

# لنيل شهادة البكالوريا

سلسلة

20<sup>+</sup>  
20

السنة الثانية من سلك البكالوريا

✓ شعبة العلوم التجريبية

• مسلك علوم الحياة والأرض

• مسلك العلوم الفيزيائية

• مسلك العلوم الزراعية

✓ شعبة العلوم والتكنولوجيات الصناعية

• مسلك العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية

• مسلك العلوم والتكنولوجيات الكهربائية

• معارف أساسية

• تمارين محلولة

• تمارين للبحث والاستقصاء

م. باك

الرياضة

# الفهرس

|              |                                                                           |                 |                        |                 |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------------|-----------------|
| مقدمة        |                                                                           | 2               |                        |                 |
| الفهرس       |                                                                           | 3               |                        |                 |
| رقم<br>الدرس | اسم الدرس                                                                 | معارف<br>أساسية | نصوص وحل<br>(التمارين) | تمارين<br>للبحث |
| 1            | الاتصال والاشتقاق ودراسة الدوال                                           | 4               | 12                     | 43              |
| 2            | المتتاليات العددية                                                        | 45              | 48                     | 57              |
| 3            | الدوال الأصلية                                                            | 60              | 62                     | 71              |
| 4            | الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية :<br>الجزء الأول : الدوال اللوغاريتمية | 73              | 77                     | 93              |
|              | الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية :<br>الجزء الثاني : الدوال الأسية      | 96              | 99                     | 134             |
| 5            | المعادلات التفاضلية                                                       | 137             | 139                    | 145             |
| 6            | حساب التكاملات                                                            | 147             | 151                    | 164             |
| 7            | الأعداد العقدية                                                           | 166             | 174                    | 188             |
| 8            | التعداد                                                                   | 192             | 198                    | 206             |
| 9            | الاحتمالات                                                                | 208             | 214                    | 227             |
| 10           | المتغيرات العشوائية والقانون الحداني                                      | 230             | 234                    | 252             |
| 11           | الجداء السلمي في الفضاء وتطبيقاته                                         | 255             | 262                    | 270             |
| 12           | الجداء المتجهي                                                            | 273             | 277                    | 290             |



# نصوص وحلول التمارين

## التمرين رقم 1:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي  $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$  حيث  $E(\sqrt{x})$  هو الجزء الصحيح للعدد  $\sqrt{x}$ .

1- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2- أ- احسب  $f(x)$  في كل من الحالتين  $x \in [4, 9[$  و  $x \in [1, 4[$ .

ب- احسب  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ .

ج- ماذا تستنتج؟

## الحل:

-1  $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in ]0, +\infty[$   
 إذن  $D_f = ]0, +\infty[$

2- أ- لدينا:  
 $\forall x \in [4, 9[; 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq x < 9$   
 $f(x) = \frac{2}{x}$  ومنه  $E(\sqrt{x}) = 2 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3$

لدينا:

$\forall x \in [1, 4[; 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 \leq x < 4$

$f(x) = \frac{1}{x}$  ومنه  $E(\sqrt{x}) = 1 \Leftrightarrow$

ب-  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$  و  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{x} = \frac{1}{2}$

ج- لدينا  $f(4) = \frac{1}{2} \neq \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

وهذا يعني أن  $f$  ليست متصلة على اليسار في 4.

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$

وهذا يعني أن  $f$  متصلة على اليمين في 4.

## التمرين رقم 2:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & ; x > 1 \\ x - 2 & ; x \leq 1 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

\* حدد  $a$  لكي تكون  $f$  متصلة في  $x_0 = 1$ .

## الحل:

لدينا  $f(1) = 1 - 2 = -1$

ومنه  $f$  متصلة على اليسار في  $x_0 = 1$

لكي تكون  $f$  متصلة في 1 يجب أن تكون  $f$  متصلة على اليمين في 1، وهذا يعني أن:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 + a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = -2$$

## التمرين رقم 3:

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة كما يلي:

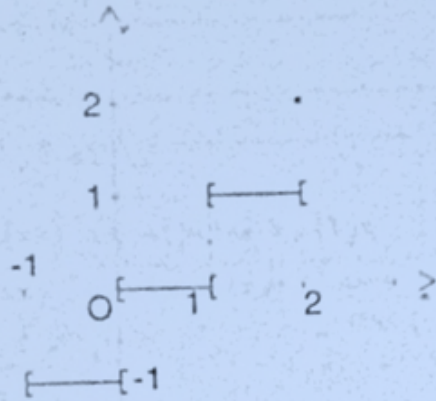
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} & ; x \neq 2 \\ a & ; (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

\* حدد قيمة  $a$  التي من أجلها تكون  $g$  متصلة على  $\mathbb{R}$ .

