تمارين و مسائل محلولة

الجزء 2

- التحليل التوفيقي
- الأعداد المركبة
- التشابهات المباشرة
- الاحتمالات
- الهندسة في الفضاء

سلسلة مدرستي

الرياضيات

3AS

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة العلوم التجريبية

- مراجعة الدروس
- تمارين بحلول مفصلة
- مواضيع نموذجية لامتحان البكالوريا مع حلولها

منشورات الشهاب

تماريـن و مسائـل محلولة

الرّياضيّات

السّنة الثالثة من التعليم الثانوي
شعبة العلوم التجريبية

الجزء 2

- التحليل التوفيقي
- الإحتمالات
- الأعداد المركبة
- التشابهات
- الهندسة

رابح بنّاني
مفتّش التّربية و التّكوين

وحسن أوديع
مفتّش التّربية و التّكوين

العربي داود
مفتّش التّربية و التّعليم الأساسي

منشورات الشّهاب

الحجم : 27 x 18,5 – عدد الصفحات : 144
ردمك : 9 - 588 - 63 - 9961
الإيداع القانوني : 2419 - 2007
منشورات الشهاب : 10، نهج ابراهيم غرفاء، باب الواد، الجزائر 16009
site internet : www.chihab.com - E-mail : chihab@chihab.com

أنجز طبعه على مطابع عمار قرفي – باتنة

مقدمة

هذا الكتاب في الرياضيات موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي الذين يدرسون بصفة خاصة في شعبة العلوم التجريبية كما يمكن استغلاله من طرف تلاميذ الشعب العلمية و التكنولوجية.

إن مضامينه مطابقة للمنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و المنجز في إطار إصلاح المنظومة التربوية، و هو يغطي في جزئه الثاني مضامين التعلم المتعلقة بميادين الإحصاء و الإحتمالات و الهندسة.

يعتبر هذا الكتاب وسيلة تعليمية يسمح إستعمالها بتمديد العمل المنجز في القسم و بتدعيم المكتسبات و التدريب على العمل الفردي.

يندرج هذا الإصدار في تصور خاص و مميز للتعلم، يهدف إلى إعطاء الفرصة للتلميذ لممارسة و تعلم البرهنة و تحرير حلول بصفة سليمة، و هذا ما يحضره إلى مختلف التقويمات خلال السنة الدراسية و خاصة الإستعداد الجيد إلى إمتحان شهادة البكالوريا.

يتركب هذا الجزء من 5 أبواب، يشمل كل باب الأجزاء التالية :

- معاريف متمثلة في نصوص تعاريف، مبرهنات، نتائج، خواص و ملاحظات، مصاغة بصفة دقيقة و موجزة.
- طرائق مطبقة في وضعيات وجيهة، مرفقة بحلول محررة بواسطة تعبير رياضي سليم، يدركه لتلميذ و يستعمله في وضعيات مماثلة.
- تمارين و حلول نموذجية توظف معارف و طرائق مدروسة، تبين فعاليتها. تعتبر هذه التمارين نماذج يمكن التمرن عليها كثيرا من التحكم في المفاهيم و الطرائق و تذليل الصعوبات التي تتضمنها.
- تمارين و مسائل مقترحة للحل، يتدرب عليها التلميذ. و تسمح مواجهة هذه الوضعيات بتشخيص الصعوبات العنيدة و معالجتها في الوقت المناسب.

أدرجت في الجزء الأخير من هذا الكتاب حلول موجزة للتمارين و المسائل المقترحة في نهاية كل باب، يطلع عليها التلميذ بعد إنجاره لمحاولات قصد مقارنة حله و التحقق من صحته ثم تعديل و تصحيح أخطائه. إن هذا العمل يسمح له بتحسين مردوده و التحكم في الكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها في المنهاج.

المؤلفون

فهرس الجزء الثاني

معـــارف

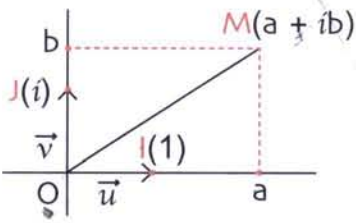
I - الشكل الجبري

1. تعريف

a، b عددان حقيقيان ، i العدد المركب حيث $i^2 = -1$.
الكتابة $z = a + ib$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z.
- a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له $\mathcal{R}e(z)$ و نكتب $a = \mathcal{R}e(z)$.
- b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له $\mathcal{I}m(z)$ و نكتب $b = \mathcal{I}m(z)$.
- عندما $b = 0$ يكون z حقيقيا. و عندما $a = 0$ و $b \neq 0$ يكون $z = ib$ و يسمى z عددا تخيليا صرفا.
- يرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

• التمثيل الهندسي لعدد مركب

ملاحظة : في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
يرفق بكل عدد مركب z حيث $z = a + ib$ النقطة M ذات الإحداثيين $(a ; b)$.
z يسمى لاحقة النقطة M في $\mathbb{C}$.
M تسمى صورة العدد المركب z في المستوي
و يرمز لذلك $M(z)$.



حالات خاصة
- صورة العدد 1 هي النقطة $I(1 ; 0)$ و نكتب $I(1)$.
- محور الفواصل يمثل مجموعة الاعداد الحقيقية.
- صورة العدد i هي النقطة $J(0 ; 1)$ و نكتب $J(i)$.
- محور التراتيب يمثل مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة.

• الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

قواعد الجمع و الضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تطبق كما هي في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ مع اعتبار $i^2 = -1$. و على الخصوص :

1. الفرق $z' - z$ هو المجموع $z' + (-z)$.
2. مقلوب عدد مركب غير منعدم $z = a + ib$ هو $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$ حيث $\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$
3. $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ ؛ $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.
4. z عدد مركب حيث $z = a + ib$. $z = 0$ إذا و فقط إذا كان $a = 0$ و $b = 0$.
5. $z = z'$ يعني $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{R}e(z')$ و $\mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(z')$.
6. z ، z' عددان مركبان حيث $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$
$z = z'$ إذا و فقط إذا كان $a = a'$ و $b = b'$.

• **الأعداد المركبة و الاشعة - لاحقة مرجح**

يرفق بكل شعاع $\vec{u}(x\,;y)$ العدد المركب $z = x + iy$. يسمى z لاحقة الشعاع $\vec{u}$.

2. خواص

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان لاحقتاهما z، z' على الترتيب، λ عدد حقيقي.

• لاحقة الشعاع $\vec{u} + \vec{v}$ هي $z + z'$.

• لاحقة الشعاع $\lambda\,\vec{u}$ هي $\lambda\, z$.

• A ، B ، C نقط لواحقها z_A ، z_B ، z_C على الترتيب.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

لاحقة المرجح G للنقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات α ، β ، γ على الترتيب حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

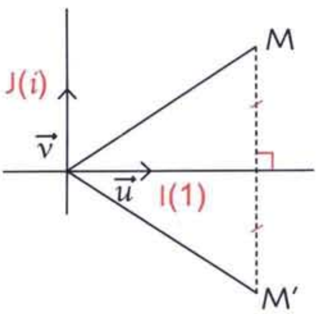
هي z_G حيث $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

II - مرافق عدد مركب

1. تعريف

مرافق العدد المركب z حيث $z = a + ib$. هو العدد المركب الذي يرمز له $\bar{z}$ حيث $\bar{z} = a - ib$.

• **التمثيل الهندسي**



في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

النقطة $M'(\bar{z})$ هي نظيرة النقطة $M(z)$ بالنسبة إلى محور الفواصل.

نتائج

1 • $\bar{\bar{z}} = z$.

2 • إذا كان $z = a + ib$ فإن $z\bar{z} = a^2 + b^2$

3 • $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z)$ و $z - \bar{z} = 2i\,\mathcal{I}m(z)$

4 • z حقيقي يعني $z = \bar{z}$

5 • z تخيلي صرف يعني $z = -\bar{z}$

2. خواص

من أجل كل عددين مركبين z و z' و من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

• $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.

• $\overline{z\,.\,z'} = \bar{z}\,.\,\bar{z}'$

• $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ حيث $\bar{z}' \neq 0$

• z حقيقي يعني $z = \bar{z}$

• $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

III - طويلة عدد مركب

1. تعريف

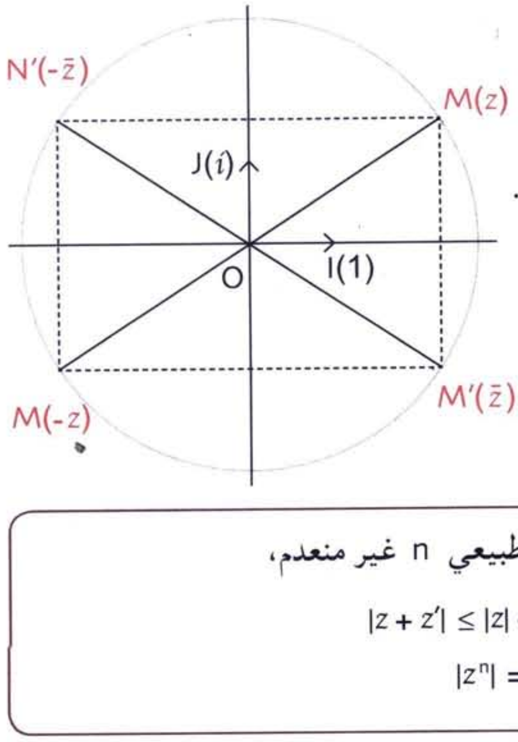
طويلة العدد المركب z حيث $z = a + ib$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي يرمز له $|z|$
و المعرف كما يلي : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• التفسير الهندسي

z عدد مركب ؛ $z = a + ib$ ؛ M صورة z في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. لاحقة $\overrightarrow{OM}$ هي z.

لدينا $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إذن $OM = |z|$



نتائج

1 • $|z|^2 = z\,\bar{z} = a^2 + b^2$.

2 • من أجل كل عدد مركب z، $|z| = 0$ يعني $z = 0$.

3 • $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

4 • أ) • $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ $(z \neq 0)$

ب) • إذا كان $|z| = 1$ فإن $\frac{1}{z} = \bar{z}$

2. خواص

من أجل كل عددين مركبين z و $\bar{z}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم،

- $|z\,z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ حيث $z' \neq 0$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z^n| = |z|^n$

IV - عمدة عدد مركب

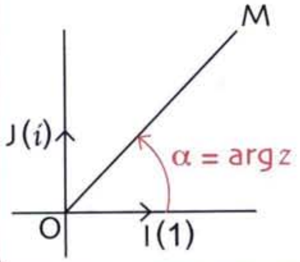
1. تعريف

z عدد مركب غير منعدم صورته النقطة M في المستوي المنسوب إلى معلم $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

• نسمي عمدة z و نرمز لها $\arg z$ كل قيس (بالراديان) للزاوية $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

• لكل عدد مركب غير منعدم ما لانهاية من العمدات. فإذا كان θ إحداها
نكتب $\arg z = \theta + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

• إذا كان α عددا من بين الأعداد $\theta + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
نكتب $\arg z = \alpha$.



ملاحظات

- العدد 0 ليس له عمدة لأن صورته هي مبدأ المعلم.
- z عدد حقيقي موجب تماما يعني $\arg z = k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- z عدد حقيقي سالب تماما يعني $\arg z = \pi + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- z عدد تخيلي صرف يعني $\arg z = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ أو $\arg z = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $\arg z = \theta + k2\pi$ فإن $\arg \bar{z} = -\theta + k2\pi$.
- إذا كان $\arg z = \theta + k2\pi$ فإن $\arg (-z) = \theta + \pi + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.
- إذا كان $M(z) \neq M'(z')$ فإن $\arg (z' - z) = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MM'}) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

2. خواص :

من أجل كل عددين مركبين z و z' و من أجل كل عدد صحيح n غير منعدم ؛

- $\arg z . z' = \arg z + \arg z' + k2\pi$ ؛ $\arg z^n = n \arg z + k2\pi$.
- $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' + k2\pi$ حيث $z' \neq 0$ و $k \in \mathbb{Z}$.

حالة خاصة إذا كان $|z| = 1$ فأن $\arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$

V - توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات النقط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{u}, \vec{v})$.

- إذا كان $A(z_1)$، $B(z_2)$ نقطتين من المستوي فإن $|\overrightarrow{AB}| = |z_2 - z_1|$

$(\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) = \arg (z_2 - z_1) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

- إذا كان $A(z_1)$، $B(z_2)$، $C(z_3)$، $D(z_4)$ نقطا من المستوي فإن

$(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}) = \arg \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

$(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = \arg \left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

- r عدد حقيقي موجب، θ عدد حقيقي، $\omega(z_0)$ نقطة من المستوي.

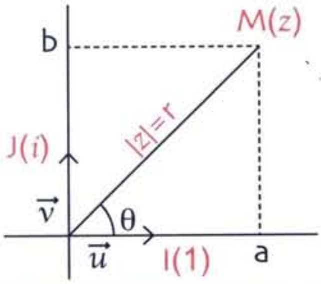
مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق العلاقة $z = z_0 + re^{i\theta}$ هي :

أ) دائرة مركزها ω و نصف قطرها r من أجل r ثابت و θ متغير.

ب) نصف مستقيم مبدؤه النقطة ω و $e^{i\theta}$ لاحقة شعاع توجيه له من أجل r متغير و θ ثابت.

VI - الشكل المثلثي لعدد مركب غير منعدم

1. تعريف



z عدد مركب غير منعدم ؛ نضع $|z| = r$ و $\arg z = \theta + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

الكتابة $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب z و نكتب $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

2. الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي و العكس

- للانتقال من الشكل $z = a + ib$ إلى الشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، نحسب r، $\cos\theta$، $\sin\theta$.
حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ و $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$.
- للإنتقال من الشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ إلى الشكل $z = a + ib$ نحسب a و b
حيث $a = r\cos\theta$ و $b = r\sin\theta$.

ملاحظات

- $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ يكافئ $r = r'$ و $\theta = \theta' + k2\pi$
حيث $k \in \mathbb{Z}$ و $r > 0$ و $r' > 0$.
- الكتابة $z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$ هي الشكل الجبري للعدد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- إذا كان $r < 0$ فالكتابة $-r\left[\cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)\right]$ هي الشكل المثلثي للعدد z.

3. دستور موافر (Moivre)

من أجل كل عدد n من $\mathbb{Z}$، $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

العلاقة $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ تسمى دستور موافر.

VII - الشكل الأسي لعدد مركب

ترميز أولير (Euler)

نضع من أجل كل عدد حقيقي θ، $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

يرمز العدد $e^{i\theta}$ إلى العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له.

الكتابة $e^{i\theta}$ تسمى ترميز أولير للعدد المركب $\cos\theta + i\sin\theta$.

1. تعريف

z عدد مركب غير منعدم طويلته r و θ عمدة له.

الكتابة $z = re^{i\theta}$ تسمى الشكل الأسي للعدد z.

2. قواعد الحساب

قواعد الحساب في الشكل الأسي هي قواعد الحساب على القوى.

نضع $z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta'}$.

- $z.z' = r\,e^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = r.r'\,e^{i(\theta+\theta')}$

عمدة و طويلة $z.z'$

- $\bar{z} = \overline{r\,e^{i\theta}} = r\,e^{-i\theta}$

$-\theta$ هي عمدة $\bar{z}$ طويلة $\bar{z}$

- $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r\,e^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$ حيث $z' \neq 0$

عمدة و طويلة $\dfrac{z}{z'}$

3. دستور موافر و ترميز أولير

دستور موافر الوارد في الشكل المثلثي يكتب على الشكل الأسي كما يلي :

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ حيث $n \in \mathbb{Z}$

نتيجة

من العلاقتين $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ و $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

ينتج أن $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$ و $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

تسمى كل من هاتين العلاقتين دستور أولير.

VIII - الجذران التربيعيان لعدد مركب غير منعدم

- z عدد مركب غير منعدم حيث $z = a + ib$ ؛ $a \in \mathbb{R}$ و $b \in \mathbb{R}$

$\mathfrak{z}$ عدد مركب غير منعدم حيث $\mathfrak{z} = x + iy$ ؛ $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

$\mathfrak{z}$ جذر تربيعي للعدد z إذا و فقط إذا كان $\mathfrak{z}^2 = z$

أي أن $(x + iy)^2 = a + ib$

و بالتالي
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين $\mathfrak{z}_1$ و $\mathfrak{z}_2$ للعدد z حيث $\mathfrak{z}_2 = -\mathfrak{z}_1$.

- z عدد مركب غير منعدم حيث $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ؛ $r = |z|$ و $\theta = \arg z$

$\mathfrak{z}$ عدد مركب غير منعدم حيث $\mathfrak{z} = \rho(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)$ ؛ $\rho = |\mathfrak{z}|$ و $\alpha = \arg \mathfrak{z}$

$\mathfrak{z}$ جذر تربيعي للعدد z إذا وفقط إذا كان $\mathfrak{z}^2 = z$.

أي أن $\rho^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

و بالتالي
$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + k2\pi \end{cases}$$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين z_1 و z_2 للعدد z حيث $z_2 = -z_1$.

ملاحظة

إذا كان $z = re^{i\theta}$ و $z = \rho e^{i\alpha}$

فإن $z^2 = z$ إذا وفقط إذا كان $\rho^2 e^{2i\alpha} = re^{i\theta}$ أي أن $\rho^2 = r$ و $2\alpha = \theta$.

و بالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب z هما $z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $z_2 = -z_1$.

IX - المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

- المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$ ؛ $b \in \mathbb{C}$ ؛ $c \in \mathbb{C}$ تسمى معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول z في $\mathbb{C}$.
- العدد المركب Δ حيث $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة السابقة.
- δ و $-\delta$ الجذران التربيعيان للعدد المركب Δ.

مبرهنة

المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{C}$ هما $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ و $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$ و إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $z_1 \neq z_2$.

ملاحظات

1 • إذا كان $b = 2b'$ فإن $\Delta' = b'^2 - ac$ و $z_1 = \dfrac{-b'+\delta'}{a}$ و $z_2 = \dfrac{-b'-\delta'}{a}$
حيث δ' جذر تربيعي للعدد Δ'.

2 • a، b، c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

إذا كان $\Delta \geq 0$ فإن المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين حقيقيين.

إذا كان $\Delta < 0$ فإن $i\sqrt{-\Delta}$ جذر تربيعي للعدد Δ

و المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ تقبل حلين مترافقين في $\mathbb{C}$

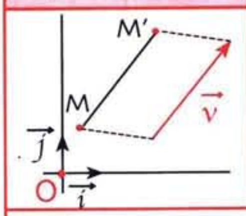
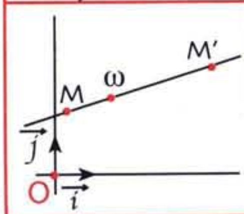
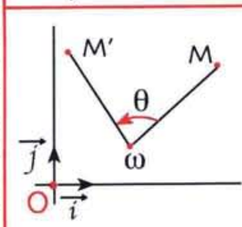
هما $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ و $z_2 = \bar{z}_1$.

X - التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

دراسة التحويلات النقطية التي ترفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

حيث $z' = az + b$ ؛ $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{C}$ أو $a \in \mathbb{C}^*$ و $|a|=1$ و $b \in \mathbb{C}$.

التحويل النقطي و عناصره المميّزة	التعريف الهندسي	الكتابة المركبة	التمثيل
t هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$	$t : M \longmapsto M'$ حيث $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$	$t : M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = z + b$ و $\vec{v}$ الشعاع الذي لاحقته b	
h هو التحاكي الذي مركزه ω و نسبته λ حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$	$h : M \longmapsto M'$ حيث $\overrightarrow{\omega M'} = \lambda\ \overrightarrow{\omega M}$	$h : M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' - z_0 = \lambda\ (z - z_0)$ و z_0 هي لاحقة ω	
r هو الدوران الذي مركزه ω و زاويته θ حيث $\theta \in \mathbb{R}$	$r : M \longmapsto M'$ حيث $\begin{cases} \omega M' = \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M'}; \overrightarrow{\omega M}) = \theta + k2\pi \end{cases}$ و $k \in \mathbb{Z}$	$r : M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' - z_0 = e^{i\theta}\ (z - z_0)$ و z_0 هي لاحقة ω $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$	

و بالعكس، كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.
حيث $z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$ هو :

1 • إنسحاب شعاعه $\vec{v}(b)$ إذا كان $a = 1$.

2 • تحاك نسبة a إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$.
(مركزه النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$).

3 • دوران زاويته θ حيث $\theta = \arg a + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$ إذا كان $a \neq 1$ و $|a| = 1$
(مركزه النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$).

ملاحظتان

1 • كل من التحاكي الذي مركزه ω و نسبة 1 - و الدوران الذي مركزه ω و زاويته π هو تناظر مركزه ω و كتابته المركبة هي : $z' = -z + 2z_0$ حيث z_0 لاحقة ω.

2 • كل نقطة تنطبق على صورتها بتحويل نقطي تسمى نقطة صامدة لهذا التحويل.

r هو دوران مركزه ω و زاويته θ	h هو تحاك مركزه ω و نسبته k	t هو إنسحاب شعاعه $\vec{v}$
• إذا كان $\theta \neq k2\pi$ فإنه توجد نقطة صامدة واحدة و هي المركز ω. • إذا كان $\theta = k2\pi$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا الدوران.	• إذا كان $k \neq 1$ فإنه توجد نقطة صامدة واحدة و هي المركز ω. • إذا كان $k = 1$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا التحاكي.	• إذا كان $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإنه لا توجد نقط صامدة. • إذا كان $\vec{v} = \vec{0}$ فإن كل نقطة من المستوي صامدة بهذا الانسحاب.

1 إنجاز العمليات الحسابية على الاعداد المركبة

تمرين 1

أنجز العمليات الحسابية التالية، ثم اكتب العدد الناتج على الشكل الجبري.

$(2+3i)^2$ ، $(3+4i)(3-4i)$ ، $(1+i)^3$ ، $\frac{i-5}{3+5i}$ ، $\frac{2-i}{3+i}\times\frac{3-i}{1-i}$ ، $\frac{2+3i}{1-i}+\frac{i-4}{2+5i}$

حل

قواعد الحساب في $\mathbb{C}$ هي قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ مع $i^2=-1$.

- $(2+3i)^2$ من الشكل $(a+ib)^2$ ؛ لدينا $(2+3i)^2=(2)^2+2(2)\times(3i)+(3i)^2$

$$= 4+12i+9i^2 = 4+12i+9(-1)$$

و بالتالي $(2+3i)^2=-5+12i$.

- $(3+4i)(3-4i)$ من الشكل $(a+ib)(a-ib)$. لدينا $(3+4i)(3-4i)=(3)^2-(4i)^2$

$$= 9-16(-1)$$

و بالتالي $(3+4i)(3-4i)=25$.

- $(1+i)^3$ من الشكل $(a+ib)^3$ ؛ لدينا $(1+i)^3 = 1^3+3i+3i^2+i^3 = 1+3i-3-i$.

إذن $(1+i)^3=-2+2i$.

ملاحظة : يمكن كتابة $(1+i)^3$ على الشكل $(1+i)(1+i)^2$ ثم إجراء الحساب.

- حساب $\frac{i-5}{3+5i}$. لدينا $\frac{i-5}{3+5i}=\left(\frac{i-5}{3+5i}\right)\left(\frac{3-5i}{3-5i}\right)$

$$= \frac{3i-i(-5i)-5\times3+5(-5i)}{3^2-(5i)^2} = \frac{-10+28i}{34} = -\frac{5}{17}+\frac{14i}{17}$$

و بالتالي $\frac{i-5}{3+5i}=-\frac{5}{17}+\frac{14}{17}i$

- حساب $\frac{2-i}{3+i}\times\frac{3-i}{1-i}$.

لدينا $\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(1-i)}=\frac{6-2i-3i+i^2}{3-3i+i-i^2}=\frac{5-5i}{4-2i}$

كتابة العدد المركب $\frac{5-5i}{4-2i}$ على الشكل الجبري .

- لدينا $\frac{5-5i}{4-2i}=\frac{(5-5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}=\frac{20+10i-20i-10i^2}{20}=\frac{30-10i}{20}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

و بالتالي $\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(1-i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

• حساب $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}$

بعد توحيد المقامين نكتب : $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}=\frac{(i-4)(1-i)+(2+3i)(2+5i)}{(2+5i)(1-i)}$

$$\frac{(i-i^2-4+4i)+(4+10i+6i+15i^2)}{2-2i+5i-5i^2}=\frac{-14+21i}{7+3i}$$

و بالتالي $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}=\frac{-14+21i}{7+3i}$

كتابة العدد المركب $\frac{-14+21i}{7+3i}$ على الشكل الجبري. لدينا $\frac{-14+21i}{7+3i}=\frac{(-14+21i)(7-3i)}{(7+3i)(7-3i)}$

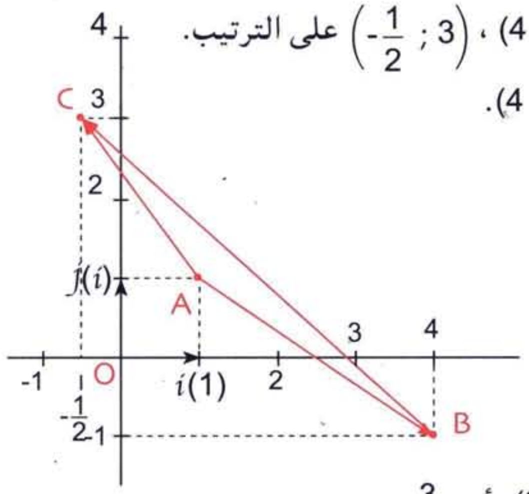
$$\frac{-14+21i}{7+3i}=\frac{-35}{58}+\frac{189}{58}i$$

بعد الحساب و الاختصار نجد $\frac{i-4}{2+5i}+\frac{2+3i}{1-i}=\frac{-35}{58}+\frac{189}{58}$

تمرين 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. علم النقط A ، B ، C ذات اللواحق $1+i$ ، $4-i$ ، $-\frac{1}{2}+3i$ على الترتيب. احسب لواحق الاشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

حل



• إحداثيات النقط A ، B ، C هي $(1;1)$، $(4;-1)$ ، $\left(-\frac{1}{2};3\right)$ على الترتيب.

• الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو صورة العدد المركب $(4-i)-(1+i)$.

إذن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $3-2i$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ هي $\left(-\frac{1}{2}+3i\right)-(1+i)$.

أي $-\frac{3}{2}+2i$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $\left(-\frac{1}{2}+3i\right)-(1+i)$.

أي $-\frac{3}{2}+4i$.

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ هي $\left(-\frac{1}{2}+2i\right)+(3-2i)$ أي $\frac{3}{2}$.

ملاحظة بما أن لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ عدد حقيقي فإن هذا الشعاع يوازي الشعاع $\overrightarrow{OI}$.

تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

عين مجموعة النقط M ذات اللواحق z في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$$\mathcal{R}e\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0 \quad ، \quad \mathcal{I}m\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$$

حل

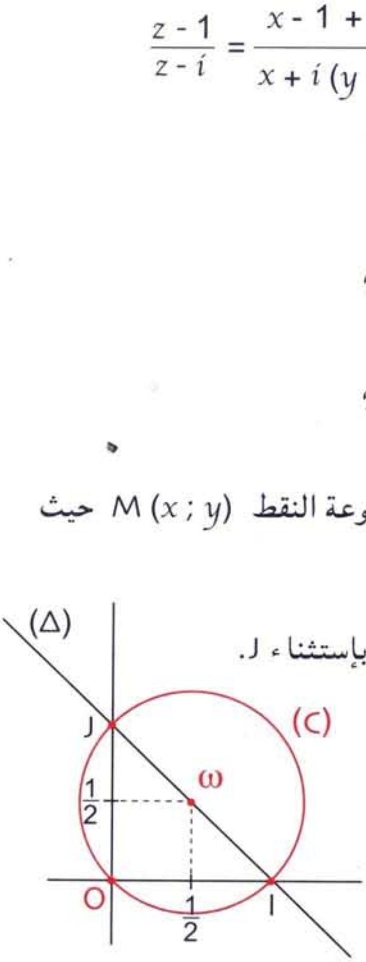
نضع $z = x + iy$ حيث x ، y عددان حقيقيان.

نكتب العدد $\frac{z-1}{z-i}$ على الشكل الجبري مع $z \neq i$

لدينا
$$\frac{z-1}{z-i}=\frac{x-1+iy}{x+i(y-1)}=\frac{\left[x-1+iy\right]\left[x-i\,(y-1)\right]}{\left[x+i\,(y-1)\right]\left[x-i\,(y-1)\right]}$$
$$=\frac{x(x-1)+y(y-1)+i\left[-(x-1)(y-1)+xy\right]}{x^2+(y-1)^2}$$

بعد الحساب و الاختصار نجد :
$$\mathcal{R}e\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=\frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2}$$
$$\mathcal{I}m\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=\frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$$

• مجموعة النقط M ذات اللواحق z حيث $\mathcal{R}e\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$ هي مجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث $x^2+y^2-x-y=0$ باستثناء النقطة $J(0\,;1)$.



هذه المجموعة هي دائرة (C) مركزها $\omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $O\omega$ بإستثناء J.

• مجموعة النقط M ذات اللواحق z حيث $\mathcal{I}m\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0$

هي مجموعة النقط $M(x\,;y)$ حيث $x+y-1=0$

باستثناء النقطة $J(0\,;1)$.

و هي مستقيم (Δ) معين بالنقطتين $I(1\,;0)$ و $J(0\,;1)$ باستثناء J.

2 استعمال خواص مرافق عدد مركب

تمرين 1

z عدد مركب. اكتب، بدلالة $\bar{z}$، مرافق كل عدد مركب فيما يلي :

$z_1 = 1 + iz$ ، $z_2 = i(3+z)$ ، $z_3 = (z-i)(z+3)$ ، $z_4 = \frac{1-z}{1+iz}$ ، $z_5 = \frac{2z^2+z-1}{-3z+i}$

حل

لدينا • $\bar{z}_1 = \overline{1 + iz} = \bar{1} + \overline{iz} = 1 + \bar{i}\bar{z}$ إذن $\bar{z}_1 = 1 - i\bar{z}$.

• $\bar{z}_2 = \overline{i(3+z)} = \bar{i}\,\overline{(3+z)} = -i(\bar{3}+\bar{z})$ إذن $\bar{z}_2 = -i(3+\bar{z})$.

• $\bar{z}_3 = \overline{(z-i)(z+3)} = \overline{(z-i)}\,\overline{(z+3)} = (\bar{z}-\bar{i})(\bar{z}+\bar{3})$ إذن $\bar{z}_3 = (\bar{z}+i)(\bar{z}+3)$.

• $\bar{z}_4 = \overline{\left(\frac{1-z}{1+iz}\right)} = \frac{\overline{1-z}}{\overline{1+iz}} = \frac{\bar{1}-\bar{z}}{\bar{1}+\overline{iz}}$ إذن $\bar{z}_4 = \frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}}$.

