لدينا: $\forall k \in [\![0,n]\!] : \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \tilde{f}_k(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} t^k \, dt$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_x^{2x} = \frac{1}{x}\left[\frac{(2x)^{k+1} - x^{k+1}}{k+1}\right]$$

ومنه: $\forall k \in [\![0,n]\!] : \tilde{f}_k(x) = \dfrac{1}{k+1}\left((2x)^k - x^k\right)$

ج- لدينا لكل k من $[\![0,n]\!]$: $\tilde{f}_k(x) = \dfrac{1}{k+1}\left((2x)^k - x^k\right)$ إذن: $\tilde{f}_k \in \mathbb{R}_n[X]$

لتكن $f \in \mathbb{R}_n[X]$ إذن: $\exists (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f_k$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \tilde{f}(x) = \frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_x^{2x} \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{n} a_k \int_x^{2x} f_k(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{x}\int_x^{2x} f_k(t)\,dt\right)$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \tilde{f}_k(x)$$

محققة كذلك من أجل $x=0$ ، ومنه: $\tilde{f} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \tilde{f}_k$

وبما أن: $\tilde{f}_k \in \mathbb{R}_n[X]$ فإن: $\tilde{f} \in \mathbb{R}_n[X]$

4) لتكن $f \in \mathbb{R}_n[X]$ بحيث: $\tilde{f} = 0$

أ- لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}^* : \quad \tilde{f}(x) = \dfrac{F(2x) - F(x)}{x}$

$$\tilde{f}(0) = f(0)$$

وبما أن: $\tilde{f} = 0$ فإن: $F(2x) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ و $f(0) = 0$

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}^* \ (F(2x))' = (F(x))'$ إذن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2f(2x) = f(x)$

ومحققة من أجل $x = 0$ وبالتالي: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2f(2x)$

ب - لنبين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} : f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$

من أجل $n=0$ لدينا : $f\left(\frac{x}{2^0}\right) = 2^0 f(x)$ صحيحة.

نفترض أن : $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n . f(x)$ ونبين أن : $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} . f(x)$

لدينا : $$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(2.\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

إذن : $$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2 f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
$$= 2.2^n . f(x)$$
$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} f(x)$$

وبالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} : f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n . f(x)$

ج - لنبين أن : $f=0$.

نفترض أن $f\neq 0$ أي : $\exists x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 0$

بما أن : $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 2^n f(x)$ ، f متصلة على $\mathbb{R}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$

ومنه : $f(0) = \infty$ غير ممكن لأن f متصلة في $x_0 = 0$.

وبالتالي : $f=0$.

12 نعتبر في الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$ المتجهات :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \cos b\\ \cos c\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}\sin a\\ \sin b\\ \sin c\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}\sin(x+a)\\ \sin(x+b)\\ \sin(x+c)\end{pmatrix}$$

حيث a ، b ، c ، x أعداد حقيقية.

بين أن الأسرة $\{\vec{u};\vec{v};\vec{w}\}$ مقيدة.

الجواب : لدينا :

$\sin(x+a) = \sin x\cos a + \cos x\sin a$

$\sin(x+b) = \sin x\cos b + \cos x\sin b$

$\sin(x+c) = \sin x\cos c + \cos x\sin c$

ومنه : $$\begin{pmatrix}\sin(x+a)\\ \sin(x+b)\\ \sin(x+c)\end{pmatrix} = \sin x\begin{pmatrix}\cos a\\ \cos b\\ \cos c\end{pmatrix} + \cos x\begin{pmatrix}\sin a\\ \sin b\\ \sin c\end{pmatrix}$$
$$\vec{w} = (\sin x)\vec{u} + (\cos x)\vec{v}$$

ومنه الأسرة $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ مقيدة.

13 نعتبر المجموعة $E=\{f\in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f(x)=(ax^2+bx+c)e^{3x} ; (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$

1) أ- بين أن : $E\neq\emptyset$ وأن : $\alpha f+\beta\cdot g\in E$ $\forall(f,g)\in E^2$ $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

ب- استنتج أن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) نعتبر الأسرة $\mathcal{B}=(f_0;f_1;f_2)$ حيث :

$f_0(x)=e^{3x}$ ؛ $f_1(x)=xe^{3x}$ ؛ $f_2(x)=x^2e^{3x}$

بين أن $\mathcal{B}$ أساس للفضاء E.

3) ليكن f عنصر من E بين أن : $f'\in E$ وحدد إحداثيات f' بالنسبة لـ $\mathcal{B}$

الجواب : نعلم أن : $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

أ- لدينا : $E\neq\emptyset$ (لأن : $f=0\in E$ الدالة المنعدمة)

$f\in E \Leftrightarrow \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : f(x)=(ax^2+bx+c)e^{3x}$

$g\in E \Leftrightarrow \exists(a',b',c')\in\mathbb{R}^3 : g(x)=(a'x^2+b'x+c')e^{3x}$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R} : (\alpha f+\beta g)(x)=((\alpha a+\beta a')x^2+(\alpha b+\beta b')x+(\alpha c+\beta c'))e^{3x}$

ومنه : $\alpha f+\beta\cdot g\in E$.

ب- لدينا بأخذ : $\alpha=1$ و $\beta=-1$

لدينا : $\forall(f,g)\in E^2 : f-g\in E$

إذن $(E;+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

وبما أن : $\lambda\cdot f\in E$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $\forall f\in E$

فإن E مستقر بالقانون التركيب الخارجي . ومنه جميع خاصيات

في $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ تبقى صالحة في E .

وبالتالي $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

2) لنبين أن $\mathcal{B}=(f_0;f_1;f_2)$ أساس للفضاء E.

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=ax^2e^{3x}+bxe^{3x}+ce^{3x}$

$=af_2(x)+bf_1(x)+cf_0(x)$

إذن : $\forall f\in E : f=a\cdot f_2+b\cdot f_1+c\cdot f_0$

ومنه $\mathcal{B}$ أسرة مولدة للفضاء E.

لنبين أن الأسرة $\mathcal{B}$ حرة.

ليكن (α,β,γ) من $\mathbb{R}^3$ بحيث : $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \alpha f_2(x)+\beta f_1(x)+\gamma f_0(x)=0$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R} : (\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^{3x}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} : \alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه : $\mathcal{B}$ أسرة حرة ، وبالتالي $\mathcal{B}$ أساس للفضاء E

3) ليكن f من E ، لنبين أن : $f'\in E$.

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R} : f(x)=(ax^2+bx+c)e^{3x}$

حيث : $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$

لدينا : $f'(x)=(3ax^2+(3b+2a)x+b+3c)e^{3x}$

$$f'(x)=(\alpha x^2+\beta x+\gamma)e^{3x}$$

حيث : $\alpha=3a$ ، $\beta=3b+2a$ ؛ $\gamma=b+3c$

ومنه : $f'\in E$

لدينا : (a,b,c) هي إحداثيات f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$

و $(3a;3b+2a;b+3c)$ هي إحداثيات f' بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

14

ليكن $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ حيث : $i^2=-1$

نعتبر المجموعة : $E=\{a+bj \mid (a;b)\in\mathbb{R}^2\}$

1) بين أن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) حدد أساسا $\mathcal{B}$ للفضاء $(E;+;\cdot)$ ثم حدد $\dim E$

3) بين أن الأسرة $\{1;i\}$ هي كذلك أساس للفضاء $(E;+;\cdot)$

4) حدد إحداثيات i في الأساس $\mathcal{B}$.

5) بين أن : $E=\mathbb{C}$.

الجواب : 1) لدينا : $E\subset\mathbb{C}$ و $(\mathbb{C};+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

لدينا : $(z_1;z_2)\in E^2 \Leftrightarrow \exists(a_1,a_2,b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2 : z_1=a_1+b_1j$ و $z_2=a_2+b_2j$

إذن : $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)j$

ومنه : $z_1-z_2\in E$

لدينا . قانون تركيب خارجي في E وبما أن $E \subset \mathbb{C}$
ومنه جميع خاصيات العتبقية من تعريف الفضاء المتجهي تبقى صحيحة في E.
وبالتالي: $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) لدينا: $\forall z \in E : \quad z = a + bj$

ومنه: $\mathcal{B} = \{1, i\}$ أسرة مولدة

لنبين أن $\mathcal{B} = \{1, i\}$ حرة.

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ لدينا: $a + bj = 0$

$$\Leftrightarrow a + b\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{b}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}bi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$$

إذن: $\mathcal{B} = \{1, j\}$ أسرة حرة ومن $\mathcal{B} = \{1, j\}$ أساس للفضاء المتجهي E وبما أن: $card\,\mathcal{B} = 2$ فإن: $\dim E = 2$

3) لدينا لكل z من E: $z = a + bj = a - \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}bi$

إذن: $\{1, i\}$ أسرة مولدة لـ E

وبما أن $\{1; i\}$ أسرة حرة فإن $\{1; i\}$ أساس لـ E.

4) لنحدد إحداثيات i في الأساس $\mathcal{B}$.

لدينا: $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow i = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{2}j$

ومنه $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ هو زوج إحداثيتي i في الأساس $\mathcal{B}$.

5) لدينا: $E \subset \mathbb{C}$. لنبين أن $\mathbb{C} \subset E$

ليكن z من $\mathbb{C}$ لدينا: $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + iy$

بما أن: $i = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}j$ فإن: $z = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}y\right) + \frac{2y\sqrt{3}}{3}j$

إذن: $z \in E$ ومنه: $\mathbb{C} \subset E$

وبالتالي: $E = \mathbb{C}$

15 نعتبر المجموعة: $\mathcal{A}=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix} \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

1) بين أن $(\mathcal{A};+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) حدد أساسا للفضاء المتجهي $(\mathcal{A};+;\cdot)$ ثم بعده.

3) نعتبر المصفوفات: $A=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&-1&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ، $C=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$

هل الأسرة $\{A,B,C\}$ أساسا للفضاء $\mathcal{A}$ ؟

الجواب: 1) نعلم أن: $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

لدينا: $\mathcal{A}\neq\phi$ و $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

لدينا: $M(a_1,b_1,c_1)-M(a_2,b_2,c_2)=\begin{pmatrix}a_1-a_2&b_1-b_2&c_1-c_2\\0&a_1-a_2&b_1-b_2\\0&0&a_1-a_2\end{pmatrix}$

$M(a_1,b_1,c_1)-M(a_2,b_2,c_2)\in\mathcal{A}$

ومنه: $(\mathcal{A},+)$ زمرة جزئية من الزمرة التبادلية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R});+)$

وبالتالي $(\mathcal{A};+)$ زمرة تبادلية.