2- الإنشاء :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x \in [-1, 0[ \\ 0 & ; x \in [0, 1[ \\ 1 & ; x \in [1, 2[ \\ 2 & ; x = 2 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

ومنه



### التمرين رقم 5:

نعتبر الدالة العددية  $f$  التي جدول تغيراتها هو :

| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$       | $4$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $5$  | $3$ | $+\infty$ | $0$ | $12$      |

\* حدد بالدالة  $f$  صورة كل من المجالات  $I = [1, 4]$

و  $J = [-1, 0[$  و  $K = ]0, +\infty[$ .

### الحل :

لدينا :  $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in ]-\infty, 2[ : g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$   
ومنه  $g$  دالة متصلة على المجال  $] -\infty, 2[$  لأنها دالة  
كسرية و  $] -\infty, 2[ \subset D_g - \{2\}$

ثم  $\forall x \in ]2, +\infty[ : g(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$   
ومنه  $g$  دالة متصلة على المجال  $]2, +\infty[$  لأنها دالة  
كسرية و  $]2, +\infty[ \subset D_g - \{2\}$   
إذن لكي تكون  $g$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  يجب أن تكون  
متصلة في 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = a \quad \text{يعني} \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = a \quad \text{يعني}$$

$$a = \frac{1}{3} \quad \text{يعني} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} = a$$

### التمرين رقم 4:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = E(x)$$

1- حدد صورة المجال  $[-1, 2]$  بالدالة  $f$ .

2- أشر منحنى الدالة  $f$  على المجال  $[-1, 2]$ .

### الحل :

1- لكل  $x$  من  $[-1, 0[$

$$E(x) = -1$$

لكل  $x$  من  $[0, 1[$  لدينا  $E(x) = 0$

لكل  $x$  من  $[1, 2[$  لدينا  $E(x) = 1$

$$E(2) = 2$$

$$f([-1, 2]) = E([-1, 2]) = \{-1, 0, 1, 2\}$$



ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل حلا  
 $\alpha$  للمعادلة  $f(x) = 0$  على المجال  $[1, 2]$

لدينا  $m = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$  مركز المجال  $[1, 2]$

ولدينا  $f\left(\frac{3}{2}\right) = -4,125 < 0$

و  $f(1) > 0$

إذن  $\alpha \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$

يعني  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$  أي  $1 < \alpha < 1,5$

وهذا تأطير للعدد  $\alpha$  بالسعة  $1,5 - 1 = 0,5$   
 $= 5 \cdot 10^{-1}$

### التمرين رقم 7:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $I = \left[-\frac{1}{2}, 3\right]$

بما يلي:  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

1- بين أن  $f$  تقابل من  $I$  إلى مجال  $J$  يتم تحديده.

2- أنشئ  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$  منحنيني  $f$  و  $f^{-1}$  على التوالي

في نفس المعلم المتعامد المنظم.

3- حدد  $f^{-1}(x)$  :  $(\forall x \in J)$

### الحل:

1- لدينا لكل  $x$  من  $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$  :  $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0$

إذن جنول تغيرات  $f$  هو :

|        |                |                        |
|--------|----------------|------------------------|
| $x$    | $-\frac{1}{2}$ | 3                      |
| $f(x)$ |                | -                      |
| $f(x)$ | 5              | $\searrow \frac{3}{2}$ |

$f$  متصلة على  $I$  (لأنها دالة جذرية و  $I \subseteq D_f$ )

و  $f$  تنقصية قطعاً على المجال  $I$ ، إذن  $f$  تقابل من  $I$

إلى  $J = f(I) = \left[\frac{3}{2}, 5\right]$

### الحل:

لدينا  $f$  متصلة على كل من المجالات المقترحة.