• $\frac{2(\bar{z}^2)+\bar{z}-1}{-3\bar{z}+\bar{i}} = \frac{\overline{2z^2+z-1}}{\overline{-3z+i}} = \overline{\left(\frac{2z^2+z-1}{-3z+i}\right)} = \bar{z}_5$ إذن $\bar{z}_5 = \frac{2(\bar{z}^2)+\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$

تمرين 1

حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين للمجهول z التاليتين :

(1) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$ (2) $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$

حل

• حل المعادلة (1) : نضع $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ بعد تعويض كل من z و $\bar{z}$ في (1) .

تكتب المعادلة (1) : $x + iy = 2(x - iy) - 2 + 6i$.

و تبسط على الشكل $(x-2) + (-3y+6)i = 0$

هذا يعني $x - 2 = 0$ و $-3y + 6 = 0$

إذن $x = 2$ و $y = 2$

و بالتالي $z = 2 + 2i$ و هو حل المعادلة (1) .

• حل المعادلة (2) نضع $z = x + iy$ فيكون $\bar{z} = x - iy$ نعوض z ، $\bar{z}$.

في المعادلة (2) فنجد $2(x+iy) + i(x-iy) = 5 - 4i$.

أي أن $2x + 2iy + ix - i^2y = 5 - 4i$ أو $2x + y + i(x+2y) = 5 - 4i$

إذن $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$ و نحل هذه الجملة و نجد $x = \frac{14}{3}$ و $y = \frac{-13}{3}$

و يكون حل المعادلة (2) هو $z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$

3 التعرف على الشكل الجبري أو الشكل المثلثي أو الشكل الأسي لعدد مركب غير منعدم

تمرين 1

من بين الأعداد المركبة z التالية ميز بين المكتوبة منها على الشكل الجبري أو على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسي.

$$z = -10 \;;\; z = i \;;\; z = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \;;\; z = \sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}$$

$$z = \sqrt{2}\,(i+1) \;;\; z = \frac{1}{1+0} \;;\; z = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \;;\; z = 2e^{i}$$

$$z = 1 + e^{i\pi} \;;\; z = \cos\frac{2\pi}{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}} \;;\; z = \sin\frac{2\pi}{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}} \;;\; z = (\sqrt{3} - 2)\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z = e^{-i\frac{\pi}{2}} \;;\; z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

حل

نلخص الأجوبة في الجدول التالي :

العدد z	z مكتوب على الشكل الجبري $a + ib$ حيث ...	z مكتوب على الشكل المثلثي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$	z مكتوب على الشكل الأسي $re^{i\theta}$ حيث ...	ملاحظات
-10	$a = -10 \;;\; b = 0$			
i	$a = 0 \;;\; b = 1$			
$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$	$a = \cos\frac{\pi}{12}$ $b = \sin\frac{\pi}{12}$	$r = 1 \;;\; \theta = \frac{\pi}{12}$		
$\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}$	$a = \sin\frac{\pi}{12}$ $b = \cos\frac{\pi}{12}$			
$\sqrt{2}\,(i+1)$				z هو جداء عددين مركبين
$\frac{1}{1+i}$				z هو مقلوب عدد مركب
$-\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$				$-\sqrt{2} < 0$
$2e^{i}$			$r = 2 \;;\; \theta = 1$	

$1+e^{i\pi}$				z هو مجموع عددين مركبين
$\cos\frac{2\pi}{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$				$\cos\frac{2\pi}{3} < 0$
$\sin\frac{2\pi}{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$			$r = \sin\frac{2\pi}{3}$ $\theta = \frac{\pi}{3}$	
$(\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{4}}$				$\sqrt{3}-2 < 0$
$e^{-i\frac{\pi}{2}}$			$r = 1\ ;\ \theta = -\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$		$r = \sqrt{3}\ ;\ \theta = \frac{7\pi}{12}$		

4 حساب طويلة و عمدة عدد مركب غير منعدم و كتابته على شكل مثلثي أو شكل أسي

تمرين 1

• احسب الطويلة و عمدة لكل عدد مركب فيما يلي ثمّ اكتبه على الشكل المثلثي و على الشكل الأسي.

$$z_1 = -3i \ ; \ z_2 = -10 \ ; \ z_3 = \frac{\pi}{2} \ ; \ z_4 = 1 + i\sqrt{3} \ ; \ z_5 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i}$$

$$z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \ ; \ z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8 \ ; \ z_8 = \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4}$$

حل

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_1 : $|z_1| = |-3i| = |-3|\,|i|$ إذن $|z_1| = 3$

$$\arg z_1 = \arg(-3i) + 2k\pi = \arg(-3) + \arg(i) + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

إذن $\arg z_1 = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$

الكتابة $3\left[\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right]$ هي الشكل المثلثي للعدد $z_1 = -3i$.

الكتابة $z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{3}}$ هي الشكل الأسي للعدد z_1.

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_2 $\quad |z_2| = |-10| = 10$ (لأن z_2 عدد حقيقي).

$\arg z_2 = \arg(-10) + k2\pi$ إذن $\arg z_2 = -\pi + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

الكتابة $10\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right)$ هي الشكل المثلثي للعدد -10 $z_2 = -10$.

الكتابة $z_2 = 10\,e^{-i\pi}$ هي الشكل الأسي للعدد -10 $z_2 = -10$.

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_3 :

$|z_3| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$ و $\arg z_3 = 0 + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$ (لأن z_3 عدد حقيقي).

$z_3 = \frac{\pi}{2}(\cos 0 + i\sin 0)$ ؛ $z_3 = \frac{\pi}{2}e^{i0}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_4 ؛ $|z_4| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^3} = 2$

$$z_4 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

إذن $\arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $|z_4| = 2$ ؛ $\arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ إذن $z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ؛ $z_4 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_5 :

$|z_5| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+1^2}}$ أي $|z_5| = 1$

$\arg z_5 = \arg(-\sqrt{2}) - \arg(1+i) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

$\arg(-\sqrt{2}) = \pi + k2\pi$ ؛ و لدينا $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

أي $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ إذن $\arg z_5 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$

لدينا $|z_5| = 1$ و $\arg z_5 = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ إذن $z_5 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ و $z_5 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_6 :

$|z_6| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right| = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ أي $|z_6| = \sqrt{2}$

$$\arg z_6 = \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(1+i) + k2\pi \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$|z_6| = \sqrt{2}$ و $\arg z_6 = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ إذن $z_6 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ؛ $z_6 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_7 :

$|z_7| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right|^8 = \frac{|\sqrt{3}+i|^8}{|1+i|^8} = \frac{2^8}{(\sqrt{2})^8} = 16$ أي $|z_7| = 16$

لدينا $z_7 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^8$ إذن $\arg z_7 = 8\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

$$= 8\left[\arg(\sqrt{3}+i) - \arg(1+i)\right] + k2\pi$$

لنحسب عمدة للعدد $\sqrt{3}+i$.

لدينا $|\sqrt{3}+i| = 2$ و $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ و نعلم مما سبق أن $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

$\arg z_7 = 8\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi$ و بعد الإختصار نجد $\arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

بما أن $|z_7| = 16$ و $\arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ فإن $z_7 = 16\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$ ؛ $z_7 = 16e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد z_8

$$|z_8| = \left|\frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4}\right| = \frac{|(1-i)^5|}{|(1-i\sqrt{3})^4|} = \frac{|1-i|^5}{|1-i\sqrt{3}|^4}$$

لدينا $|1-i| = \sqrt{2}$ إذن $|1-i|^5 = (\sqrt{2})^5$ و $|1-i\sqrt{3}| = 2$ إذن $|1-i\sqrt{3}|^4 = 2^4$

بعد الاختصار نجد $|z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

لدينا $\arg z_8 = \arg(1-i)^5 - \arg(1-i\sqrt{3})^4 + k2\pi$

$$= 5\arg(1-i) - 4\arg(1-i\sqrt{3}) + k2\pi$$

نحسب عمدة للعدد $1-i$ و لتكن θ و عمدة للعدد $1-i\sqrt{3}$ و لتكن θ'.

لدينا $|1-i| = \sqrt{2}$ ، $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

و بالمثل $|1-i\sqrt{3}| = 2$ ، $\cos\theta' = \frac{1}{2}$ و $\sin\theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ إذن $\theta' = -\frac{\pi}{3}$.

أي أن $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ و $\arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

نحسب $\arg z_8$. $\arg z_8 = 5\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 4\left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi$

بعد الحساب و الاختصار نجد $\arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $|z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4}$. $\arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ إذن $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ و $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{12}}$

5 الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

تمرين 1

• أكتب على الشكل الجبري ثم على شكل مثلثي كل عدد مركب مما يلي

$$z_3 = 5\left(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5}\right) \quad ; \quad z_2 = \frac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} \quad ; \quad z_1 = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}}$$

$$z_5 = \frac{1}{1 + i\tan\frac{\pi}{12}} \quad ; \quad z_4 = 1 + i\tan\frac{17\pi}{12}$$

حل

• كتابة العدد z_1 على الشكل الجبري :

لدينا $$\frac{-28 + 28i\sqrt{3}}{10^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{(-1 + 3i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})}{(10 - 2i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})} = \frac{-1 - 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}} = z_1$$

و بعد الاختصار نجد $z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$ و هو الشكل الجبري للعدد z_1.

كتابة العدد z_1 على الشكل المثلثي :

نضع $r = |z_1|$ و θ عمدة للعدد z_1.

لدينا $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}$ إذن $r = \frac{1}{2}$ أي $|z_1| = \frac{1}{2}$.

كذلك $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ إذن $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$ أي $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

و بالتالي $z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

• كتابة العدد z_2 على الشكل الجبري :

لدينا $$\frac{4\sqrt{6} + 4i\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4(\sqrt{6} + i\sqrt{2})}{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(\sqrt{6} + i\sqrt{2})} = \frac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} = z_2$$

و بعد الاختصار نجد $z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$.

• كتابة العدد z_2 على الشكل المثلثي :

لكتابة z_2 على الشكل المثلثي $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نحسب r ، $\cos\theta$ ، $\sin\theta$.

لدينا $r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

و $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

لدينا $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ إذن $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

• كتابة العدد z_3 على الشكل الجبري

الكتابة $z_3 = 5\cos\frac{2\pi}{5} - 5\sin\frac{2\pi}{5}$ هي على الشكل $a + ib$.

إذن هي الشكل الجبري للعدد z_3.

ملاحظة : يمكن الاعتماد على الشكل الجبري للعدد z_3 لتعيين الشكل المثلثي له.

ذلك بفرض أن z_3 يكتب على الشكل $z_3 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث

$|z_3| = r$ $\arg z_3 = \theta + 2k\pi$ ثم تعيين كل من r و θ.

لدينا $r = \sqrt{\left(5\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(-5\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2} = 5$

$$\cos\theta = \frac{1}{5}\left(5\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{5}\left(-5\sin\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

إذن $\theta = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi$

و بالتالي $z_3 = \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right]$

• كتابة العدد z_4 على الشكل الجبري :

العدد $1 + i\tan\frac{17\pi}{12}$ مكتوب على الشكل $a + ib$ فهو إذن الشكل الجبري للعدد z_4

جزؤه الحقيقي هو 1 و جزؤه التخيلي هو $\tan\frac{17\pi}{12}$.

• كتابة الشكل المثلثي للعدد z_4 :

لدينا $$z_4 = 1 + i \tan \frac{17\pi}{12} = 1 + \frac{i \sin \frac{17\pi}{12}}{\cos \frac{17\pi}{12}}$$

$$z_4 = \frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12}\right)$$

بما أن العدد $\frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} < 0$ فالكتابة السابقة ليست الشكل المثلثي للعدد z_4.

بكتابة z_4 على الشكل $z_4 = -\frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left(-\cos \frac{17\pi}{12} - i \sin \frac{17\pi}{12}\right)$

نلاحظ أن $\frac{17\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12}$ يكون $\cos \frac{17\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{17\pi}{12} = -\sin \frac{\pi}{12}$

ينتج أن $z_4 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$ و هي الشكل المثلثي للعدد z_4.

• كتابة العدد z_5 على الشكل الجبري :

لدينا $$z_5 = \frac{1}{1 + i \tan\frac{\pi}{12}} = \frac{1 - i \tan\frac{\pi}{12}}{\left(1 + i \tan\frac{\pi}{12}\right)\left(1 - i \tan\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1 - i \tan\frac{\pi}{12}}{1 + \tan^2\frac{\pi}{12}}$$

نعلم أن $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}$، و بعد التعويض نجد $z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12}\left(1 - i \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}\right)$

ينتج أن $z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ و هو الشكل الجبري للعدد z_5

جزؤه الحقيقي $\cos^2 \frac{\pi}{12}$ و جزؤه التخيلي $-\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$.

• كتابة العدد z_5 على الشكل المثلثي :

لدينا $z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ أو $z_5 = \cos \frac{\pi}{12}\left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin\frac{\pi}{12}\right)$

بما أن $\cos \frac{\pi}{12} > 0$ فإن $z_5 = \cos \frac{\pi}{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_5.

ملاحظة : يمكن اعتبار الشكل الجبري للعدد z_5 و حساب r ، $\cos\theta$ ، $\sin\theta$.

ثم كتابة z_5 على الشكل $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $|z| = r$ $\arg z_5 = \theta + k2\pi$

$r = cos\frac{\pi}{12}$ اذن $r^2 = cos^4\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12}\, cos^2\frac{\pi}{12} = cos^2\frac{\pi}{12}\left(cos^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{\pi}{12}\right) = cos^2\frac{\pi}{12}$

$sin\,\theta = \dfrac{-\,sin\,\frac{\pi}{12}\,cos\,\frac{\pi}{12}}{cos\,\frac{\pi}{12}} = -\,sin\frac{\pi}{12}$ و $cos\,\theta = \dfrac{cos^2\frac{\pi}{12}}{cos\,\frac{\pi}{12}} = cos\frac{\pi}{12}$

إذن $\begin{cases} cos\,\theta = cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \\ sin\,\theta = sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$ و بالتالي $\theta = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ينتج أن $z_5 = cos^2\frac{\pi}{12}\left(cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

تمرين 2

• أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية :

$z_1 = -5e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_2 = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_3 = 3ie^{i\pi}$ ؛ $z_4 = (1 + i)e^{i\frac{3\pi}{4}}$

حل

• كتابة العدد z_1 على شكل مثلثي :

$-5 < 0$ ، $-5e^{i\frac{\pi}{4}}$ ليس الشكل الأسي للعدد z_1.

نعلم أن $e^{i\pi} = -1$ و $-5 = 5e^{i\pi}$ إذن $z_1 = 5e^{i\pi}.\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 5e^{\left(i\pi + i\frac{\pi}{4}\right)}$

أي $z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{4}}$. إذن $z_1 = 5\left(cos\,\frac{5\pi}{4} + i\,sin\,\frac{5\pi}{4}\right)$.

ملاحظة : يمكن أن نكتب $z_1 = -5\left(cos\,\frac{\pi}{4} + i\,sin\,\frac{\pi}{4}\right)$.

$= 5\left(-\,cos\,\frac{\pi}{4} - i\,sin\,\frac{\pi}{4}\right) = 5\left[cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

و بالتالي $z_1 = 5\left(cos\,\frac{5\pi}{4} + i\,sin\,\frac{5\pi}{4}\right)$.

• كتابة العدد z_2 على شكل مثلثي :

$\sqrt{3} - 2 < 0$ ، $(\sqrt{3} - 2)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ ليس الشكل الأسي للعدد z_2.

نعلم أن $e^{i\pi} = -1$ إذن $z_2 = -(2 - \sqrt{3})\,e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 - \sqrt{3})\,e^{i\pi}.\, e^{i\frac{\pi}{4}} = (2 - \sqrt{3})\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$

أي $z_2 = (2 - \sqrt{3})\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

و بالتالي يكون $z_2 = (2 - \sqrt{3})\left(cos\,\frac{5\pi}{4} + i\,sin\,\frac{5\pi}{4}\right)$ هو الشكل المثلثي للعدد z_2.

ملاحظة : يمكن كتابة الشكل المثلثي للعدد z_2 دون المرور على الشكل الأسي له.

• كتابة العدد z_3 على شكل مثلثي :

نعلم أن $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن $3i e^{i\pi} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} . e^{i\pi}$

و بالتالي $z_3 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$. إذن $z_3 = 3\left(cos\ \frac{3\pi}{2} + i\,sin\ \frac{3\pi}{2}\right)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_3.

ملاحظة : العدد z_3 يمكن أن يكتب $z_3 = 3i(-1)$

أو $z_3 = 3\left(cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_3.

• كتابة العدد z_4 على شكل مثلثي :

نعلم أن $|1 + i| = \sqrt{2}$. $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ إذن $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

و يكون $z_4 = (1 + i)\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} . e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,e^{\left(i\frac{\pi}{4} + i\frac{3\pi}{4}\right)}$.

أي $z_4 = \sqrt{2}\,e^{i\pi}$ و هو الشكل الأسي للعدد z_4.

إذن $z_4 = \sqrt{2}\ (cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$ و هو الشكل المثلثي للعدد z_4.

6 توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات نقط

تمرين 1

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B ، C ، D نقط لواحقها على الترتيب $z_1 = 1 + i$ ، $z_2 = 4 + 5i$ ، $z_3 = 5 - 2i$ ، $z_4 = \frac{13}{3} + \frac{8}{3}i$

1 • اثبت أن النقط B ، C ، D على استقامة واحدة.

2 • اثبت أن المستقيمين (AB) و (AC) متعامدان.

حل

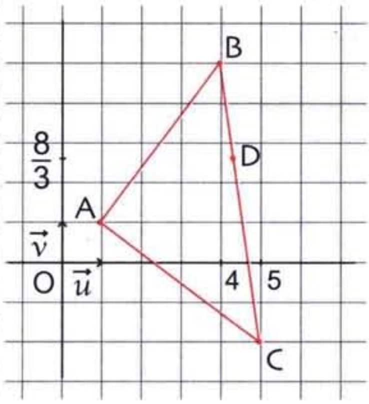
1 • النقط B ، C ، D على استقامة واحدة يعني أن $(\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{DC}) = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $(\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{DC}) = arg\ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}$

$z_3 - z_4 = \frac{2}{3} - \frac{14}{3}i$ و $z_2 - z_4 = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3}i$ إذن $\frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = -2$.

و بالتالي $arg\ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = arg\,(-2) = \pi + k2\pi$ أو $(\overrightarrow{DB} ; \overrightarrow{DC}) = \pi + k2\pi$

و بالتالي النقط B ، C ، D على استقامة واحدة.



ملاحظة : يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{DB}$ ، $\overrightarrow{DC}$ ثم ملاحظة أن $z_3 - z_4 = -2(z_2 - z_4)$

أي $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$ و بالتالي فالشعاعان $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطيا. أي أن النقط B ، C ، D على استقامة واحدة.

2 • المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان يعني

أن $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

لدينا $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

$z_3 - z_1 = 4 - 3i$ ؛ $z_2 - z_1 = 4 + 3i$ ينتج أن $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{4 - 3i}{3 + 4i} = -i$

و بالتالي $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. إذن $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

و يالتالي المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

ملاحظة : يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب $BC^2 = |z_2 - z_1|^2 = 25$ ؛ $AC^2 = |z_3 - z_1|^2 = 25$

$BC^2 = |z_3 - z_2|^2 = 50$ و التحقق أن $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

تمرين 2

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. عين مجموعة النقط M ذات اللواحق z ثم مثلها بيانيا ، في كل حالة مما يلي :

1 • $|z - 3| = |z - 1 - i|$

2 • $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$

3 • $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2}$

4 • $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$

5 • $\arg \frac{z + 1}{z - 2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

6 • $z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}}$ ، $r \geq 0$

7 • $z = 1 + i + 2e^{i\theta}$ ، $\theta \in \mathbb{R}$

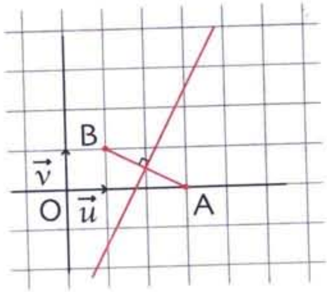
حل

1 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z - 3| = |z - 1 - i|$

نعين المجموعة بوضع $z = x + iy$ و حساب $|z - 1 - i|^2$ ، $|z - 3|^2$

بدلالة x ، y فيكون $|z - 3| = |z - 1 - i|$ يعني $4x - 2y - 7 = 0$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي محور القطعة [AB].



ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة 3

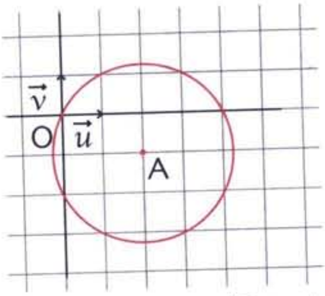
فإن $z - 3$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$

و كانت B النقطة ذات اللاحقة $1 + i$ فإن $z - (1 + i)$

هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BM}$

لدينا $|z - 3| = |z - (1 + i)|$ يعني $AM = BM$

و بالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة [AB].



2 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$:

نعين المجموعة بوضع $z = x + iy$.

فيكون $|x - 2 + i(y + 1)| = \sqrt{5}$

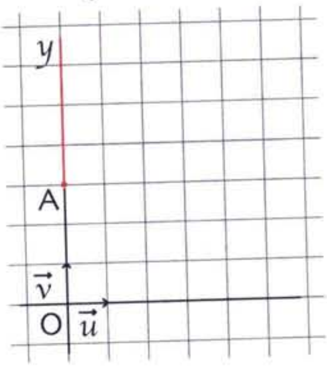
أي $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

و هذه الأخيرة معادلة للدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة $2 - i$ و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة $2 - i$ فإن $z - (2 - i)$ هي لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM}$

$|z - 2 + i| = \sqrt{5}$ يعني $AM = \sqrt{5}$.

مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\sqrt{5}$.



3 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2}$.

لدينا $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

يعني $z - 3i$ تخيلي صرف أو أيضا

$\mathcal{R}(z - 3i) = 0$ و $\mathcal{I}m(z - 3i) \geq 0 \ldots(*)$

إذا فرضنا أن $z = x + iy$ فإن $z - 3i = x + i(y - 3)$

و تكتب الجملة (*) كما يلي $x = 0$ و $y \geq 3$

و تكون المجموعة المطلوبة هي $[Ay)$ (كما في الشكل).

ملاحظة : إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة $3i$ فإن $(\vec{i} ; \overrightarrow{AM}) = \arg(z - 3i)$

إذن النقطة M تحقق $(\vec{i} ; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

مجموعة النقط M هي نقط الجزء $[Ay)$ من محور التراتيب الذي لا يشمل المبدأ.

4 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4} \ldots(*)$

نعلم أن $\frac{\pi}{4}$ هي عمدة للعدد $1 + i$ إذن $\arg(z - 2 + i) = \arg(1 + i) + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

إذن $\arg(z - 2 + i) - \arg(1 + i) = k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

أو أيضا $\arg\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = k2\pi$. و بالتالي مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق العلاقة (*)

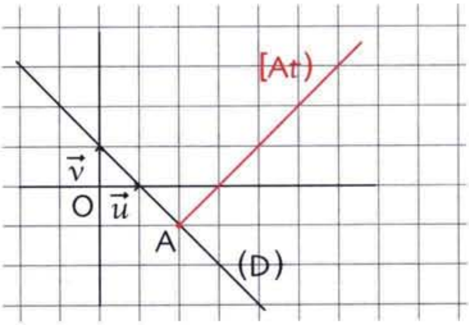
هي مجموعة النقط $M(z)$ التي يكون من أجلها العدد $\frac{z-2+i}{1+i}$ حقيقيا موجبا

أي $\mathcal{Im}\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = 0$ و $\mathcal{Re}\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) \geq 0$.

نضع $z = x + iy$ فيكون $\frac{z-2+i}{1+i} = \frac{1}{2}\left[x+y-1+i(-x+y+3)\right]$

و تكون مجموعة النقط $M(x\,;y)$ المطلوبة هي التي تحقق

إحداثياتها الجملة $\begin{cases} -x+y+3=0 \\ x+y-1 \geq 0 \end{cases}$



و هي نصف المستقيم $[At)$ الذي مبدؤه

النقطة $A(2-i)$ و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم (D) و الذي لا يشمل O.

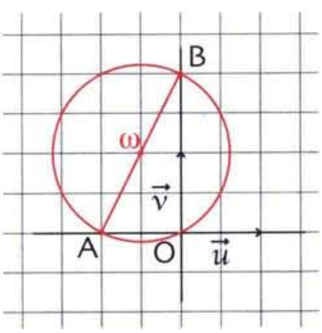
ملاحظة : إذا فرضنا أن A النقطة ذات اللاحقة $2-i$ فإن $(\vec{i}\,;\overrightarrow{AM}) = \arg(z-(2-i))$

و بالتالي $(\vec{i}\,;\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي نصف المستقيم (Δ) الذي متدؤه النقطة A (كما في الشكل).

5 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg\frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$:

من أجل $z \neq 2i$ نكتب



$\arg\frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ يعني $\frac{z+1}{z-2i}$ تخيلي صرف.

نضع $z = x + iy$ و نكتب العدد $\frac{z+1}{z-2i}$ على الشكل الجبري.

لدينا $\frac{z+1}{z-2i} = \frac{(x+1)x+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2} + \frac{i(2x-y+2)}{x^2+(y-2)^2}$

$\frac{z+1}{z-2i}$ تخيلي صرف يعني $\mathcal{Re}\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = 0$

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2+y^2+x-2y=0$

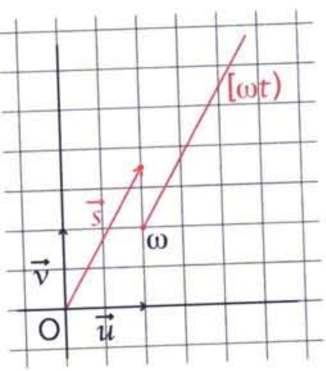
و هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(-\frac{1}{2}\,;2\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$ بإستثناء $B(0\,;2)$.

ملاحظة : نفرض النقطتين $A(-1)$ و $B(2i)$.

$\arg\frac{z-(-1)}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ يعني $(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

إذن مجموعة النقط M المطلوبة هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ بإستثناء B.

6 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}}$.



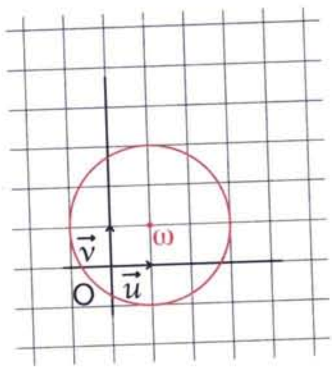
نضع $z = x + iy$ و $x + iy = 1 + i + r\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ينتج أن $r \geq 0$; $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}r \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r \end{cases}$ أو أيضا $\begin{cases} x - 1 = \frac{y-1}{\sqrt{3}} \\ x \geq 1 \text{ و } y \geq 1 \end{cases}$

إذن المجموعة المطلوبة هي نصف المستقيم $[\omega t)$

الذي مبدؤه $\omega(1+i)$ و $\vec{S}(e^{i\frac{\pi}{3}})$ شعاع توجيه له.

7 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ حيث $z = 1 + i + 2e^{i\theta}$، $\theta \in \mathbb{R}$.



نضع $z = x + iy$ إذن $x + iy = 1 + i + 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

نستنتج أن $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 1 + 2\sin\theta \end{cases}$ أي $\begin{cases} x - 1 = 2\cos\theta \\ y - 1 = 2\sin\theta \end{cases}$

و نجد $(x-1)^2 + (x-1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta$

أي $(x-1)^2 + (x-1)^2 = 4$

المجموعة المطلوبة هي الدائرة التي مركزها $\omega(1+i)$ و نصف قطرها 2.

7 توظيف دستور موافر و ترميز أولير لحل مسائل

تمرين 1

عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $z = (\sqrt{3} + i)^n$

• حقيقيا. • تخيليا صرفا.

حل

العدد $\sqrt{3} + i$ مكتوب على الشكل الجبري.

لنكتب هذا العدد على الشكل المثلثي أي $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

فيكون $z = 2^n\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n$

حسب دستور موافر $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos n\frac{\pi}{6} + i\sin n\frac{\pi}{6}$ أي $z = \left(\cos n\frac{\pi}{6} + i\sin n\frac{\pi}{6}\right)$

• z عدد حقيقي يعني $\mathcal{Im}(z) = 0$ و $\mathcal{Im}(z) = 2^n i \sin n\frac{\pi}{6}$

إذن $\sin n\frac{\pi}{6} = 0$ أي $\sin n\frac{\pi}{6} = \sin(0)$

و بالتالي $n\frac{\pi}{6} = k\pi$ أو $n = 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$

نستنتج أن $(\sqrt{3} + i)^n$ حقيقي إذا و فقط إذا كان $n = 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$.

• z عدد تخيلي صرف يعني $\mathcal{R}e\,(z) = 0$ و $\mathcal{R}e\,(z) = 2^n \cos n\frac{\pi}{6}$

إذن $\cos n\frac{\pi}{6} = 0$ أو $\cos n\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2}$

و بالتالي $n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $n = 3 + 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$

ينتج أن $(\sqrt{3} + i)^n$ حقيقي إذا و فقط إذا كان $n = 3 + 6k$ ؛ $k \in \mathbb{N}$.

تمرين 2

أكتب على الشكل الخطي الأعداد التالية :

$\cos^2 x$ ؛ $\sin^2 x$ ؛ $\cos^3 x$ ؛ $\sin^3 x$

حل

لكتابة الأعداد $\cos^2 x$ ؛ $\sin^2 x$ ؛ $\cos^3 x$ ؛ $\sin^3 x$ على الشكل الخطي،

نستعمل قانوني أولير $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ؛ $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

• لدينا $\cos^2 x = \left[\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \frac{1}{4}(2\cos 2x + 2)$

و بالتالي $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

• لدينا $\sin^2 x = \left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right]^2 = \frac{1}{4}(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2) = -\frac{1}{4}(2\cos 2x - 2)$

و بالتالي $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

• لدينا $\cos^3 x = \left[\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right]^3 = \frac{1}{8}(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x})$

$= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right] = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)$

و بعد التبسيط و الاختصار نجد $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

• لدينا $\sin^3 x = \left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right]^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x})$

$= -\frac{1}{8i}\left[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right] = -\frac{1}{8i}(2i\sin 3x + 6i\sin x)$

و بعد التبسيط و الاختصار نجد $\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

تمرين 3

عبر عن $\cos 3x$ و $\sin 3x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

حل

نحسب $(\cos x + i\sin x)^3$ بطريقتين :

بإستعمال دستور موافر نجد $(\cos x + i\sin x)^3 = \sin 3x + \cos 3x$.