لدينا: $\forall\lambda\in\mathbb{R}:\quad \lambda.M(a,b,c)=\begin{pmatrix}\lambda a&\lambda b&\lambda c\\0&\lambda a&\lambda b\\0&0&\lambda a\end{pmatrix}\in\mathcal{A}$

ومنه: . قانون تركيب خارجي في $\mathcal{A}$

وبالتالي $(\mathcal{A};+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) ليكن $M(a,b,c)$ من $\mathcal{A}$ لدينا:

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=a.\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\vec{e_1}}+b.\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\vec{e_2}}+c.\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\vec{e_3}}$$

إذن: $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ أسرة مولدة للفضاء المتجهي $(\mathcal{A},+,\cdot)$

لنبين أن الأسرة $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ حرة.

لدينا: $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}=0_{\mathcal{A}}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\end{cases}$$

إذن: $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ أسرة حرة ومنه $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$ أساس للفضاء $\mathcal{A}$.

وبالتالي: $\dim\mathcal{A}=3$

3) نضع: $\mathcal{B}=\{A,B;C\}$ لنبين أن $\mathcal{B}$ أساس لـ $\mathcal{A}$.

لدينا: $\mathrm{card}\,\mathcal{B}=\dim\mathcal{A}$ يكفي أن نبين أن $\mathcal{B}$ أسرة حرة

لدينا : $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : aA+b.B+c.C=0_A$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a+b+2c & 2a-c & 4b+3c \\ 0 & -a+b+2c & 2a-c \\ 0 & 0 & -a+b+2c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+2c=0 \\ 2a-c=0 \\ 4b+3c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{c}{2} \\ b=-\frac{3}{4}c \\ -\frac{c}{2}-\frac{3}{4}c+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

إذن $\mathcal{B}$ أسرة حرة وبالتالي $\mathcal{B}$ أساس للفضاء المتجهي $(A;+;\cdot)$

16 نعتبر المجموعة $D=\mathbb{R}-\{1\}$ و E مجموعة الدوال العددية f المعرفة على D بـ : $f(x)=\frac{P(x)}{x^3-1}$ ؛ حيث $P(x)$ دالة حدودية درجتها أصغر من أو تساوي 2.

1) بين أن : $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) نعتبر الدوال التالية :

$g_1(x)=\frac{1}{x-1}$ ؛ $g_2(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$ ؛ $g_3(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$

أ- بين أن الأسرة $\mathcal{B}=\{g_1;g_2;g_3\}$ أساس للفضاء المتجهي E.

ب- حدد إحداثيات الدالة : $f: x\mapsto \frac{1}{x^3-1}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$

الجواب : 1) لنبين أن : $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

لدينا : $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ؛ حيث $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

لدينا : $E\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ، إذن يكفي أن نبين أن $(E;+)$ زمرة جزئية لـ $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ و القانون . قانون تركيب خارجي في E

لدينا : $E\neq\emptyset$ لأن : $f=0\in E$ الدالة المنعدمة.

لتكن f و g من E بحيث : $f(x)=\frac{P_1(x)}{x^3-1}$ و $g(x)=\frac{P_2(x)}{x^3-1}$

$P_1(x)$ و $P_2(x)$ حدوديتين بحيث : $d^\circ P_1\leq 2$ و $d^\circ P_2\leq 2$

إذن : $f(x)-g(x)=\frac{P_1(x)-P_2(x)}{x^3-1}=\frac{P_3(x)}{x^3-1}$

حيث : $P_3(x)=P_1(x)-P_2(x)$ و $d^\circ P_3\leq \max(d^\circ P_1,d^\circ P_2)\leq 2$

ومنه : $f-g\in E$ إذن : $(E;+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

لدينا: $(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\forall f\in E)\ :\ \lambda f(x)=\lambda.\dfrac{P(x)}{x^3-1}=\dfrac{Q(x)}{x^3-1}$

حيث: $Q(x)=\lambda.P(x)$ و $d^\circ Q=d^\circ P\leq 2$

إذن: $\lambda.f\in E$ ومنه القانون • قانون تركيب خارجي في E

وبالتالي $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) أ- لنبين أن: $\mathcal{B}=\{g_1;g_2;g_3\}$ أساس في E.

لدينا: $f\in E\Leftrightarrow\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^3-1}\ ;\ \forall x\in D$

لتكن α و β و γ من $\mathbb{R}$ بحيث:

$$\begin{aligned}f(x)&=\alpha.g_1(x)+\beta.g_2(x)+\gamma.g_3(x)\\&=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta x}{x^2+x+1}+\frac{\gamma}{x^2+x+1}=\frac{(\alpha+\beta)x^2+(\alpha-\beta+\gamma)x+(\alpha-\gamma)}{x^3-1}\\&=\frac{ax^2+bx+c}{x^3-1}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases}a=\alpha+\beta\\b=\alpha-\beta+\gamma\\c=\alpha-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{a+b+c}{3}\\\beta=\dfrac{2a-b-c}{3}\\\gamma=\dfrac{a+b-2c}{3}\end{cases}$$

إذن: $(\forall f\in E)(\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3)\ :\ f=\alpha.g_1+\beta.g_2+\gamma.g_3$

ومنه: $\{g_1;g_2;g_3\}$ أسرة تولد الفضاء المتجهي $(E;+;\cdot)$

لنبين أن $\mathcal{B}$ أسرة حرة.

لدينا: $\forall(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\ \ \forall x\in D:\ \alpha g_1(x)+\beta g_2(x)+\gamma g_3(x)=0$

$$\frac{(\alpha+\beta)x^2+(\alpha-\beta+\gamma)x+(\alpha-\gamma)}{x^3-1}=0$$

$$(\alpha+\beta)x^2+(\alpha-\beta-\gamma)x+(\alpha-\gamma)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=0\\\alpha-\beta-\gamma=0\\\alpha-\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$

ومنه $\mathcal{B}$ أسرة حرة وبالتالي فهي أساس للفضاء المتجهي E

3) لنحدد إحداثيات الدالة $f:x\longmapsto\dfrac{1}{x^3-1}$ بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$

حسب السؤال 2) أ- لدينا: $a=b=0$ و $c=1$

إذن: $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$ هي إحداثيات الدالة f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

النظمات الخطية

1 حل باستعمال طريقة غوص النظمة التالية :

$$(S):\begin{cases}3x-2y+z=14\\x+3y+z=2\\-2x+5y+2z=2\end{cases}\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

الجواب : لدينا :

$$(S):\begin{cases}3x-2y+z=14 & (L_1)\\x+3y+z=2 & (L_2)\\-2x+5y+2z=2 & (L_3)\end{cases}$$

بإجراء العملية التالية على السطر (L_1) للنظمة (S) : $(L_1)\rightarrow(L_2)$

نحصل على :

$$\begin{cases}x+3y+z=2 & (L_2)\\3x-2y+z=14 & (L_1)\\-2x+5y+2z=2 & (L_3)\end{cases}$$

بإجراء العمليات التالية على سطور النظمة (S) .

$(L'_2)\mapsto(3L_2)-(L_1)$ و $(L'_3)\mapsto(L_3)+2(L_2)$

نحصل على النظمة (S') تكافئ النظمة (S) .

$$(S')\begin{cases}x+3y+z=2 & (L'_1)\\11y+2z=-8 & (L'_2)\\11y+4z=6 & (L'_3)\end{cases}$$

إذن : $(L'_3)-(L'_2)\Rightarrow 2z=14 \Leftrightarrow z=7$

ومنه : $x=1$ ، $y=-2$ ، $z=7$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي : $S=\{(1,-2,7)\}$

2 $\mathbb{R}^3$ مزود بالأساس $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المتجهات :

$\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{w}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

1) بين أن الأسرة $\mathcal{B}=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ غير مقيدة .

2) استنتج أن الأسرة $\mathcal{B}$ أساس ل $\mathbb{R}^3$.

الجواب :

1) نفترض أن الأسرة B مقيدة إذن : $\exists(x, y)\in\mathbb{R}^2 : \vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

ومنه نحصل على النظمة التالية :

$$(S):\begin{cases} x+y=-1 \\ x+2y=1 \\ -x+y=2 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ y=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

وهذا غير ممكن ومنه : B أسرة غير مقيدة .

2) بما أن B غير مقيدة فإنها حرة و $3=\dim\mathbb{R}^3=\mathrm{card}\,B$

وبالتالي B أساس للفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$.

3 حل في $\mathbb{R}^4$ باستعمال طريقة كوص النظمة الخطية التالية :

$$(S):\begin{cases} 10x+7y+8z+7t=32 \\ 7x+5y+6z+5t=23 \\ 8x+6y+10z+9t=33 \\ 7x+5y+9z+10t=31 \end{cases}$$

الجواب : لدينا :

$$(S):\begin{cases} 10x+7y+8z+7t=32 & (L_1) \\ 7x+5y+6z+5t=23 & (L_2) \\ 8x+6y+10z+9t=33 & (L_3) \\ 7x+5y+9z+10t=31 & (L_4) \end{cases}$$

نطبق العمليات التالية على سطور النظمة (S) .

$(L'_2)\mapsto(L_2)-\frac{7}{10}(L_1)$ و $(L'_3)\mapsto(L_3)-\frac{8}{10}(L_1)$ و $(L'_4)\mapsto(L_4)-\frac{7}{10}(L_1)$

النظمة (S) تكافئ النظمة (S') ؛ إذن :

$$(S'):\begin{cases} 10x+7y+8z+7t=32 & (L'_1) \\ \frac{1}{10}y+\frac{4}{10}z+\frac{1}{10}t=\frac{6}{10} & (L'_2) \\ \frac{4}{10}y+\frac{36}{10}z+\frac{34}{10}t=\frac{74}{10} & (L'_3) \\ \frac{1}{10}y+\frac{34}{10}z+\frac{51}{10}t=\frac{86}{10} & (L'_4) \end{cases}$$

بتطبيق العمليات التالية على سطور النظمة (S')

$(L''_3) \longmapsto (L'_3) - \frac{4}{10}(L'_2)$ ؛ $(L''_4) \longmapsto (L'_4) - (L'_2)$

النظمة (S') تكافيء النظمة (S'').

$$(S''): \begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 & (L''_1) \\ \frac{1}{10}y + \frac{36}{10}z + \frac{34}{10}t = \frac{6}{10} & (L''_2) \\ 2z + 3t = 5 & (L''_3) \\ 3z + 5t = 8 & (L''_4) \end{cases}$$

بتطبيق العملية التالية : $(L'''_4) \longmapsto (L''_4) - \frac{3}{2}(L''_3)$

النظمة (S'') تكافيء :

$$(S'''): \begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \\ \frac{1}{10}y + \frac{36}{10}z + \frac{34}{10}t = \frac{6}{10} \\ 2z + 3t = 5 \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad t = 1 \ ; \ x = 1 \ ; \ y = 1 \ ; \ z = 1$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي : $S = \{(1;1;1;1)\}$

4

حل في $\mathbb{R}^4$ النظمة الخطية التالية :

$$(S): \begin{cases} x - y - z + t = a \\ x - y + z - t = b \\ x + y - z - t = c \\ x + y + z + t = d \end{cases}$$

حيث : a و b و c و d أعداد حقيقية معلومة .