• صورة المجال  $I$  :

$f$  تزايدية على المجال  $I$

إذن  $f(I) = f([1, 4]) = [f(1), f(4)]$

يعني  $f(I) = [-2, 0]$

• صورة المجال  $J$  :

$f$  تنقصية على المجال  $J$

إذن  $f(J) = f([-1, 0]) = \left[\lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(-1)\right]$   
 $= [3, 5]$

• صورة المجال  $K$  :

$f$  ليست رتيبة على المجال  $K$ ، لكن  $f$  تنقصية على

المجال  $[0, 1]$  وتزايدية على المجال  $[1, +\infty[$

إذن  $f(K) = f([0, 1]) \cup f([1, +\infty[)$   
 $= [f(1), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)] \cup [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$   
 $= [2, +\infty[ \cup [-2, 12]$   
 $= [-2, +\infty[$

### التمرين رقم 6:

بين أن المعادلة  $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$  تقبل على الأقل حلا  $\alpha$   
 في المجال  $[1, 2]$ ، ثم أعط تأطير للعدد  $\alpha$  بالدقة  $5 \cdot 10^{-1}$

### الحل:

نضع  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$

$f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  لأنها دالة حدودية ومنه  $f$  متصلة على  
 المجال  $[1, 2]$ .

ثم لدينا  $f(1) = 1 > 0$  و  $f(2) = -10 < 0$   
 إذن  $f(1) \cdot f(2) < 0$

## الحل :

لكل  $x$  من  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$  لدينا :  $g'(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x-1}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}$

بما أن لكل  $x$  من  $I - \{0\}$  :  $2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1) > 0$  و

$$4x-1 \leq 0$$

فإن  $g$  تناقصية قطعاً على المجال  $I$  ومنه جدول تغيرات  $g$  هو :

| $x$     | 0 | $\frac{1}{4}$ |
|---------|---|---------------|
| $g'(x)$ |   | -             |
| $g(x)$  | 0 | $\frac{1}{4}$ |

بما أن  $g$  متصلة على المجال  $I$  كمجموع دالتين متصلتين على  $I$  هما :  $x \mapsto x$  و  $x \mapsto -\sqrt{x}$  فإن  $g$  تقابل من  $I$  إلى  $J$ .

\* تحديد  $g^{-1}$  :

$$g(y) = x \Leftrightarrow y - \sqrt{y} = x$$

$$(y \in I) \Leftrightarrow \left(\sqrt{y} - \frac{1}{2}\right)^2 = x + \frac{1}{4}$$

$$\left(\sqrt{y} - \frac{1}{2} \leq 0\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \sqrt{y} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

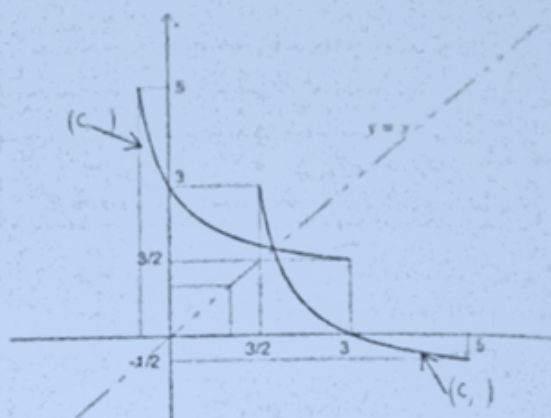
$$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)^2$$

$$\text{إن } (\forall x \in I); \quad g^{-1}(x) = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

تممة حل التمرين رقم 7 :

2- إنشاء  $(C_1)$  و  $(C_2)$  :



$$x = \frac{y+3}{y+1} \Leftrightarrow x = f(y); (y \in I) \quad -3$$

$$\Leftrightarrow (y+1)x = y+3$$

$$\Leftrightarrow yx - y = 3 - x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3-x}{x-1}$$

$$\text{ومن } (x \in [3/2, 5]); \quad f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-1}$$

## التمرين رقم 8 :

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة من المجال  $I = \left[0, \frac{1}{4}\right]$

الى المجال  $J = \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$  بما يلي :  $g(x) = x - \sqrt{x}$

بين أن  $g$  تقابل من  $I$  إلى  $J$  ثم حدد تقابله العكسي.



## التمرين رقم 9:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]-1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - 2$$

بما يلي : 1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

2- (أ) بين أن  $f'(x) > 0$  (ب) ضع جدول تغيرات  $f$ .