و بإستعمال دستور ثنائي الحد نجد

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$$

اذن

$$\cos 3x + i\sin 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right)$$

ينتج أن

$$\begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x \\ \sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \end{cases}$$

نعلم أن

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

و بالتالي $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ و $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

8 تعيين الجذرين التربيعيين لعدد مركب

تمرين 1

احسب الجذرين التربيعيين للعدد $z = 1 + i\sqrt{3}$

حل

العدد z يكتب على الشكل المثلثي $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

نفرض أن أحد الجذرين التربيعين للعدد z يكتب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ إذن

$\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ أو $r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

أي أن

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{3} \\ \sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{3} \\ r^2 = 2 \end{cases}$$

ينتج أن $r = \sqrt{2}$ و $2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ أو $2\theta = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$

و $2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ أو $2\theta = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

و ينتج $r = \sqrt{2}$ و $2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$. إذن $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

$z_k = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right]$ حيث ؛ $k \in \mathbb{Z}$ جذر للعدد z

و نحصل على الجذرين التربيعيين z_0 ، z_1 للعدد المركب z من أجل $k = 0$ و $k = 1$ و هما :

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad ; \quad z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right]$$

أي $z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $(z_1 = -z_0)$

ملاحظة : لدينا $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و يكون الجذران التربيعيان للعدد z هما $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_1 = -z_0$.

تمرين 2

عين الجذرين التربيعيين العدد المركب z حيث $z = -8-6i$

حل

نضع $\mathfrak{z} = x+iy$.

$\mathfrak{z}$ جذر تربيعي للعدد z يعني $\mathfrak{z}^2 = z$

أي أن $(x+iy)^2 = -8-6i$ و بالتالي
$$\begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ x^2+y^2=10 \\ 2xy=-6 \end{cases}$$

هذه الجملة تبسط على الشكل التالي
$$\begin{cases} x^2-y^2=-8 \\ x^2+y^2=10 \\ xy<0 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة بطريقة الجمع، نجد $x^2=1$ و $y^2=9$ و $xy<0$

ينتج أن $(x=1$ و $y=-3)$ أو $(x=-1$ و $y=3)$.

و بالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب $-8-6i$ هما $1-3i$ و $-1+3i$.

9 معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-4(1-i)z+2(4-i) = 0$

حل

لدينا $\Delta' = [-2(i-1)]^2-2(4-i)$ بعد الاختصار نجد $\Delta' = -8-6i$

بما أن Δ' عدد مركب غير منعدم فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{C}$.

إذا كان الجذران التربيعيان للعدد المركب Δ' هما δ' و $-\delta'$ حيث $\delta' = 1-3i$ (إرجع إلى التمرين السابق)
فإن حلي المعادلة هما $z_1 = \frac{-b'+\delta'}{a} = 2(1-i) + (1-3i) = 3-5i$

و $z_2 = \frac{-b'-\delta'}{a} = 2(1-i) - (1-3i) = 1+i$

تمرين 2

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z حيث $\frac{1}{2}z^2 - z + \frac{5}{2} = 0$

حل

مميز المعادلة هو $\Delta = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -4$ أي $\Delta = 4i^2 = (2i)^2$

Δ عدد حقيقي و $\Delta < 0$ إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 حيث $z_1 = 1+2i$ و $z_2 = \overline{z_1}$.

10 معادلات يؤول حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z حيث $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$.

حل

نضع $t = z^2$ فيكون $t^2 - 6t + 25 = 0$ .... (1)

حساب Δ' : لدينا $\Delta' = 9 - 25 = -16 = -16i^2$ فيكون جذرا Δ هما $4i$، $-4i$.

للمعادلة (1) حلان هما $t = 3+4i$ أو $t = 3-4i$.

و بالتالي $z^2 = 3+4i$ أو $z^2 = 3-4i$.

تعيين الجذرين التربيعيين للعدد $3+4i$.

العدد المركب $\alpha + i\beta$ حيث α ؛ β عددان حقيقيان، جذر تربيعي للعدد $3+4i$.

يعني $(\alpha + i\beta)^2 = 3+4i$ أو $\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 3+4i$.

و لدينا كذلك $|\alpha + i\beta|^2 = |3+4i|$ إذن $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = 4 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases}$

ينتج أن $2\alpha^2 = 8$ و $2\beta^2 = 2$ و $\alpha\beta > 0$

جذرا $3+4i$ هما $z_1 = 2+i$ و $z_1' = -z_1$

بنفس الطريقة نحسب الجذرين التربيعيين للعدد $3-4i$ و هما $z_2 = 2+i$ و $z_2' = -z_2$.

ملاحظة : بما أن $\overline{3+4i} = 3-4i$ إذن الجذران التربيعين للعدد $3-4i$ هما مرافقا الجذرين التربيعيين للعدد $3+4i$. (و هما $2+i$ و $-2-i$).

تمرين 2

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z.

$z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$ ....(*) علما أنها تقبل حلا حقيقيا a.

حل

بما أن a حل للمعادلة (*) فإن $a^3-(3+4i)a^2-4(1-3i)a+12=0$.

أي $a^3-3a^2-4a+12+i(-4a^2+12a)=0$

إذن $\begin{cases} a^3-3a^2-4a+12=0 \\ -4a^2+12a=0 \end{cases}$

هذه الجملة تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$ هو 3.

إذن $a=3$ هو الحل الحقيقي للمعادلة (*).

و بالتالي يمكن تحليل العبارة $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12$ على الشكل

$(z-3)(z^2+pz+q)$ حيث p و q عددان مركبان.

بنشر $(z-3)(z^2+pz+q)$ و مقارنته بالعبارة $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12$

ينتج أن $\begin{cases} p-3=-3-4i \\ q-3p=-4+12i \\ -3q=12 \end{cases}$ و نجد $p=-4i$ و $q=-4$

إذن المعادلة (*) تكتب على الشكل $(z-3)(z^2-4iz-4)=0$.

لحل المعادلة $z^2-4iz-4=0$ نحسب الجذرين التربيعيين للعدد $\Delta'=-8=8i^2$.

و نجد $2i\sqrt{2}$ ، $-2i\sqrt{2}$ ثم نحسب الحلين z_1 و z_2.

و نجد $z_1=2i+2i\sqrt{2}$

$=2(1+\sqrt{2})i$

$z_2=2i-2i\sqrt{2}$

$=2(1-\sqrt{2})i$

و نستخلص أن للمعادلة $z^3-(3+4i)z^2-4(1-3i)z+12=0$ ثلاثة حلول في $\mathbb{C}$ هي :

$z_0=3$ ؛ $z_1=2(1+\sqrt{2})i$ ؛ $z_2=2(1-\sqrt{2})i$

11 تعيين الكتابة المركبة لتحويل نقطي

تمرين 1

المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. عبر بالأعداد المركبة عن التحويلات النقطية التالية :

• الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\,(2+i)$. • الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(3i)$ ، $B(2-i)$.

• الدوران الذي مركزه $\omega(1-2i)$، و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

• التناظر الذي مركزه $\omega(2i)$.

• الدوران الذي مركزه $\omega(1+i)$، و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

• التحاكي الذي مركزه $\omega(2+i)$، و نسبته 3.

حل

• الانسحاب $t_{\vec{v}}$ حيث $\vec{v}(2+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' = z+2+i$

• الانسحاب $t_{\overrightarrow{AB}}$ حيث $A(3i)$ ، $B(2-i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' = z + z_B - z_A$

$z' = z+2-4i$

• الدوران $\pi_{(\omega\,;\,\frac{\pi}{4})}$ حيث $\omega(1-2i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z' - (1-2i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z-(1-2i))$

بعد الإختصار نجد $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+i\right)z + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)i$

• التناظر S_ω حيث $\omega(2i)$ هو الدوران $r_{(\omega\,;\,\theta)}$ (أو التحاكي $h_{(\omega\,;\,-1)}$).

إذن $z'-2i = e^{i\pi}(z-2i)$ أي $z' = -z+4i$.

• الدوران $r_{(\omega\,;\,\frac{\pi}{2})}$ حيث $\omega(1+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z'-(1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-(1+i))$ أو $z' = iz+2$

• التحاكي $h_{(\omega\,;\,3)}$ حيث $\omega(2+i)$ يعبر عنه بالعلاقة $z'-(2+i) = 3(z-(2+i))$ أو $z' = 3z-4-2i$

12 التعرف على تحويل نقطي إنطلاقا من كتابته المركبة

تمرين 2

ميز كل تحويل نقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث :

1 • $z' = z+2+4i$

2 • $z' = -iz-2i$

3 • $z' = -3z-2+4i$

4 • $z' = -z+2$

حل

1 • لكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = z+2+4i$ من الشكل $z' = z+b$ حيث $b \in \mathbb{C}$.

إذن هذا التحويل النقطي هو إنسحاب شعاعه $\vec{v}(2+4i)$.

2 • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -iz - 2i$ من الشكل $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$ و $|a| = 1$.

إذن هذا التحويل هو دوران زاويته θ حيث $\theta = \frac{3\pi}{2}$ لأن $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

مركز هذا الدوران هي النقطة ω لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ أي $-1-i$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -iz - 2i$.

هو الدوران الذي مركزه $\omega(-1-i)$ و زاويته $\frac{3\pi}{2}$.

3 • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -3z - 2 + 4i$ من الشكل $z' = kz + b$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{C}$.

إذن هذا التحويل النقطي تحاك نسبته k حيث $k = -3$.

مركز هذا التحاكي هي النقطة ω التي لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ أي $-\frac{1}{2} - i$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -3z - 2 + 4i$

هو التحاكي الذي مركزه $\omega\left(-\frac{1}{2} - i\right)$ و نسبته -3.

4 • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث

$z' = -z + 2$ من الشكل $z' = -z + b$ حيث $b \in \mathbb{C}$ هو التناظر الذي مركزه $\omega(z_0)$

حيث $z_0 = -z_0 + 2$ أي $z_0 = 1$.

و بالتالي التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -z + 2$

هو التناظر الذي مركزه النقطة ω ذات اللاحقة 1.

ملاحظة : التحويل النقطي $M(z) \longmapsto M'(z')$ حيث $z' = -z + 2$

هو أيضا تحاك نسبته 1- و مركزه النقطة ω ذات اللاحقة 1.

كما يعتبر هذا التحويل دورانا مركزه ω ذات اللاحقة 1 و زاويته π.

مسألة 1

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

z عدد مركب يختلف عن $-i$ و Z عدد مركب حيث $Z=\frac{z+2i}{1-iz}$.

عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى ثم مثلها بيانيا في كل حالة مما يلي

1 • Z عدد حقيقي.

2 • $-\frac{\pi}{2}$ عمدة للعدد Z.

3 • $Z=z$.

4 • النقط $A(i)$ ، $M(z)$ ، $N(Z)$ على استقامة واحدة.

5 • $N(Z)$ تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $A(i)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$.

حل

1 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون Z حقيقيا.

نكتب Z على الشكل الجبري، نضع $z=x+iy$ ؛

$$Z=\frac{z+2i}{1-iz}=\frac{x+i(y+2)}{1+y-ix}$$

$$=\frac{[x+i(y+2)][1+y+ix]}{(1+y-ix)(1+y+ix)}=\frac{x(1+y)-x(y+2)+i[(y+1)(y+2)+x^2]}{(1+y)^2+x^2}$$

بعد الاختصار نجد $\mathcal{R}e(Z)=\frac{-x}{(1+y)^2+x^2}$ و $\mathcal{I}m(Z)=\frac{x^2+y^2+3y+2}{(1+y)^2+x^2}$.

Z عدد حقيقي يعني $\mathcal{I}m(Z)=0$ أي أن $x^2+y^2+3y+2=0$ حيث $x\neq 0$ و $y\neq -1$

أو $x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ حيث $x\neq 0$ و $y\neq -1$.

اذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها ω ذات اللاحقة $-\frac{3}{2}i$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ باستثناء النقطة C ذات اللاحقة $-i$ (الشكل).

ملاحظة : يمكن الحل بالطريقة التالية : Z عدد حقيقي يعني $Z=\bar{Z}$.

أي $\frac{z+2i}{1-iz}=\frac{\bar{z}-2i}{1+i\bar{z}}$; $(z\neq -i)$

أو $(z+2i)(1+i\bar{z})=(1-iz)(\bar{z}-2i)$

بعد إجراء الحساب و الاختصار نجد $3(z-\bar{z})+2iz\bar{z}+4i=0$

بوضع $z=x+iy=0$ نجد $x^2+y^2+3y+2=0$

حيث $x\neq 0$ و $y\neq -1$. و هي المجموعة المذكورة آنفا.

2 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $-\frac{\pi}{2}$ عمدة للعدد Z.

$\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$. يعني Z عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب

أو $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$. يعني $\mathcal{R}e(Z) = 0$ و $\mathcal{I}m(Z) < 0$

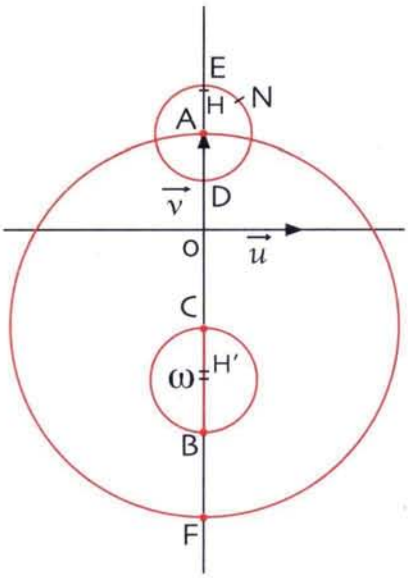
لدينا مما سبق $\mathcal{R}e(Z) = \frac{-x}{(1+y)^2 + x^2}$ ؛ $\mathcal{I}m(Z) = \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{(1+y)^2 + x^2}$.

إذن $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$ يعني $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$ حيث $(x\ ;\ y) \neq (0\ ;\ -1)$.

$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x = 0 \\ (y+1)(y+2) < 0 \end{cases}$ أو $x = 0$ و $-2 < y < -1$

اذن المجموعة المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[BC]$ باستثناء طرفيها $B(-2i)$ و $C(-i)$.

ملاحظة يمكن استعمال اعتبارات هندسية لتعيين المجموعة المطلوبة.



نكتب Z على الشكل $Z = i\,\frac{z - (-2i)}{z + i}$.

نعتبر النقط $M(z)$ ؛ $B(-2i)$ ؛ $C(-i)$.

فيكون $\arg Z = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{BM}) + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

لدينا $\arg z = \frac{-\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

إذن $\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

و بالتالي $(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{BM}) = \pi + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

و نحصل على المجموعة المذكورة سابقا و هي القطعة المستقيمة $[BC]$ باستثناء طرفيها $B(-2i)$ و $C(-i)$.

3 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $Z = z$.

$Z = z$ يعني $\frac{z + 2i}{1 - iz} = z$ ؛ $(z \neq -i)$ أي $(1 - iz)z = z + 2i$.

و بعد الاختصار نحصل على المعادلة $z^2 + 2 = 0$ أو $z^2 = -2$.

هذه المعادلة تقبل حلين هما $z = i\sqrt{2}$ أو $z = -i\sqrt{2}$.

اذن المجموعة المطلوبة متكونة من النقطتين $H(i\sqrt{2})$ ؛ $H'(-i\sqrt{2})$.

4 • تعيين مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $A(i)$ ، $M(z)$ ، $N(Z)$ على استقامة واحدة

النقط A ، M ، N على استقامة واحدة يعني $\widehat{NAM} = k\pi$.

$\widehat{NAM} = k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}$ يعني $(\overrightarrow{AN}\ ;\overrightarrow{AM}) = k2\pi$ أو $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM}) = \pi + k2\pi$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$.

أي أن $\arg\frac{z-i}{Z-i}=k2\pi$ أو $\arg\frac{z-i}{Z-i}=\pi+k2\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

أي أن $\frac{z-i}{Z-i}\in\mathbb{R}$ و $z\neq i$ و $Z\neq i$

أو أيضا $\mathcal{Im}\left(\frac{z-i}{Z-i}\right)=0$.

لنكتب عبارة $\frac{z-i}{Z-i}$ بشكل بسيط بعد تعويض Z.

$$\frac{z-i}{Z-i}=\frac{z-i}{\frac{z+2i}{1-iz}-1}=\frac{(z-i)(1-iz)}{z+2i-i(1-iz)}=-(z^2+i)$$

إذن $\mathcal{Im}\left(\frac{z-i}{Z-i}\right)=0$ يعني $\mathcal{Im}(-z^2-1)=0$ أو أيضا $\mathcal{Im}(z^2+1)=0$

بوضع $z=x+iy$ يكون $z^2+1=x^2-y^2+1+2ixy$.

إذن $\mathcal{Im}\left(\frac{z-i}{Z-i}\right)=0$ يعني $xy=0$ مع $\left((x;y)\neq(0;1)\text{ و }(x;y)\neq(0;-1)\right)$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوي التي من أجلها يكون A ، M ، N على استقامة واحدة هي مجموعة نقط محور الفواصل و نقط محور التراتيب باستثناء النقطتين A ، C.

5 • تعيين مجموعة النقط M(z) التي من أجلها تنتمي N(z) إلى الدائرة $\mathscr{C}\left(A;\frac{1}{2}\right)$.

ليكن [DE] قطرا للدائرة التي مركزها $A(i)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ حيث $D\left(\frac{i}{2}\right)$ ، $E\left(\frac{2}{3}i\right)$.

من أجل كل نقطة N من هذه الدائرة $\widehat{DNE}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $(k\in\mathbb{Z})$

هذا يعني $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ أو $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و لدينا أيضا : $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=\arg\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}+2k\pi$ مع $Z\neq\frac{3}{2}i$ و $Z\neq\frac{1}{2}i$

لنحسب $\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}$ بدلالة z :

$$\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}=\frac{\frac{z+2i}{z-iz}-\frac{3}{2}i}{\frac{z+2i}{z-iz}-\frac{1}{2}i}=\frac{-z+i}{z+3i}=-\frac{z-i}{z-(-3i)}$$

$$\arg\frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}=\arg\left(\frac{z-i}{z-(-3i)}\right)=\arg(-1)+\arg\frac{z-i}{z-(-3i)}=\pi+\arg\frac{z-i}{z-(-3i)}+k2\pi$$

و باعتبار النقط $M(z)$ ، $A(i)$ ، $F(-3i)$ يكون $(\overrightarrow{DN};\overrightarrow{EN})=\pi+(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})+k2\pi$

إذن $\pi+(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})+k2\pi=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ أو $\pi+(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

أي $(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ أو $(\overrightarrow{FM};\overrightarrow{AM})=-\frac{\pi}{2}+\pi+k2\pi$.

إذن مجموعة النقط M التي تكون من أجلها N تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}\left(A ; \frac{1}{2}\right)$ هي الدائرة التي قطرها [FA] باستثناء النقطتين F ، A. (الشكل).

ملاحظة : يمكن اعتبار العدد $\frac{-z+i}{z+3i}$ $\left(\text{أي } \frac{Z-\frac{3}{2}i}{Z-\frac{1}{2}i}\right)$ تخيليا صرفا ، و تعيين مجموعة النقط التي تحقق $\mathcal{R}e\left(\frac{-z+i}{z+3i}\right)=0$ ، و هي المجموعة المطلوبة.

مسألة 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$. K ، L ، M نقط لواحقها على الترتيب

$z_M = -i\sqrt{3}$ ، $z_L = 1 - i$ ، $z_K = 1 + i$

1 • عين N صورة النقطة L بالتحاكي h الذي مركزه M و نسبته 2.

2 • الدوران r الذي مركزه o و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A و يحول N إلى C

عين اللاحقتين z_C ، z_A للنقطتين A ، C.

3 • الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}$ ذو اللاحقة $2i$ يحول M إلى D و يحول N إلى B.

عين اللاحقتين z_B ، z_D للنقطتين D ، B على الترتيب.

4 • اثبت أن النقطة K هي مركز تناظر الرباعي ABCD .

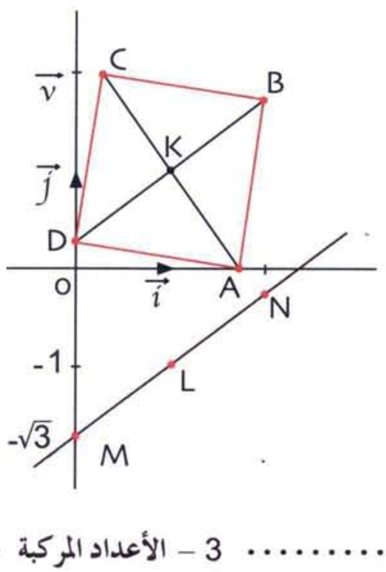
5 • احسب $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}$ ، استنتج طبيعة الشكل الرباعي ABCD .

حل

1 • صورة النقطة L (و هي N) بالتحاكي h الذي مركزه M و نسبته 2 تحسب كالتالي :

$z_N - z_M = 2(z_L - z_M)$ أو $z_N = 2z_L - z_M$

بعد تعويض z_L ، z_M و التبسيط نجد $z_N = 2 + i\,(\sqrt{3} - 2)$.



2 • صورة M (و هي A) بالدوران r الذي مركزه o و زاويته $\frac{\pi}{2}$

تحسب كالتالي : $z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_M = i z_M$

بعد تعويض z_M نجد $z_A = i(-i\sqrt{3})$ إذن $z_A = \sqrt{3}$.

و بنفس الطريقة نحسب z_C و نجد $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$.

3 • صورة M (و هي D) بالإنسحاب t الذي شعاعه $\vec{v}(2i)$

تعين كمايلي : $z_D = z_M + 2i$ أي $z_D = (2 - \sqrt{3})i$

و بنفس الطريقة نعين صورة N (و هي B) بالانسحاب t

و نجد $z_B = z_N + 2i$ أي $z_B = 2 + i\sqrt{3}$.

4 • البرهان على أن النقطة K مركز تناظر الرباعي ABCD.

من أجل ذلك نبرهن أن A و C متناظرتان بالنسبة إلى K و كذلك B ، D.

A ، C متناظرتان بالنسبة إلى K يعني K منتصف القطعة المستقيمة [AC].

لاحقة منتصف [AC] هي $\frac{1}{2}(z_A+z_C)$ حيث $\frac{1}{2}(z_A+z_C) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3} + (2-\sqrt{3}+2i)\right] = 1+i$.

إذن لاحقة منتصف [AC] هي لاحقة K أي K هي منتصف [AC].

لاحقة منتصف [BD] هي $\frac{1}{2}(z_B+z_D)$ حيث

$\frac{1}{2}(z_B+z_D) = \frac{1}{2}\left[2+i\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})i\right] = 1+i$.

إذن لاحقة منتصف [BD] هي لاحقة K أي K هي منتصف [BD] أيضا ، هذا يعني أن قطري الرباعي ABCD لهما نفس المنتصف K، و بالتالي K مركز تناظر ABCD.

5 • حساب $\frac{z_B-z_K}{z_A-z_K}$ لدينا

$$\frac{z_B-z_K}{z_A-z_K} = \frac{(2+i\sqrt{3})-(1+i)}{\sqrt{3}-(1+i)} = \frac{1+i(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)-i}$$

$$= \frac{\left[1+i(\sqrt{3}-1)\right]\left[\sqrt{3}-1+i\right]}{(\sqrt{3}-1-i)(\sqrt{3}-1+i)}$$

و بعد التبسيط و الاختصار نجد $\frac{z_B-z_K}{z_A-z_K} = i$ أو $z_B-z_K = i(z_A-z_K)$

و العبارة الاخيرة هي عبارة الدوران الذي مركزه K و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحول النقطة A إلى النقطة B

اذن $KA = KB$ و $(\overrightarrow{KA}\ ;\ \overrightarrow{KB}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

بما أن قطري الرباعي ABCD متقايسان و متعامدان فإن الرباعي ABCD مربع.

الحساب بالاعداد المركبة

1 z_1 ، z_2 ، z_3 أعداد مركبة حيث

$z_3 = 2 + i$ ؛ $z_1 = -1 + 4i$ ؛ $z_3 = -2 + 3i$

احسب $z_1 + z_2 + z_3$ ؛ $3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3$

$z_1 . z_2$ ؛ $\frac{z_1}{z_2}$ ؛ $\frac{1}{z_3}$ ؛ z_1^2 ؛ $(z_1 . z_2)^2$.

2 اثبت أن $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = 1$

3 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$z - i = 4z + i(z - 2)$

4 احسب i^2 ، i^3 ، i^4 ، i^{1947}.

استنتج حساب i^n تبعا لقيم العدد الطبيعي n.

مرافق عدد مركب

5 عين مرافق كل من

$z_1 = i(3 + 2i)$ ؛ $z_2 = -3i + i(2i - 1)$

$z_3 = \frac{2i - 1}{3 + 2i}$ ؛ $z_4 = (1 - 2i)^{10}$

6 z عدد مركب حيث $z = \frac{3 - 5i}{1 + i}$

• احسب $z + \bar{z}$ و $z - \bar{z}$.

• استنتج $\mathcal{Re}(z)$ ، $\mathcal{Im}(z)$.

7 ميز الأعداد الحقيقية و الأعداد التخيلية الصرفة فيما يلي : $z + \bar{z}$ ؛ $z - \bar{z}$

$iz^2(\bar{z})^2$ ؛ $3 + z^2$ ؛ $2 + z\bar{z}$

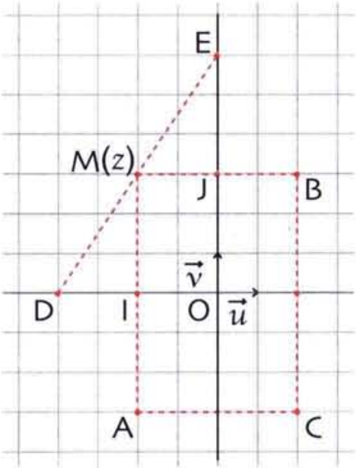
$(z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$ ؛ $(z + i\bar{z})(z - i\bar{z})$

8 z لاحقة النقطة M.

استعمل الشكل التالي لتحديد لاحقة كل نقطة من النقط A ، B ، C ، D ، E ، I ، J من بين الأعداد المركبة التالية :

$-z$ ؛ $\bar{z}$ ؛ $-\bar{z}$ ؛ $z + \bar{z}$ ؛ $z - \bar{z}$

$\frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ؛ $\frac{1}{2}(z - \bar{z})$



كتابة عدد مركب على الشكل الجبري

9 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل الجبري. $z_1 = i + (2 + i)$ ؛ $z_2 = (1 + i)(2 - 3i)$

$z_3 = (1 + i)(1 - i)$ ؛ $z_4 = (3 + i)^2$

$z_5 = (2 - 5i)^2$ ؛ $z_6 = (2 + 3i)^2 - (i - 1)^2$

10 نفس السؤال السابق.

$z_1 = \frac{2 - 5i}{3 + i}$

$z_2 = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - 2i}$

$z_3 = \frac{4 + 3i}{2 - i} + \frac{1 + i}{2 + i}$

11 x عدد حقيقي و z عدد مركب حيث

$z = x + 2 - i(ix + 3) - 2i + 5ix$

• اكتب بدلالة x الجزء الحقيقي $\mathcal{Re}(z)$ و الجزء التخيلي $\mathcal{Im}(z)$ للعدد z.

• استنتج قيم x التي يكون من أجلها

• z حقيقيا • z تخيليا صرفا.

كتابة عدد مركب على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسي

12 عين الطويلة و عمدة لكل عدد مركب مما يلي ثم اكتبه على الشكل المثلثي و على الشكل الأسي.

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z = \sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}$$

$$z = -\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}$$

13 نفس السؤال السابق.

$z = \dfrac{-1+i}{\sqrt{3}-i}$ ؛ $z = \dfrac{\sqrt{3}-2}{1+i\sqrt{3}}$

$z = (-1+i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2})$ ؛ $z = (1+i\sqrt{3})^4$

$z = \dfrac{\sqrt{3}-3i}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})^3}$ ؛ $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}\right)^3$

14 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل المثلثي و على الشكل الأسي.

$z_2 = 2+2i$ ؛ $z_1 = 1-i\sqrt{3}$

$z_4 = \dfrac{z_2}{z_1}$ ؛ $z_3 = z_1 \cdot z_2$

$z_5 = z_1^3 \cdot z_2^4$

15 اكتب العدد المركب z حيث $z = \dfrac{-1+3i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}$ على الشكل المثلثي.

الطويلة و العمدة

16 z عدد مركب حيث

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

• احسب z^2 ثم اكتبه على الشكل المثلثي.

• استنتج طويلة z و عمدة له.

17 مثل بيانيا في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث.

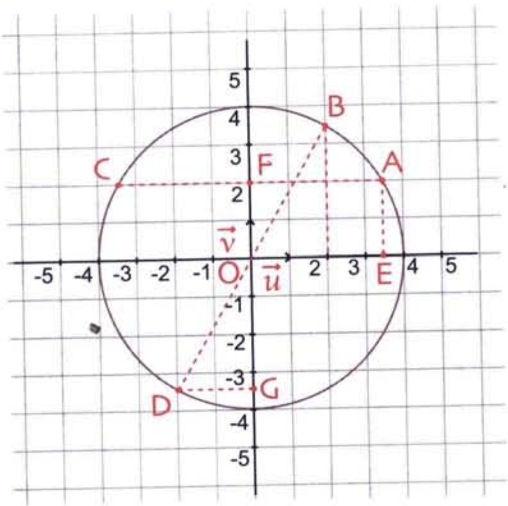
أ) $\arg z = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

ب) $|z| = 2$

جـ) $|z| = 2$ و $\arg z = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

أ) عين الطويلة و عمدة لكل لاحقة من لواحق النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G الممثلة في الشكل التالي



ب) انشئ في المستوي السابق النقط H ، K ، L ذات اللواحق $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $4e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ، $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$ على الترتيب.

19 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ و A ، B ، M نقط لواحقها على الترتيب 2 ، $3i$ ، z.

• فسر هندسيا كلا من العلاقتين : $\left|\dfrac{z-3i}{2-3i}\right| = 1$

و $\arg\left(\dfrac{z-3i}{2-3i}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $(k\in\mathbb{Z})$

• انشئ الشكل المناسب لمجموعة النقط $M(z)$.

الاعداد المركبة و الهندسة

بالنسبة للتمارين من 20 إلى 24 نزود المستوي بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

20 نعتبر النقطة M ذات اللاحقة z.

عين في كل حالة مجموعة النقط $M(z)$ حيث

أ) $|4iz + 12| = 4|z + 1 - i|$

ب) $|iz - 3| = |z + i|$

جـ) $|z + 5i| = 3$

د) $|iz - 3| = 4$

هـ) $|\bar{z} + 2 - i| = 2$

و) $|iz + 3| = |z + 2i|$

21 نفس السؤال السابق.

أ) $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

جـ) $\arg(z) = k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

د) $\arg(z) = k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

22 نفس السؤال السابق

أ) $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $\arg(z+1) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

جـ) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

23 نفس السؤال السابق.

أ) $\arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $\arg(iz) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

جـ) $\arg(-z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

24 عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون

أ) $\frac{z-1}{z+2i}$ حقيقيا.

ب) $\frac{z-1}{z+2i}$ تخيليا صرفا.

جـ) $\arg \frac{z-1}{z+2i} = k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

د) $\arg \frac{z-1}{z+2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

25 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث

أ) $\mathcal{R}e(z^2) = 0$.

ب) $\mathcal{I}m(z^2) = 1$.

جـ) $\mathcal{R}e(z^2) = 0$ و $\mathcal{I}m(z^2) = 1$.

26 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالتين التاليتين

أ) $(\bar{z} - 1)(z + 2)$ عدد حقيقي.