الجواب : لدينا :

$$(S): \begin{cases} x - y - z + t = a & (L_1) \\ x - y + z - t = b & (L_2) \\ x + y - z - t = c & (L_3) \\ x + y + z + t = d & (L_4) \end{cases}$$

لدينا : $(L_1) + (L_2) + (L_3) + (L_4) \Longrightarrow 4x = a + b + c + d$

ومنه : $x = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$

$$(L_1)+(L_2) \Rightarrow 2x-2y=a+b$$
$$\Leftrightarrow 2y=2x-(a+b)=\frac{-a-b+c+d}{2}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{-a-b+c+d}{4}$$
$$(L_2)+(L_3) \Rightarrow 2x-2t=b+c$$
$$\Leftrightarrow 2t=2x-(b+c)=\frac{-b-c+a+d}{2}$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{-b-c+a+d}{4}$$
$$(L_1)+(L_4) \Rightarrow 2x+2t=a+d$$
$$\Leftrightarrow 2t=-2x+(a+d)$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{-b-c+a+d}{4}$$

إذن : $z=\frac{-a-c+b+d}{4}$

وبالتالي مجموعة حلول النظمة (S) هي :

$$S=\left\{\left(\frac{a+b+c+d}{4};\frac{-a-b+c+d}{4};\frac{-a-c+b+d}{4};\frac{-b-c+a+d}{4}\right)\right\}$$

5 حل وناقش حسب قيم البارمتر الحقيقي m النظمة التالية :

$$(S)\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mz=1 \end{cases}$$

<u>الجواب</u> : لدينا :

$$(S):\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+my-z=1 \\ -x+y+mz=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=mx+y-1 \\ (m-1)(x-y)=0 \\ (m^2-1)x+(m+1)y=m+1 \end{cases}$$

الحالة 1 : إذا كان : $m\neq 1$ فإن : $\begin{cases} x=y \\ z=mx+y-1 \\ m(m+1)x=m+1 \end{cases}$

ومنه نستنتج حالات ثانوية :

* إذا كان : $m\notin\{0,-1\}$ فإن : $\begin{cases} x=\frac{1}{m} \\ y=\frac{1}{m} \\ z=\frac{1}{m} \end{cases}$

ومنه : $S=\left\{\left(\frac{1}{m};\frac{1}{m};\frac{1}{m}\right)\right\}$

** إذا كان : $m=0$ فإن النظمة (S) تصبح :
$$\begin{cases} z = y-1 \\ x = y \\ 0.x = 1 \end{cases}$$
وهذا غير ممكن ومنه : $S=\phi$

** إذا كان : $m=-1$ فإن النظمة (S) تصبح :
$$\begin{cases} x=y \\ z=-1 \end{cases}$$
ومنه : $S=\{(x;x;-1) \mid x\in\mathbb{R}\}$

الحالة 2 : إذا كان : $m=1$ فإن النظمة (S) تصبح :
$$\begin{cases} z=x+y-1 \\ 2y=2 \end{cases}$$ أي : $$\begin{cases} x=z \\ y=1 \end{cases}$$
ومنه : $S=\{(x;1;x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

6 حدد جميع الدوال الحدودية f التي درجتها أصغر من أو تساوي 3 وتحقق : $f(1)=-4$ و $f(-1)=4$ و $f(2)=1$ و $f'(-1)=0$

الجواب : نضع : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

الشروط المطلوبة تكافئ النظمة الخطية التالية :
$$(S):\begin{cases} a+b+c+d=-4 & (L_1) \\ -a+b-c+d=4 & (L_2) \\ 8a+4b+2c+d=1 & (L_3) \\ 3a-2b+c=0 & (L_4) \end{cases}$$
بإجراء العمليات التالية على سطور النظمة (S)
$(L'_2) \mapsto -\frac{1}{2}((L_2)-(L_1))$ و $(L'_3) \mapsto (L_3)-(L_1)$

النظمة (S) تكافئ النظمة (S').
$$(S'):\begin{cases} a+b+c+d=-4 & (L'_1) \\ a+c=-4 & (L'_2) \\ 7a+3b+c=5 & (L'_3) \\ 3a-2b+c=0 & (L'_4) \end{cases}$$
بإجراء العمليات التالية على سطور النظمة (S')

$(L''_3) \longmapsto \frac{1}{3}\left((L'_3)-(L'_2)\right)$ و $(L''_4) \longmapsto \frac{1}{2}\left((L'_4)-(L'_2)\right)$

النظمة (S') تكافيء النظمة (S'')

$$(S''):\begin{cases} a+b+c+d=-4 \\ a+c=-4 \\ 2a+b=3 \\ a-b=2 \end{cases}$$

بإجراء العمليات التالية على سطور النظمة (S'')

$(L'''_4) \longmapsto (L''_4)+(L''_3)$

النظمة (S'') تكافيء النظمة (S''') .

$$(S'''):\begin{cases} a+b+c+d=-4 \\ a+c=-4 \\ 2a+b=3 \\ 3a=5 \end{cases}$$

ومنه : $a=\frac{5}{3}$ ؛ $b=-\frac{1}{3}$ ؛ $c=-\frac{17}{3}$ ؛ $d=\frac{1}{3}$

وبالتالي المسألة تقبل حلاً وحيداً هي الحدودية f المعرف بمايلي :

$$f(x)=\frac{5}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

7 نضع : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) بين أن : $j^3=1$ و $1+j+j=0$

2) نعتبر النظمة (S) المعرفة بمايلي :

$$(S):\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$$

حيث : a و b و c أعداد حقيقية .

أ- حل في $\mathbb{C}^3$ النظمة (S).

ب- استنتج مقلوب المصفوفة $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

الجواب : 1) لدينا : $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ومنه : $j^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$

ولدينا: $1+j+j^2 = 1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$= 1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}$$

ومنه $1+j+j^2=0$

2) أ. لنحل النظمة (S).

لدينا:

$$(S): \begin{cases} x+y+z=a & (L_1) \\ x+jy+j^2z=b & (L_2) \\ x+j^2y+jz=c & (L_3) \end{cases}$$

$$(L_1)+(L_2)+(L_3) \Rightarrow 3x+(1+j+j^2)y+(1+j+j^2)z=a+b+c$$

$$\Leftrightarrow 3x=a+b+c$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

ولدينا:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a & (L'_1) \\ j^2x+y+jz=j^2b & (L'_2) \\ jx+y+j^2z=jc & (L'_3) \end{cases}$$

$$(L'_1)+(L'_2)+(L'_3) \Rightarrow (1+j+j^2)x+3y+(1+j+j^2)z=a+j^2b+jc$$

$$\Leftrightarrow 3y=a+j^2b+jc$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}(a+j^2b+jc)$$

ومنه: $x=\frac{1}{3}(a+b+c)$ و $y=\frac{1}{3}(a+j^2b+jc)$ و $z=\frac{1}{3}(a+jb+j^2c)$

وبعد التحقق في النظمة (S) من هذه الحلول، فإن مجموعة حلول النظمة (S) هي:

$$S=\left\{\left(\frac{a+b+c}{3};\frac{a+j^2b+jc}{3};\frac{a+jb+j^2c}{3}\right)\right\}$$

ب- لنحدد مقلوب المصفوفة M: M^{-1}

لتحديد M^{-1} يكفي تحديد حلول النظمة (S).

$$(S): \begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

وبما أن حلول النظمة (S) تكتب على شكل:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c \\ y = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}j^2 b + \frac{1}{3}jc \\ z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}jb + \frac{1}{3}j^2 c \end{cases}$$

ومنه :
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}j^2 & \frac{1}{3}j \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}j & \frac{1}{3}j^2 \end{pmatrix}$$

8 نعتبر المصفوفة التالية :

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) بين أن : $\det M(\alpha) = -(\alpha-1)^2(\alpha+2)$

2) متى يقبل $M(\alpha)$ مقلوبا في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ ؟

3) نعتبر النظمة الخطية التالية :

$$(S) : \begin{cases} x + y + \alpha z = a \\ x + \alpha y + z = b \\ \alpha x + y + z = c \end{cases}$$

حيث : a و b و c أعداد حقيقية و α بارامتر حقيقي .

ولتكن S مجموعة حلول النظمة (S) .

أ- حدد S إذا كان : $\alpha = 1$.

ب- حدد S إذا كان : $\alpha = -2$.

4) نفترض أن : $\alpha \notin \{1 ; -2\}$

أ- حدد S .

ب- استنتج $M^{-1}(\alpha)$.

__الجواب :__ 1) لدينا :

$$\det M(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-1) - (1-\alpha) + \alpha(1-\alpha^2) = -\alpha^3 + 3\alpha - 2$$

$$= -(\alpha-1)^2(\alpha+2)$$

2) $M(\alpha)$ يقبل مقلوب في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $\det M(\alpha) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha \neq -2$ و $\alpha \neq 1$

3) أ- إذا كان $\alpha = 1$ فإن النظمة (S) تكافيء :

$$x+y+z = a = b = c$$

* إذا كان : $a \neq b$ أو $a \neq c$ أو $b \neq c$

فإن : $S = \phi$

** إذا كان : $a = b = c$ فإن : $S = \{(x;y;a-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

ب- إذا كان $\alpha = -2$ فإن النظمة (S) تكافيء :

$$(S): \begin{cases} x+y-2z = a & (L_1) \\ x-2y+z = b & (L_2) \\ -2x+y+z = c & (L_3) \end{cases}$$

لدينا $(L_1)+(L_2)+(L_3) \Rightarrow 0 = a+b+c$

إذن :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} +y-2z = a \\ x-2y+z = b \\ -2x+y+z = -a-b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2a+b)+z \\ y = \frac{1}{3}(a-b)+z \\ -2x+y+z = -a-b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(2a+b)+z \\ y = \frac{1}{3}(a-b)+z \\ \underbrace{-\frac{2}{3}(2a+b)-2z+\frac{1}{3}(a-b)+z+z}_{a-b} = a-b \end{cases}$$

ومنه : $S = \{(\frac{1}{3}(2a+b)+z \,;\, \frac{1}{3}(a-b)+z \,;\, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

4) نفترض أن $\alpha \notin \{1,-2\}$

أ- لنحدد S .