3- (أ) احسب  $f''$  (المشتقة الثانية ل  $f$ )

(ب) استنتج زوج احداثيتي  $I$  نقطة انعطاف  $(\mathcal{C}_f)$  منحنى  $f$

(ج) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$

## الحل :

1- \* حساب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

\* حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} - 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2/\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sqrt{1+1/x}} - 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2/\sqrt{x}}{\sqrt{1+1/x}} - 2$$

$$= +\infty$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x+1} - (x+2)(\sqrt{x+1})}{x+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} - \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$= \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

(ب) بما أن  $2(x+1)\sqrt{x+1} > 0$  فإن إشارة  $f'(x)$

هي إشارة  $x$  ومنه : \*  $\forall x \in ]-1, 0] : f'(x) \leq 0$

\*  $\forall x \in [0, +\infty[ : f'(x) \geq 0$

جدول تغيرات  $f$  هو :

| x       | -1 | 0 | + |
|---------|----|---|---|
| $f'(x)$ |    | - | + |
| $f(x)$  |    | + | + |

(أ-3)

$$f'(x) = (f'(x))' = \left( \frac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{(x+1)^3}} \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(x+1)^3} - x \cdot \frac{3(x+1)^2}{2\sqrt{(x+1)^3}}}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{2-x}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$$

(ب) بما أن  $4(x+1)^2\sqrt{x+1} > 0$  فإن إشارة  $f''(x)$  هي إشارة  $(2-x)$  ومنه :

| x        | -1 | 2 | + |
|----------|----|---|---|
| $f''(x)$ |    | + | - |

المشتقة الثانية  $f''$  تنعدم في 2 وتغير إشارتها على اليسار

وعلى اليمين في 2 ، إذن النقطة  $I \left( 2, \frac{4\sqrt{3}-6}{3} \right)$  هي

نقطة انعطاف للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

(ج) لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند النقطة ذات الألفصول 2 هي :

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$\text{ومنه } (T): y = \frac{\sqrt{3}}{9}x + \frac{10\sqrt{3}-18}{9}$$

### التمرين رقم 10:

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $I$  متماثل بالنسبة للصفر.

- 1- بين أنه إذا كانت  $f$  زوجية فإن  $f'$  فردية.
- 2- بين أنه إذا كانت  $f$  فردية فإن  $f'$  زوجية.

### الحل:

1-  $g$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، ولدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \left( \sqrt{1+x^2} \right)' = \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$$

ومنه فإن  $(1+x^2)g'(x) = xg(x)$

2-  $g'$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$[(1+x^2)g'(x)]' = [xg(x)]'$$

$$2xg'(x) + (1+x^2)g''(x) = g(x) + xg'(x)$$

نأخذ  $x=0$  نجد  $g'(0) = g(0) = 1$

### التمرين رقم 12:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

1- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- (أ) احسب  $f'(x)$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})$

(ب) ضع جنول تغيرات  $f$ .

3- (أ) بين أن  $f$  تقبل من  $\mathbb{R}$  نحو مجال  $I$  يجب تحديده.

(ب) بين أن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $-1/2$  ثم احسب

$$(f^{-1})'(-1/2)$$

(ج) حدد  $f^{-1}(x)$  ;  $(\forall x \in I)$

### التمرين رقم 11:

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = \sqrt{1+x^2}$$

1- بين أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $(1+x^2)g'(x) = xg(x)$

2- استنتج أن  $g'(0) = 1$

### الحل:

1-  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  لأن  $x^2+1 > 0$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})$

\* حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+1/x^2}} = -1$$

(لأن  $x < 0$  ;  $|x| = -x$ )



$$f(y) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}} = x \quad (\text{ج})$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}} = x + \frac{1}{2}$$

(بما أن  $x + \frac{1}{2}$  و  $y$  لهما نفس الإشارة)

$$\Leftrightarrow \left( \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}} \right)^2 = \left( x + \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{-(x^2 + x)}}$$

إن  $f^{-1}(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{-(x^2 + x)}}$  (لكل  $x$  من  $J$ )

### التمرين رقم 13:

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات:

$$\begin{array}{ll} x^5 = -32 & (2) \\ x^4 = -2 & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x^5 = 32 & (1) \\ x^4 = 2 & (3) \end{array}$$