ب) العدد $\frac{z-2i}{z+4i}$ حيث $z \neq -4i$ حقيقي.

27 نفس السؤال السابق.

أ) العدد $\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ حيث $z \neq -1$ حقيقي.

ب) العدد $\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$ حيث $z \neq -1$ تخيلي صرف.

28 A ، B ، C نقط لاحقاتها على الترتيب

$z_A = -1 - i$ ، $z_B = 2 - i$ ، $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

1 . احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB})$.

2 . استنتج أن المستقيمين (CA)، (CB) متعامدان.

29 نفس السؤال من أجل (AC) و (AB) حيث

$z_A = 1 - i$ ، $z_B = 4 - 5i$ ، $z_C = 5 + 2i$.

30 A، B، C نقط لاحقاتها على الترتيب

$z_A = -\frac{1}{3} + 2i$ ، $z_B = 1 - 2i$ ، $z_C = \frac{7}{3} - 6i$.

1 • احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$.

2 • استنتج أن المستقيمين (AB)، (AC) متوازيان.

دستور موافر و ترميز أولير

31 • احسب بطريقتين مختلفتين العدد $(\cos x + i \sin x)^2$.

• استنتج $\cos 2x$ و $\sin 2x$ بدلالة $\sin x$ و $\cos x$.

32 • احسب بطريقتين مختلفتين العدد $(\cos x + i \sin x)^3$.

• استنتج $\cos 3x$ و $\sin 3x$ بدلالة $\sin x$ و $\cos x$.

• احسب $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$.

33 عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ • حقيقيا • تخيليا صرفا.

34 • اكتب على الشكل الخطي العددين $\cos^3 x$ ، $\sin^3 x$.

• استنتج الكتابة الخطية للعدد $\sin^3 \frac{x}{3}$ و $\cos^3 \frac{x}{3}$.

حل معادلات من الدرجة الثانية

35 حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية

$$z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$$

36 أ) عين العددين الحقيقيين α ، β حيث

$$(\alpha - i\beta) = -3 + 4i$$

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية :

$$2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$$

جـ) لتكن المعادلة ذات المجهول z في $\mathbb{C}$

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)\ z - 3 + 4i = 0$$

أوجد الحل الحقيقي لهذه المعادلة ثم الحلين الآخرين.

37 حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة

$$z^4 + 8iz^2 + 48 = 0$$

التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

38 A، B نقطتان لاحقاتهما على الترتيب $2 - 4i$ و $-1 - i$.

أ) عين لاحقة النقطة C صورة A بالتحاكي الذي مركزه B و نسبته -2.

ب) عين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

جـ) عين لاحقة النقطة E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

د) عين معاملات للنقط A، B، C حتى يكون مرجحها النقطة O.

39 ميز في كل حالة مما يلي التحويل النقطي الذي يحول كل نقطة M(z) إلى النقطة M'(z') حيث

أ) $z' = iz + 3 - i$

ب) $z' = 2z - 3i$

جـ) $z' = z + 1 + i$

د) $z' = -z + i$

40 عين طبيعة التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M(z) النقطة M'(z') حيث

$$z' = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} z + \sqrt{3} - i$$

مسائل

41 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$، (الوحدة هي 2cm).

نعتبر النقطتين A، C ذوي اللاحقتين على الترتيب

$z_1 = \sqrt{2}(1+i)$ ، $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

1 • عين الطويلة و عمدة لكل من z_1 ، z_3.

2 • انشئ النقطتين A و C.

3 • احسب $\frac{z_3}{z_1}$ ثم استنتج قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC})$.

4 • عين اللاحقة z_2 للنقطة B بحيث يكون الرباعي OABC مستطيلا. أرسم هذا المستطيل.

42 المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. A، B، C نقط لاحقاتها على الترتيب $z_1 = \sqrt{3} + i$ ، $z_2 = -1 - i$ ،
$z_3 = 1 - (2 + \sqrt{3})i$

1 • أ) احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب

$$z = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

2 • أ) اكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_1}{z_2}$.

ب) اكتب z_1 ، z_2 على الشكل المثلثي.

ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $\frac{z_1}{z_2}$.

جـ) استنتج من السؤال (2) القيمة المضبوطة لكل من للعددين $\sin\frac{\pi}{12}$ ، $\cos\frac{\pi}{12}$.

43 1 • حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2 • K، L، M نقط لاحقاتها على الترتيب

$z_K = 1 + i$ ، $z_L = -1 + i$ ، $z_M = -\sqrt{3}$

• انشئ هذه النقط في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u}, \vec{v})$، (الوحدة هي 4cm).

3 • أ) نسمي N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى L. عين لاحقة N.

ب) لتكن A صورة M و C صورة N بالدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

عين اللاحقتين z_A ، z_C للنقطتين A و C.

جـ) لتكن D صورة M و B صورة N بالانسحاب الذي شعاعه $(2)\vec{u}$.

عين اللاحقتين z_D ، z_B للنقطتين D ، B.

4 • أ) عين منتصف كل من القطعتين [DB] ، [AC].

ب) احسب العدد $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$.

جـ) استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

44 ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M(z) من المستوي تختلف عن A(-3i) و النقطة M′(z′) حيث $z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$

1 • برهن أن التحويل T يقبل نقطتين صامدتين B، C يطلب اعطاء لاحقة كل منهما.

2 • نسمي (ɣ) الدائرة ذات القطر [BC].

لتكن M نقطة من (ɣ) تختلف عن B و C و M′ صورتها بالتحويل T.

أ) تحقق أن لاحقة النقطة M تحقق $z = -3i + 4e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي.

ب) عبر عن اللاحقة z' للنقطة M′ بدلالة θ.
استنتج أن M′ تنتمي إلى (ɣ).

جـ) برهن أن $z' = -\bar{z}$ ثم استنتج انشاء هندسيا للنقطة M′.

حلول التمارين و المسائل

الاعداد المركبة

1 $z_1 + z_2 + z_3 = -1 + 8i$

$z_1.z_2 = -6 + 7i$ ؛ $3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 9 - \frac{7}{2}i$

$\frac{1}{z_3} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ ؛ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{17} - \frac{9}{17}i$

$(z_1.z_2)^2 = -13 - 84i$ ؛ $z_1^2 = 3 + 4i$

2 $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)^2 + (\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = 1$

3 $z = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$

4 $i^{1947} = -i$ ؛ $i^4 = 1$ ؛ $i^3 = -i$ ؛ $i^2 = -1$

5 $\bar{z}_2 = 3i + i(2 + 1)$ ؛ $\bar{z}_1 = -i(3 - 2i)$

$\bar{z}_4 = (1 + 2i)^{10}$ ؛ $\bar{z}_3 = \frac{-2i - 1}{3 - 2i}$

6 $z = \frac{3 - 5i}{1 + i}$

$z - \bar{z} = -8i$ ؛ $z + \bar{z} = -2$

$\mathcal{I}m(z) = -8$ ؛ $\mathcal{R}e(z) = -2$

7 الأعداد الحقيقية هي $z + \bar{z}$ ؛ $2 + z\bar{z}$

$(z + i\bar{z})(z - i\bar{z})$ ؛ $(z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$

الأعداد التخيلية الصرفة هي $z + \bar{z}$ ؛ $2 + z\bar{z}$

$iz^2(\bar{z})^2$ ؛ (لأن $iz^2(\bar{z})^2 = i(z\bar{z})^2$)

8 $C(-z)$ نظيرة $M(z)$ بالنسبة إلى O

$A(\bar{z})$ نظيرة $M(z)$ بالنسبة إلى $(O;\vec{u})$

$B(-\bar{z})$ نظيرة $M(z)$ بالنسبة إلى $(O;\vec{v})$

$D(z + \bar{z})$ $(z + \bar{z} = 2\mathcal{R}e(z))$

$E(z - \bar{z})$ $(z - \bar{z} = 2i\mathcal{I}m(z))$

$I\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)$ ؛ $J\left(\frac{1}{2}(z - \bar{z})\right)$

9 $z_1 = 2 + 2i$ ؛ $z_2 = 5 - i$

$z_3 = 2$ ؛ $z_4 = 8 + 6i$

$z_5 = -21 - 20i$ ؛ $z_6 = -5 + 14i$

10 $z_1 = \frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$ ؛ $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_3 = \frac{8}{5} + \frac{11}{5}i$

11 $z = 2x + 2 + (-5 + 5x)i$

$\mathcal{R}e(z) = 2x + 2$ ؛ $\mathcal{I}m(z) = 5x - 5$

z حقيقي من أجل $x = 1$.

z تخيلي صرف من أجل $x = -1$.

12 ملاحظة : ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة

$\|z\|$	$\arg z$	الشكل المثلثي للعدد z	الشكل الأسي
2	$-\frac{\pi}{12}$	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{\pi}{12}}$
2	$\frac{13\pi}{12}$	$2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$	$2e^{i\frac{13\pi}{12}}$
1	$\frac{5\pi}{12}$	$\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$	$e^{i\frac{5\pi}{12}}$
1	$\frac{7\pi}{12}$	$\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$	$e^{i\frac{7\pi}{12}}$

13 ملاحظة : ترتيب الاجابات يتبع ترتيب الاسئلة من اليمين إلى اليسار.

$\|z\|$	$\arg z$	الشكل المثلثي للعدد z	الشكل الأسي
$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$
16	$\frac{4\pi}{3}$	$16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$	$16e^{i\frac{4\pi}{3}}$
4	$\frac{11\pi}{12}$	$4\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$	$4e^{i\frac{11\pi}{12}}$
1	$\frac{3\pi}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$	$e^{i\frac{3\pi}{2}}$
$\frac{\sqrt{6}}{16}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{6}}{16}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{6}}{16}e^{i\frac{\pi}{6}}$

14 ملاحظة : ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة من اليمين إلى اليسار.

العدد	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
z_1	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
z_2	$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$
z_3	$4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$	$4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{12}}$
z_4	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}$
z_5	$512(\cos 0 + i\sin 0)$	$512\,e^{i0}$

15 يكتب z على الشكل $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه نجد الشكلين المثلثي $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

و الأسي $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

16 لدينا $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ و منه الشكل المثلثي $z^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

نستنتج أن $|z| = 2$ ؛ $\arg(z) = -\frac{\pi}{8}$

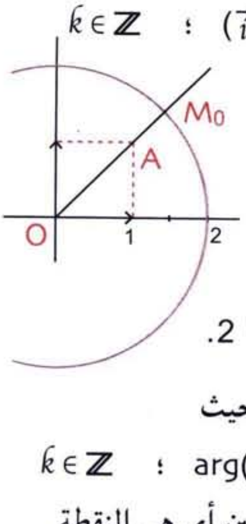
17 أ) • مجموعة النقط $M(z)$

حيث $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ هي مجموعة النقط M

حيث $(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

أي نصف المستقيم

$[OA)$ حيث $A(1+i)$.



ب) • مجموعة النقط $M(z)$

حيث $|z| = 2$ هي الدائرة

التي مركزها O و نصف قطرها 2.

جـ) • مجموعة النقط $M(z)$ حيث

$|z| = 2$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

هي تقاطع المجموعتين السابقتين أي هي النقطة $M_0(\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$.

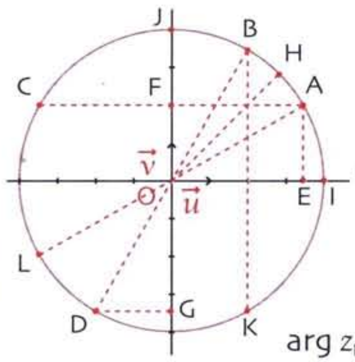
18 أ) •

$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = |z_E| = |z_F| = |z_G| = 4$

$\arg z_A = \frac{\pi}{6}$ (مسقط A على (OJ) هو منتصف [OJ])

$\arg z_B = \frac{\pi}{3}$ ؛ $\arg z_C = \pi - \frac{\pi}{6}$ ؛ $\arg z_E = 0$

$\arg z_D = \pi + \frac{\pi}{2}$ ؛ $\arg z_F = \frac{\pi}{2}$ ؛ $\arg z_G = -\frac{\pi}{2}$



ب) • $|z_H| = 4$

$\arg z_H = \frac{\pi}{4}$

إذن H نقطة مشتركة بين الدائرة و منتصف الزاوية $(\vec{OI} ; \vec{OJ})$.

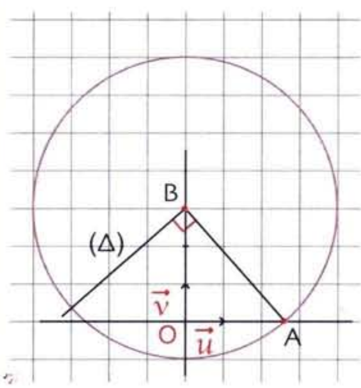
$|z_K| = 4$ ؛ $\arg z_K = \frac{5\pi}{3}$

إذن H هي نظيرة B بالنسبة إلى (OI).

$|z_L| = 4$ ؛ $\arg z_L = \frac{7\pi}{6}$

إذن L هي نظيرة A بالنسبة إلى O.

19 •



$\left|\frac{z - 3i}{2 - 3i}\right| = \frac{BM}{BA}$

$\frac{BM}{BA} = 1$

يعني $BM = BA$.

مجموعة النقط M

هي دائرة مركزها B و نصف قطرها BA $(BM = \sqrt{13})$

• $\arg\left(\frac{z - 3i}{2 - 3i}\right) = (\vec{BM} ; \vec{BA})$

مجموعة النقط M حيث $(\vec{BM} ; \vec{BA}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

هو نصف المستقيم (Δ) العمودي على (AB)

في B (باستثناء B) و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم (OB) و الذي لا يشمل النقطة A.

20 • مجموعة النقط $M(x ; y)$ هي :

أ) • المستقيم Δ_1 : $2x + 4y - 7 = 0$

ب) • المستقيم Δ_2 : $y = -2$

جـ) • الدائرة (C_1) : $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$

مركزها $\omega(0 ; -5)$ و نصف قطرها 3.

د) • الدائرة (C_2) : $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

مركزها $\omega(0 ; -3)$ و نصف قطرها 4.

هـ) • الدائرة (C_3) : $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

مركزها $\omega(-2 ; -1)$ و نصف قطرها 2.

و) • المستقيم Δ_3 : $y = \frac{1}{2}$

21 • مجموعة النقط M هي :

أ) • نقط محور التراتيب ذات التراتيب الموجبة تماما.

ب) • نقط محور التراتيب باستثناء المبدإ.

جـ) • نقط محور الفواصل ذات الفواصل الموجبة تماما.

د) • نقط محور الفواصل باستثناء المبدأ.

22 • بالرجوع إلى تعريف عمدة عدد مركب

أ) • $(\vec{i} ; \vec{OM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ مجموعة النقط M

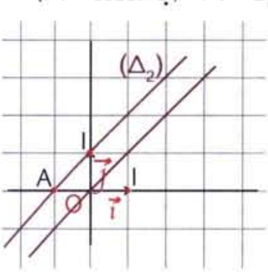
هي منصف $(\vec{i} ; \vec{j})$ باستثناء المبدأ O.

ب) • لتكن $A(-1)$ إذن $\vec{AM}(z + 1)$

$\arg(z + 1) = (\vec{i} ; \vec{OM})$ مجموعة النقط M

هي نصف المستقيم (Δ_2) طرفه A (باستثناء A)

و يشمل $J(0 ; 1)$.



جـ) • لدينا $\vec{JM}(z - 1)$

$\arg(z - 1) = (\vec{i} ; \vec{JM})$

أي $(\vec{i} ; \vec{JM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

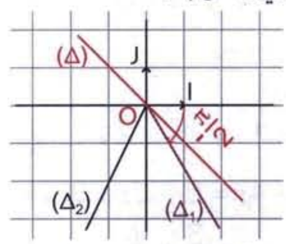
مجموعة النقط M

هي نصف المستقيم (Δ_3) طرفه J

(باستثناء J) و محمول على (Δ_2).

23 أ) • لدينا $\arg \bar{z} = -\arg z$ إذن مجموعة النقط M هي المنصف الثاني (Δ) باستثناء O.

ب) • $\arg(iz) = \frac{\pi}{2} + \arg z$ إذن $\arg z = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ مجموعة النقط M هي نصف المستقيم (Δ_1) طرفه O (باستثناء O) و يشمل نقطة مثل $A(1\,;\sqrt{3})$ و ميله $-\sqrt{3}$.



جـ) • لدينا

$\arg(-z) = \pi + \arg z$

إذن مجموعة النقط M هي نصف المستقيم (Δ_2) نظير (Δ_1) بالنسبة إلى محور التراتيب.

24 نسمي $\mathcal{R}e(z)$ و $\mathcal{I}m(z)$ الجزئين الحقيقي و التخيلي للعدد $Z = \frac{z-1}{z+2i}$.

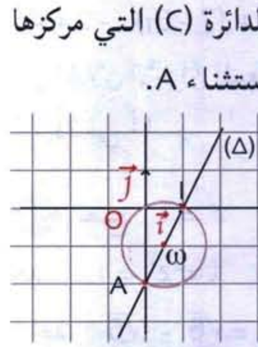
Z حقيقي يعني $\mathcal{I}m(Z) = \frac{-2x + y + 2}{x^2 + (y+2)^2} = 0$

مجموعة النقط $M(z)$ في هذه الحالة هي المستقيم $\Delta : 2x - y - 2 = 0$ باستثناء النقطة $A(0\,;-2)$.

ب) • Z تخيلي صرف يعني

$$\mathcal{R}e(Z) = \frac{x^2 + y^2 - x + 2y}{x^2 + (y+2)^2} = 0$$

مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة (C) التي مركزها $A\left(\frac{1}{2}\,;-1\right)$ و تشمل المبدأ باستثناء A.



جـ) • نعتبر النقطتين $I(1)$ ، $A(-2)$.

مجموعة النقط M تحقق

$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{IM}) = 4\pi$

و هي المستقيم (Δ) باستثناء $[AI]$.

د) • مجموعة النقط M تحقق

$(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{IM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

و هي الدائرة (C) باستثناء A و I.

25 أ) • مجموعة النقط M تحقق المعادلة $x^2 - y^2 = 0$ (اتحاد المنصفين الأول و الثاني)

ب) • مجموعة النقط M تحقق $y = \frac{1}{2x}$ (قطع زائد).

جـ) • مجموعة النقط M تحقق $x^2 - y^2 = 1$ (قطع زائد).

26 أ) • مجموعة النقط M تحقق المعادلة $x^2 + y^2 + x - 2 = 0$ و هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$ و نصف قطرها $\frac{3}{2}$.

ب) • مجموعة النقط M تحقق $\frac{x^2 + y^2 + 2y - 8}{x^2 + (y+4)^2}$

و هي الدائرة التي مركزها $\omega(0\,;-1)$ و نصف قطرها 3 باستثناء $A(0\,;-4)$.

27 أ) • مجموعة النقط M تحقق المعادلة $y = 0$ مع $(x\,;y) \neq (-1\,;0)$ و هي محور الفواصل باستثناء $A(-1\,;0)$.

ب) • مجموعة النقط M تحقق $x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0$ مع $(x\,;y) \neq (-1\,;0)$ و هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(-\frac{3}{2}\,;0\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ باستثناء A

28 1 • $(\widehat{\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}}) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2}$

2 • نستنتج أن (CA) ، (CB) متعامدان.

29 $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2}$

و بالتالي (AB) ، (AC) متعامدان.

30 1 • $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 0$

2 • و بالتالي (AB) ، (AC) متوازيان.

31 $(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$

(حسب قانون مواقر)

$(\cos x + i\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i\sin x\cos x$

(حسب ثنائي الحد لنيوتن)

نستنتج أن $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

32 • $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i\,(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$$

• نستنتج أن $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$

• لدينا $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

إذن نكتب أيضا $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

33 • لدينا $(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n\left(\cos n\frac{\pi}{3} + i\sin n\frac{\pi}{3}\right)$

$(1 + i\sqrt{3})^n$ عدد حقيقي يعني $\sin n\frac{\pi}{3} = 0$

إذن n مضاعف 3.

$(1 + i\sqrt{3})^n$ تخيلي صرف يعني $\cos n\frac{\pi}{3} = 0$

و هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الاعداد الطبيعية و بالتالي مجموعة الحلول خالية.

34 • لدينا $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\cos^3 x = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right]^3 = \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right]$$

إذن $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ ؛ $\sin^3 x = \left[\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]^3$

$$\sin^3 x = \frac{1}{8i}\left[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right]$$

إذن $\sin^3 x = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$

• نستنتج الكتابة الخطية للعددين $\cos^3\frac{x}{3}$ ، $\sin^3\frac{x}{3}$

$$\cos^3\frac{x}{3} = \frac{1}{4}\left(\cos x + 3\cos\frac{x}{3}\right)$$

$$\sin^3\frac{x}{3} = -\frac{1}{4}\left(\sin x - 3\sin\frac{x}{3}\right)$$

35 $\Delta = (2 - i)^2 - 4(3 - i) = -9$

للمعادلة $z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$ حلان هما

$z = 1 - i$ أو $z = 1 - 2i$

36 أ) • $\alpha = 1$ و $\beta = 2$

ب) • للمعادلة $2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$

حلان هما $z = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$ أو $z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

جـ) • إذا كان α حلا حقيقيا للمعادلة

$(*)\ldots\ 2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i = 0\ \ldots(*)$

فإن α تحققها.

و نجد بعد تعويض z بالعدد α و الإختصار الجملة

$$\begin{cases} 2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 7\alpha - 3 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 1$ يحقق هذه الجملة و هو الحل الحقيقي.

$$(z - 1)(2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i) =$$
$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i$$

إذن الحلان الآخران للمعادلة (*) هما حلا المعادلة الواردة في أ).

37 نضع $z^2 = t$ إذن $t^2 + 8it + 48 = 0$

نجد $t = z^2 = i$ أو $t = z^2 = -12i$

و نجد $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{6}$ أو $z_2 = -z_1$

$z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ أو $z_4 = -z_3$

38 أ) • $z_C = kz_A + (1 - k)z_B$ ؛ $z_C = -7 - i$

ب) • $z_D = e^{i\theta}z_B + (1 - e^{i\theta})z_A$ ؛ $z_D = 5 - i$

جـ) • $z_E = z_B + z_{\overrightarrow{AB}}$ ؛ $z_E = -4 - 2i$

د) • O مرجح النقط A، B، C المرفقة على الترتيب بالمعاملات α، β، γ.

$\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C$ ، $\begin{cases} 2\alpha - \beta - 7\gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \end{cases}$

باعتبار γ وسيطا و حل الجملة السابقة

نجد $\alpha = 2\gamma$ ، $\beta = -3\gamma$ ، $\gamma \neq 0$

باختيار γ مثلا $\gamma = 1$ نجد $(\alpha ، \beta ، \gamma) = (2 ، -3 ، 1)$

39 أ) • التحويل دوران $R\left(\omega ; \frac{\pi}{2}\right)$ ؛ $\omega(2 + i)$

ب) • التحويل تحاك $H(\omega ; 2)$ ؛ $\omega(3i)$

جـ) • التحويل انسحاب $T_{\vec{v}}$ ؛ $\vec{v}(1 + i)$

د) • التحويل تناظر مركزي S_ω ؛ $\omega\left(\frac{i}{2}\right)$

40 التحويل دوران $R\left(\omega ; -\frac{\pi}{3}\right)$ ؛ $\omega(-2i)$

41 1 • $|z_1| = 2$ ؛ $\arg z_1 = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$

$|z_3| = 1$ ؛ $\arg z_3 = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

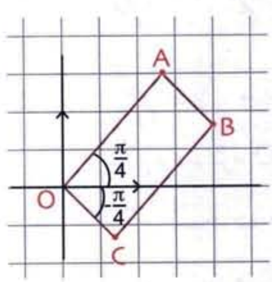
2 • اعتمادا على طويلة z_1

و عمدة له $\frac{\pi}{4}$

ننشئ النقطة A.

و بالمثل بالنسبة

إلى النقطة C.



3 • $\frac{z_3}{z_1} = -\frac{i}{2}$ و منه $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC}) = \arg \frac{z_3}{z_1} = -\frac{\pi}{2}$

4 • OABC مستطيل يعني أن القطرين [OB]، [AC]

متناصفان أي $\frac{1}{2} z_2 = \frac{1}{2}(z_1 + z_3)$

و منه $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$.

42 1 • أ) • $|z| = 1$ ؛ $\arg z = -\frac{\pi}{2}$

ب) • $\frac{BC}{BA} = 1$ و $(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين.

2 • أ) • $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1 + \sqrt{3})}{2}$

ب) • $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

جـ) • $\frac{z_1}{z_2} = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$

$= -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1 + \sqrt{3})}{2}$

إذن $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ و $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

43 1 • $z = 1 + i$ أو $z = -1 + i$

2 • تنشأ النقط k، L، M اعتمادا على المعطيات.

3 • أ) $z_N = -2 + \sqrt{3} + 2i$

ب) $z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_M = \sqrt{3}\, i$

$z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} z_N = 2 - (\sqrt{3} - 2)i$

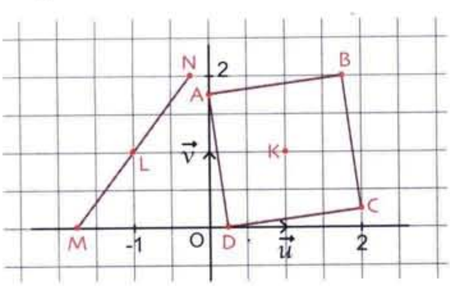
جـ) $z_D = z_M + 2 = -\sqrt{3} + 2$

$z_B = z_N + 2 = \sqrt{3} + 2i$

4 • أ) لاحقة منتصف [DB] هي $\frac{1}{2}(z_D + z_B) = 1 + i$

أي لاحقة منتصف [AC] هي $\frac{1}{2}(z_A + z_C) = 1 + i$

أي K و منه [DB] و [AC] متناصفان في K.



ب) • $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{1}{i}$

جـ) • $\left|\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}\right| = 1$ أي $KC = KB$.

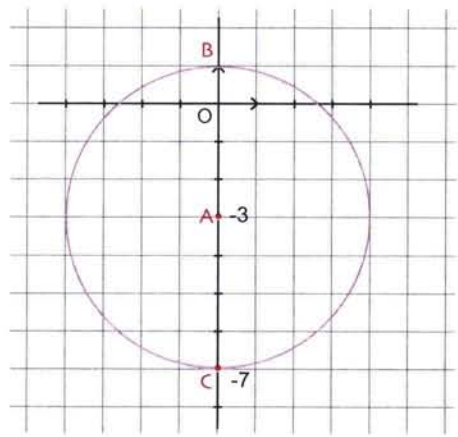
$\arg \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = -\frac{\pi}{2}$ أي $(KC) \perp (KB)$

إذن ABCD مربع.

44 1 • المعادلة $z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$

أي $z^2 + 6iz + 7 = 0$

تقبل حلين $z_B = i$ و $z_C = -7i$ و منه النقطتان الصامدتان B، C.



1 • أ) • A منتصف [BC]

γ الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 4 باستثناء C، B .

لدينا $|z - z_A| = 4$ و $z - z_A = 4e^{i\theta}$

إذن $z = -3i + 4e^{i\theta}$ (θ عدد حقيقي).

ب) • $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$ و منه $|z' + 3i| = 4$

أو $AM' = 4$ نستنتج أن $M' \in (\gamma)$

جـ) • $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$ يعني $z' = -\bar{z}$

نستنتج أن M' هي نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب، و منه إنشاء M'.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة. ☺

Hard_equation

• **التشابه المستوي المباشر**

تعريف

λ عدد حقيقي موجب تماما.

نسمي تشابها مستويا مباشرا نسبته λ كل **تحويل نقطي** S للمستوي في نفسه حيث : من أجل كل النقط A، B، M من المستوي ذات الصور A'، B'، M' على الترتيب وفق S

يكون : $\begin{cases} A'B' = \lambda AB \\ (\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM}) + k2\pi \end{cases}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$.

• التشابه المباشر الذي نسبته 1 يسمى تقايسا موجبا، و يسمى كذلك إزاحة.

• الإزاحة هي تقايس يحفظ المسافات و الزوايا الموجهة.

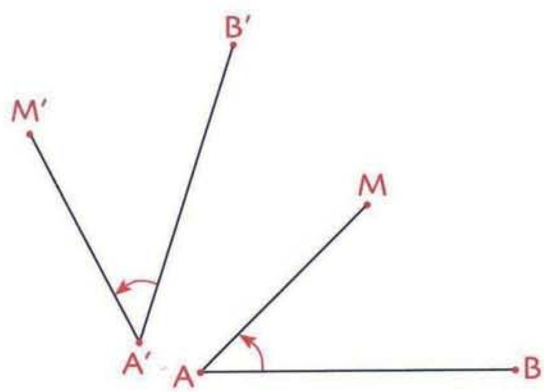
• كل إزاحة هي إنسحاب أو دوران.

• التحويل المطابق للمستوي هو تشابه مباشر نسبته 1.

• كل انسحاب في المستوي هو تشابه مباشر نسبته 1.

• كل دوران هو تشابه مباشر نسبته 1.

• كل تحاك نسبته λ هو تشابه مباشر نسبته $|\lambda|$.



• **خواص**

S تحويل نقطي للمستوي.

• التحويل S تشابه مباشر إذا وفقط إذا كان S مركب تحاك و إزاحة.

• كل تشابه مباشر هو تحويل مطابق أو إنسحاب أو يقبل نقطة صامدة وحيدة تسمى مركز التشابه.

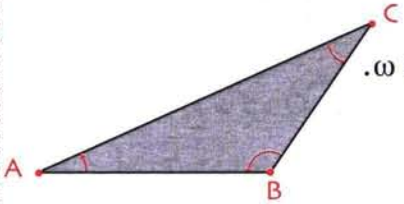
• كل تشابه مباشر $S(\omega ; \lambda ; \theta)$ يمكن إعتباره مركبا تبديليا لدوران $r(\omega ; \theta)$ و تحاك $h(\omega ; \lambda)$ حيث $\lambda > 0$. (أي $hor = roh$)

• كل تشابه مباشر مركزه ω هو تشابه مباشر يتميز بالعناصر التالية : المركز ω، النسبة λ $(\lambda > 0)$ و الزاوية θ (θ هو قيس لزاوية التشابه) حيث من أجل كل نقطة M تختلف عن ω ؛

عن ω ؛ $\begin{cases} \omega M' = \lambda \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M} ; \overrightarrow{\omega M'}) = \theta + k2\pi \end{cases}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$.

• من أجل كل نقطتين A و B حيث A' و B' صورتاهما على الترتيب بالتشابه المباشر الذي نسبته λ و زاويته θ، $\begin{cases} A'B' = \lambda AB \\ (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \theta + k2\pi \end{cases}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$.

• إذا كانت A، B، A' و B' أربع نقط من المستوي بحيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$.

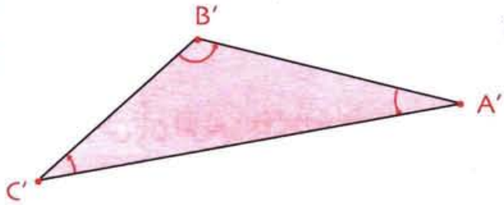


- **تركيب تشابهين مباشرين**

• مركب تشابهين مباشرين لهما نفس المركز ω هو تشابه مباشر مركزه ω.