لدينا.

$$(S): \begin{cases} x+y+\alpha z = a & (L_1) \\ x+\alpha y+z = b & (L_2) \\ \alpha x+y+z = c & (L_3) \end{cases}$$

$$(L_1)+(L_2)+(L_3) \Rightarrow (\alpha+2)(x+y+z) = a+b+c$$

$$\Leftrightarrow x+y+z = \frac{1}{\alpha+2}(a+b+c)$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x+y+\alpha z = a$$
$$\Leftrightarrow x+y+z+\alpha z = a+z$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha+2}(a+b+c)+\alpha z = a+z$$
$$\Leftrightarrow (\alpha-1)z = a-\frac{1}{\alpha+2}(a+b+c) = \frac{1}{\alpha+2}((\alpha+1)a-b-c)$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{(\alpha+2)(\alpha-1)}((\alpha+1)a-b-c)$$
$$(L_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2+\alpha}(a+b+c)+y(\alpha-1) = b$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(\alpha-1)(2+\alpha)}(-a+(\alpha+1)b-c)$$
$$(L_3) \Leftrightarrow \frac{1}{2+\alpha}(a+b+c)+x(\alpha-1) = c$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{(\alpha-1)(2+\alpha)}(-a-b+(1+\alpha)c)$$

وبالتالي :

$$S = \left\{\left(\frac{-a-b+(\alpha+1)c}{(\alpha-1)(\alpha+2)};\frac{-a+(\alpha+1)b-c}{(\alpha-1)(\alpha+2)};\frac{(\alpha+1)a-b-c}{(\alpha-1)(\alpha+2)}\right)\right\}$$

ب- بما أن حلول النظام (S) تكتب على الشكل :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}a + \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}b + \dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}c \\ y = \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}a + \dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}b + \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}.c \\ z = \dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}a + \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} + \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}.c \end{cases}$$

ومنه :

$$M^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} & -\dfrac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} & \dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \\ \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} & \dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} & \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \\ \dfrac{\alpha+1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} & \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} & \dfrac{-1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \end{pmatrix}$$

9 نعتبر النظمة الخطية التالية :

$$(S) : \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

لتكن S مجموعة حلول النظمة (S) .

1) حدد m لكي يكون لدينا : $\text{Card}\, S = 1$

2) حدد m لكي يكون لدينا : $S = \phi$

3) حدد m لكي يكون لدينا : $\text{Card}\, S \geqslant 2$

الجواب : 1) ليكن (x, y, z) من $\mathbb{R}^3$ لدينا :

$$(x;y;z) \in S \Longrightarrow (m+2)x + (m+2)y + (m+2)z = 3$$
$$\Leftrightarrow (m+2)(x+y+z) = 3$$

- إذا كان : $m+2 \neq 0$ فإن : $x+y+z = \dfrac{3}{m+2}$

ولدينا : $mx + y + z = 1 \Leftrightarrow mx - x + \dfrac{3}{m+2} = 1$

$$\Leftrightarrow (m-1)x = 1 - \frac{3}{m+2} = \frac{m-1}{m+2}$$

- إذا كان : $m \neq 1$ فإن : $x = \dfrac{1}{m+2}$

بالمثل نحصل على : $y = \dfrac{1}{m+2}$ و $z = \dfrac{1}{m+2}$

- إذن : $\text{Card}\, S = 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$

2) حسب ما سبق :

- إذا كان $m = -2$ فإن : $0.(x+y+z) = 3$

أي : $0 = 3$ وهذا غير ممكن .

ومنه : $m = -2 \Leftrightarrow S = \phi$.

3) إذا كان : $m = 1$ فإن النظمة (S) تكافئ : $x + y + z = 1$

تكافئ : $z = 1 - x - y$

ومنه : $S = \{(x; y; 1-x-y) \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

وبالتالي : $\text{Card}\, S \geqslant 2 \Leftrightarrow m = 1$

10 1) باستعمال طريقة كوص حدد مقلوب المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2) نعتبر النظمة (S) المعرفة بما يلي :

$$(S): \begin{cases} x^2 - yz = 5 \\ y^2 - zx = -1 \\ z^2 - xy = 3 \end{cases}$$

نضع :

$$M(x;y;z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

أ- بين أن : (x,y,z) حل للنظمة $(S) \Rightarrow A \times M(x,y,z) = (5x - y + 3z)I$

حيث : $I = M(1,0,0)$

ب- استنتج أن : $\exists k \in \mathbb{R} : x = 2k$ و $y = -k$ و $z = k$

الجواب : 1) لتكن $\vec{X}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $\vec{X'}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ متجهتين من $\mathbb{R}^3$.

لدينا : $\vec{X'} = A.\vec{X} \Leftrightarrow \vec{X} = A^{-1}.\vec{X'}$

$$\vec{X'} = A.\vec{X} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} 5x + 3y - z = a & (L_1) \\ -x + 5y + 3z = b & (L_2) \\ 3x - y + 5z = c & (L_3) \end{cases}$$

$(L'_2) \longmapsto \frac{1}{14}((3L_1) + (L_2))$ و $(L'_3) \longmapsto \frac{1}{14}((5L_1) + (L_3))$

النظمة (S) تكافئ النظمة (S')

$$(S'): \begin{cases} 5x + 3y - z = a & (L'_1) \\ x + y = \frac{1}{14}(3a + b) & (L'_2) \\ 2x + y = \frac{1}{14}(5a + c) & (L'_3) \end{cases}$$

$(L'_3) - (L'_2) \Longrightarrow x = \frac{1}{14}(2a + c - b)$

ومنه : $y = \frac{1}{14}(a + 2b - c)$ و $z = \frac{1}{14}(-a + b + 2c)$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{14}a - \frac{1}{14}b + \frac{1}{14}c \\ y = \frac{1}{14}a + \frac{2}{14}b - \frac{1}{14}c \\ z = -\frac{1}{14}a + \frac{1}{14}b + \frac{2}{14}c \end{cases}$$

ومنه :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{14} & \frac{-1}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{14} & \frac{-1}{14} \\ \frac{-1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}$$

2) أ- ليكن (x,y,z) من S :
$$A\times M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5x+3z-y & 5y+3x-z & 5z+3y-x \\ -x+5z+3y & -y+5x+3z & -z+5y+3x \\ 3x-z+5y & 3y-x+5z & 3z-y+5x \end{pmatrix}$$

بما أن :
$$(S) : \begin{cases} x^2-yz=5 \\ y^2-zx=-1 \\ z^2-xy=3 \end{cases}$$

فإن :
$$-x+5z+3y = (y^2-zx)x + (x^2-yz)z + (z^2-xy)y = 0$$
$$3x-z+5y = (z^2-xy)x + (y^2-zx)z + (x^2+yz)y = 0$$

ومنه :
$$A\times M(x,y,z) = \begin{pmatrix} 5x+3z-y & 0 & 0 \\ 0 & -y+5x+3z & 0 \\ 0 & 0 & 3z-y+5x \end{pmatrix}$$

وبالتالي :
$$A\times M(x,y,z) = (5x+3z-y)\,I$$

ب- حسب ما سبق لدينا :
$$(x,y,z) \text{ حل للنظمة } (S) \Rightarrow \begin{cases} -x+3y+5z=0 \\ 3x+5y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3y+5z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=2z \\ y=-z \end{cases}$$
$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{R} : x=2k \ ;\ y=-k \ ;\ z=k$$

وبالتالي :
$$(x,y,z)\in S \Rightarrow \exists k\in\mathbb{R} : x=2k \ ;\ y=-k \ ;\ z=k$$

تمارين للبحث

1 ليكن k من $\mathbb{R}$ نزود $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي $*$ معرفة بمايلي :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 , \quad x*y = x+y+kxy$$

1) ماذا يمكنك أن تقول على القانون $*$ إذا كان $k=0$ ؟

2) نفترض أن $k\neq 0$.

أ- هل للقانون $*$ عنصراً محايداً ؟

ب- حدد المجموعة G_k للعناصر القابلة للمماثلة بالقانون $*$.

2 نزود $\mathbb{R}$ بقانون تركيب داخلي T . نفترض أن القانون T يكون معرف بالنسبة لكل x و y من $\mathbb{R}$ بحيث : $xy\neq 1$

القانون T يحقق العلاقة : $(xTy)-xy(xTy)=(x+y)$

1) بين أن القانون T تجميعي .

2) بين أن القانون T تبادلي .

3) هل القانون T يقبل عنصراً محايداً ؟

4) هل كل عنصر يقبل مماثل بالنسبة للقانون T ؟

3 نعتبر المجموعة : $E=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x^2-2y^2=1\}$

والتطبيق T من $E\times E$ نحو $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعرف بمايلي :

$$\forall (x,y)\in E ; \forall (x',y')\in E : (x,y)T(x',y')=(xx'+2yy' ; xy'+x'y)$$

1) بين أن T قانون تركيب داخلي معرف على E .

2) هل القانون T يقبل عنصراً محايداً ؟

4 ليكن k من $\mathbb{R}$ و m من $\mathbb{N}$. نزود $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بمايلي :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad x*y = m(x+y)+kxy$$

1) ماهي الشروط التي يجب أن تحققها m و k لكي يكون لدينا تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(\mathbb{R},*)$ ؟

2) ماهي الشروط التي يجب أن تحققها m و k لكي يكون لدينا تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},\times)$ نحو $(\mathbb{R},*)$ ؟

5

نعتبر T قانون تركيب داخلي معرف على $\mathbb{R}$ بمايلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad xTy = xy - x - y + 2$$

1) حدد العنصر المحايد للقانون T.

2) حدد عناصر $\mathbb{R}$ القابلة للمماثلة في $(\mathbb{R},T)$.

3) بين أن المجال $]1,+\infty[$ جزء مستقر بالنسبة للقانون T.

4) بين أن كل عنصر من $]1,+\infty[$ قابل للمماثلة في $(]1,+\infty[,T)$

6

لتكن E مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي $*$ و $a\in E$

نفترض أن القانون $*$ تجميعي.

نعتبر التطبيقين: $g_a: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x*a \end{array}$ و $f_a: \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto a*x \end{array}$

1) نفترض أن القانون $*$ تبادلي.

أ- بين أنه إذا كان f_a تقابلاً فإنه يوجد عنصر محايد لـ $(E,*)$ ومماثل a' لـ a.

ب- نفترض أن f_a شمولياً.

هل يوجد عنصر عنصر محايد لـ $(E,*)$؟ هل يوجد مماثل a' لـ a؟

2) نفترض أن القانون $*$ غير تبادلي.