### الحل:

1- المعادلة  $x^5 = 32$  تقبل حلا وحيدا موجبا

$$\begin{aligned} x^5 = 32 & \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} \\ & \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

ومنه  $S = \{2\}$

2- المعادلة  $x^5 = -32$  تقبل حلا سالبا (لأن  $-32 < 0$  و 5 فردي)

$$\begin{aligned} x^5 = -32 & \Leftrightarrow -x^5 = 32 \\ & \Leftrightarrow (-x)^5 = 32 \\ & \Leftrightarrow -x = \sqrt[5]{32} \\ & \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{32} = -2 \end{aligned}$$

ومنه  $S = \{-2\}$

أتمة حل التمرين رقم 12:

\* حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|\sqrt{1+1/x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{1+1/x^2}} = 0$$

(لأن  $x > 0$  :  $|x| = x$ )

2-  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \left( -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+x^2} - x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{1+x^2 - x^2}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$$

(ب)  $f$  تزايدية قطعيا على  $\mathbb{R}$  ومنه جدول تغيرات  $f$  هو:

| $x$     | $-\infty$ | 0             | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +             | +         |
| $f(x)$  | -1        | $\frac{1}{2}$ | 0         |

3- (أ) لدينا  $f$  متصلة وتزايدية قطعيا على  $\mathbb{R}$ ، إذن فهي

تقابل من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  إلى  $J = f(\mathbb{R}) = ]-1, 0[$

(ب) لدينا  $f(0) = -\frac{1}{2}$  ومنه  $f^{-1}(-1/2) = 0$

و  $f$  قابلة للاشتقاق في 0 بحيث  $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$

إذن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $-1/2$

$$\text{ولدينا } (f^{-1})'(-1/2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-1/2))}$$

$$= \frac{1}{f'(0)}$$

$$= \frac{1}{1/2} = 2$$

$$f(x) = 2$$

-4

$$\Leftrightarrow x \in D_f; \sqrt{x^2-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x \in D_f; (\sqrt{x^2-1})^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow x \in D_f; x^2-1=8$$

$$\Leftrightarrow x \in D_f; x = -3 \text{ أو } x = 3$$

$$S = \{-3, 3\} \text{ إذن}$$

### التمرين رقم 15:

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+7} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3} - x) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt[3]{2-x^3} \quad (5)$$

### الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+2} = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2} \quad -1$$

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+7) = +\infty) \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2+7} = +\infty \quad -2$$

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)} \quad \text{تذكير :} \quad -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3} - x) \text{ (شكل غير محدد)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+3})^3 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3+3})^2 + x^4 \sqrt[3]{x^3+3} + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(\sqrt[3]{x^3+3})^2 + x^4 \sqrt[3]{x^3+3} + x^2}$$

$$= 0$$

لتمرين حل التمرين رقم 13 :

3- المعادلة  $x^4 = 2$  تقبل حلين (لأن  $2 > 0$  و 4 زوجي)

$$x^4 = 2 \Leftrightarrow (|x|)^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt[4]{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt[4]{2} \text{ أو } x = \sqrt[4]{2}$$

$$S = \{-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\} \text{ ومنه}$$

4- المعادلة  $x^4 = -2$  لا تقبل حلولاً في  $\mathbb{R}$  لأن :

$$x^4 \geq 0 \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ و } -2 < 0 \text{ ومنه } S = \emptyset$$

### التمرين رقم 14:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt{x^2-1}$  :  
(1) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) بين أن  $f$  متصلة على  $D_f$ .

(3) احسب نهاية  $f$  عند محددات  $D_f$ .