أي $S(\omega, \lambda', \theta') \circ S(\omega, \lambda, \theta) = S(\omega, \lambda\lambda', \theta + \theta')$

و $S(\omega, \lambda, \theta) \circ S(\omega, \lambda', \theta') = S(\omega, \lambda\lambda', \theta' + \theta)$.



• كل تشابه مباشر يحول مثلثا إلى مثلث مشابه له مباشرة (لأن كل زاويتين متقابلتين فيهما متقايستان و لهما نفس الإتجاه).

- **التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة**

تعريف

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

كل تشابه مباشر يرفق بنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، يعرف بالعلاقة $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$.

• كل تحويل نقطي T يرفق بنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$. حيث $z' = az + b$ ؛ a و b عددان مركبان و $a \neq 0$، هو تشابه مباشر نسبته $|a|$.

• إذا كان $a = 1$ فإن التحويل T انسحاب شعاعه $\vec{v}(b)$.

• إذا كان $a \neq 1$ فإن T يقبل نقطة صامدة واحدة ω لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ و T هو مركب تبديلي. لتحاك مركزه ω و نسبته $|a|$ و دوران مركزه ω (نفس مركز التحاكي) و زاويته $\arg(a)$.

نقول إن T هو تشابه مباشر مركزه ω و نسبته $|a|$، و زاويته $\arg(a)$.

ملاحظة : يمكن تعريف التشابه $S(\omega, k, \theta)$ الذي يرفق بنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بالعلاقة $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$.

- **خواص**

الدوران $r(\omega; \theta)$	التحاكي $h(\omega; k)$ ؛ $k \neq 0$	التشابه $S(\omega, \|k\|, \theta)$
يحفظ المسافات و المساحات	يكبر (أو يصغر) بضرب • المسافات في k • المساحات في k^2	يكبر (أو يصغر) بضرب • المسافات في k • المساحات في k^2
يحفظ الزاويا الموجهة، المرجح التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.	يحفظ الزوايا الموجهة، المرجح، التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.	يحفظ الزوايا الموجهة، المرجح التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.
يحول مستقيمًا إلى مستقيم.	يحول مستقيما إلى مستقيم يوازيه.	يحول مستقيما إلى مستقيم
يحول دائرة $\mathscr{C}(O; R)$ إلى الدائرة $\mathscr{C}'(O'; R)$ حيث $O' = r(O)$	يحول دائرة $\mathscr{C}(O; R)$ إلى الدائرة $\mathscr{C}'(O'; R')$ حيث $O' = r(O)$ و $R' = kR$.	يحول دائرة $\mathscr{C}(O; R)$ إلى الدائرة $\mathscr{C}'(O'; R')$ حيث $O' = S(O)$ و $R' = \|k\|R$.

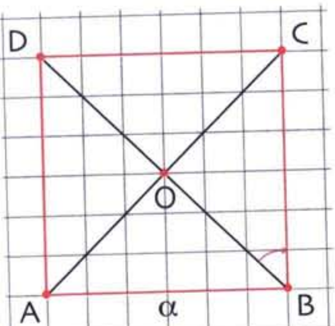
طرائق

1 التعرف على تشابه مباشر

تمرين 1

$ABCD$ مربع مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. T تحويل نقطي يحول O إلى B و D إلى C.
اثبت أن T تشابه مباشر مركزه A. حدد نسبته و زاويته.

حل



• نفرض أن المربع $ABCD$ موجه توجيها مباشرا لدينا $O \xrightarrow{T} B$. $O \xrightarrow{T} B$

نضع $AB = \alpha$ (حيث $\alpha > 0$). لدينا $\frac{BC}{OD} = \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha}$.

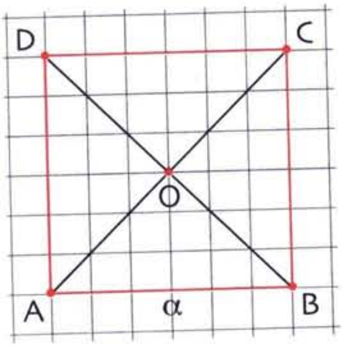
إذن $BC = \sqrt{2}\, OD$. و لدينا $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ حيث $k \in \pi$.

إذا فرضنا أن صورة A وفق T هي A' فإن المثلثين AOD و $A'BC$ متشابهان مباشرة. بما أن المثلث AOD قائم في O و متساوي الساقين فإن المثلث $A'BC$ قائم في B و متساوي الساقين. أي أن المثلث $A'BC$ ينطبق على المثلث ABC.
و بالتالي A' تنطبق على A (النقطة A صامدة بالتحويل T).
إذن T تشابه مركزه A و نسبة $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

تمرين 2

$ABCD$ مربع مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. S_C، S_A و S_O تشابهات مباشرة حيث S_C مركزه C و يحول O إلى B. S_A مركزه A و يحول B إلى D. S_O مركزه O و يحول B إلى D.
• عين النسبة و زاوية كل من التشابهات S_C، S_A و S_O.

حل



• $S_C \left| \begin{array}{l} C \longmapsto C \\ O \longmapsto B \end{array} \right.$. نضع $AB = \alpha$ $(\alpha > 0)$.

نسبة التشابه S_C هي $\frac{CB}{CO}$ و زاويته هي قيس $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB})$.

حساب $\frac{CB}{CO}$: لدينا $CO = \frac{CA}{2}$ و المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين. إذن $AC^2 = 2\alpha^2$. ينتج أن $AC = \alpha\sqrt{2}$.

و بالتالي $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{2CB}{CA} = \frac{CB}{CO}$. إذن نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$.

حساب قيس للزاوية $(\overrightarrow{CB} , \overrightarrow{CO})$. نلاحظ أن (CO) هو منصّف الزاوية $(\overrightarrow{CB} , \overrightarrow{CD})$.

إذن $\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CB} , \overrightarrow{CO})$. و بالتالي نسبة التشابه S_C هي $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

- لدينا $S_A \left| \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ B \longmapsto D \end{array} \right.$. نسبة S_A هي $\frac{AD}{AB}$ و زاويته $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$.

حساب $\frac{AD}{AB}$: لدينا $\frac{AD}{AB} = 1$ ، إذن نسبة التشابه S_A هي 1.

حساب قيس للزاوية $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD})$: هذه الزاوية قائمة و موجهة في الاتجاه المباشر. إذن $\frac{\pi}{2}$ قيس لهذه الزاوية. و بالتالي نسبة التشابه S_A هي 1 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

- لدينا $S_O \left| \begin{array}{l} O \longmapsto O \\ B \longmapsto D \end{array} \right.$. نسبة S_O هي $\frac{OD}{OB}$ و هي 1 و زاويته $(\overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OD})$، و هي زاوية مستقيمة و π قيس لها. و بالتالي نسبة التشابه S_O هي 1 و زاويته π .

إذن S_O دوران مركزه O و زاويته π . يمكن اعتبار S_O أيضا تحاكيا مركزه O و نسبته 1-

و هو أيضا تناظر مركزه O .

تمرين 3

ABC مثلث متقايس الأضلاع، I منتصف $[AC]$. نسمي S التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول B إلى I.

- عين نسبة التشابه S و زاويته.
- انشئ النقطة D سابقة C بالتشابه S. برّر إجابتك.

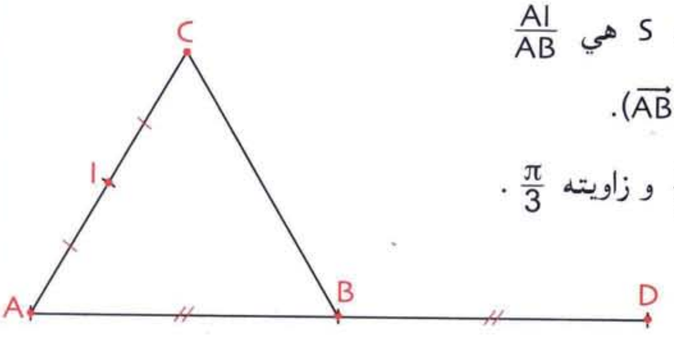
حل

- لدينا $S \left| \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ B \longmapsto I \end{array} \right.$. إذن نسبة التشابه S هي $\frac{AI}{AB}$

حيث $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ ، و زاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{3}$.

إذن S تشابه مباشر مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

- D سابقة النقطة C يعني $S(D) = C$.



إذن $AC = \frac{1}{2} AD$ و $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. و بالتالي النقطة D تنتمي إلى (AB) حيث $AD = 2AB$.

إذن D هي نظيرة A بالنسبة إلى B. (الشكل)

تمرين 4

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x;y)$ النقطة $M'(x';y')$ حيث $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y - 4 \end{cases}$

لتكن z لاحقة M و z' لاحقة M'.

• عبّر عن z بدلالة z'.

• حدد طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

حل

• نضع $Z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ فيكون

$$z' = x' + iy' = (x - y + 3) + i(x + y - 4)$$
$$= x - y + 3 + ix + iy - 4i$$
$$= (x + iy) + i(x + iy) + 3 - 4i = (1 + i)(x + iy) + 3 - 4i$$

إذن
$$z' = (1 + i)z + 3 - 4i$$

و هذه الكتابة على الشكل $z' = az + b$. حيث $a \neq 0$ إذن التحويل النقطي $T : M(z) \longrightarrow M'(z')$

حيث $z' = (1 + i)z + 3 - 4i$ تشابه مباشر، مركزه النقطة الصامدة ω ذات اللاحقة z_0 حل المعادلة $z = (1 + i)z + 3 - 4i$ أي $z = 4 + 3i$.

إذن مركز التشابه T هو $\omega(4 + 3i)$. نسبته $|i + 1|$ أي $\sqrt{2}$ و زاويته $\arg(1 + i)$ أي $\frac{\pi}{4}$.

إذن التحويل T تشابه مباشر مركزه $\omega(4 + 3i)$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

2 التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

تمرين 1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

عبّر عن التشابه المباشر S بالعبارة $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان في كل حالة مما يلي :

• S إنسحاب شعاعه $\vec{v}(3 - 2i)$.

• S تشابه مباشر مركزه O و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{6}$.

• S تشابه مباشر مركزه $\omega(4 - 3i)$ و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

حل

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي صورتها وفق S النقطة $M'(z')$.

• الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(3 - 2i)$ معرف بالعبارة $z' = z + b$.

إذن الانسحاب S الذي شعاعه $\vec{v}(3 - 2i)$ يعرف كما يلي : $z' = z + 3 - 2i$.

• التشابه $S(\omega, k, \theta)$ حيث $\omega(z_0)$، يعرف بالعبارة $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

إذن التشابه $S\left(O, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ يعرف بالعبارة $z' = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} z$.

أو أيضا : $z' = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) z$ أي $z' = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$.

ملاحظة : يعرف التشابه $S\left(O, \sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ كما يلي :

من أجل كل نقطة M تختلف عن O. $\begin{cases} OM' = \sqrt{3}OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ينتج أن $\left|\frac{z'}{z}\right| = \sqrt{3}$ و $\arg\frac{z'}{z} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن $\frac{z'}{z} = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$ أو $z' = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} z$.

نلاحظ أن هذه العلاقة صحيحة من أجل النقطة الصامدة O مركز التشابه S.

• لدينا التشابه $S\left(\omega, 2, \frac{\pi}{2}\right)$ حيث ω النقطة ذات اللاحقة $4 - 3i$.

إذن التشابه S يعرف بالعبارة $z' - (4 - 3i) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (4 - 3i))$ أو $z' = 2iz - 2 - 11i$.

ملاحظة : يمكن إعطاء تفسير هندسي كالآتي : التشابه $S\left(\omega, 2, \frac{\pi}{2}\right)$ يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث $\omega M' = 2\omega M$ و $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

أو أيضا $\frac{\omega M'}{\omega M} = 2$ ، $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

و بالتالي $\left|\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right| = 2$ و $\arg\frac{z' - z_0}{z - z_0} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $z_0 = 4 - 3i$).

إذن $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$. بعد الحساب و تعويض z_0 نجد $z' = 2iz - 2 - 11i$.

تمرين 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن النقط $A(1;0)$ ، $B(-1;1)$ ، $C(0;2)$ و $D(-1;5)$.

عين التشابه المباشر S الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D.

حل

S تشابه مباشر يعني أنه يوجد عددان مركبان a و b $(a \neq 0)$ حيث $z' = az + b$.

S يحول A إلى C يعني $z_C = az_A + b$ و S يحول B إلى D يعني $z_D = az_B + b$

لدينا $z_A = 1$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = 2i$ ، $z_D = -1 + 5i$

و بتعويض z_A ، z_C ، z_B ، z_D نجد الجملة ذات المجهولين a و b التالية :

$\begin{cases} a + b = 2i \\ (-1 + i)a + b = -1 + 5i \end{cases}$ و بحل هذه الجملة نجد $a = 1 - i$ و $b = -1 + 3i$.

إذن $z' = (1 - i)Z - 1 + 3i$

ملاحظة : يمكن أن نكتب العلاقة الأخيرة تحليليا بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

لدينا $x' + iy' = (1 - i)(x + iy) - 1 + 3i$ و نجد $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 3 \end{cases}$

تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j})$.

ليكن S التشابه المباشر المعرف بالعلاقة $z' = (1 - i) z - 3 + i$

حدد العناصر المميزة للتشابه S.

حل

التحويل S ليس إنسحابا لأن $1 - i \neq 1$.

إذن S يقبل نقطة صامدة وحيدة ω لاحقتها z_0 حل المعادلة $z = (1 - i) z - 3 + i$.

هذه المعادلة تكافئ $-iz = 3 - i$ إذن $z = 1 + 3i$

و بالتالي مركز التشابه S هو النقطة $\omega(1 + 3i)$.

نسبة التشابه S هي $|1 - i| = \sqrt{2}$. زاوية التشابه S هي عمدة للعدد $1 - i$ و لتكن $-\frac{\pi}{4}$.

إذن S تشابه مباشر مركزه $\omega(1 + 3i)$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

3 تركيب تشابهين مباشرين

تمرين 1

S_1 تشابه مباشر معرف بالعلاقة $z' = (\sqrt{3} - i) z$ و S_2 تشابه مباشر معرف بالعلاقة $z' = iz - i$.

عين عبارة كل من التحويلين $S_1 \circ S_2$ و $S_2 \circ S_1$ ثمّ العناصر المميزة لكل منهما.

حل

كل من $S_1 \circ S_2$ و $S_2 \circ S_1$ تشابه مباشر.

لتكن النقطة M ذات اللاحقة z و النقطة M' صورة M وفق $S_1 \circ S_2$.

لدينا $M' = S_1 \circ S_2 (M) = S_1 [S_2 (M)]$.

عبارة $S_1 \circ S_2$ تحسب كما يلي : $z' = (\sqrt{3} - i) [iz - i] = (1 + i\sqrt{3}) z - 1 - i\sqrt{3}$.

إذن عبارة التشابه $S_1 \circ S_2$ هي $z' = (1 + i\sqrt{3}) z - 1 - i\sqrt{3}$.

تعيين العناصر المميزة للتشابه $S_1 \circ S_2$.

مركز $S_1 \circ S_2$ هو النقطة الصامدة ω لاحقتها z_0 حل المعادلة $z = (1 + i\sqrt{3}) z - 1 - i\sqrt{3}$

ينتج أن $z = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3}$ أي $\omega\left(1 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)$.

نسبة $S_1 \circ S_2$ هي $|1 + i\sqrt{3}| = 2$، زاوية $S_1 \circ S_2$ هي $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ينتج أن $S_1 \circ S_2$ تشابه مباشر مركزه $\omega\left(1 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)$ و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و بنفس الطريقة نعين عبارة $S_2 \circ S_1$.

لدينا $z' = i\,[(\sqrt{3} - i)\,z] - i = (1 + i\sqrt{3})\,z - i$

إذن عبارة التشابه $S_2 \circ S_1$ هي $z' = (1 + i\sqrt{3})\,z - i$.

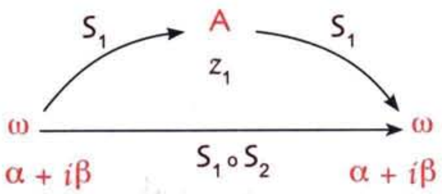
تعيّن العناصر المميزة للتشابه $S_2 \circ S_1$: مركز $S_2 \circ S_1$ هو النقطة ω' لاحقتها z_1

حل المعادلة $z = (1 + i\sqrt{3})\,z - i$. (أي $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

النسبة هي $|1 + i\sqrt{3}| = 2$، الزاوية هي $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

إذن $S_2 \circ S_1$ تشابه مباشر مركزه $\omega'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ، نسبته 2، زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ملاحظة : يمكن تعيين عناصر كل من $S_1 \circ S_2$ و $S_2 \circ S_1$ اعتمادا على إعطاء العبارة المركبة لكل من S_1 و S_2. إذا فرضنا أن $\alpha + i\beta$ هي لاحقة مركز $S_1 \circ S_2$.



بوضع $S_2(\omega) = A$ أي $z_1 = -\beta + i(\alpha - 1)$

و $S_1(A) = \omega$ أي $(\sqrt{3} - i)\,z_1 = \alpha + i\beta$.

ينتج أن $\alpha + i\beta = (\sqrt{3} - i)\,(-\beta + i(\alpha - 1))$.

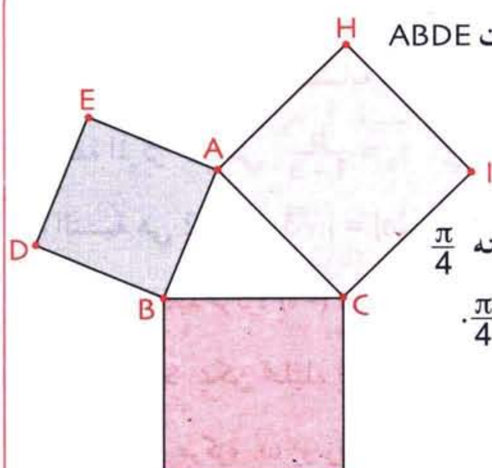
و بالتالي : $\begin{cases} \alpha = -\beta\sqrt{3} - \alpha + 1 \\ \beta = \beta + \sqrt{3}\alpha - \sqrt{3} \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2\alpha + \beta\sqrt{3} = 1 \\ \sqrt{3}\alpha = \sqrt{3} \end{cases}$ إذن $\alpha = 1$ و $\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

أي أن لاحقة ω، مركز التشابه $S_1 \circ S_2$ هي $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$ و نسبة $S_1 \circ S_2$ هي جداء نسبتي S_1 و S_2

أي 1×2. زاوية $S_1 \circ S_2$ هي مجموع زاويتي S_1 و S_2 أي $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$.

و بنفس الطريقة نعين العناصر المميزة للتشابه $S_2 \circ S_1$.

تمرين 2



ABC مثلث (الشكل). ننشئ على أضلاع هذا المثلث المربعات ABDE و BCFG، CAHI. ليكن A' مركز المربع BCFG و B' مركز المربع CAHI و C' مركز المربع ABDE.

نعتبر التشابه المباشر S_C الذي مركزه C و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

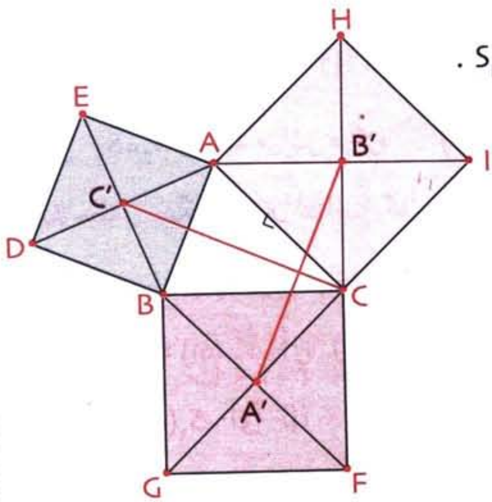
و التشابه المباشر S_B الذي مركزه B و نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

- عين صورتي A' و B' بالتحويل $S_B \circ S_C$.
- استنتج أن $A'B' = CC'$ و أن $(A'B') \perp (CC')$.

حل

S_C التشابه الذي مركزه C و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

(لأن $CA = \sqrt{2}\, CB'$ و $(\overrightarrow{CB'} ; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{4}$) و بالمثل S_B التشابه الذي مركزه B و نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ (لأن $BC' = \frac{1}{\sqrt{2}} BA$ و $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC'}) = \frac{\pi}{4}$).



نعلم أن $S_B(A) = c'$ ؛ $S_C(A') = F$ ؛ $S_C(B') = A$

و $S_B(F) = c$ إذن $S_B \circ S_C(A') = C$ و $S_B \circ S_C(B') = C'$.

و بما أن نسبة التشابه $S_B \circ S_C$ هي $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ أي 1

فهو تقايس موجب (أي إزاحة). إذن $A'B' = CC'$.

و بما أن زاوية التشابه $S_B \circ S_C$ هي $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ أي $\frac{\pi}{2}$.

إذن $(A'B') \perp (CC')$.

ينتج أن $A'B' = CC'$ و $(A'B') \perp (cc')$.

4 تحليل تشابه مباشر

تمرين

S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

حيث $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

حلل S إلى تحاك و دوران.

حل

عبارة التشابه S من الشكل : $z' = az + b$ حيث $a = \sqrt{3} - i$ ، $b = 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

تعيّن العناصر المميزة للتشابه S.

لاحقة المركز ω هي $z_0 = \frac{b}{1 - a}$ أي $z_0 = \frac{1 + i(\sqrt{3} - 1)}{1 - (\sqrt{3} - i)}$. نجد $z_0 = -i$

• النسبة هي $|a| = |\sqrt{3} - i| = 2$. الزاوية هي $\arg(a) = \arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

إذن S تشابه مركزه $\omega(-i)$ ، نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

و بالتالي S يمكن تحليله إلى مركب تبديلي لتحاك h مركزه ω و نسبته 2

و دوران r مركزه ω و زاويته $-\frac{\pi}{6}$. $S\left(\omega ; 2, -\frac{\pi}{6}\right) = h_{(\omega, 2)} \circ r_{(\omega, -\frac{\pi}{6})} = r_{(\omega, -\frac{\pi}{6})} \circ h_{(\omega, 2)}$

تمارين و حلول نموذجية

تمرين 1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

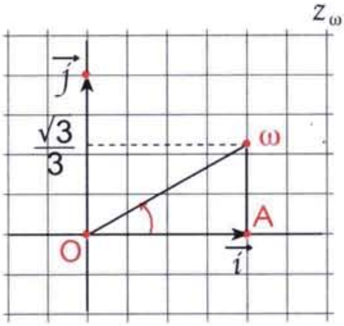
A، ω نقطتان لاحقتاهما على الترتيب 1، $\frac{1}{3}(3+i\sqrt{3})$

1. عين قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{O\omega})$. استنتج قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\omega O};\overrightarrow{\omega A})$ و قيمة $\frac{\omega A}{\omega O}$.
   - ما هي عبارة التشابه S الذي يحول O إلى A؟
2. t هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.
   - حدد نسبة و زاوية التشابه s_1 حيث $S = t\circ s_1$. • حدد نسبة و زاوية التشابه s_2 حيث $S = s_2\circ t$.

حل

1. تعيين قيس للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{O\omega})$.

لدينا $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{O\omega}) = \arg z_\omega + k2\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. $z_\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}+i)$



$|z_\omega| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ و $\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{O\omega}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{O\omega}) = \frac{1}{2}$

إذن $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{O\omega}) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$، $(k\in\mathbb{Z})$.

- $(\overrightarrow{\omega O};\overrightarrow{\omega A}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k2\pi$ أي $\frac{\pi}{3}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{\omega O};\overrightarrow{\omega A})$.

$\frac{\omega A}{\omega O} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (المثلث $OA\omega$ قائم في A).

- عبارة التشابه S الذي يحول O إلى A :

التشابه الذي يحول O إلى A معرف بمركزه ω و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و يعرف أيضا بالعبارة $z' - z_\omega = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_\omega)$. و بعد تعويض z_ω بالعدد $\frac{1}{3}(3+i\sqrt{3})$

و الاختصار نجد $z' = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + 1$

2. تحديد نسبة و زاوية التشابه المباشر s_1 حيث $S = t\circ s_1$.

لتكن k_1 نسبة التشابه المباشر s_1. نعلم أن نسبة S هي $\frac{1}{2}$ و نسبة t هي 1.

إذن نسبة s_1 تحقق $\frac{1}{2} = 1\times k_1$ أي $k_1 = \frac{1}{2}$.

ينتج أن نسبة التشابه المباشر s_1 هي $\frac{1}{2}$. لدينا زاوية S هي $\frac{\pi}{3}$ و زاوية t منعدمة.

لتكن θ_1 زاوية التشابه s_1. إذن θ_1 تحقق $\frac{\pi}{3} = 0 + \theta_1$. أي $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$.

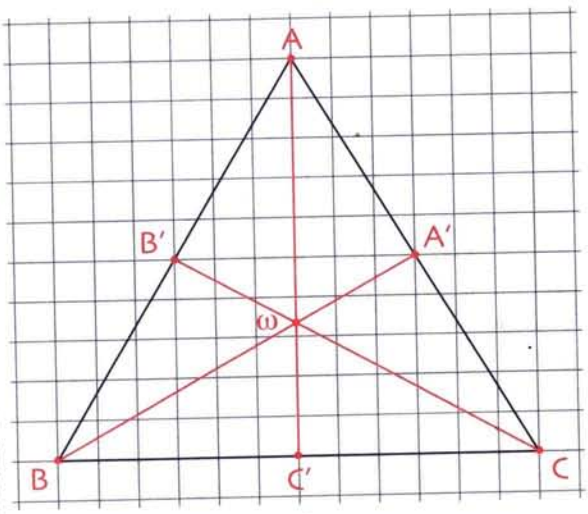
ينتج أن زاوية التشابه المباشر s_1 هي $\frac{\pi}{3}$.

- باستعمال نفس الطريقة نعين نسبة و زاوية التشابه المباشر s_2. و نجد: نسبة s_2 هي $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

تمرين 2

ABC مثلث متقايس الأضلاع، A' منتصف $[AC]$، B' منتصف $[AB]$، C' منتصف $[BC]$.
عين تشابها مباشرا S بحيث يحول A إلى A'، B إلى B'، C إلى C' (يمكن أن يعبر عنه بمركب تحويلين معروفين).

حل



ليكن ω مركز ثقل المثلث ABC
(نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC).
التحاكي h الذي مركزه ω و نسبته $-\frac{1}{2}$
يحول A إلى C (B إلى A' و C إلى B').
الدوران r الذي مركزه ω و زاويته $\frac{2\pi}{3}$
يحول C' إلى A' (و A' إلى B' و B' إلى C')
أي أن $A \xmapsto{h} C' \xmapsto{r} A'$.

التحاكي h الذي نسبته سالبة $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يمكن أن يعبّر عنه بمركب (تبديلي) لتحاك h_1 مركزه ω و نسبته $\frac{1}{2}$ و دوران r_1 مركزه ω و زاويته π أي $h = r_1 \circ h_1$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_1"'] & & C' \arrow[r, "r"] & A' \\ & C_1 \arrow[ur, "r_1"'] & & \end{tikzcd}$$

إذن $S = r \circ h = r \circ (r_1 \circ h_1)$.

التحويل $r_1 \circ h_1$ هو تشابه مباشر مركزه ω و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته π.
أي r تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته 1 (دوران) و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.
إذن S تشابه مركزه ω، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\pi + 2\frac{\pi}{3}$ (أو $-\frac{\pi}{3}$).
بنفس الطريقة نبرهن أن $S(B) = B'$ و $S(C) = C'$.

نستنتج أن التشابه المباشر الذي يحول A إلى A'، B إلى B'، C إلى C' هو التشابه المباشر الذي مركزه ω مركز ثقل المثلث ABC، و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

التعرف على تشابه مباشر

في التمارين ①، ②، ③، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

1 عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ في كل حالة مما يلي:

1. $z' = -iz + 4$
2. $z' = (1 - i\sqrt{3})\,z + 1$
3. $z' = (1 + i)\,z - 1 - i$
4. $z' = -2z + 3 + 2i$

2 نفس السؤال في كل حالة مما يلي :

1. $z' = z + 3 - 4i$
2. $z' = 2iz$
3. $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\,z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$
4. $z' = (\sqrt{3} + i)\,z$

3 A، B و C نقط لواحقها على الترتيب $-3i$ ؛ 1 ؛ $3 - 4i$. عين النسبة و زاوية التشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C.

4 ABCD مربع مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.
عين النسبة و زاوية التشابه S في كل حالة مما يلي :

1. S مركزه A و يحول O إلى D.
2. S مركزه C و يحول D إلى B.
3. S مركزه O و يحول A إلى C.

5 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر. ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = 2\alpha z + 1 + i$، $\alpha \in \mathbb{C}$.
عين قيم α حتى يكون

1. T إنسحابا.
2. T دورانا.
3. T تحاكيا نسبته 4.
4. T تناظرا مركزيا.

6 m عدد مركب، T تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر النقطة $M'(z')$ حيث $z' = az + b$، $a \in \mathbb{C}^*$، $b \in \mathbb{C}$.
نفرض أن صورة $A(-1 + 6i)$ هي $B(2 + 3i)$ و صورة B هي $C(m)$ وفق T.

1. عين m حتى يكون T انسحابا.
2. عين m حتى يكون T دورانا.

حدد مركزه و زاويته.

7 ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$، I منتصف [BC].
S_C التشابه المباشر الذي مركزه C و يحول A إلى I.

1. عين نسبة S_C و زاويته.
2. أنشئ النقطة D سابقة B وفق S_C.

8 نفس التمرين السابق من أجل التشابه المباشر S_A الذي مركزه A و يحول B إلى I.

9 ABC مثلث متساوي الساقين في A و I منتصف [BC]. J نقطة تقاطع [AC] و الدائرة التي قطرها [AI].
أثبت أن التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول I إلى B يحول أيضا J إلى I.

10 ω، A و B نقط من المستوي و S التشابه المباشر الذي مركزه ω و يحول A إلى A′ و B إلى B′.

1. برهن أن التشابه الذي مركزه ω و الذي يحول A إلى B يحول أيضا A′ إلى B′.
2. ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثين ωAA′ و ωBB′ ؟

التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

في التمارين ⑪ و ⑫ المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

11 في كل ما يلي عبر عن التشابه المباشر S بالأعداد المركبة.

1 • مركز S هو $\omega\,(-2 + i)$، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

2 • مركز S هو $\omega\left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right)$، نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

3 • مركز S هو $\omega\,(1\,;\,1)$، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

4 • مركز S هو $\omega\,(-1\,;\,1)$، يحول $A\,(5\,;\,3)$ إلى $B\,(0\,;\,-2)$.

12 A، B، C، D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $1 - i$، $2i$، $5 - 7i$ و $3i + 5$.

1 • علم النقط A، B، C، D.