بين أنه إذا كان التطبيقان f_a و g_a تشمو ليين فإنه يوجد عنصر محايد لـ $(E,*)$ ومماثل a' لـ a.

7

نعتبر المجموعة $E=\{1,2,3,4\}$، مزودة بقانون التركيب الداخلي T المعرف بمايلي:

$$\forall (x,y)\in E^2: \begin{cases} xTy \text{ هو باقي القسمة الاقليدية} \\ x^y \text{ لـ } 5 \text{ على} \end{cases}$$

1) حدد جدول القانون T.

2) هل القانون T يقبل عنصر محايد؟

3) هل القانون T تجميعي؟ تبادلي؟

4) هل كل عنصر x من E له مماثل؟

5) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ- $1Tx=1$ ب- $xTx=3$ ج- $3Tx=1$

6) نعتبر التطبيق f معرف من E نحو E بمايلي : $\forall x\in E : f(x)=1Tx$

أ- هل التطبيق f تبايني ؟

ب- هل التطبيق f شمولي ؟

7) هل لدينا : $f(xTy)=f(x)Tf(y)$: $\forall (x,y)\in E^2$

8

نعتبر المجموعة $F=\{0,1,2\}$ ، نعرف على F قانون التركيب الداخلي $*$ بالجدول التالي :

$*$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

1) هل القانون $*$ تجميعي ؟ تبادلي ؟

2) نعتبر المجموعة $\mathcal{F}$ للتطبيقات f_a من F نحو F المعرفة بـ : $f_a(x)=a*(x*x)$ $(a\in F)$

نعرف القانون T بمايلي :

$$\forall (a,b)\in F^2 : f_a T f_b = f_{a*b}$$

أ- هل T قانون تركيب داخلي في $\mathcal{F}$ ؟

ب- هل T تجميعي؟

ج- نعتبر التطبيق φ من F نحو $\mathcal{F}$ معرف بـ : $\varphi(a)=f_a$

قارن : $\varphi(a)T\varphi(b)$ و $\varphi(a*b)$ لكل a و b من F .

9

لتكن $(E,*)$ مجموعة مزودة بقانون التركيب الداخلي $*$ تجميعي و ليكن e عنصراً من E .

نعتبر العلاقات التالية :

$$(R_1) : \begin{cases} \forall x\in E : x*e=x \\ \forall x\in E\ \exists x'\in E : x*x'=e \end{cases}$$

$$(R_2) : \forall (x,y,z)\in E^3 : (x*y)*z=(y*z)*x$$

$$(R_3) : \forall (x,y)\in E^2 : x^2*y=y=y*x^2$$

1) بين أن : $[\,(R_1) \Rightarrow (E,*)$ زمرة $]$

2) بين أن : $[\,(R_1)$ و $(R_2) \Rightarrow (E,*)$ زمرة تبادلية $]$

3) بين أن : $[\,(R_3) \Rightarrow (E,*)$ زمرة تبادلية $]$

10

لتكن G زمرة و H و K زمرتين جزئيتين لـ G .

بين أن : $H\cup K$ زمرة جزئية لـ G $\Leftrightarrow$ $H\subset K$ أو $K\subset H$

11

لتكن $(G,.)$ زمرة و e عنصرها المحايد وليكن n من $\mathbb{N}^*$ و a و b و c من G. بين الاستلزامات التالية :

1) $(a^5=b^4=e$ و $ab=ba^3) \Rightarrow (a^2b=ba$ و $ab^3=b^3a^2)$

2) $(a^5=e$ و $aba^{-1}=b^2) \Rightarrow (b^{31}=e)$

3) $(ab)^n=e \Longrightarrow ((ba)^n=e)$

4) $(x^3=y^2$ و $y^3=z^2$ و $z^3=x^2) \Leftrightarrow (x^{19}=e , y=x^8$ و $z=x^7)$

12

لتكن $(G,*)$ زمرة و H و K زمرتين جزئيتين لـ G.

نضع : $H*K=\{x*y \mid x\in H$ و $y\in K\}$

1) بين التكافؤات التالية :

$K*H$ زمرة جزئية لـ G $\Leftrightarrow$ $H*K$ زمرة جزئية لـ G.

$\Leftrightarrow H*K \subset K*H$

$\Leftrightarrow K*H \subset H*K$

2) نفترض أن L زمرة جزئية لـ G و $H*K=K*H$ و $H\subset L$

بين أن : $(H*K)\cap L = H*(K\cap L)=(K\cap L)*H$

13

لتكن $(G,*)$ مجموعة مزودة بقانون التركيب الداخلي $*$

بحيث : $x*x=e \quad \forall x\in E$

حيث : e هو العنصر المحايد للقانون $*$.

بين أن القانون $*$ تبادلي.

لتكن (G,T) و $(G',*)$ زمرتين وليكن f تشاكلا من G نحو G'

1) لتكن H زمرة جزئية من G.

بين أن $f(H)$ زمرة جزئية من G'.

2) لتكن H' زمرة جزئية من G'.

بين أن $f^{-1}(H')$ زمرة جزئية من G.

14

لتكن $(G,.)$ زمرة منتهية و f تشاكلا من $(G,.)$ نحو $(G,.)$

نضع : $A=\{x\in G \mid f(x)=x^{-1}\}$ (x^{-1} مماثل x)

بين أن : $\text{card} A \geq \frac{1}{2} \text{card} G$

15 نعتبر التطبيق f_a المعرف من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}^2$ بما يلي :

$$f(x,y) = \left(ax ; \frac{y}{a}\right) \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

1) بين أن f_a تطبيق تقابلي .

2) نعتبر المجموعة $f = \{f_a / a \in \mathbb{R}^*\}$ ، بين أن تركيب التطبيقات $\circ$ قانون داخلي في f .

3) نعتبر التطبيق h المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو f بما يلي : $h(a) = f_a$

أ- بين أن h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*; \times)$ نحو $(f, \circ)$.

ب- استنتج خاصيات القانون $\circ$ في $(f; \circ)$.

16 نعتبر المجموعة $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ، نعرف في E القانون T المعرف بمايلي :

$$\forall (a,b) \in E \text{ و } \forall (a',b') \in E \ : (a,b) T (a',b') = (aa', ab'+b)$$

1) أ- بين أن T قانون تجميعي .

ب- هل القانون T تبادلي ؟

ج- بين أن T يقبل عنصراً محايداً وأن كل عنصر من E يقبل مماثلاً يتم تحديده .

2) لتكن : $F = \{(a,0) / a \in \mathbb{R}^*\}$

بين أن F جزء مستقر من (E,T) وأن (F,T) و $(\mathbb{R}^*, \times)$ متشاكلتان تقابلياً .

3) ليكن φ التطبيق المعرف من E نحو $\mathbb{R}^*$ بمايلي : $\varphi(a,b) = a$

أ- بين أن φ تشاكلاً من (E,T) نحو $(\mathbb{R}^*, \times)$

ب- لتكن : $G = \varphi^{-1}(\{1\})$.

بين أن (G,T) و $(\mathbb{R}, \times)$ متشاكلتان .

4) لتكن $(f(\mathbb{R},\mathbb{R}), \circ)$ مجموعة الدوال العددية مزودة بعملية تركيب الدوال و $A(\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال $f_{(a,b)}$ بحيث :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_{(a,b)}(x) = ax + b \quad . \quad (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

بين أن : A جزء مستقر من $(f, \circ)$

17 نعتبر $h_{(\lambda,a)}$ التطبيق التآلفي في المستوي $\mathcal{P}$ نحو $\mathcal{P}$

الذي يربط كل نقطة $M(x,y)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بالنقطة $M'(x',y')$

بحيث : $\begin{cases} x' = x + \lambda + a \\ y' = y \end{cases}$ (λ بارامتر حقيقي)

1) بين أن $h_{(\lambda,a)}$ تقابل .

2) أ- حدد المركب $h_{(\lambda,0)} \circ h_{(\mu,0)}$ واستنتج أن :

$$h_{(\lambda,a)} \circ h_{(\mu,b)} = h_{(\lambda+\mu\,;\,a+b)}$$

ب- بين أن المجموعة $\mathcal{H}$ للتطبيقات $h_{(\lambda,a)}$ مزود بقانون التركيب الداخلي $\circ$ ؛ زمرة تبادلية متشاكلة تقابلية مع $(\mathbb{R}^2,+)$

18 لتكن $(G,\cdot)$ زمرة . لكل جزء A من G نعرف المجموعة

$$C(A) = \{x \in G \mid \forall a \in A : xa = ax\}$$

1) بين أن $C(A)$ زمرة جزئية لـ G .

2) بين أن : $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(G))^2 : \quad A \subset B \Longrightarrow C(B) \subset C(A)$

3) بين أن : $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(G))^2 : \begin{cases} C(A \cup B) \subset C(A \cap B) \\ C(A \cup B) \subset C(A) \cap C(B) \end{cases}$

4) بين أن : $\forall A \in \mathcal{P}(G) : \quad A \subset C(C(A))$

5) بين أن : $\forall A \in \mathcal{P}(G) : \quad C(A) \subset C(C(C(A)))$

19 نعتبر المجال $I =]-1,1[$

1) أ- بين أن : $\forall (t\,;s) \in I^2 \quad st + 1 \neq 0$

ب- ليكن $s \in I$ نعتبر الدالة : $T_s : t \longmapsto \dfrac{s+t}{st+1}$

ادرس تغير T_s على I .

ج- لكل s و t من I ، نضع : $s * t = \dfrac{s+t}{st+1}$

استنتج مما سبق أن $*$ قانون تركيب داخلي في I .

2) أ- اعط جدول تغيرات الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي : $G(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

ب- بين أن : $G(x) \leq x \quad . \forall x \in \mathbb{R}^+$

ج- بين أن G تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(I;*)$

د- استنتج بنية $(I;*)$.

3) ليكن H التطبيق العكسي للتطبيق G .

ليكن a من $\mathbb{R}$ ، نعتبر التطبيقين F_a و f_a بحيث : $\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R},\ F_a(x)=a.x \\ f_a = G\circ F_a\circ H \end{cases}$

أ- بين أنه إذا كان $a\geq 0$ فإن f_a دالة تزايدية على I .

ب- بين أن : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 ; \forall t\in I \quad f_{a+b}(t)=f_a(t)\times f_b(t)$

ج- ليكن $a\leq b$ و $t\in[0,1[$. بين أن : $H(t)\geq 0$ ثم استنتج أن : $f_a(t)\leq f_b(t)$

20

نعتبر في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ المصفوفتين : $A=\begin{pmatrix} 0&1&1\\ 1&0&1\\ 1&1&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$

والمجموعة : $E=\{M\in\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2 : M=aI+bA\}$

1) أ- بين أن : $A^2=A+2I$

ب- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة واحدية .