(4) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 2$

### الحل :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \quad -1$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$\text{ومنه } D_f = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad -2$$

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-1) = +\infty \text{ لأن})$$

3- لدينا الدالة  $u : x \mapsto x^2 - 1$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ومنه

$$u(D_f) = [0, +\infty[ \text{ و } D_f \text{ على } [0, +\infty[$$

$$\text{و الدالة } v : x \mapsto \sqrt{x} \text{ متصلة على } [0, +\infty[$$

$$\text{لأن الدالة } v \circ u \text{ دالة متصلة على } D_f$$

$$\text{وبالتالي } f \text{ متصلة على } D_f \text{ (لأن } f = v \circ u)$$



تكملة حل التمرين رقم 15 :

4- (شكل غير محدد)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (\sqrt{2})^3}{(x-1)[(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3\sqrt{4}} \end{aligned}$$

-5

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{2-x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{(-x)^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x - x \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}\right) \quad \text{شكل غير محدد} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \frac{\frac{2}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}\right)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}\right)^2} = 0 \end{aligned}$$

الحل :

1- نعلم أن :  $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

ومنه

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2+2^{\frac{1}{3}}+1\right)}{\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3-1} = \frac{\left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)}{2-1} \\ &= \left(2^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right) \end{aligned}$$

2- نعلم أن :

$$\left. \begin{aligned} D_f &= D_g \\ (\forall x \in D_f) f(x) &= g(x) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow f = g$$

لنحدد  $D_f$  و  $D_g$

$\forall x \in \mathbb{R}$  من  $x^*$  تكافئ  $(x^2-1)^2 \geq 0$  وهذا صحيح

إذن  $D_f = \mathbb{R}$

$$x \in D_g \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

ومنه  $D_g = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

وبما أن  $D_f \neq D_g$  فإن  $f \neq g$

ملحوظة : (لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ )

$$\sqrt[3]{(x^2-1)^2} = (|x^2-1|)^{\frac{2}{3}}$$

التمرين رقم 16 :

1- اجعل مقام العدد  $A = \frac{2^{\frac{1}{3}}+1}{2^{\frac{1}{3}}-1}$  عددا صحيحا.

2- نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين كما يلي :

$$g(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}} \text{ و } f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

هل  $f = g$  ؟

إذا كان  $x < 0$  فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{\frac{x^2}{-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

ومنه  $f$  غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 .

(ب) حساب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :

$f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0, +\infty[$  و  $] -\infty, 0[$

$$\text{ولدينا } f'(x) = \left( \sqrt{x^2} \right)' = \frac{(x^2)'}{2\sqrt{x^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}}$$

$$\text{ومنه } f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}}$$

ملحوظة : بما أن :  $\sqrt{x^2} > 0$  :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$  ،

فإن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x$  .

(ج) جدول تغيرات  $f$  :

● إذا كان  $x \in ]0, +\infty[$  فإن  $x > 0$  ، ومنه  $f$  تزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$

● إذا كان  $x \in ]-\infty, 0[$  فإن  $x < 0$  ، ومنه  $f$  تناقصية قطعاً على  $] -\infty, 0[$

إذن جدول تغيرات  $f$  هو :

| $x$     | $-\infty$ | 0       | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | -∞   +∞ | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | ↘ 0 ↗   | $+\infty$ |

## تمرين رقم 17:

عبر الدالة العنسية  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف  $f$  .
- اكتب نهاية  $f$  عند محاذات  $D_f$  .
- الدرس قابلية اشتقاق  $f$  في 0 .
- احسب  $f'(x)$   $(\forall x \in D_f)$  .
- اكتب جدول تغيرات  $f$  .

## الحل :

1- نحدد  $D_f$  :

$x$  من  $D_f$  يكفي  $x^2 \geq 0$  (وهذا صحيح مهما يكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ )

إذن  $D_f = \mathbb{R}$

2- حدد نهاية  $f$  عند محاذات  $D_f$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$$

$$(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ لاحظ})$$

3- دراسة قابلية اشتقاق  $f$  في 0 :

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

● إذا كان  $x > 0$  فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = +\infty$$

● إذا كان  $x < 0$  فإن :



ولدينا

$$f(x) = \frac{(x^2 - x) \sqrt{x^2 + 1} - (x^2 - x)(\sqrt{x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{(2x - 1) \sqrt{x^2 + 1} - (x^2 - x) \frac{2x}{3\sqrt{(x^2 + 1)^2}}}{(\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \frac{4x^2 - x^2 + 6x - 3}{3(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}} \quad (3)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \geq 0 \text{ و } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}((\sqrt{x})^2 - 1) \geq 0 \text{ و } x \geq 0$$

لدينا:

| x                  | 0 | 1 | + |
|--------------------|---|---|---|
| $(\sqrt{x})^2 - 1$ | - | ○ | + |