2 • عين العبارة المركبة التي تعرف التشابه المباشر S حيث $S(A) = C$ و $S(B) = D$.

13 المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس و المباشر $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$، ABCD مربع، I مركزه و K منتصف [CD]. S التشابه المباشر الذي يحول A إلى I و يحول C إلى K.

1 • ما هي لواحق النقط A، C، I، K؟

2 • عرف التشابه S بالأعداد المركبة.

3 • استنتج العناصر المميزة للتشابه S.

تركيب تشابهين مباشرين

14 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر. S و 'S التشابهان المباشران المعرفان على الترتيب بالعبارتين $z' = (1 + i)\,z + 2$ و $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$، $b \in \mathbb{C}$.

1 • عين مركز S و نسبته و زاويته.

2 • عين العلاقة بين a و b بحيث يكون $S \circ S' = S' \circ S$. ما هو مركز 'S؟

15 $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ معلم متعامد و متجانس مباشر. I منتصف [BC]. ليكن R_B الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$، T الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ و R_C الدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

1 • ما هي صورة I وفق $S = R_C \circ T \circ R_B$؟

2 • عبر بالأعداد المركبة عن التحويل S.

3 • ما هي طبيعة التحويل S؟ حدد عناصره المميزة.

مسائل

16 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

نسمي S التحويل الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = (-1 + i)\,z + 2 - i$

1 • بيّن أن S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

2 • ليكن 'S التحويل الذي يرفق بكل نقطة M النقطة G مركز ثقل المثلث $MM'M''$ حيث $M' = S(M)$ و $M'' = S \circ S(M)$.

• احسب بدلالة z لاحقة النقطة G.

• أثبت أن 'S تشابه مباشر ثم حدد مركزه.

• عيّن لاحقة النقطة M_1 حيث $S'(M_1) = O$ (O مبدأ المعلم).

• علم النقط M_1، M'_1، M''_1 ثم I حيث $M'_1 = S\,(M_1)$ و $M''_1 = S \circ S\,(M_1)$

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $1 - i$، i، $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

S التحويل الذي يرفق بنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z=\frac{(1+i)z+1-i}{3}$

1. اثبت أن S تشابه مباشر يطلب اعطاء عناصره المميزة.
2. اثبت أن النقط A ، B ، ω على استقامة واحدة حيث ω مركز التشابه S.
3. عيّن قيس للزاوية $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$.

اثبت أن المستقيم (OC) هو صورة المستقيم (OB) وفق S.

• عيّن النقطتين O' و B' صورتي O و B على الترتيب بالتحويل S.

• اثبت أن صورة (OB) هي (OO') ثم استنتج أن النقط O، O' و C على استقامة واحدة.

4. اثبت أن ω و C نقطتان من الدائرة التي قطرها $[O'B]$.

18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(o ; \vec{i}, \vec{j})$.

نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات الاحداثيين $(x ; y)$ النقطة M' ذات الاحداثيين $(x' ; y')$ حيث $\begin{cases} x' = x - y + 4 \\ y' = x + y + 4 \end{cases}$

1. عيّن اللاحقة z' للنقطة M' بدلالة اللاحقة z للنقطة M.
2. عيّن طبيعة التحويل S و عناصره المميزة.
3. A، B، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب -4، 4، $4 + 4i$.

• حدّد صورتي كل من A و O بالتحويل S ثمّ عيّن صورة المستقيم (OA) و صورة محور القطعة $[OA]$ بالتحويل S.

4. عبّر عن لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{MM'}$، $\overrightarrow{M\omega}$ بدلالة z لاحقة M.

• استنتج أن $MM' = M\omega$.

• احسب، من أجل كل نقطة M تختلف عن ω، قيسا للزاوية $(\overrightarrow{MM'} ; \overrightarrow{M\omega})$.

5. عيّن صورة J منتصف $[OC]$ بالدوران الذي مركزه I منتصف $[OA]$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

التشابهات المباشرة

1 تعطى العناصر المميزة للتشابه S في الجدول أدناه.

	لاحقة المركز ω	النسبة	الزاوية	ملاحظة
1	$2 - 2i$	1	$\frac{\pi}{2}$	دوران
2	1	2	$-\frac{\pi}{3}$	تشابه مباشر
3	$2 - i$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	تشابه مباشر
4	$1+\frac{\pi}{4}i$	2	π	تناظر مركزه ω

2

1	انسحاب شعاعه $\vec{v}(3 - 4i)$			
2	0	2	$\frac{\pi}{2}$	تشابه مباشر
3	1	1	$\frac{\pi}{4}$	دوران
4	0	2	$\frac{\pi}{6}$	تشابه مباشر

3 دوران مركزه A، زاويته $-\frac{\pi}{2}$

4 نضع $AB = \alpha$ $(\alpha > 0)$، k نسبة التشابه S، θ قيس زاوية له.

1. $k = \frac{AB}{AO} = \sqrt{2}$ ، $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. $k = \frac{CB}{CD} = 1$ ، $\theta = (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{2}$، التشابه S دوران.
3. $k = \frac{OC}{OA} = 1$ ، $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = \pi$.
S تناظر مركزي مركزه O.

5 1. T انسحاب من أجل $\alpha = \frac{1}{2}$

2. T دوران من أجل $|\alpha| = \frac{1}{2}$ مع $\alpha \neq \frac{1}{2}$

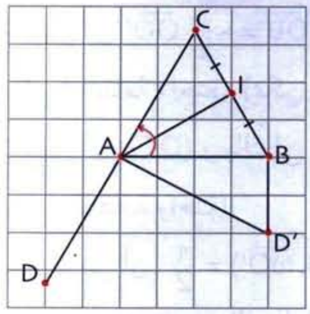
3. T تحاك نسبته 4 من أجل $\alpha = 2$

4. T تناظر مركزي من أجل $\alpha = -\frac{1}{2}$

6 1. من أجل $m = 5$ ؛ T انسحاب شعاعه $\vec{v}$ لاحقته $3 - 3i$.

2. من أجل $m = -1$ ؛ T دوران مركزه ω لاحقتها $-3 - i$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

7 1 • ليكن k نسبته S_C، θ زاويته.



$k = \frac{CI}{CA} = \frac{1}{2}$

$\theta = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}) = \frac{\pi}{3}$

2 • انشاء $S_C(D) = B$

$\begin{cases} CB = \frac{1}{2} CD \\ (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

إذن D نظيرة C بالنسبة إلى A (الشكل).

8 1 • ليكن k نسبة S_A حيث $S_A(B) = I$

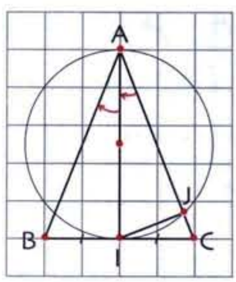
θ زاويته. $k = \frac{AI}{AB} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{6}$

2 • انشاء D′ حيث $S_A(D') = B$

لدينا $\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AD' \\ (\widehat{\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ إذن D′ تقاطع العمودي على (AC) في A و العمودي على (AB) في B (انظر شكل التمرين 7).

9 المثلثان AIB و AJI متشابهان إذن التشابه S_A الذي يحول I إلى B يحول أيضا J إلى I.



10 1. من أجل التشابه المباشر S يكون $\frac{\omega A'}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega B'}$ أي $\frac{\omega B}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega A'}$

و من أجل تشابه S_ω الذي مركزه ω و يحول A إلى B فإن نسبته هي $\frac{\omega B}{\omega A}$ و لدينا مما سبق $\frac{\omega B}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega A'}$ أي أن أيضا S_ω يحول A′ إلى B′.

2 • نستنتج أن المثلثين ωAA′، ωBB′ متشابهان.

11 1 • $z' = \frac{i}{2} z - \frac{3}{2} + 2i$

2 • $z' = (1 + i\sqrt{3}) z + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} i$

3 • $z' = (1 + i) z + 1 - i$

4 • $z' = -\frac{i}{2} z - \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$

12 1 • تعلم النقط في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

2 • تعلم $z' = (3 - i) z + 3 - 3i$

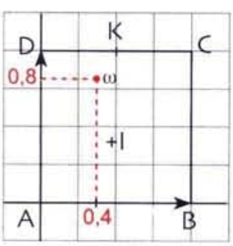
13 $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ معلم متعامد و متجانس.

1 • لواحق النقط A، C، I، K هي على الترتيب

0 ؛ $1+i$ ؛ $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ ؛ $\frac{1}{2} + i$

2 • لدينا $z_I = a z_A + b$، $z_K = a z_C + b$

و بعد التعويض و الاختصار نجد $a = \frac{1+i}{4}$، $b = \frac{1+i}{2}$. إذن عبارة S هي $z' = \frac{1+i}{4} z + \frac{1+i}{2}$



3 • لاحقة ω مركز S هو حل المعادلة $z' = z$ أي $z = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} i$

14 1 • لاحقة ω مركز S هي حل المعادلة $z' = z$ أي $z = 2i$

نسبة S هي $|1 + i| = \sqrt{2}$، زاوية S هي $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2 • العلاقة بين a، b بحيث يكون $SoS' = S'oS$ هي $2(1 - a)i - b = 0$.

$a = 1$، S′ انسحاب،

$a \neq 1$، لاحقة مركز S′ هي $2i$.

15 1 • صور I وفق S حيث $S = R_C o T o R_B$ في المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ نعين لاحقة J حيث $J = R_B(I)$ و $I\left(\frac{i}{2}\right)$

لدينا R_B معرف كما يلي $z' = iz + 1 - i$

و نعين لاحقة J و هي $\frac{1}{2} - i$

نعين لاحقة K حيث $K = T(J)$ و $T : z' = z - 1 + i$

فنجد $K\left(-\frac{1}{2}\right)$.

نعين لاحقة L حيث $R_C(K) = L$.

و $R_C : z' = iz + 1 + i$ فنجد $L\left(1+\frac{i}{2}\right)$

أي أن صورة I بالتحويل S هي L منتصف [BD]

2 . شعاع $S = R_C \circ R_T \circ R_B : z' = -z + 1 + i$

3 . S هو تناظر مركزه منتصف [BC] أي النقطة O مركز المربع ABDC.

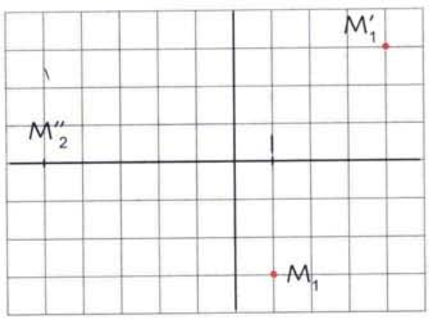
16 1. S تشابه مباشر مركزه I(1)، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

2. لاحقة G هي $z = -\frac{i}{3}z + 1 + \frac{i}{3}$ حيث z لاحقة M.

• S' تشابه مباشر مركزه I(1).

• لاحقة M_1 حيث $S'(M_1) = O$ هي $1 - 3i$.

• النقطة M_1، M'_1، M''_1 في الشكل.



17 1. S تشابه مباشر مركزه $\omega\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\right)$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

2. نتحقق أن $\overrightarrow{B\omega} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

إذن A، B، ω على استقامة واحدة.

3. $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = \text{Arg}\,\frac{z_C}{z_B} = \frac{\pi}{4}$

بما أن $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{4}$ وهي زاوية التشابه S فإن (OC) هو صورة (OB) وفق S.

$B' = O\,(0\,;0)$ ؛ $O'\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)$

بما أن $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OO'}}) = \frac{\pi}{4}$ و هي زاوية التشابه S فإن صورة (OB) هي (OO') بالتشابه S.

نتحقق أن $\overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OO'}$. إذن النقط O، O'، C على استقامة واحدة. (يمكن ملاحظة أن O' صورة O تنتمي إلى (OC) و بالتالي O، O'، C على استقامة واحدة).

4. نبرهن أن $(\widehat{\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega O'}}) = \frac{\pi}{2}$.

و بالتالي ω تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [O'B].

نبرهن أيضا أن $(\widehat{\overrightarrow{CO'}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{2}$.

إذن C تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [O'B].

18 1. $z' = (1 + i)z + 4 + 4i$

2. S تشابه مباشر مركزه $\omega\,(-4 + 4i)$، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

3. $z_{A'} = z_O$ ؛ $z_{O'} = z_C$

بما أن $S(A) = O$ و $S(O) = C$.

فإن صورة (OA) بالتحويل S هي (OC).

و صورة محور القطعة [OA] هي محور القطعة [OC].

4. لاحقة $\overrightarrow{MM'}$ هي $iz + 4 + 4i$

لاحقة $\overrightarrow{M\omega}$ هي $-z - 4 + 4i$

$$MM' = |(-y + 4) + i\,(x + 4)|$$
$$= |(-x - 4) + i\,(-y + 4)| = M\omega$$

$$(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\omega}}) = \arg\left(\frac{-z - 4 + 4i}{iz + 4 + 4i}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$$

أي من أجل كل نقطة M تختلف عن ω،

$$(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\omega}}) = \frac{\pi}{2}$$

5. J' صورة J منتصف [OC] بالدوران الذي مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

J' تحقق $IJ' = IJ$ و $(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IJ'}}) = \frac{\pi}{2}$

(يمكن تعيين الدوران الذي مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ثمّ إيجاد لاحقة J').

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي

و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard_equation

معـــارف

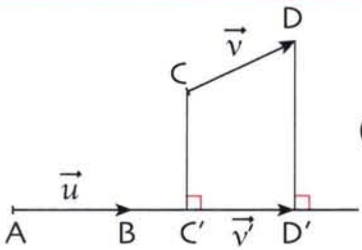
ا - الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

تعريف

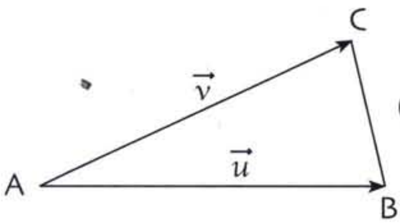
$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان غير منعدمين من المستوي، O ، A ، B ، C نقط مختلفة من نفس المستوي
الجدول التالي يلخص تعاريف الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ (أو للشعاعين $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$).

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'}$ حيث $\vec{v'}$ المسقط للشعاع $\vec{v}$ على حامل $\vec{u}$.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$ حيث D′، C′ المسقطان العموديان للنقطتين C، D على المستقيم (AB). (الشكل 1)
$\vec{v}.\vec{u} = \Vert\vec{u}\Vert.\Vert\vec{v}\Vert\ cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (الشكل 1)	$\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{CD} = AB.CD\ cos(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{CD})$ (الشكل 1)
في أساس متعامد و متجانس $(\vec{i}\,;\vec{j})$ حيث $\vec{u}(x\ ;\ y)$ و $\vec{v}(x'\ ;\ y')$ يكون $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$	في معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\vec{i},\vec{j})$ حيث $A(x\ ;\ y)$ ؛ $B(x'\ ;\ y')$ يكون $\overrightarrow{OA}.\ \overrightarrow{OB} = xx' + yy'$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\Vert\vec{u}\Vert^2+\Vert\vec{v}\Vert^2-\Vert\vec{v}-\vec{u}\Vert^2\right]$ (الشكل 2)	$\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - BC^2\right]$ (الشكل 2)

(الشكل 1)



(الشكل 2)



ملاحظة : • إذا كان أحد الشعاعين منعدما فإن الجداء السلمي لهما منعدم.
• نقبل أن الشعاع $\vec{o}$ عمودي على أي شعاع من المستوي.

حالة خاصة : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

• المسافة بين نقطة و مستقيم في المستوي

الستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

المسافة بين النقطة $A(x_0\ ;\ x_0)$ و المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $ax + by + c = 0$
حيث $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ هي $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

• خاصية

A ، B ، M نقط من المستوي حيث $A \neq B$.

$\overrightarrow{MA}\ .\overrightarrow{MB} = 0$ إذا وفقط إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [AB].

II - الجداء السلمي في الفضاء

تعريف

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء. A، B، C نقط حيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ، $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في مستو يشمل النقط A، B، C.

ملاحظة : كل خواص الجداء السلمي، المدروسة في الهندسة المستوية، تطبق على النقط و على الأشعة، من نفس المستوي، في الفضاء.

. خواص

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ ، $\vec{w}$ أشعة من الفضاء.

- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$
- $(k\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$ حيث $k\in\mathbb{R}$
- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\,\vec{u}.\vec{v}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

نتيجة : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$

العبارة التحليلية

$\vec{u}(x\,;\,y\,;\,z)$ و $\vec{v}(x'\,;\,y'\,;\,z')$ شعاعان في الأساس المتعامد و المتجانس $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

. تعامد شعاعين

الشعاعان $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $\vec{u}.\vec{v}=0$.

$\vec{u}.(x\,;\,y\,;\,z)$ و $\vec{v}.(x'\,;\,y'\,;\,z')$ شعاعان في الأساس المتعامد و المتجانس $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$.

$\vec{u}$ ، $\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان $xx'+yy'+zz'=0$.

ملاحظة : نقبل أن الشعاع $\vec{0}$ عمودي على أي شعاع من الفضاء.

معيار شعاع : $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ أساس متعامد و متجانس. $\vec{u}\,(x\,;\,y\,;\,z)$ و شعاع. $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

. المسافة بين نقطتين

- المسافة بين النقطتين A، B يرمز لها AB هي $\|\overrightarrow{AB}\|$. نكتب $AB=\|\overrightarrow{AB}\|$.
- $A(x\,;\,y\,;\,z)$، $B(x'\,;\,y'\,;\,z')$ نقطتان من الفضاء و المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لدينا $AB=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

III - المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1 . تمثيل وسيطي لمستقيم

لتكن النقطة $A\,(x_0\,; y_0\,; z_0)$، و الشعاع $\vec{u}\,(a\,; b\,; c)$ غير المنعدم.

المستقيم (D) الذي يشمل A و يقبل $\vec{u}$ شعاع توجيه له هو مجموعة النقط $M\,(x\,; y\,; z)$ حيث $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ مع λ عدد حقيقي.

$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ يكافئ $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$. هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D).

2 . معادلات ديكارتية لمستقيم

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A\,(x_0\,; y_0\,; z_0)$ ويقبل $\vec{u}\,(a\,; b\,; c)$ شعاع توجيه له يعرف مثلا

بجملة المعادلتين $\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}$

يعبر عادة عن هذه الجملة كما يلي : $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ حيث a، b و c غير منعدمة.

حالات خاصة

- إذا كان $c = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة $\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 \end{cases}$
- إذا كان $b = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة $\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c} \\ y = y_0 \end{cases}$
- إذا كان $a = 0$ فإن (D) يعرف بالجملة $\begin{cases} \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c} \\ x = x_0 \end{cases}$

IV - المستويات في الفضاء

1 . تمثيل وسيطي لمستو

الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. لتكن النقطة $A\,(x_0\,; y_0\,; z_0)$ و الشعاعان غير المتوازيين $\vec{u}\,(a\,; b\,; c)$، $\vec{v}\,(a'\,; b'\,; c')$. المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه له هو مجموعة النقط $M\,(x\,; y\,; z)$ حيث $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ مع λ و μ عددان حقيقيان.

$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ يكافئ $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$. هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).

2. معادلة ديكارتية لمستو

الشعاع الناظمي لمستو

تعريف

(P) مستو في الفضاء.
نسمي شعاعا ناظميا للمستوي (P)، كل شعاع توجيه لمستقيم عمودي على (P).

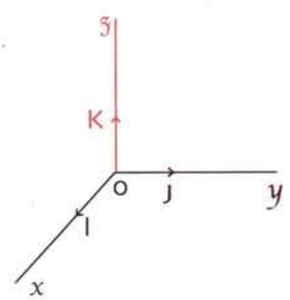
خاصية مميزة : $\vec{n}$ شعاع غير منعدم، A نقطة من الفضاء.
مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$، هي المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل $\vec{n}$ شعاعا ناظميا له.

معادلة ديكارتية لمستو

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• لكل مستو (P) شعاعه الناظمي $\vec{n}\,(a ; b ; c)$ معادلة ديكارتية من الشكل $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ و d عدد حقيقي.

• مجموعة النقط $M\,(x ; y ; z)$ حيث $ax + by + cz + d = 0$ مع $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ و $d \in \mathbb{R}$ هي مستو حيث $\vec{n}\,(a ; b ; c)$ شعاع ناظمي له.



حالات خاصة : نضع $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

$z = 0$ هي معادلة للمستوي $(o ; I , J)$ و $\vec{k}$ شعاع ناظمي له.

$y = 0$ هي معادلة للمستوي $(o ; I , K)$ و $\vec{j}$ شعاع ناظمي له.

$x = 0$ هي معادلة للمستوي $(o ; J , K)$ و $\vec{i}$ شعاع ناظمي له.

V - توازي مستويين

$ax + by + cz + d = 0$ معادلة للمستوي (P) و $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادلة للمستوي (P').

(P) و (P') متوازيان إذا وفقط إذا كان $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

• إذا كان $abc \neq 0$ فإن : (P) يوازي (P') يكافئ $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

• إذا كان $a' = \lambda a$ و $b' = \lambda b$ و $c' = \lambda c$ و $d' = \lambda d$ فإن (P) و (P') متطابقان.

VI - تعامد مستويين

$ax + by + cz + d = 0$ معادلة للمستوي (P) و $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ معادلة للمستوي (P').

(P) و (P') متعامدان يكافئ $aa' + bb' + cc' = 0$.

VII - المسافة بين نقطة و مستو

$(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء.

(P) مستو من الفضاء و $ax + by + cz + d = 0$ معادلة له حيث $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$ و

$M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ نقطة من الفضاء.

المسافة بين النقطة A و المستوي (P) هي $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

VIII - التمييز المرجحي

A، B، C نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

1. المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح النقطتين A، B.

حالة خاصة : القطعة المستقيمة [AB] هي مجموعة مراجح النقطتين A، B مرفقتين بمعاملين لهما نفس الإشارة.

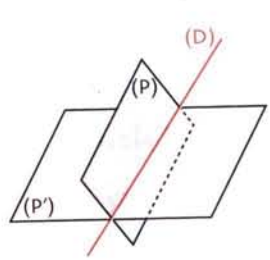
2. المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح النقط A، B، C.

IX - الأوضاع النسبية

1. الأوضاع النسبية لمستويين

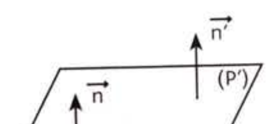
(P) و (P') مستويان، $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ شعاعان ناظميان لهما بهذا الترتيب.

- إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطين خطيا (متوازيين) فإن (P) و (P') متوازيان.
- إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مستقلين خطيا (غير متوازيين) فإن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم.



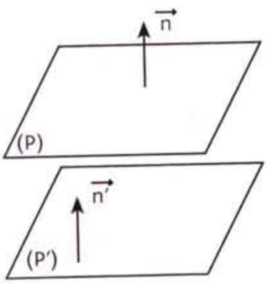
(P) و (P') متقاطعان

$(P)\cap(P') = (D)$



(P) و (P') منطبقان

$(P)\cap(P') = (P) = (P')$



(P) و (P') متوازيان تماما

$(P)\cap(P') = \varnothing$

2 . الأوضاع النسبية لثلاث مستويات

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات.

1. إذا كان (P_1) و (P_2) متوازيين تماما فإن تقاطع (P_1)، (P_2) و (P_3) مجموعة خالية.

2 . إذا كان (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (D) فتوجد ثلاثة حالات :

- إذا كان $(D) \subset (P_3)$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (D)$.
- إذا كان $(P_3) \cap (D) = \{I\}$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{I\}$.
- إذا كان $(P_3) \cap (D) = \varnothing$ فإن $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \varnothing$.

3 . الأوضاع النسبية لمستقيم و مستو

(D) مستقيم، $\vec{u}$ شعاع توجيه له. (P) مستوي و $\vec{n}$ شعاع ناظمي له.

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدين فإن (D) يوازي (P).
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير متعامدين فإن (D) يقطع (P).

4 . الأوضاع النسبية لمستقيمين

(D)، (D') مستقيمان في الفضاء.

- إذا كان (D) و (D') من نفس المستوي فإن دراسة أوضاعهما النسبية في الفضاء تعود إلى دراسة أوضاعهما النسبية في هذا المستوي.
- إذا لم يوجد مستو يحتوي على (D) و (D') فإنهما غير متوازين و غير متقاطعين.

1 حساب الجداء السلمي لشعاعين في المستوي

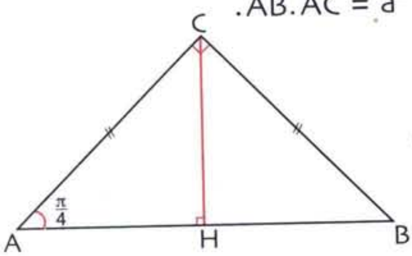
تمرين

ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين حيث $BC = a$.

احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

حل

ABC مثلث قائم في C. إذن $AB^2 = AC^2 + BC^2$ أي $AB = a\sqrt{2}$.



• طريقة 1: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos\frac{\pi}{4} = a\sqrt{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$.

• طريقة 2: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AH} = AB.AH$

($\overline{AB}$ و $\overline{AH}$ لهما نفس الإشارة و H المسقط العمودي للنقطة C على (AB) و H منتصف [AB]).

• إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(a\sqrt{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a^2$. و بالتالي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$.

• طريقة 3: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - BC^2\right] = \frac{1}{2}\left[2a^2 + a^2 - a^2\right] = a^2$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$.

2 حساب المسافة بين نقطة و مستقيم من المستوي

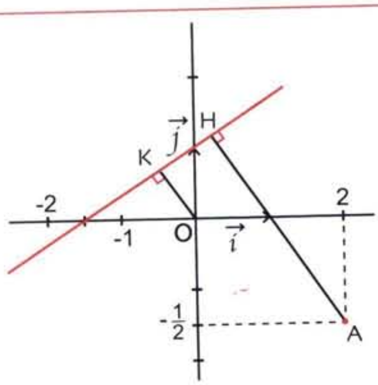
تمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

• احسب المسافة بين المبدأ O و المستقيم (D).

الذي معادلته $2x - 3y + 3 = 0$.

• احسب المسافة بين النقطة $A\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ و المستقيم (D).



حل

إذا كان K المسقط العمودي للنقطة O على (D) فإن المسافة بين O و (D) هي OK.

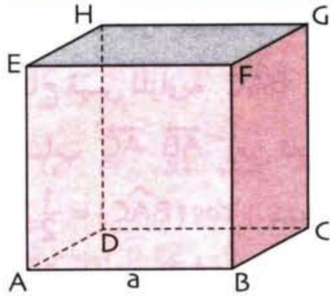
لدينا $OK = \frac{|2(0) - 3(0) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

• إذا كان H المسقط العمودي للنقطة A على (D) فإن $AH = \frac{|2(2) - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$

إذن $AH = \frac{11,5\sqrt{13}}{13}$

3 حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

تمرين 1



نفرض المكعب ABCDEFGH المقابل حيث $AB = a$.

احسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DH}$ ، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BH}$.

حل

- $(AB) \perp (DH)$ إذن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH} = 0$
- $(BC) \perp (DH)$ إذن $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DH} = 0$
- $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB\cos(\widehat{ACB})$
  $= a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$

((DH) عمودي على كل من (DC) و (DA) فهو عمودي على المستوي (ADC) و بالتالي $(AB) \perp (DH)$. و بالمثل $(BC) \perp (DH)$).

- $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FC}.\overrightarrow{BC} = FC.BC\cos\frac{\pi}{4}$ (لأن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)
  $= (a\sqrt{2})\,a.\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$ (لأن $FC^2 = FB^2 + BC^2$)

$\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH})$ (لأن $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$)

$= BC^2 + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CH}$

$= BC^2 = a^2$

((BC) عمودي على (CD) و (CG) فهو عمودي على المستوى (DCG) و بالتالي عمودي على (CH)).

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-1\,;-1\,,-3)$ ؛ $B(-\sqrt{2}-1\,;0\,,-2)$

$C(-\sqrt{2}-1\,;-2\,,-2)$ ؛ $D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,;-\frac{1}{2}\,,-\frac{5}{2}\right)$

- احسب المسافتين AB ، AC.
- احسب الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$.

استنتج قيسا للزاوية $\widehat{BAC}$ ثم طبيعة المثلث ABC.

حل

لدينا $\overrightarrow{AB}(-\sqrt{2}\,;1\,;1)$ ؛ $\overrightarrow{AC}(-\sqrt{2}\,;-1\,;1)$ ؛ $\overrightarrow{CD}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$

- $AB = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1 + 1)} = 2$ و $AC = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1} = 2$

• $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1)(-1) + (1)(1) = 2$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$

و النتيجة الأخيرة تثبت أن (AB) و (CD) متعامدان.

استنتاج قيس للزاوية $B\widehat{A}C$: لدينا من جهة $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$

و بحساب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (من تعريف الجداء السلمي) **نجد** : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos(B\widehat{A}C)$

إذن $\cos(B\widehat{A}C) = \frac{1}{2}$. ينتج أن $\frac{\pi}{3}$ قيس للزاوية $B\widehat{A}C$.

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع ($AB = AC$ و $B\widehat{A}C = \frac{\pi}{3}$).

4 تعيّين تمثيل وسيطي لمستقيم و توظيفه

تمرين

• الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطتين $A(1\,;-2\,;-3)$ و $B(-2\,;2\,;0)$.

• هل تنتمي النقطة $C(1\,;-3\,;-2)$ إلى المستقيم (D)؟ هل تنتمي النقطة $E(-2\,;-2\,;0)$ إلى (D)؟

حل

• $\overrightarrow{AB}(-3\,;4\,;3)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D) إذن $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

و هو تمثيل وسيطي للمستقيم (D).

• $C \in (D)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t يحقق $\begin{cases} 1 - 3t = 1 \\ -2 + 4t = -3 \\ -3 + 3t = -2 \end{cases}$

أو $\begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$. نلاحظ أنه لا توجد قيمة للعدد t تحقق هذه الجملة. إذن $C \notin (D)$

• $E \in (D)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t يحقق الجملة $\begin{cases} -2 = 1 - 3t \\ 2 = -2 + 4t \\ 0 = -3 + 3t \end{cases}$ أو $\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$.

إذن $t = 1$. و بالتالي $E \in (D)$.

5 تعيّين معادلات ديكارتية لمستقيم في الفضاء

تمرين

• الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

حدد المجموعة E من النقط $M(x\,;y\,;z)$ المعرفة بالتمثيل الوسيطي (S) التالي :

$$(S)\ \ldots\ldots \quad \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{R}\,.$$

أكتب معادلات ديكارتية لها.

حل

• لتكن النقطة $A(-3\,;-1\,;1)$ من E المحصل عليها من أجل $k=0$، $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من E من أجل عدد حقيقي k كيفي.

الجملة (S) تكافئ (S′) ... $\begin{cases} x+3=2k \\ y+1=-k \\ z-1=-3k \end{cases}$ أو المعادلة $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ حيث $\vec{u}(2\,;-1\,;-3)$.

إذن المجموعة E هي المستقيم الذي يشمل $A(-3\,;-1\,;-1)$ و يقبل $\vec{u}(2\,;-1\,;-3)$ شعاع توجيه له.