ج- بين أن A تقبل مقلوبا في E وحدد A^{-1} .

2) ليكن α من $\mathbb{R}$ ؛ نضع : $N=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

تحقق من أن $N\in E$ وحدد شرطا كافيا ولازما لكي تقبل N مقلوبا في E وحدد N^{-1} .

21

نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix} 1&1&1\\ 0&1&1\\ 0&0&1\end{pmatrix}$

1) أحسب : A^2 و A^3 .

2) استنتج A^n لكل n من $\mathbb{N}$.

3) تحقق من أن : $A^3-3A^2+3A=I$

4) استنتج A^{-1} .

21 Bis

نضع : $\mathbb{M}=\left\{A=\begin{pmatrix} 1&a\\ 0&1\end{pmatrix} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$

1) هل $(\mathbb{M},+)$ زمرة ؟ هل $(\mathbb{M},\times)$ زمرة ؟

2) أحسب A^n بدلالة n .

3) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* : \frac{1}{2n+1}\left(A+A^2+\cdots+A^{2n+1}\right)\in\mathbb{M}$

22

نعتبر التطبيق $\begin{array}{rccc}\psi : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{x} & \longmapsto & \overline{a.x}\end{array}$: $(a,n)\in[\![1,n-1]\!]\times\mathbb{N}^*$

1) بين أن ψ تشاكل من $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z};+)$ نحو $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$

2) بين أن ψ تقابل إذا وفقط إذا كان : $a\wedge n=1$

22

لتكن $(A,+,\cdot)$ حلقة واحدية و 1_A هو العنصر المحايد للقانون الداخلي .

نضع : $U=\{a\in A \mid \exists b\in A : ab=ba=1_A\}$

1) بين أن لكل x و y من A : $1_A-xy\in U \Leftrightarrow 1_A-yx\in U$

2) نعتبر الحلقة $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$. $A=M_2(\mathbb{R})$

نضع : $1_A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $x=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$; $y=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$; $z=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

أ- أحسب : $\det(1_A-xyz)$ و $\det(1_A-xzx)$

ب- ماذا تستنتج ؟

23

نعتبر التطبيق F المعرف بمايلي :

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$Z=x+iy \longmapsto e^x(\cos y+i\sin y)$$

مع $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

1) أحسب $|F(Z)|$ بدلالة x و y و $\arg(Z)$

2) استنتج أن F شمولي من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}^*$.

3) هل F تطبيق تباني ؟

4) ليكن z و z' من $\mathbb{C}$ بين أن : $F(z+z')=F(z)\times F(z')$

5) بين أن F تشاكل من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(\mathbb{C}^*,\times)$

6) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $F(x)\in\mathbb{R}^{*+}$.

7) نضع : $I=\{xi \mid x\in\mathbb{R}^*\}$ و $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$

أ- بين أن لكل z من I : $F(z)\in I$.

ب- استنتج أن F تشاكل من $(I,+)$ نحو $(U,\times)$.

24

نعتبر المجموعة : $A=\{a+ib \mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$

1) بين أن $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

2) هل هي كاملة ؟

3) نعتبر التطبيق :

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$z=a+ib \longmapsto \varphi(z)=\sqrt{a^2+b^2}$$

أ- بين أن φ تشاكل من $(A,\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\times)$

ب- ليكن z من E . بين أن : z يقبل مماثل بالنسبة $\times$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(z)=1$

4) نرمز ب U بمجموعة عناصر A التي تقبل مماثل في A .

أ- حدد بإدراك عناصر U .

ب- حدد بنية $(U,\times)$.

25

ليكن α و β حلي المعادلة : $x^2-2x-2=0$

نعتبر المجموعة : $A=\{x+y\alpha \mid (x,y)\in\mathbb{Z}^2\}$

1) بين أن : $(A;+;\times)$ حلقة واحدية تبادلية

2) ليكن a و a' و b و b' من $\mathbb{Z}$.

أ- بين أن : $a+b\alpha=0 \Rightarrow a=b=0$

ب- بين أن : $a+b\alpha=a'+b'\alpha \Rightarrow a=a'$ و $b=b'$

ج - بين أن : $a+b\beta\in A$

د- بين أن : $(a+b\alpha)(a+b\beta)\in A$

3) ليكن f تشاكلاً من $(A;+;\times)$ نحو $(A;+;\times)$ بحيث :

$(*)$ $\forall m\in\mathbb{Z} : f(m)=m$

أ- بين أن $f(\alpha)$ حل للمعادلة : $x^2-2x-2=0$

ب- حدد جميع التشاكلات من $(A;+;\times)$ نحو $(A;+;\times)$ التي تحقق $(*)$

26

لتكن $(A;+;\times)$ حلقة عنصرها المحايد 0_A بالنسبة للمجمع .

1) نعرف في A القانون الداخلي T كالتالي : $\forall(x,y)\in A^2 : xTy=x+y-xy$

بين أن T تجميعي وله عنصر محايد وأن T ليس توزيعيا بالنسبة لـ $+$

في حالة : $A-\{0_A\}\neq\phi$.

2) نفترض في هذا السؤال أن : $(\exists! x_0\in A)(\forall y\in A)\quad x_0Ty\neq 0_A$

أ- بين أن : $x_0\neq 0_A$

ب- بين أن : $(\forall y\in A)\quad x_0Ty=x_0$

(يمكنك تركيب x_0Ty مع عنصر a من A) واستنتج أن x_0 عنصر محايد على اليسار بالنسبة للقانون $\times$.

ج - بين أن : $(\forall y\in A)\quad yTx_0=x_0$ (استعمل البرهان بالخلف بوضع $yTx_0=z$ و $z\neq x_0$) استنتج أن x_0 هو العنصر المحايد بالنسبة لـ $\times$ في A

د - ليكن x من $A-\{0_A\}$. أحسب : $(x_0+x)T(x_0+y)$

واستنتج وجود عنصر y_1 من A حيث : $xy_1=x$

هـ - استنتج أن $(A;+,\times)$ جسماً .

27

1) بين أن : $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

2) لتكن المجموعة $K=\{a+b\sqrt{2} \mid (a,b)\in\mathbb{Q}^2\}=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

أ- بين أن : $\forall x\in K\ \exists!(a,b)\in\mathbb{Q}^2: x=a+b\sqrt{2}$

ب- بين أن $(K,+,\times)$ جسم .

3) بين أنه إذا كان $x\in K$ توجد حدودية $P(x)=x^2-\alpha x+\beta$. عواملها تنتمي إلى $\mathbb{Q}$ تقبل x جذراً لها و جذر ينتمي إلى K

4) ليكن x من K ، نضع : $\bar{x}=a-b\sqrt{2}$ $(x=a+b\sqrt{2})$

و $N(x)=x\bar{x}$

بين أن : $\forall(x,y)\in K^2 :\ \overline{xy}=\bar{x}\,\bar{y}$

وأن : $N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

5) نضع: $A=\{a+b\sqrt{2} \mid (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

أ- بين أن $(A,+,\times)$ حلقة جزئية لـ K .

ب- بين أنه لكي يكون x من A مقلوب في A يكفي أن يكون : $|N(x)|=1$

ج- ليكن $x=a+b\sqrt{2}$ عنصراً من A بحيث : $a>0$ و $b>0$

نفترض أن x قابل للقلب في A .

- بين أن : $b\le a\le 2b$.

- نضع $x=(1+\sqrt{2})x_1$ و $x_1=a_1+b_1\sqrt{2}$

بين أنه إذا كان : $a=b$ فإن : $b_1=0$ و $a_1=1$

وإذا كان : $a\ne b$ فإن : $0<b_1<b$ و $0<a_1<a$

واستنتج أنه يوجد n من $\mathbb{N}$: $x=(1+\sqrt{2})^n$ و ميز جميع العناصر القابلة للقلب في A .

6) بين أن : $\forall z\in K\ \exists q\in A\ ;\ |N(z-q)|<1$

استنتج أن : $\forall(x,y)\in A\times A-\{0_A\}$: $x=qy+r$ و $|N(r)|<|N(y)|$

28

ليكن a من $\mathbb{R}$ و التطبيق f_a المعرف من $\mathcal{P}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل $M(x,y)$ بالنقطة $M'(x',y')$ بحيث :

$$\begin{cases} x' = x+a \\ y' = 2ax+y+a^2-4a \end{cases}$$

نعتبر المجموعة : $A=\{f_a \mid a\in\mathbb{R}\}$

1) بين أن f_a تقابل من $\mathcal{P}$ نحو $\mathcal{P}$.

2) بين أن تركيب التطبيقات $\circ$ قانون داخلي في A .

3) أ- بين أن التطبيق : $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ ، $a \longmapsto \varphi(a)=f_a$ تشاكلاً تقابلياً من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(A,\circ)$

ب- حدد بنية $(A,\circ)$ وعرف تحليليا التطبيقين : $(f_a)^{-1}$ و $f_a\circ f_a$.

29

نعتبر المجموعة : $E=\left\{ M(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x+y \end{pmatrix} \mid (x,y)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

1) بين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي .

2) ليكن $z_0=\alpha+\beta i$ حيث : $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

نعتبر التطبيق :

$$f : E \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$M(x,y) \longmapsto x+yz_0$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(E;+)$ نحو $(\mathbb{C};+)$

ب- حدد z_0 لكي يكون f تشاكلا من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$

3) حدد مصفوفة J من E بحيث : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : M(x,y)=xI+yJ$

حيث : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، ثم استنتج أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

حدد بعده

4) نضع : $G=\{J^n \mid n\in\mathbb{N}\}$

أ- بين أن $(G;\times)$ زمرة تبادلية .

ب- أحسب J^2 ؛ J^3 .

ج- استنتج أن G مجموعة منتهية .

د- حدد عناصر G

e- أنشئ تشاكلاً تقابلياً بين الزمرتين $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z};+)$ و $(G,\times)$

حيث : q عدد صحيح طبيعي غير منعدم يتم تحديده .

30

لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية بحيث : $\forall x\in A : x^3=x$

نرمز 1_A للعنصر المحايد للقانون $\times$ و 0_A للعنصر المحايد للقانون $+$.

و $nx = \underbrace{x+x+\dots+x}_{n \text{ مرة}}$ مع $x\in A$ و $n\in\mathbb{N}^*$

1) بين أن : $\forall x\in A : 6x=0_A$

2) نضع : $A_1=\{x\in A \mid 2x=0_A\}$ و $A_2=\{x\in A \mid 3x=0_A\}$

أ- بين أن : $(A_1,+,\times)$ و $(A_2,+,\times)$ حلقتين واحديتين .