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ومنه}$$

$$D_f = [1, +\infty[$$

f قابلة للاشتقاق على  $D_f = ]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{(x - \sqrt{x})}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} = \frac{3\sqrt{x^2} - 1}{6\sqrt{x^2} \sqrt{x - \sqrt{x}}} \text{ ولدينا}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}} \quad (4)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 1 \text{ و } x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

$$D_f = ]1, +\infty[$$

f قابلة للاشتقاق على  $D_f = D_f$

ولدينا

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 1) \sqrt{x - 1} - (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x - 1})}{(\sqrt{x - 1})^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} - 1}{3\sqrt{(x - 1)^2}}}{(\sqrt{x - 1})^2} = \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{6(x - 1)\sqrt{x}\sqrt{x - 1}}$$

## التمرين رقم 18:

حدد مجموعة تعريف الدالة f لم حسب مشقها الأولى  
f في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (2) \quad f(x) = \sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}} \quad (4) \quad f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}} \quad (3)$$

## الحل:

في جميع الحالات، لنكن  $D_f$  مجموعة تعريف f و  $D_f$  مجموعة تعريف f:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}} \quad (1)$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{1 - 2x}{x + 1} \geq 0 \text{ و } x + 1 \neq 0 \right\}$$

لدينا:

| x                      | + | -1 | $\frac{1}{2}$ | + |
|------------------------|---|----|---------------|---|
| $\frac{1 - 2x}{x + 1}$ | - | +  | ○             | - |

$$\text{ومنه } D_f = ]-1, \frac{1}{2}]$$

f قابلة للاشتقاق على  $D_f = ]-1, \frac{1}{2}]$  كمركب الدالتين:

$$x \mapsto \sqrt{x} \text{ و } x \mapsto \frac{1 - 2x}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1 - 2x}{x + 1}\right)'}{2\sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}}} = \frac{-3}{2(x + 1)^2 \sqrt{\frac{1 - 2x}{x + 1}}} \text{ ولدينا:}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (2)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 1 > 0$$

ونعلم أن  $x^2 + 1 > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  إذن  $D_f = \mathbb{R}$

f قابلة للاشتقاق على  $D_f = \mathbb{R}$  كخارج الدالتين:

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \text{ و } x \mapsto x^2 - x$$

## التمرين رقم 19:

نكتب  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 4 & ; x \geq 2 \\ f(x) = -x + 4 & ; x < 2 \end{cases}$$

1- أدرس متصلة الدالة  $f$ .

2- ادرس اتصال  $f$  في  $x_0 = 2$

## الحل :

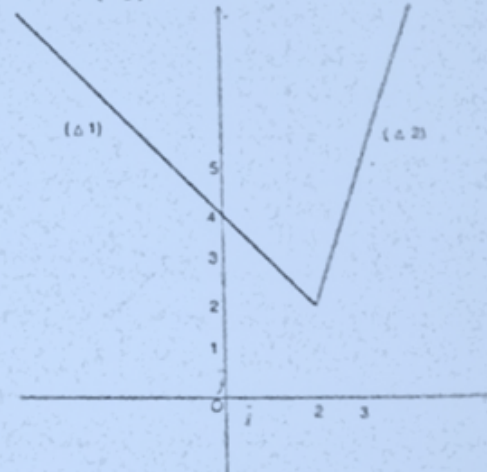
$$\begin{cases} f(x) = 3x - 4 & ; x \geq 2 \\ f(x) = -x + 4 & ; x < 2 \end{cases}$$

1- إنشاء  $(\mathcal{C})$  منحنى الدالة  $f$ :

$(\mathcal{C})$  عبارة عن اتحاد نصفي مستقيمين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$

$$(\Delta_1): y = 3x - 4 \quad ; x \geq 2$$

$$(\Delta_2): y = -x + 4 \quad ; x < 2$$



2- اتصال  $f$  في  $x_0 = 2$

مبيانا : نلاحظ أن منحنى  $f$  تم رسمه على  $\mathbb{R}$  بدون رفع اليد وهذا يعني أن  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ومنه  $f$  متصلة في  $x_0 = 2$

$$\text{حسابيا : } f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

ومنه  $f$  متصلة على اليمين في 2.

$$\text{ثم لدينا : } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (-x + 4) = 2 = f(2)$$

وهذا يعني أن  $f$  متصلة على اليسار في  $x_0 = 2$ .