• كتابة معادلات ديكارتية للمستقيم E. الجملة (S′) تكافئ $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$

و هي معادلات للمستقيم E الذي يشمل A و يقبل $\vec{u}$ شعاع توجيه له.

6 تعيّين تمثيل وسيطي لمستو في الفضاء

تمرين 1

• الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-1\,;-2\,;1)$ و يقبل $\vec{u}\left(-2\,;\frac{1}{2}\,;3\right)$ و $\vec{v}\left(1\,;-2\,;\frac{1}{2}\right)$ شعاعين توجيهيّين له.

حل

المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x\,;y\,;z)$ حيث $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$ ؛ λ و μ عددان حقيقيان.

لدينا $A(-1\,;-2\,;1)$ ؛ $\vec{u}\left(-2\,;\frac{1}{2}\,;3\right)$ ؛ $\vec{v}\left(1\,;-2\,;\frac{1}{2}\right)$.

إذن الجملة $\begin{cases} x=-1-2\lambda+\mu \\ y=-2+\frac{1}{2}\lambda-2\mu \\ z=1+3\lambda+\frac{1}{2}\mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستوى (P).

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

• عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقط $A(2\,;0\,;1)$، $B(2\,;1\,;-1)$ و $C(1\,;3\,;0)$.

• هل تنتمي النقطة O مبدأ المعلم إلى (P)؟ هل تنتمي النقطة $D(1\,;2\,;2)$ إلى (P)؟

حل

$\overrightarrow{AB}(0\,;1\,;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-1\,;3\,;-1)$ شعاعان. لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{AB}$.

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير متوازيين و هما شعاعان توجيهيان للمستوي (P).

ينتج أن $\begin{cases} x=2+0.\lambda-\mu \\ y=0+\lambda+3\mu \\ z=1-2\lambda-\mu \end{cases}$. الجملة $\begin{cases} x=2-\mu \\ y=\lambda+3\mu \\ z=1-2\lambda-\mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستوى (P) الذي يشمل النقط A، B، C.

• $O \in (P)$ يعني أن الجملة (S)... $\begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \\ 0 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا، وحل الجملة $\begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \end{cases}$.

هو $(\lambda ; \mu) = (-6 ; 2)$. هذا الحل لا يحقق المعادلة $1 - 2\lambda - \mu = 0$ (لأن $1 - 2(-6) - 2 \neq 0$).

إذن الجملة (S) لا تقبل حلا و بالتالي النقطة O لا تنتمي إلى (P).

• $D \in (P)$ يعني أن الجملة $\begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \\ 2 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا، و حل الجملة $\begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \end{cases}$

هو $(\lambda ; \mu) = (-1 ; 1)$ و هذا الحل يحقق المعادلة $2 = 1 - 2\lambda - \mu$ أي $(2 = 1 - (-1)2 - 1)$

إذن النقطة D تنتمي إلى (P).

7 تعيّين تمثيل وسيطي لمستو في الفضاء

تمرين

• الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-2 ; 1 ; -1)$، $B(1 ; 0 ; -1)$، $C(-2 ; 4 ; 1)$.

1 . عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A، و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.

2 . أثبت أن النقط A، B، C تعيّن مستويا. عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

حل

1 . $\overrightarrow{BC}(-3 ; 4 ; 2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) يعني $-3x + 4y + 2z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$.

(P) يشمل النقطة A يعني $-3(-2) + 4(1) + 2(-1) + d = 0$ أي $d = -8$

إذن $-3x + 4y + 2z - 8 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2 . النقط A، B، C تعيّن مستويا إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير متوازيين.

لدينا $\overrightarrow{BA}(-3 ; 1 ; 0)$ و $\overrightarrow{BC}(-3 ; 4 ; 2)$. لا يوجد عدد حقيقي α من أجله يكون $\overrightarrow{BC} = \alpha \overrightarrow{BA}$

و بالتالي الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير متوازيين. إذن النقط A، B، C تعيّن مستويا.

• تعيّين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC). إذا كان $\vec{n}(a ; b ; c)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل مستقيم من المستوي (ABC). و بالتالي على (AB) و (BC)، إذن $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$.

و بالتالي $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{BA} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} -3a + b + 0c = 0 \\ -3a + 3b + 2c = 0 \end{cases}$ ينتج أن $\begin{cases} b = 3a \\ c = -\frac{9}{2}a \\ a \neq 0 \end{cases}$.

كل شعاع إحداثياته $\left(a ; 3a ; -\frac{9}{2}a\right)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

و باختيار قيمة للعدد a مثل $a = 2$ يكون $\vec{n}\,(2 ; 6 ; -9)$ شعاعان ناظميا للمستوي (ABC).

و تكون معادلة المستوي (ABC) هي $2x + 6y - 9z + e = 0$ حيث $e \in \mathbb{R}$.

بما أن B نقطة من هذا المستوي فإن $2(1) + 6(0) - 9(+1) + e = 0$

و بالتالي $e = -11$. ينتج أن $2x + 6y - 9z - 11 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

8 دراسة تقاطع مستقيمين في الفضاء

تمرين

• الفضاء منسوب إلى معلم $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(Δ_1) ؛ (Δ_2) ؛ (Δ_3) مستقيمات، تمثيلاتها الوسيطية على التوالي هي :

$\begin{cases} x = -1 + p \\ y = -4 - 3p \\ z = -5 + p \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x = 2 - 5q \\ y = 1 + q \\ z = -3 - 4q \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} x = 7 - 7t \\ y = 3t \\ z = -2t \end{cases}$ بحيث p ، q ، t أعداد حقيقية.

ادرس تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) ثم (Δ_2) و (Δ_3).

حل

1 • $(1 ; -3 ; 1)$ $\vec{u_1}$ شعاع توجيه لـ (Δ_1) و $(-5 ; 1 ; -4)$ $\vec{u_2}$ شعاع توجيه لـ (Δ_2).

نلاحظ أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير متوازيين (لا يوجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{u_2} = \alpha\,\vec{u_1}$)

إذن (Δ_1) و (Δ_2) غير متوازيين. فهما متقاطعان أو غير مستويين (لا يوجد مستو يحتوي عليها).

للتعرف على وضعية المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) نحل الجملة

$\begin{cases} -1 + p = 2 - 5q \\ -4 - 3p = 1 + q \\ -5 + p = -3 - 4q \end{cases}$ أي $\begin{cases} p + 5q = 3 \\ 3p + q = -5 \\ p + 4q = 2 \end{cases}$. إذن $\begin{cases} p = -2 \\ q = 1 \end{cases}$

من أجل $p = -2$ نجد النقطة من (Δ_1) ذات الإحداثيات $(-3 ; 2 ; -7)$

من أجل $q = 1$ نجد النقطة من (Δ_2) ذات الإحداثيات $(-3 ; 2 ; -7)$ و هي نفس النقطة من (Δ_1).

إذن (Δ_1) و (Δ_2) يشتركان في النقطة ذات الاحداثيات $(-3 ; 2 ; -7)$.

2 • $(-2 ; 3 ; -7)$ $\vec{u_3}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ_3). $\vec{u_2}$ و $\vec{u_3}$ غير متوازيين.

إذن (Δ_2) و (Δ_3) غير متوازيين، فهما متقاطعان أو غير مستويين. للتعرف على وضعية المستقيمين

(Δ_2) و (Δ_3) نحل الجملة التالية : $\begin{cases} 2 - 5q = 7 - 7t \\ 1 + q = 3t \\ -3 - 4q = -2t \end{cases}$ أي $\begin{cases} 5q - 7t = 5 \\ q - 3t = -1 \\ 4q - 2t = -3 \end{cases}$

هذه الجملة لا تقبل حلا (لأن حل الجملة $\begin{cases} 5q - 7t = -5 \\ q - 3t = -1 \end{cases}$ هو $(-1 ; 0)$ و لا يحقق المعادلة $(4q - 2t = -3)$

إذن (Δ_2) و (Δ_3) غير متقاطعين و غير متوازيين و بالتالي فهما غير مستويين.

9 دراسة تقاطع مستقيم و مستو في الفضاء

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

(P) المستوي المعرف بالمعادلة $2x + 3y - z - 1 = 0$

و (D_1) و (D_2) المستقيمان المعرفان على الترتيب بالتمثيلين الوسيطين $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 - s \end{cases}$

حيث t و s عددان حقيقيان.

ادرس تقاطع كل من المستوي (P) و المستقيمين (D_1) و (D_2).

حل

$\vec{u}(2\,;3\,;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)، $\vec{v_1}(3\,;-2\,;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D_1)، $\vec{v_2}(1\,;-1\,;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D_2).

• الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v_1}$ غير متعامدين (لأن $\vec{u}.\vec{v_1} = 2(3) + 3(-2) + (-1)(1) = -1 \neq 0$)

إذن (P) و (D_1) غير متوازيين. فهما متقاطعان، و تعيّن نقطة تقاطعهما كالآتي:

لدينا $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ ومنه $2(2 + 3t) + 3(1 - 2t) - (3 + t) = 1$ أو $4 - t = 1$ إذن $t = 3$.

إحداثيات نقطة تقاطع (P) و (D_1) من أجل $t = 3$ هي $(11\,;-5\,;6)$.

• الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v_2}$ متعامدان (لأن $\vec{u}.\vec{v_2} = 2(1) + 3(-1) + (-1)(-1) = 0$)

إذن (P) و (D_2) متوازيان.

10 تقاطع مستويين

تمرين

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات معادلاتها على الترتيب

$3x - 2y - z + 1 = 0$، $x - y + 2z - 5 = 0$ و $3x - 3y + 6z + 1 = 0$.

ادرس تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) ثمّ تقاطع المستويين (P_2) و (P_3).

حل

• دراسة تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) : لدينا $\vec{n_1}(3\,;-2\,;-1)$ و $\vec{n_2}(1\,;-1\,;2)$ شعاعان ناظميان للمستويين (P_1) و (P_2) على الترتيب. نلاحظ أن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير متوازيين.

إذن (P_1) و (P_2) غير متوازيين. فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

• تعيّين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

لتعيين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) نعبر عن x و y مثلا بدلالة z حيث يكون z هو الوسيط.

لدينا $\begin{cases} 3x - 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} 3x - 2y = -1 + t \\ x - y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$ يعني $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ x = -\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}$

بعد الإختصار نجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) و هو $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -16 + 7t \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

• تقاطع (P_2) و (P_3) : لدينا $\overrightarrow{n_2}(1;-1;2)$ و $\overrightarrow{n_3}(3;-3;6)$ شعاعان ناظميان للمستوي (P_2) و (P_3).

نلاحظ أن $\overrightarrow{n_3} = 3\overrightarrow{n_2}$. إذن $\overrightarrow{n_2}$ و $\overrightarrow{n_3}$ متوازيان. نختار نقطة من (P_2) مثل $A(-5 ; 0 ; 0)$.

إحداثيات A لا تحقق معادلة (P_3) أي أن $A \notin (P_3)$. إذن (P_2) و (P_3) متوازيان تماما (أي غير منطبقين).

11 دراسة تقاطع ثلاث مستويات

تمرين 1

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات ذات المعادلات

$x + y + z = 4$، $-x + y - z - 2 = 0$ و $3x + 4y + 3z - 15 = 0$ على الترتيب.

• ادرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيين تقاطع المستويات (P_1)، (P_2)، (P_3) نحل الجملة (S) ..... $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + y - 2z = 3 \\ 3x + 4y + 3z = 15 \end{cases}$

الجملة (S) تكافئ $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ y = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$. إذن $(x ; y ; z) = (2 ; 3 ; -1)$

الجملة (S) تقبل حلا وحيدا هو $(2 ; 3 ; -1)$. نستنتج أن المستويات (P_1)، (P_2) و (P_3) تشترك في نقطة واحدة هي $A(2 ; 3 ; -1)$.

تمرين 2

(P_1)، (P_2) و (P_3) مستويات ذات المعادلات $x + 2y - z - 3 = 0$ ، $2x - y + 3z - 4 = 0$

و $x - 3y + 4z - 2 = 0$ على الترتيب. • ادرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيّن تقاطع المستويات (P_1)، (P_2) و (P_3) نحل الجملة (S) ..... $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x - 3y + 4z = 2 \end{cases}$.

الجملة (S) تكافئ $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x + 5y = 13 \\ 5x + 5y = 14 \end{cases}$.

هذه الجملة ليس لها حل. إذن تقاطع المستويات الثلاث هو مجموعة خالية.

12 توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات نقط في الفضاء

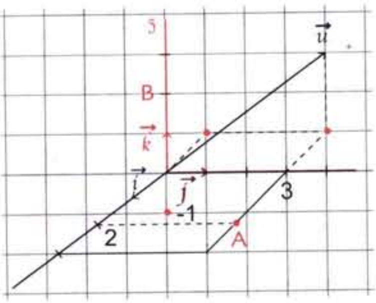
تمرين 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

A نقطة إحداثياتها $(2 ; 3 ; -1)$، $\vec{u}$ شعاع إحداثياته $(-1 ; 3 ; 2)$.

عين مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = -10$.

حل



نفرض $M(x ; y ; z)$. لدينا $\overrightarrow{AM}(x-2 ; y-3 ; z+1)$

و حسب التعريف التحليلي للجداء السلمي لشعاعين يكون

$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = (-1)(x-2) + 3(y-3) + 2(z+1)$.

$\overrightarrow{AM}.\vec{u} = -10$ يكافئ $-x + 3y + 2z + 5 = 0$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = -10$

هو المستوي (P) المعرف بالمعادلة $x - 3y - 2z - 5 = 0$

المستوي (P) يشمل نقطة مثل $B\left(0 ; 0 ; -\frac{5}{2}\right)$ و يقبل $\vec{u}(-1 ; 3 ; 2)$ شعاعا ناظميا له.

تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$A(1 ; -1 ; 4)$ ، $B(-1 ; 2 ; -3)$ نقطتان من الفضاء.

1 • عين مجموعة النقط M بحيث يكون $3MA^2 - 2MB^2 = 540$.

2 • عين مجموعة النقط M بحيث يكون $MA^2 - MB^2 = 10$.

حل

M نقطة من الفضاء احداثياتها $(x ; y ; z)$

$\overrightarrow{MA}(x-1 ; y+1 ; z-4)$ ؛ $\overrightarrow{MB}(x+1 ; y-2 ; z+3)$

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 18$$

$$MB^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 14$$

1 • $3MA^2 - 2MB^2 = 540$ يكافئ $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 14y - 36z + 26 = 540$

أي أن $(x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-18)^2 + 424 = 540$

إذن $(x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-18)^2 = 4^2$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث $3MA^2 - 2MB^2 = 540$

هي الكرة التي مركزها $\omega(5 ; -7 ; 18)$ و نصف قطرها 4.

2• $MA^2 - MB^2 = 10$ يعني $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 - (x+1)^2 - (y-2)^2 - (z+3)^2 = 10$

أي أن $-4x + 6y - 14z + 4 = 10$ أو $-2x + 3y - 7z - 3 = 0$

و هي معادلة لمستو (P) يشمل نقطة مثل $C(0 ; 1 ; 0)$ و يقبل $\vec{u}\,(-2 ; 3 ; -7)$ شعاعا ناظميا له.

13 كتابة معادلة ديكارتية لمستو علم تمثيل وسيطي له

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(P) مستو معرف بتمثيل وسيطي له و هو $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \gamma \\ y = -1 + 3\lambda + 2\gamma \\ z = 2 + \lambda + 3\gamma \end{cases}$ حيث λ ، γ عددان حقيقيان.

اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

حل

• $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \gamma \\ y = -1 + 3\lambda + 2\gamma \\ z = 2 + \lambda + 3\gamma \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x - 1 \\ 3\lambda + 2\gamma = y + 1 \\ \lambda + 3\gamma = z - 2 \end{cases}$

نحل الجملة الاخيرة ذات المجهولين λ ، γ بإيجاد حل لجملة معادلتين مثل $\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x - 1 \\ 3\lambda + 2\gamma = y + 1 \end{cases}$

فيكون $(\lambda ; \gamma) = (2x - y - 3 \;;\; -3x + 2y + 5)$ ، ثم نعوض λ و γ في المعادلة الباقية و هي

$\lambda + 3\gamma = z - 2$ أي $2x - y - 3 + 3(-3x + 2y + 5) = z - 2$

14 كتابة تمثيل وسيطي لمستو علمت معادلة ديكارتية له

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ (P) مستو معرف بالمعادلة $2x + y - z + 3 = 0$. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).

حل

يعرف المستوي بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة. نختار ثلاثة نقط مثل $A\left(-\frac{3}{2} ; 0 ; 0\right)$ ، $B(0 ; -3 ; 0)$ ، $C(0 ; 0 ; 3)$ تنتمي إلى المستوي (P). إذن (P) يشمل A و يقبل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ شعاعي توجيه له. لدينا $\overrightarrow{AB}\left(\frac{3}{2} ; -3 ; 0\right)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(\frac{3}{2} ; 0 ; 3\right)$ إذن يوجد عددان حقيقيان λ ، γ

بحيث $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\gamma \\ y = -3\lambda \\ z = 3\gamma \end{cases}$ و هذه الجملة هي تمثيل وسيطي للمستوي (P).

15 كتابة جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم علم تمثيل وسيطي له

تمرين

(D) مستقيم معرف بتمثيل وسيطي له و هو $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

حل

نعيّن جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) بالتعبير عن t بدلالة x، y، z في كل معادلة من جملة التمثيل الوسيطي، و نجد $t = \frac{x + 2}{3} = \frac{-y + 1}{1} = \frac{z - 3}{2}$.

إذن $\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 3}{2}$ هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

مسألة 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ حيث $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ ، $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.

$A(3 ; 0 ; 10)$ ، $B(0 ; 0 ; 15)$ و $C(0 ; 20 ; 0)$ نقط من الفضاء.

أ) 1. عين تمثيلا وسيطا للمستقيم (AB).

2. اثبت أن (AB) يقطع محور الفواصل في نقطة E يطلب تحديد إحداثياتها.

3. تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

ب) ليكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC).

1. اثبت أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH). استنتج أن [EH] هو إرتفاع المثلث EBC.

2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (OEH).

3. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) ثمّ معادلة ديكارتية له.

4. عيّن تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC).

5. احسب المسافة OH ثمّ استنتج المسافة EH.

• تحقق أن نقطة تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) هي النقطة H.

6. احسب المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC).

حل

أ) 1. المستقيم (AB) يشمل النقطة A و يقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعا توجيهيا له.

إذن يوجد عدد حقيقي k حيث $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. لدينا $\overrightarrow{AB}(-3 ; 0 ; -5)$ و $\overrightarrow{AM}(x-3 ; y ; z-10)$

$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ يكافئ $\begin{cases} x-3 = -3k \\ y-0 = 0k \\ z-10 = 5k \end{cases}$. الجملة $\begin{cases} x = 3-3k \\ y = 0 \\ z = 10+Jk \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (AB).

2. (AB) يقطع محور الفواصل $(o ; \vec{i})$ في نقطة E يعني $\begin{cases} x = 3-3k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 3-3k \\ y = 0 \\ 10+5k = 0 \end{cases}$

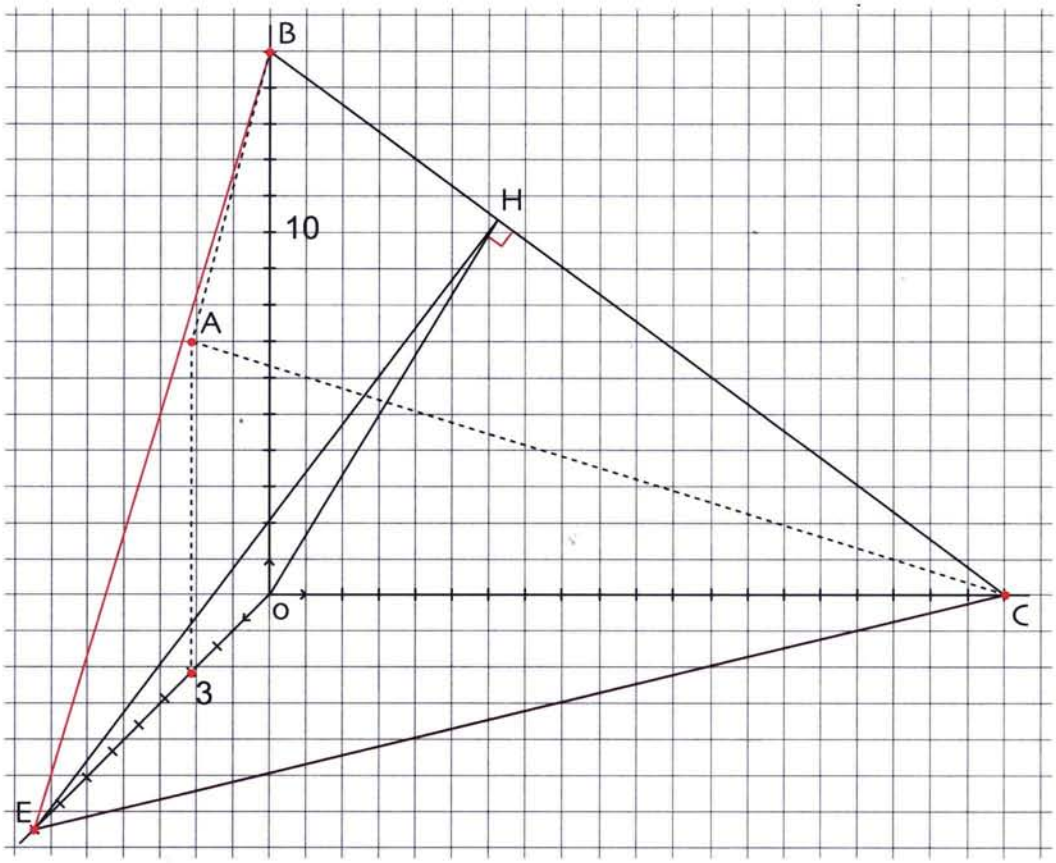
من أجل $k = -2$ نجد نقطة تقاطع (AB) و $(O ; \vec{i})$ و هي $E(9 ; 0 ; 0)$.

3. النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة لأنه لا يوجد عدد حقيقي λ يحقق $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

($\overrightarrow{AB}(-3 ; 0 ; 5)$ و $\overrightarrow{AC}(-3 ; 20 ; -10)$ و $-3 = 1\times(-3)$ و $-10 \neq 1(5)$)

ب) 1. لإثبات أن (BC) عمودي على المستوي (OEH) يكفي البرهان أن (BC) عمودي على مستقيمين متقاطعين من المستوي (OEH).

لدينا (OE) عمودي على المستوي (OBC) فهو عمودي على المستقيم (BC) (أو (BC) عمودي على (OE)). و لدينا (BC) عمودي على (OH) إذن (BC) عمودي على (OE) و (OH) فهو عمودي على المستوي (OEH).



نستنتج أن (BC) عمودي على كل مستقيم من المستوي (OEH) فهو عمودي على (EH).

إذن [EH] هو ارتفاع المثلث EBC.

ملاحظة : • يمكن أن نبرهن أن (BC) عمودي على (OE) بحساب الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OE}$ و هو $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OE} = 0(9) + 20(0) - 15(0) = 0$

2 . تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (OEH).

بما أن (BC) ⊥ (OEH) إذن $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي للمستوي (OEH). و بالتالي فللمستوي (OEH) معادلة من الشكل $0.x + 20y - 15z + d = 0$ حيث d عدد حقيقي. بما أن O نقطة من المستوي (OEH) إذن $4y - 3z = 0$ هي معادلة للمستوي (OEH).

3 . تعيّين تمثيل وسيطي للمستوي (ABC).

المستوي (ABC) معرف بنقطة مثل B و شعاعين توجيهيين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من المستوي (ABC). إذن $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ حيث λ و μ عددان حقيقيان.

لدينا $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$. يكافئ $\begin{cases} x - 0 = -3\lambda - 3\mu \\ y - 0 = 0\lambda + 20\mu \\ z - 15 = 5\lambda - 10\mu \end{cases}$. إذن الجملة $\begin{cases} x = -3\lambda - 3\mu \\ y = 20\mu \\ z = 15 + 5\lambda - 10\mu \end{cases}$

هي تمثيل وسيطي للمستوي (ABC).

• كتابة معادلة ديكارتية للمستوي ABC :

• نحل الجملة $\begin{cases} -3\lambda - 3\mu = x \\ 20\mu = y \end{cases}$ ذات المجهولين λ، μ فنجد $\mu = \frac{y}{20}$ و $\lambda = -\frac{x}{3} - \frac{y}{20}$

ثمّ نعوض λ و μ في المعادلة $5\lambda - 10\mu = z - 15$ فنجد المعادلة $20x + 9y + 12z - 180 = 0$.

طريقة أخرى: يمكن تعيين معادلة للمستوي (ABC) بتحديد شعاع ناظمي للمستوي (ABC) (العمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$)، و اعتبار نقطة منه مثل B.

4 • لتعيّين تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC)

نحل الجملة $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{36}{5} \\ z = \frac{48}{5} \end{cases}$.

إذن المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) تشترك في النقطة ذات الاحداثيات $\left(0 ; \frac{36}{5} ; \frac{48}{5}\right)$.

5 • [OH] هو ارتفاع المثلث BOC القائم في O.

إذن $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ و بالتالي $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}$ أي $OH^2 = 144$.

• ينتج أن $OH = 12$ لأن $OH = OB\ cosx$ ؛ $OH = OC\ sinx$ و $O\widehat{C}H = B\widehat{O}H = \alpha$.

• حساب EH : المثلث EOH قائم في O. إذن $EH^2 = OE^2 + OH^2 = 225$ و بالتالي $EH = 15$.

و نلاحظ أن $0^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2 = 144$ و يساوي OH^2. إذن نقطة تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) هي النقطة H.

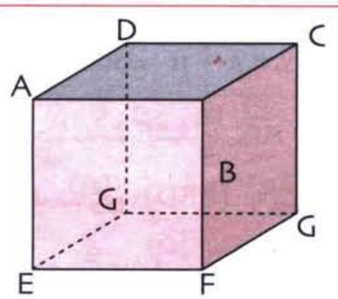
6 • حساب المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC)

نستعمل الدستور الذي يعطي المسافة بين نقطة من الفضاء و مستو معرف بمعادلة ديكارتية له.

فيكون من أجل المبدأ O و المستوي (ABC)

$OO' = \frac{|20(0) + 9(0) + 12(0) - 180|}{\sqrt{20^2 + 9^2 + 2^2}} = \frac{180}{\sqrt{625}} = \frac{36}{5}$، حيث O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC).

مسألة 2



نعتبر المكعب ABCDEFGH حيث $AB = 1$ (الشكل)

1 • احسب $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD}$.

استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED).

2 • نعتبر المعلم $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

عيّن احداثيات النقط A، B، D، G، E.

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (BED). اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BED).

اثبت أن (AG) عمودي على المستوي (BED).

حل

1. لدينا $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}).\overrightarrow{BE}$

$$= \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FG}.\overrightarrow{BE} = 0 + 0$$

إذن $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$

((FG) عمودي على المستوي (FBE) فهو عمودي على (BE)). إذن (AG) و (BE) متعامدان.

• لدينا أيضا $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}$ و بالتالي $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}).\overrightarrow{BD}$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CG}.\overrightarrow{BD} = 0 + 0$$

إذن $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$

((CG) عمودي على المستوي (CBD) فهو عمودي على (BD)). إذن (AG) و (BD) متعامدان.

• المستقيم (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين (BD) و (BE) من المستوي (BED).

إذن (AG) عمودي على المستوي (BED).

2. المعلم $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ متعامد و متجانس. احداثيات النقط A، B، D، G و E هي على الترتيب (0 ; 0 ; 1)، (0 ; 1 ; 1)، (0 ; 0 ; 0)، (1 ; 1 ; 0) و (1 ; 0 ; 1).

• كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (BED).

المستوي (BED) يشمل المبدأ D ويقبل $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DE}$ شعاعين توجيهيين له و بالتالي يوجد عددان حقيقيان λ و μ حيث من أجل كل نقطة M من (BED) يكون $\overrightarrow{DM} = \lambda\overrightarrow{DB} + \mu\overrightarrow{DE}$.

لدينا $\overrightarrow{DM}(x ; y ; z)$، $\overrightarrow{DB}(1 ; 1 ; 0)$ و $\overrightarrow{DE}(1 ; 0 ; 1)$، إذن $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (BED).

• كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (BED) : بتعويض λ و μ على الترتيب بالعددين y و z في المعادلة $x = \lambda + \mu$ نجد معادلة ديكارتية للمستوي (BED) و هي $x - y - z = 0$.

إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AG}$ هي (1 ; 1 ; 1-) و لدينا (1- ; 1- ; 1) هي إحداثيات شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي (BED). الشعاعان $\overrightarrow{AG}$ و $\vec{n}$ متوازيان (لأن $\overrightarrow{AG} = -\vec{n}$)

إذن $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BED).

ملاحظة: الشعاع $\overrightarrow{DA}(-1 ; 1 ; 1)$ ناظمي للمستوي (BED) الذي يشمل المبدأ D.

إذن $(-1)x + 1\times y + 1z + 0 = 0$ أي $x - y - z = 0$ هي معادلة للمستوي (BED).

الجداء السلمي في المستوي

1 ABCD مربع مركزه O حيث $AB = a$

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}$ بدلالة a.

2 ABCD مربع حيث $AB = a$. I منتصف [AB] و J منتصف [AD].

أثبت أن المستقيمين (DI) و (CJ) متعامدان :

• باختيار معلم متعامد و متجانس.

• بدون استعمال معلم.

الجداء السلمي في الفضاء

3 ABCDEFGH مكعب حيث $AB = a$

احسب الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF}$ ؛ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GH}$ ؛ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EH}$ ؛ $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AH}$ ؛ $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FD}$ ؛ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EG}$.

4 باختيار معلم متعامد و متجانس

احسب الجداءات السلمية الواردة في التمرين ③

5 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. تعطى النقط؛ $A(\sqrt{2} ; -1 ; 1)$، $B(0 ; 0 ; 2)$ و $C(\sqrt{2} ; 1 ; 1)$.

1• احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم قيسا للزاوية $B\widehat{A}C$.

2• ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

6 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. تعطى النقط $A(-2 ; 1 ; 4)$، $B(-1 ; -2 ; 2)$، $C(4 ; -3 ; -1)$ و $H(0 ; -5 ; 0)$.

أثبت أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

7 ABCD موشور منتظم حيث $AB = a$.

I، J و K منتصفات [BC]، [BD] و [AC] على الترتيب

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JK}$

المستقيم في الفضاء

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

8 1 • عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $A(1 ; 0 ; -1)$ و يقبل $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$ شعاع توجيه له.

2 • اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $B(2 ; 1 ; -1)$ ويقبل $\vec{v}(1 ; 1 ; 0)$ شعاع توجيه له.

3 • اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل النقطة $C(-2 ; 1 ; 0)$ ويقبل $\vec{k}$ شعاع توجيه له.