ب- بين أن : $A=A_1+A_2$

ج- بين أن : $\forall (x,y)\in A_1\times A_2 : xy=yx=0_A$

3) بين أن : $\forall x\in A_1 : x^2=x$

4) استنتج أن : A_1 حلقة تبادلية .

5) بين أن : $\forall (x,y)\in A_2^2 : xy=0_A \Rightarrow yx=0_A$

6) ليكن x من A_2 ، بين أن :

$$1_{A_2}=-(x^2-1_{A_2})-(x^2-x)-(x^2+x)$$

7) استنتج أن كل عنصر y من A_2 يمكن أن يكتب على شكل

$$y=y_1+y_2+y_3$$

مع : $xy_1=(x+1_{A_2})y_2=(x-1_{A_2})y_3=0_A$

8) استنتج أن A_2 و A_1 حلقتان تبادليتان .

31

ليكن $(K,+,\times)$ جسم بحيث : $K\neq\{0\}$ و

(e العنصر المحايد لـ $\times$) $\quad$ $\forall a\in K\setminus\{0,-e,e\} : a^{-1}=-a$ $\quad$ (1)

1) بين أن : $\quad$ $\forall a\in K\setminus\{0,-e,e\} : a^2=-e$ $\quad$ (2)

2) باعتبار العنصر $a+e$ ، استنتج أن e يحقق أحد الشرطين :

(أ) : $e+e+e=0$ و (ب) $e+e+e+e=0$

3) بين بدراسة : $(a+e)^2$ أن : $\text{card}\,K=3$ أو $\text{card}\,K=5$

4) في كل حالة من الحالتين ، اعط جدول الجمع و الضرب في K

اعط مثالاً بسيطاً لجسم K يحقق (1) .

32 نعتبر المصفوفة: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

1) أحسب: A^2 و A^3.

2) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad A^{n+1}=\begin{pmatrix}2^n&0&2^n\\0&1&0\\2^n&0&2^n\end{pmatrix}$

33 نعتبر المصفوفة: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

1) أحسب: A^2 و A^3.

2) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}:\quad A^n=\begin{pmatrix}1&2n&a_n\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}$

حيث: $a_{n+1}=a_n+4n+3$.

3) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=2n^2+n$.

34 لتكن p و q عددين حقيقيين ثابتين.

نضع: $A=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&-b\\qb&a+pb\end{pmatrix}\ \middle|\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1) بين أن: $(A,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

2) بين أن إذا كان: $p^2-4q<0$ فإن $(A;+;\times)$ جسم تبادلي.

3) نفترض في كل ما تبقى أن: $q=1$ و $p=2$.

أ- نعتبر التطبيق d المعرف بمايلي:
$$d: A\longrightarrow\mathbb{R}^*$$
$$M(a,b)\longmapsto \det(M(a,b))$$

بين أن d تشاكل من $(A,\times)$ نحو $(\mathbb{R}^*,\times)$.

ب- نعتبر المجموعة: $\operatorname{Ker} d=\{M\in A\ /\ d(M)=1\}$

حدد بنية المجموعة $(d;\times)$.

ج- المستوى P مزود بالمعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، نعتبر مجموعة النقط N من المستوى المعرفة بمايلي:

$N=\{M(a,b)\ \mid\ M(a,b)\in\operatorname{Ker} d\}$

حدد وأنشئ المجموعة N.

د- حل في المجال $[0,2\pi[$ المعادلة: $\det\left(M\left(\frac{\cos x}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\right)=\frac{3}{4}$

حيث: x هو المجهول.

35

نعتبر المجموعة : $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y-t=0\}$

1) بين أن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) حدد أساسا للفضاء $(E;+;\cdot)$ ثم استنتج بعد E.

3) لتكن $\vec{u}=(2;0;0;2)$ و $\vec{v}=(0;-1;0;-1)$ و $\vec{w}=(0;1;1;1)$

بين أن الأسرة $\mathcal{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس للفضاء $(E;+;\cdot)$.

36

ليكن Ψ التطبيق المعرف ب : $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$\Psi : M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \Psi(M)=\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) بين أن لكل M_1 و M_2 من $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ و لكل λ من $\mathbb{R}$:

$\Psi(M_1+M_2)=\Psi(M_1)+\Psi(M_2)$ و $\Psi(\lambda M_1)=\lambda\Psi(M_1)$

2) نعتبر المجموعتين :

$$N(\Psi)=\left\{M\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \Psi(M)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$Im(\Psi)=\{\Psi(M) \mid M\in\mathbb{M}_2(\mathbb{R})\}$$

أ- حدد $N(\Psi)$ و $Im(\Psi)$.

ب- بين أن $N(\Psi)$ و $Im(\Psi)$ هما فضاءات متجهية ثم حدد أساس لكل من $N(\Psi)$ و $Im(\Psi)$.

ج- حدد $\dim\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

د- قارن $\dim\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ و $\dim N(\Psi)+\dim Im(\Psi)$

37

نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \mid (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

نضع : $I=M(1,0,0)$ ؛ $J=M(0,1,0)$ ؛ $K=M(0,0,1)$

1) أ- أحسب $M(a,b,c)$ بدلالة I و J و K و a و b و c.

ب- بين أن : $J^2=K$ و $K^2=J+K$ و $JK=KJ=I+J$

2) بين أن : $(E;+;\times)$ حلقة واحدية.

3) بين أن : $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي، ثم محددا بعده.

4) تحقق من أن : $J^2=I+J$ وحدد J^{-1}.

38 نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a\end{pmatrix} / (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

Ⓘ- نضع : $I=M(1,0,0)$ و $J=M(0,1,0)$ و $K=M(0,0,1)$

1) بين أن : $(E;+;\times)$ حلقة ، هل هي كاملة ؟

2) بين أن : $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ثم حدد $\dim E$

3) ما هو الشرط اللازم و الكافي لكي تكون $(E,+,\times)$ جسم ؟

4) ليكن n من $\mathbb{N}$ ، أحسب :

أ- $(bJ+cK)^n$

ب- استنتج إحداثيات $M(a,b,c)$ في الأساس $\{I,J,K\}$

5) نضع : $n!\,u_n=\left(M(a,b,c)\right)^n$ و $v_n=1+u_1+u_2+\dots+u_n$

أ- حدد إحداثيات v_n في الأساس $\{I,J,K\}$.

ب- نرمز ب: α_n و β_n و γ_n لإحداثيات v_n أحسب مايلي :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n$

Ⓘⓘ نضع : $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

1) أ- تحقق أن : $A^2-3A+2I=0$.

ب- استنتج أن A يقبل مقلوب وحدد A^{-1}.

ج) باستعمال طريقة كوص حدد A^{-1}.

3) نضع : $B_n=A^n+A-2I$ ؛ بين أن :

أ- $A^{n+2}-2A^{n+1}=A^{n+1}-2A^n$

ب- $A^{n+2}=2A^{n+1}+A-2I$

ج- $B_{n+2}=2B_{n+1}$

4) استنتج B_n بدلالة B_0 و n.

5) حدد A^n بدلالة n.

39 1) لتكن E مجموعة الدوال f من $\mathbb{R}$ بحيث :

$\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

بين أن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) لتكن F مجموعة الدوال التآلفية من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$. بين أن $F\subset E$ و $(F,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

40 لتكن $E=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x\in\mathbb{R}: f(x)=A(x)\cos x+B(x)\sin x\}$.

حيث: A و B حدوديتان درجتهما أصغر أو تساوي 1.

1) بين أن: $(E;+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) نعتبر الأسرة: $\mathcal{B}=(f_1;f_2;f_3)$

حيث: $f_1(x)=\cos x$; $f_2(x)=\sin x$; $f_3(x)=x\cos x$; $f_4(x)=x\sin x$

بين أن $\mathcal{B}$ أساس للفضاء $(E;+;.)$.

3) ليكن a من $\mathbb{R}$، نعتبر الدالتين g و h بحيث:

$g(x)=\cos(a+x)$ و $h(x)=\sin(a+x)$

أ- تأكد من أن: $(h;g)\in E^2$ ثم حدد إحداثيات g و h بالنسبة لـ $\mathcal{B}$

ب- هل الأسرة $\mathcal{B}'=(g;h;f_3;f_4)$ أساس للفضاء $(E;+;.)$ ؟

41 لتكن $(\mathcal{E})$ مجموعة الدوال الحدودية التي درجتها أصغر أو تساوي 2. نعتبر الحدوديات f و g و h المعرفة بما يلي:

$\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=x^2+x$; $g(x)=x+1$; $h(x)=x^2+1$

1) بين أن $\mathcal{B}=(f;g;h)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{E};+,.)$

2) لتكن f_1 و g_1 و h_1 الحدوديات المعرفة بما يلي:

$\forall x\in\mathbb{R}: f_1(x)=2x^2+x+1$; $g_1(x)=-x^2+3x+2$; $h_1(x)=2x+3$

أ- حدد إحداثيات كلاً من f_1 ; g_1 ; h_1 بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$.

ب- بين أن: $\mathcal{B}'=(f_1;g_1;h_1)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{E};+;.)$.

42 لتكن $\mathcal{I}$ مجموعة الدوال العددية الفردية المعرفة على $\mathbb{R}$ و $\mathcal{P}$ مجموعة الدوال العددية الزوجية المعرفة على $\mathbb{R}$.

1) بين أن: $(\mathcal{I};+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2) بين أن: $(\mathcal{P};+;.)$ فضاء متجهي حقيقي.

3) أ- حدد تقاطع المجموعتين $\mathcal{I}$ و $\mathcal{P}$.

ب- بين أن كل دالة f تكتب بشكل وحيد كمجموع لعنصر من $\mathcal{I}$ وعنصر من $\mathcal{P}$.

43 ليكن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و f تطبيق من E نحو F بحيث :

$(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2)(\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2)\ f(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha.f(\vec{x})+\beta.f(\vec{y})$

نضع : $\ker f=\{\vec{x}\in E\ /\ f(\vec{x})=\vec{0}\}$

1) بين أنه إذا كان F جزء غير فارغ من E و يحقق :

$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\quad \forall(\vec{x},\vec{y})\in F^2:\quad \alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in F$

فإن $(F;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

2) بين أن $(f(E);+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

3) بين أن $(\ker f;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

4) بين أن f تطبيق تبايني إذا وفقط إذا كان : $\ker f=\{\vec{0}\}$

5) بين أنه إذا كانت : $\mathcal{B}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ أسرة مستقلة و f تطبيق تبايني فإن : $\mathcal{B}'=(f(\vec{x}_1);f(\vec{x}_2),\dots,f(\vec{x}_n))$ أسرة مستقلة .