9 1 • عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث $A(2 ; 1 ; 3)$ و $B(-1 ; 3 ; 2)$ نقطتان من الفضاء.

2 • هل يشمل (AB) النقطة $C(8 ; -3 ; 5)$؟ النقطة $D(4 ; -2 ; 1)$ ؟

10 نعتبر المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

حيث t عدد حقيقي.

1 • عيّن من بين النقط $A(2 ; 1 ; 0)$، $B\left(\frac{1}{2} ; -1 ; -1\right)$، $C\left(-\frac{3}{2} ; 2 ; 0\right)$ و $D\left(-\frac{5}{2} ; \frac{7}{2} ; \frac{1}{2}\right)$ التي تنتمي إلى (Δ).

2 • عيّن شعاع توجيه للمستقيم (Δ).

3 • اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ′) الذي يشمل النقطة O و يوازي (Δ).

4 • اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ′).

11 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

هل تعرف الجمل التالية نفس المستقيم ؟

$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ ؛ t عدد حقيقي.

$\begin{cases} x - 1 = z \\ y = 1 \end{cases}$ ؛ $\begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - 4y - z + 3 = 0 \end{cases}$

برر إجابتك.

المستوي في الفضاء

فيما يلي، الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

12 عيّن شعاعا ناظميا لكل من المستويات التالية :

$(P_1) : 2x + \frac{1}{3}y - z = 0$

$(P_2) : -5x - 2y + 3z - 1 = 0$

$(P_3) : 3x - 2y = 0$ ؛ $(P_4) : \frac{1}{2}y - z + 1 = 0$

$(P_5) : x - \sqrt{2} = 0$ ؛ $(P_6) : 3z - 4 = 0$

13 $A(4 ; -1 ; 3)$ نقطة من الفضاء

و $\vec{u}(2 ; 1 ; -3)$ شعاع.

عيّن معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل A و يقبل $\vec{u}$ شعاعا ناظميا له.

14 $A(3 ; 1 ; -1)$ نقطة و $x - 2y + z - 5 = 0$ معادلة لمستو (P). عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل A و يوازي (P).

15 $A\left(2 ; \frac{1}{2} ; 3\right)$، $B\left(-3 ; 4 ; -\frac{1}{2}\right)$ نقطتان.

عيّن معادلة للمستوي المحوري للقطعة [AB] (الذي يشمل منتصف [AB] و يقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعا ناظميا له).

16 نعتبر المستوي (P) المعرف بالمعادلة $5x - y + z + 6 = 0$ و النقطة $A(-5 ; 6 ; -2)$.

أثبت أن النقطة $B(0 ; 5 ; -1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P).

17 تعطى النقط $A(2 ; -1 ; 3)$، $B(-1 ; 1 ; 2)$ و $C(0 ; -1 ; 4)$.

1 • اثبت أن النقط A، B، C تعرف مستويا.

2 • عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

18 اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1 ; -1 ; 2)$ و يقبل $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$ و $\vec{v}(-1 ; 1 ; 1)$ شعاعي توجيه له.

19 نفس السؤال السابق من أجل المستوي الذي يشمل النقط $A(-1 ; 2 ; 1)$، $B(3 ; 4 ; -3)$ و $C(5 ; 3 ; 2)$.

20 (P) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي

$\begin{cases} x = -2 + 3t - 2s \\ y = -t + 3s \\ z = -3 - 2t + s \end{cases}$ حيث t و s عددان حقيقيان.

من بيّن النقط $A(-2 ; -1 ; 1)$، $B(3 ; -4 ; -6)$، $C(-2 ; 0 ; -3)$، $D(1 ; -1 ; 1)$ عيّن التي تنتمي إلى المستوي (P).

21 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

(P) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطي

$\begin{cases} x = -3 + 4t - 2s \\ y = 4 - 5t - s \\ z = 1 + t + 3s \end{cases}$ حيث t و s عددان حقيقيان.

1 • عيّن نقطة A من المستوي (P) و شعاعي توجيه له.

2 • احسب إحداثيات شعاع ناظمي له.

3 • اكتب معادلة ديكارتية له.

الوضع النسبي لمستقيمين في الفضاء

22 الفضاء منسوب إلى معلم $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

t و t' عددان حقيقيان.:

ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستقيمين (D) و (D').

1) $(D):\begin{cases}x=4+5t\\y=-4-t\\z=-4-4t\end{cases}$ و $(D'):\begin{cases}x=-6+5t'\\y=-2-t'\\z=4-4t'\end{cases}$

2) $(D):\begin{cases}x=-2+t\\y=1+t\\z=4+3t\end{cases}$ و $(D'):\begin{cases}x=t'\\y=3+t'\\z=8+3t'\end{cases}$

3) $(D):\begin{cases}x=-1+2t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$ و $(D'):\begin{cases}x=2+t'\\y=-1-t'\\z=7+4t'\end{cases}$

4) $(D):\begin{cases}x=-1+t\\y=2+t\\z=7+3t\end{cases}$ و $(D'):\begin{cases}x=-2+t'\\y=4+2t'\\z=2+3t'\end{cases}$

23 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

1. اثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطين التاليين :

$\begin{cases}x=3+5t\\y=-2-t\\z=7+4t\end{cases}$ $\begin{cases}x=2-t'\\y=1+3t'\\z=6-t'\end{cases}$

حيث $t\in\mathbb{R}$ ، $t'\in\mathbb{R}$ ، متقاطعان.

2 . عيّن معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل المستقيمين (Δ) و (Δ').

الوضع النسبي لمستقيم و مستو

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

24 t عدد حقيقي. ادرس الوضع النسبي لكل من المستوي (P) و المستقيم (D)، و عيّن نقط التقاطع، إن و جدت، في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(P):2x-y+z+5=0$ و $(D):\begin{cases}x=1+t\\y=-4-3t\\z=3+t\end{cases}$

2) $(P):x+3y-z+3=0$ و $(D):\begin{cases}x=-2+3t\\y=-1-t\\z=2\end{cases}$

3) $(P):x+y-2z+2=0$ و $(D):\begin{cases}x=4+t\\y=t\\z=3+t\end{cases}$

25 ادرس الوضع النسبي لكل من المستوي (P) و المستقيم (D)، و عيّن نقط التقاطع، إن وجدت في كل من الحالتين التاليين :

1) $(P):2x-y+3z=0$

و $(D):x+1=y-2=\dfrac{z-4}{2}$

2) $(P):x+y-2z-1=0$ و $(D):\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}\\z=2\end{cases}$

الوضع النسبي لمستو بين (أو ثلاث مستويات)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

26 ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستويين (P)، (P') و عيّن مستقيم تقاطعهما عند

1) $(P)\ x-2y+z-1=0$ و $(P')\ -2x+4y-2z+2=0$

2) $(P)\ 4x+6y-2z-1=0$ و $(P')\ 2x+3y-z+10=0$

3) $(P)\ 3x-2y-z-9=0$ و $(P')\ x-y+2z+2=0$

4) $(P)\ -x+2y+z+8=0$ و $(P')\ 2x+y+1=0$

27 ادرس فيما يلي تقاطع المستويات (P)، (Q) و (R) حيث :

1) $(P)\ x+y+z-2=0$ و $(Q)\ 2y-z+3=0$

$(R)\ x+y+z-1=0$

2) $(P)\ x+y+z-2=0$ و $(Q)\ x-y+z+4=0$

$(R)\ x+\dfrac{4}{3}y+z-3=0$

3) $(P)\ x+y+z-1=0$ و $(Q)\ \frac{x}{3}+y-z=0$

$(R)\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6}-\frac{1}{6}=0$

28 حل الجمل التالية ثمّ فسر بيانيا النتيجة.

1) $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ x+y-3z=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ 4x+y+3z=15 \end{cases}$

مجموعات نقط من الفضاء

29 A، B و C نقط من الفضاء مع $BC=4$.

1 • عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=12$.

2 • نفس السؤال من أجل $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=-10$.

30 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نفرض النقطة $A(1;-2;3)$ و الشعاع $\vec{n}(2;-1;4)$

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث يكون $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=-4$.

31 A و B نقطتان من الفضاء بحيث $AB=10$.

1 • عيّن النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 2 و 3 على الترتيب. أنشئ G.

2 • عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $2MA^2+3MB^2=200$.

هل تنتمي النقطة A إلى هذه المجموعة ؟

هل تنتمي النقطة B إليها ؟

32 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $A(1;2;3)$ و $B(3;4;2)$ نقطتان.

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$2MA^2-3MB^2=-10$

33 A و B نقطتان من الفضاء بحيث $AB=5$.

عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2-MB^2=30$.

34 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $A(2;-1;3)$ و $B(2;3;1)$ نقطتان. عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2-MB^2=-10$.

مسائل

35 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. تعطي النقط $A(1;2;0)$، $B(-2;1;1)$، $C(-3;5;-1)$ و $D(-4;2;4)$.

1 • اثبت أن النقط B، C و D تعيّن مستويا (P). عيّن معادلة ديكارتية له.

2 • عيّن إحداثيات المسقط العمودي H للنقطة A على (P).

3 • عيّن معادلة للمستوي (R) الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا له.

تحقق أن (P) و (R) متعامدان.

4 • (P) و (R) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

إعط تمثيلا وسيطيا له.

5 • احسب المسافة بين المبدأ O و المستقيم (Δ).

36 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لتكن النقطتان $A\left(-2;-\frac{1}{2};-2\right)$ و $B(3;3;-3)$.

1 • اكتب معادلة للكرة (S) ذات المركز A و التي تشمل B.

2 • عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) المماس للكرة (s). في النقطة B.

3 • لتكن النقط $D(-2 ; -2 ; -5)$ ؛ $C(-3 ; 0 ; -3)$ $E(-1 ; 0 ; -5)$.

• تحقق أن النقط C، D و E تعيّن مستويا (Q) يطلب إيجاد تمثيل وسيطي له.

4 • بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

5 • حدّد الوضع النسبي للمستوي (Q) و الكرة (s). عيّن طبيعة مجموعة تقاطعهما.

37 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0 ; -1 ; 1)$ ؛ $B(0 ; 0 ; 3)$ ؛ $C(-2 ; 0 ; 0)$.

1 • اثبت أن النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

2 • ليكن الشعاع $\vec{n}(-3 ; -4 ; 2)$

• تحقق أن $\vec{n}$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

• استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3 • (P) و (Q) مستويان معادلتاهما على الترتيب :

$2x + y + 2z + 1 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$.

اثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4 • ادرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و المستوي (ABC).

5 • ليكن t عددا حقيقيا موجبا.

نعتبر المرجح G للنقط A، B و C المرفقة بالمعاملات 1 ؛ 2 ؛ t على الترتيب.

أ) تحقق من وجود النقطة G من أجل كل عدد حقيقي موجب t.

ب) ليكن I مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 1 و 2 على الترتيب.

• عيّن إحداثيات النقطة I.

• عبّر عن $\overrightarrow{IG}$ بدلالة $\overrightarrow{IC}$ و t.

جـ) بيّن أن مجموعة النقط G عندما يمسح t المجموعة $\mathbb{R}_+$، هي القطعة [IC] باستثناء C.

ما هي قيمة t التي من أجلها، يكون منتصف القطعة [IC] منطبقا على G؟

الهندسة في الفضاء

1 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = \frac{a^2}{2}$

2 • $(A ; \overrightarrow{AI} , \overrightarrow{AJ})$ معلم متعامد و متجانس

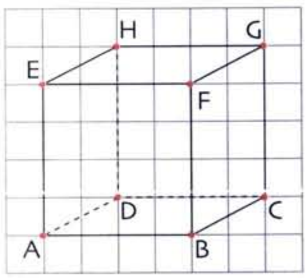
لدينا $I\left(\frac{a}{2} ; 0\right)$ ، $J\left(0 ; \frac{a}{2}\right)$ ، $C(a ; a)$ ، $D(0 ; a)$

$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{CJ} = 0$ إذن (CJ) و (DI) متعامدان.

• بدون اختيار معلم

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{CJ} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = 0$$

إذن (CJ)، (DI) متعامدان.



3 لدينا AB = a

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = DC^2 = a^2$

$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EH} = 0$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GH} = 0$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})\overrightarrow{BF} = 0$$
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}^2 = 2a^2$$
$$\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FD} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}).(\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}) = 2a^2$$
$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}).(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}) = a^2$$

4 ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(A ;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ (كما في الشكل السابق)

لدينا $A(0;0;0)$ ، $B(a;0;0)$ ، $C(a;a;0)$

$D(0;a;0)$ ، $E(0;0;a)$ ، $F(a;0;a)$

$G(a;a;a)$ ، $H(0;a;a)$.

$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = a^2$ ؛ $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EH} = 0$ ؛ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GH} = 0$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BF} = 0$ ؛ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EG} = 2a^2$ ؛ $\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{FD} = 2a^2$

$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AH} = a^2$

5 1 . $\overrightarrow{AB}(-\sqrt{2};1;1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0;2;0)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos(\widehat{BAC})$$

و $AB = 2$ ، $AC = 2$

إذن $2 = 4\cos(BAC)$ و بالتالي $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

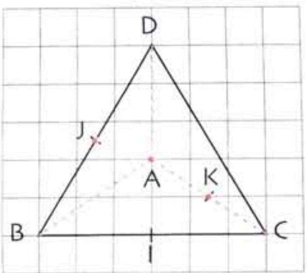
2 . المثلث متساوي الأضلاع.

6 لدينا $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB}$ إذن $H \in (AB)$

$\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0$

$((AB) \perp (CH))$ إذن H هي المسقط العمودي للنقطة C على (AB).

7 $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$



$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = AK^2 = \frac{a^2}{4}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK} = \frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = -a^2$$

8 .1 $(\lambda \in \mathbb{R})\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

.2 $(\mu \in \mathbb{R})\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 \end{cases}$ (3 $(\eta \in \mathbb{R})\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = \eta \end{cases}$

9 .1 $(\lambda \in \mathbb{R})\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

2 . من أجل $(x ; y ; z) = (8 ; -3 ; 5)$

يكون $\lambda = -2$ إذن $C(8;-3;5)$ تنتمي إلى (AB).

10 .1 $A \notin (\Delta)$ ، $B \in (\Delta)$ ، $C \in (\Delta)$ ، $D \in (\Delta)$

2 . الشعاع $\vec{u}(-2 ; 3 ; 1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

3 . الجملة $\begin{cases} x = -2\eta \\ y = 3\eta \\ z = \eta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ')

4 . المعادلتان $\frac{x}{-2} = \frac{x}{3} = z$ هما جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ').

11 الجمل الثلاث متكافئة (لها نفس الحلول) إذن فهي تعرف نفس المستقيم (الذي يشمل $A(1;1;0)$ و $\vec{u}(1;0;1)$ شعاع توجيه له).

12 $\vec{n_1}\left(2;\frac{1}{3};0\right)$، $\vec{n_2}(-5;-2;3)$، $\vec{n_3}(3;-2;0)$، $\vec{n_4}\left(0;\frac{1}{2};-1\right)$ ، $\vec{n_5}(1;0;0)$ ، $\vec{n_6}(0;0;3)$ اشعة ناظمية للمستويات (P_1)، (P_2)، (P_3)، (P_4)، (P_5)، (P_6) بهذا الترتيب

13 $\vec{u}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) حيث $(P): 2x+y-3z+d=0$ ، و يشمل $A(4;-1;3)$ إذن $(P): 2x+y-3z+2=0$

14 $(P)//(Q)$ يعني أن $\vec{n}(1;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) الذي يشمل A إذن $x-2y+z=0$ (Q)

15 المستوي المحوري (P) للقطعة [AB] يشمل منتصفها $I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4};\frac{5}{4}\right)$ و يقبل شعاعا ناظميا له $\vec{AB}\left(-5;-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$ إذن $(P): -5x+\frac{7}{2}y-\frac{7}{2}z-6=0$

16 $B\in(P)$، $AB=3\sqrt{3}$، و المسافة بين A و (P) هي $\frac{27}{3\sqrt{3}}$ أي $3\sqrt{3}$ إذن B هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)

17 .1 النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة إذن تعرف مستويا.

.2 $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية لمستو(P)

A، B، C نقط من (P) يعني $\begin{cases} 2a-b+3c+d=0 \\ -a+b+2c+d=0 \\ -b+4b+d=0 \end{cases}$

بحل الجملة ذات المجاهيل a، b، c و اختيار d (مثلا $d=-11$) نجد $2x+5y+4z-11=0$ و هي معادلة للمستوي (ABC)

18 $\begin{cases} x=1+\lambda-\mu \\ y=-1+\lambda+\mu \\ z=2+\lambda+\mu \end{cases}$ (λ، μ عددان حقيقيان) هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

19 $\begin{cases} x=-1+4\lambda+6\mu \\ y=2+2\lambda+\mu \\ z=1-4\lambda+\mu \end{cases}$ (λ، μ عددان حقيقيان) هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

20 $A\notin(P)$، $B\in(P)$، $C\in(P)$، $D\notin(P)$

21 .1 $A(-3;4;1)$، $\vec{u}(4;-5;1)$، $\vec{v}(-1;-1;3)$

.2 $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) يعني $\vec{n}\,\vec{u}=0$ ، و $\vec{n}\,\vec{v}=0$ و نجد $\vec{n}(1;1;1)$

.3 $x+y+z-2=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P)

22 .1 (D)، (D′) لهما شعاعا توجيه متساويان و يشتركان في نقطة (مثل $A(-6;-2;4)$) إذن (D)، (D′) متطابقان

.2 (D)، (D′) لهما شعاعا توجيه متساويان و لا يشتركان في أية نقطة إذن D، D′ متوازيان

.3 (D)، (D′) لهما شعاعا توجيه غير متوازيين إذن (D)، (D′) إما متقاطعان أو غير مستويين (ليسا من نفس المستوي).

بحل الجملة $\begin{cases} -1+2t=2+t' \\ 1-t=-1-t' \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t=1 \\ t'=-1 \end{cases}$

من أجل $t=1$ نجد النقطة من (D) ذات الاحداثيات $(1;0;3)$

من أجل $t'=-1$ نجد النقطة من (D′) ذات الاحداثيات $(1;0;3)$ إذن يشتركان في النقطة $A(1;0;3)$

.4 شعاعا توجيه (D)، (D′) غير متوازيين إذن (D)، (D′) متقاطعان أو غير مستويين

نحل الجملة $\begin{cases} -1+t=-2+t' \\ 2+t=4+2t' \end{cases}$ نجد $\begin{cases} t=-4 \\ t'=-3 \end{cases}$

من أجل $t=-4$ نجد النقطة من (D)

ذات الاحداثيات (-5 ; -2 ; -5).

من أجل $t' = -3$ نجد النقطة من (D′) ذات الاحداثيات (-7 ; -2 ; -5).

إذن (D) ،(D′) لا يشتركان في أية نقطة و منه (D)، (D′) غير مستويين (لا يشملها مستو).

23 1 . شعاعا توجيه (Δ)، (Δ′) غير متوازيين فهما متقاطعان أو غير مستويين.

نحل الجملة $\begin{cases}3 + 5t = 2 + t'\\ 7 + 4t = 6 - t'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t = 0\\ t' = -1\end{cases}$

$t = 0$ نجد A(3 ; -2 ; 7) من (Δ)

$t' = -1$ نجد نفس النقطة A من (Δ′)

إذن (Δ)، (Δ′) يشتركان في النقطة A

2 . الشعاع الناظمي $\vec{\eta}(\alpha ; \beta ; \gamma)$ للمستوي (P) الذي يشمل (Δ)، (Δ′) عمودي على الشعاعين التوجيهيين $\vec{u}(5 ; -1 ; 4)$ ، $\vec{v}(-1 ; 3 ; -1)$

إذن $\begin{cases}5\alpha - \beta + 4\gamma = 0\\ -\alpha + 3\beta - \gamma = 0\end{cases}$ حيث γ وسيط حقيقي.

نجد $(\alpha ; \beta ; \gamma) = \left(-\frac{11}{14}\gamma ; \frac{\gamma}{14} ; \gamma\right)$ حيث $\gamma \neq 0$.

و من أجل $\gamma = 14$: $(\alpha ; \beta ; \gamma) = (-11 ; 1 ; 14)$

النقطة ذات الاحداثيات (2;1;6) تنتمي إلى (P)

إذن $11x - y - 14z + 63 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي(P).

24 1 . $\vec{n}(2 ; -1 ; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\vec{u}(1 ; -3 ; 1)$ شعاع توجيه للمستقيم (D)

$\vec{n}.\vec{u} \neq 0$ إذن (P)، (D) متقاطعان في نقطة احداثياتها $\left(-\frac{4}{3} ; 3 ; \frac{2}{3}\right)$. (من أجل $t = -\frac{7}{3}$)

2 . $\vec{n}(1 ; 3 ; -1)$ ، $\vec{u}(3 ; -1 ; 0)$ ، $\vec{n}.\vec{u} = 0$

النقطة من A(-2 ; -1 ; 2) من (D) لا تنتمي إلى (P)

إذن (P)، (D) متوازيان.

3 . $\vec{n}(1 ; 1 ; -2)$ ، $\vec{u}(1 ; 1 ; 1)$. $\vec{n}.\vec{u} = 0$

النقطة من A(4 ; 0 ; 3) من (D) تنتمي إلى (P)

إذن $(D) \subset (P)$.

25 1. (D)، (P) متقاطعان في النقطة ذات لاحداثيات $\left(-\frac{15}{7} ; \frac{6}{7} ; \frac{12}{7}\right)$.

2 . (D)، (P) متقاطعان في النقطة ذات الاحداثيات (10;-5;2)

26 1. (P)، (P′) منطبقان عن بعضهما (متوازيان و يشتركان في نقطة).

2 . (P)، (P′) متوازيان (تماما).

3 . (P)، (P′) متقاطعان في مستقيم.

تعيين مستقيم التقاطع يكون بحل الجملة $\begin{cases}3x - 2y - z - 9 = 0\\ x - y + 2z + 2 = 0\end{cases}$ و اعتبار أحد المجاهيل (مثلا $z = t$) وسيطا. و نجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم المشترك بين (P)، (P′) : $\begin{cases}x = 5t + 13\\ y = 7t + 15\\ z = t\end{cases}$ ، $(t \in \mathbb{R})$

4 . (P)، (P′) متقاطعان في مستقيم معرّف بتمثيل وسيطي له $\begin{cases}x = t\\ y = 2t - 1\\ z = 5t - 6\end{cases}$ ، $(t \in \mathbb{R})$

27 1 . (P)، (R) متوازيان إذن $(P) \cap (Q) \cap (R) = (\varnothing)$

2 . (P)، (Q) يشتركان في المستقيم (Δ) المعرف بتمثيل وسيطي $\begin{cases}x = -t + 1\\ y = 3\\ z = t\end{cases}$ ، $(t \in \mathbb{R})$

شعاع توجيهه $\vec{u}(-1;0;1)$ عمودي على الشعاع الناظمي $\vec{n}\left(1;\frac{4}{3};1\right)$ للمستوي (R)
إذن $(P)\cap(Q)\cap(R)=(\varnothing)$.

3 • (P)، (Q) يشتركان في المستقيم (Δ) المعرف بتمثيل وسيطي

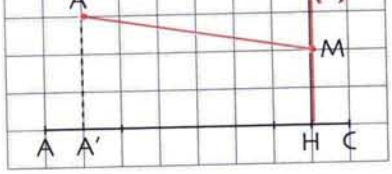
$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{2} \end{cases} ،\ (t \in \mathbb{R})$$

شعاع توجيهه $\vec{u}\left(1;-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$ غير عمودي على (R)
(Δ) و (R) يتقاطعان في النقطة $A\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$
إذن $(P)\cap(Q)\cap(R)=\{A\}$.

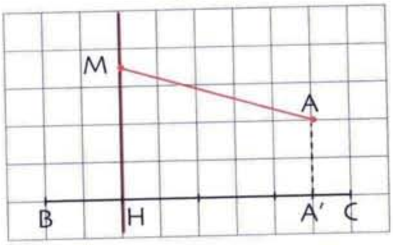
28 1 • $(x;y;z)=(1;2;3)$
المستويات الثلاث تتقاطع في النقطة $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$
2 • الجملة ليس لها حل. المستويات الثلاثة لا تشترك في أية نقطة.
3 • الجملة لها ما لا نهاية من الحلول المستويات الثلاثة تشترك في مستقيم معرّف بتمثيل وسيطي

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2} \\ z = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{2} \end{cases} ،\ (t \in \mathbb{R})$$

29 نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه $\overrightarrow{BC}$
1 • نسمي H، A′ المسقطين العموديين على (BC) لكل من النقطتين M، A بهذا الترتيب



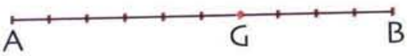
لدينا $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'H}=12$
$\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{A'H}$ لهما نفس الاتجاه إذن $A'H=3$، إذن
مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=12$ هي المستوى الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.
2 • $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{A'H}=-10$ مع $\overrightarrow{BC}$، $\overrightarrow{A'H}$ في اتجاهين متعاكسين. $A'H=-\frac{5}{2}$.



مجموعة النقط M حيث $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=-10$ هو المستوي الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.

30 $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=-4$ يعني $2x-y+4z-16=0$
مجموعة النقط M هي مستو معرف بالمعادلة السابقة.

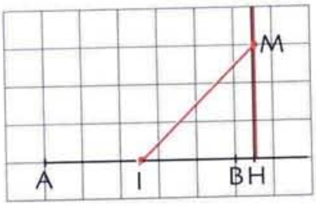
31 • مجموعة النقط M من الفضاء حيث $2MA^2+3MB^2=200$ هي كرة S مركزها النقطة G مرجح النقطتين A(2)، B(3) و نصف قطرها 4



$B\in S$ ،$A\notin S$

32 مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $2MA^2-3MB^2=-10$ هي الكرة ذات المعادلة $(x-7)^2+(y-8)^2+z^2=64$، مركزها $\omega(7;8;0)$ و نصف قطرها 8.

33 مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $MA^2-MB^2=30$ هي المستوي العمودي على (AB) في النقطة H، المسقط العمودي للنقطة M على (AB)، حيث $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH}=15$ أو $IH=3$ ($\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{IH}$) لهما نفس الإتجاه I منتصف [AB])



34 مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $MA^2-MB^2=-10$ هو المستوي المعرف بالمعادلة الديكارتية $4y-2z+5=0$

35 1 . B، C، D ليست على استقامة واحدة، إذن تعين مستويا (P) معادلته الديكارتية هي $2x + y + z + 2 = 0$

2 . $A(1;2;0)$ لا تنتمي إلى (P)

نضع $H(x_0 ; y_0 ; z_0)$ لدينا $\overrightarrow{AH}$ يوازي $\vec{n}$ ($\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستوي (P)).

إذن $\begin{cases} x_0 = 2t + 1 \\ y_0 = t + 2 \\ z_0 = t \end{cases}$ حيث t وسيط حقيقي مع $H \in (P)$

إذن $H(-1;1;-1)$.

3 . $x - 4y + 2z + 7 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل H و يقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاعا ناظميا.

الشعاعان الناظميان $\vec{n}(2;1;1)$ ، $\vec{n'}(1;-4;2)$ متعامدان إذا (P)، (R) متعامدان.

4 . نحل الجملة $\begin{cases} 2x + y + z + 2 = 0 \\ x - 4y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$

مع اعتبار احد المجاهيل (z مثلا) وسيطا فنجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ): $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t - \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3}t + \frac{4}{3} \\ z = t \end{cases}$ ، $t \in \mathbb{R}$

5 . لدينا O′، K، L مساقط O على (Δ)، (P)، (R) على الترتيب. نجد $OO' = \sqrt{3}$

36 1 . معادلة الكرة $S(A;AB)$

$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 36$

2 . $\overrightarrow{AB}(4;4;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) و الذي يشمل B. $(P) : 2x + 2y - z - 15 = 0$

3 . النقط C، D، E ليست على استقامة واحدة، إذن تعين مستويا (Q) حيث الجملة $\begin{cases} x=-3+\lambda+2\mu \\ y=-2\lambda \\ z=-3-2\lambda-2\mu \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي له.

4 . $\vec{n}(2 ; -1 ; 2)$ شعاع ناظمي للمستوي (Q).
$\vec{n}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متعامدان إذن (P)، (Q) متعامدان.

5 . $2x - y + 2z + 12 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q)، $AB = 6$ ، $d(A ; Q) = 3$.

$d(A ; Q)$ هي المسافة بين A مركز الكرة S و المستوي (Q). لدينا $d(A ; Q) < AB$.

إذن (Q) يقطع S في دائرة نصف قطرها r حيث $r = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ و مركزها A′ المسقط العمودي للنقطة A على (Q) حيث $\vec{n}$ و $\overrightarrow{AA'}(x_0+1 ; y_0+1 ; z_0+1)$ متوازيان و $A' \in (Q)$.
إذن $A'(-3 ; 0 ; -3)$

37 1. الشعاعان $\overrightarrow{AB}(0;1;2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ غير متوازيين إذن A، B، C ليست على استقامة واحدة.

2 . $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$ إذن $\vec{n}$ عمودي على $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. $(ABC) : -3x-4y+2z-6=0$

3 . $\vec{n_1}(2;1;2)$ شعاع ناظمي لـ (P).
$\vec{n_2}(1;-2;6)$ شعاع ناظمي لـ (Q).
$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ غير متوازيين إذن (P) و (Q) متقاطعان.

وفق مستقيم، تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = -2 + -\frac{2}{5} \\ y = -2t - \frac{1}{5} \\ z = t \end{cases}$

4 . نجد $t = \frac{1}{4}$.

$E\left(-\frac{9}{10};-\frac{7}{10};\frac{1}{4}\right)$ هي نقطة تقاطع (D) و (ABC)

5 . أ) من أجل كل عدد حقيقي موجب t ، $t+2+1 \neq 0$
إذن المرجح G موجود.

ب) $I\left(0 ; -\frac{1}{3} ; \frac{7}{3}\right)$ ، $\overrightarrow{IG} = \frac{t}{3+t}\overrightarrow{IC}$.

ج) من أجل كل عدد موجب t ؛ $0 \le \frac{t}{3+t} < 1$.
إذن G تنتمي إلى القطعة [IC] باستثناء النقطة C.
لدينا $\frac{t}{3+t} = \frac{1}{2}$ إذن $t = 3$.
من أجل $t = 3$ ، G هي منتصف [IC].

كتاب الرياضيات من سلسلة مدرستي موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي، شعبة العلوم التجريبية. فهو يتماشى مع المنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و يتكفل بالكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها.

يتضمن كل باب من هذا الكتاب العناصر التالية :

- المعارف الأساسية الواردة في المنهاج.
- الطرائق التي ينبغي التحكم فيها.
- تمارين و مسائل مرفقة بحلول مفصلة.
- تمارين و مسائل مقترحة للحل، توجد حلولها في الصفحات الأخيرة للكتاب.

يشمل هذا الجزء أكثر من 220 تمرينا و مسألة محلولة.

كما نلفت الانتباه إلى وجود أكثر من 460 تمرينا و مسألة محلولة في الجزأين من الكتاب، تساعد المترشح لامتحان الباكالوريا على التحضير الجيد.

9 789961 635902

CHIHAB