6) نفترض أن : $\dim E=n$. بين أن العبارات a و b و c متكافئة

(a) f تطبيق تبايني من E نحو E .

(b) f تطبيق شمولي من E نحو E .

(c) f يحول أساس لـ E إلى أساس لـ E .

7) ليكن $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$ أساس للمستوى المتجهي $(E;+;\cdot)$

أ- بين أنه إذا كان $(\vec{e}_{p+1},\dots,\vec{e}_n)$ أساس للفضاء متجهي $(\ker f;+;\cdot)$

فإن $(f(\vec{e}_1);f(\vec{e}_2);\dots,f(\vec{e}_p))$ أساس للفضاء المتجهي $(f(E);+;\cdot)$

ب- استنتج أن : $\dim E=\dim\ker+\dim f(E)$

44 لتكن E مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

نعتبر التطبيق : $\Psi:\ E\longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

$f\longmapsto \Psi(f)=\begin{pmatrix} f(\alpha) & 0\\ f'(\alpha) & f(\alpha)\end{pmatrix}$

1) بين أن $(E;+;\times)$ حلقة .

2) بين أن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي .

3) بين أن $\Psi(f+g)=\Psi(f)+\Psi(g)$ $\quad\forall(f;g)\in E^2\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\Psi(\alpha f)=\alpha\Psi(f)$

4) بين أن Ψ تشاكل من $(E;+;\times)$ نحو $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$.

45

حل في $\mathbb{R}^3$ النظمة التالية :

$$(S):\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y-z=2 \\ 4x+9y+z=4 \end{cases}$$

46

1) لتكن a و b و c أعداد حقيقية معلومة . حل في $\mathbb{R}^3$ النظمة :

$$(S):\begin{cases} 2x-y+z=a \\ x+2y-4z=b \\ 2x-y+3z=c \end{cases}$$

2) نعتبر المصفوفتين :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

أ- حدد مقلوب المصفوفة A .

ب- حدد المصفوفة X التي تحقق : $AX=B$.

47

لتكن a و b و c أعداد حقيقية معلومة .

حل باستعمال طريقة كوص النظمة التالية :

$$(S):\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ x+by+b^2z=0 \\ x+cy+c^2z=0 \end{cases} \qquad (x;y;z)\in\mathbb{R}^3$$

48

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية معلومة .

حل في $\mathbb{R}^3$ النظمة التالية :

$$(S):\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$$

49

حل في $\mathbb{R}^3$ النظمات التالية : $(\lambda\in\mathbb{R})$

$$(S_1):\begin{cases} \lambda x+(\lambda+1)y+(\lambda+2)z=0 \\ x-y-z=0 \\ 2x+y+2z=0 \end{cases} \qquad (S_2):\begin{cases} (1-\lambda)x+2y-3z=0 \\ 2x+(1-\lambda)y+3z=0 \\ -3x+3y-(4+\lambda)z=0 \end{cases}$$

$$(S_3):\begin{cases} -2x+ay+a^2z=0 \\ \frac{1}{a}x-2y+az=0 \\ \frac{1}{a^2}x+\frac{1}{a}y-2z=0 \end{cases} \qquad (a>0)$$

العدد π

<u>نبذة تاريخية عن العدد</u> π

حاول الإنسان منذ القدم تحديد العلاقة بين محيط دائرة وشعاعها وبالضبط إيجاد خارج (rapport) محيط دائرة وقطرها .

فقد عثر في وثائق مصرية (على ورق البردي) يرجع تاريخها إلى ما قبل الميلاد بحوالي 2000 سنة على تقريبات للعدد π نذكر منها : $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3{,}1604925...$.

أما البابليون فقد سبق لهم أن استعملوا تقريبات أخرى للعدد π منها 3 و $3+\frac{1}{8}$ و $3+\frac{1}{7}$.

وبعد ذلك بكثير ، تمكن العالم الرياضي الإغريقي **أرخميدس Archimède** 287ق.م. - 212 ق.م.) من إعطاء التأطير التالي للعدد π : $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$.

وإذا انتقلنا إلى عصر النهضة ، نجد أن أحسن تقريب تم التوصل إليه هو التقريب العشري للعدد π إلى 10^{-34} أي بواسطة عدد عشري (جزؤه الصحيح 3) وجزؤه العشري يتضمن 34 رقما (أي بواسطة 34 رقم وراء الفاصلة) .

وهناك صيغ أخرى ستأتي بعد ذلك ، نقف في ما يلي عند بعض منها .

فهذا الرياضي الفرنسي **فييت Viète** (1540م-1603م) يقدم الصيغة التالية :

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}...$$

وبعده أعطى الرياضي البريطاني **فاليس Wallis** (1616م- 1703م) الصيغة التالية :

$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2^n\,n!}{3.5.7...(2n-1)}\right)^2$ وكان ذلك سنة 1655 .

وجاء بعده العالم السكوتلاندي **كريكوري Gregory** (1638م- 1675م) سنة 1671 بالصيغة : $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$.

وبعده أثبت **ليبنيز Leibniz** الصيغة : $\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{3^2\,5}-\frac{1}{3^3.7}+...\right)$

ثم تقدم بعد ذلك **Johann M.** بالصيغة الشهيرة :

$$\frac{\pi}{4}=4Arc\tan\left(\frac{1}{5}\right)-Arc\tan\left(\frac{1}{239}\right)$$

والتي تمكن باستعمالها سنة 1706من تحديد تقريب عشري للعدد π إلى 10^{-100}.

هذا وقد أعطى الرياضي المرموق أولير **Euler** (1707م- 1783م) صيغا أخرى نذكر منها :

$$\pi = \sqrt{6}\left(\sqrt{\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)}\right)$$

$$\cdot\ \pi = \sqrt[4]{90}\left(\sqrt{\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4}\right)}\right)$$

إن استعمال الصيغة : $\frac{\pi}{4} = Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{5}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{8}\right)$ ، سنة 1844

مكن الرياضي **Johann** من حساب π إلى 10^{-205} هذا مع العلم أن "الرقم القياسي" لحساب أدق تقريب عشري للعدد π بدون استعمال آلة حاسبة هو للعالم الرياضي **William Shanks** (1812م- 1882م) حيث حدد التقريب العشري للعدد π إلى 10^{-527} (**527** رقم وراء الفاصلة) .

وقد تمكن بعد ذلك **Ferguson** سنة 1947 باستعمال آلة حاسبة "صغيرة " واعتماد الصيغة $\frac{\pi}{4} = 3Arc\tan\left(\frac{1}{4}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{20}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{1985}\right)$ من حساب تقريب عشري إلى 10^{-880} وهو "الرقم القياسي" قبل ظهور الحاسوب والبرمجة والإعلاميات. وبظهور الحاسوب ودخول تقنيات البرمجة ، بدأت " الأرقام القياسية " تتحطم يوما بعد يوم . ففي سنة 1949 توصل **Eriac** إلى حساب **2037** رقما بعد الفاصلة (تقريب عشري إلى 10^{-2037}) وذلك باستعمال صيغة **Machin** ، وتمكن **Gennys** سنة 1958من حساب **10000** رقما بعد الفاصلة ، وفي سنة 1961 وباستغلال العلاقتين :

$$\frac{\pi}{4} = 6Arc\tan\left(\frac{1}{8}\right) + 2Arc\tan\left(\frac{1}{57}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{239}\right)$$

و $$\frac{\pi}{4} = 12Arc\tan\left(\frac{1}{18}\right) + 8Arc\tan\left(\frac{1}{57}\right) - 5Arc\tan\left(\frac{1}{239}\right)$$

تمكن **S.& W.** من حساب **100000** رقم بعد الفاصلة ، وفي سنة 1973 توصل **Guillond** و **Bouyer** من حساب **1000000** رقما بعد الفاصلة ، وفي سنة 1986توصل **Bayley** إلى حساب **29360000** رقم بعد الفاصلة ، وفي سنة 1988 تمكن الأخوان **Chuckovsky** من حساب **201000000** رقم وراء الفاصلة .

وبدأ عدد أرقام الجزء العشري للعدد π في ارتفاع مضطرد إلى أن وصل سنة 1991 إلى $2.\left(10^{9}\right)$ رقم .

• إن أول رياضي تمكن من إثبات **عدم انتماء** π **إلى مجموعة الأعداد الجـذرية** هو العالم **Johann - Heinrich** حيث برهن ، سنة 1761 على صحة الاستلزام التالي :

$$\left(x \in Q^*\right) \Rightarrow \left(\tan x \notin Q^*\right)$$

وفي المسألة التالية ، نقترح طريقة لإثبات أن : $\pi \notin Q$.

I ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين .
لكل عدد n من IN نعتبر الحدودية :

$$P_n(x) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!} \cdot$$

1) حدد درجة P_n .

2) بين أنه لكل x من IR : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

3) بين أنه لكل x من IR : $P_n(x) = \sum_{k=n}^{2n} C_n^{k-n} (b^{k-n} a^{2n-k} x^k)$.

4) بين أن :

أ) لكل k من IN بحيث $0 \le k \le n-1$ لدينا : $P_n^{(k)}(0) = 0$.

ب) لكل k من IN بحيث $n \le k \le 2n$ لدينا : $P_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} C_n^{k-n} (b^{k-n} a^{2n-k})$.

5) استنتج أنه لكل k من IN بحيث $0 \le k \le 2n$ لدينا : $P_n^{(k)}(0) \in IN$.

6) بين أنه لكل x من IR : $P_n\left(\frac{a}{b} - x\right) = P_n(x)$.

7) بين أنه لكل k من IN بحيث $0 \le k \le 2n$ لدينا: $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$.

II لنفترض أن $\pi = \frac{a}{b}$. نضع : $I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin x dx$.

1) بين أن : $I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin^{(2n+1)}\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) dx$.

2) استنتج أن :

$$I_n = \left[\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k P_n^{(k)}(x) \sin^{(2n+1-k)}\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi} + (-1)^{2n+1} \int_0^{\pi} P_n^{(2n+1)}(x) \sin\left(x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right) dx$$

3) بين أن : $I_n = \left[\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k P_n^{(k)}(x) \sin\left(x - (k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi}$.

4) استنتج أن : $I_n \in IN$.

5) نضع : $f(x) = x(a-bx)$ وليكن $M = \sup\{f(x); x \in IR\}$.

أ) بين أن : $0 \le |I_n| \le \pi \frac{M^n}{n!}$

ب) استنتج أن I_n تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$.

ج) استنتج أن : $\pi \notin Q$.