إذن  $f$  متصلة في  $x_0 = 2$ .

## التمرين رقم 20:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

هل الدالة  $f$  متصلة في  $x_0 = 0$  ؟

## الحل :

ندرس إشارة  $x^2 - x$  :

| $x$       | $-\infty$ | 0  | 1 | $+\infty$ |
|-----------|-----------|----|---|-----------|
| $x^2 - x$ | +         | () | - | +         |

\* اتصال  $f$  على اليمين في 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x) \\ &= 1 = f(0) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  متصلة على اليمين في 0.

\* اتصال  $f$  على اليسار في 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) \\ &= -1 \neq f(0) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  غير متصلة على اليسار في 0.

نتيجة :  $f$  غير متصلة في  $x_0 = 0$ .



## التمرين رقم 22:

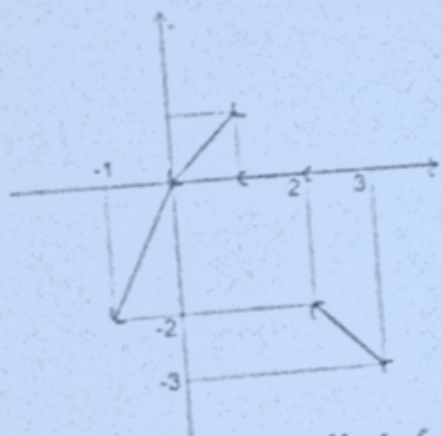
نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[-1, 3]$  بـ  
 $f(x) = x - xE(x)$  (حيث  $E$  هي دالة الجزء الصحيح)  
 1- أنشئ منحنى الدالة  $f$ .  
 2- هل الدالة  $f$  متصلة في النقطتين  $x_0 = 0$  و  $x_0 = 1$ ؟

### الحل:

$f(x) = x - xE(x) - 1$  (حيث  $E$  هي دالة الجزء الصحيح)

$$\text{لدينا: } \begin{cases} f(x) = 2x & ; x \in [-1, 0[ \\ f(x) = x & ; x \in [0, 1[ \\ f(x) = 0 & ; x \in [1, 2[ \\ f(x) = -x & ; x \in [2, 3[ \end{cases}$$

ومنه منحنى  $f$  هو:



2- مبدئياً:  $f$  متصلة في 0 وغير متصلة في 1.  
 حسابياً:  
 لدينا:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \end{aligned}$$

ومنه  $f$  متصلة في 0.  
 ثم لدينا:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \neq f(1) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  غير متصلة في 1.

## التمرين رقم 21:

لنكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = -(x+2\sqrt{1-x}) & ; x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

الدرس اتصال  $f$  في  $x_0 = 0$

### الحل:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = -(x+2\sqrt{1-x}) & ; x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

\* اتصال  $f$  على اليمين في  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - 1^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3} = f(0) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  متصلة على اليمين في 0.

\* اتصال  $f$  على اليسار في 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -(x+2\sqrt{1-x}) \\ &= -2 \neq f(0) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  غير متصلة على اليسار في 0.  
 نتيجة:  $f$  ليست متصلة في  $x_0 = 0$ .

نذكر: لكل  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين، لدينا:

$$\begin{aligned} a-b &= \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} \\ a+b &= \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} \end{aligned}$$

## التمرين رقم 21:

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = -(x+2\sqrt{1-x}) & ; x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ادرس اتصال  $f$  في  $x_0 = 0$

## الحل :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = -(x+2\sqrt{1-x}) & ; x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

\* اتصال  $f$  على اليمين في  $x_0 = 0$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - 1^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1} = \frac{1}{3} = f(0) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  متصلة على اليمين في 0 .

\* اتصال  $f$  على اليسار في 0 .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -(x+2\sqrt{1-x}) \\ &= -2 \neq f(0) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  غير متصلة على اليسار في 0 .

نتيجة :  $f$  ليست متصلة في  $x_0 = 0$  .

تذكير : لكل  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين ، لدينا :

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$

$$a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$$

## التمرين رقم 22:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[-1, 3]$  بما يلي :

$$f(x) = x - xE(x) \quad (\text{حيث } E \text{ هي دالة الجزء الصحيح})$$

1- أنشئ منحنى الدالة  $f$  .

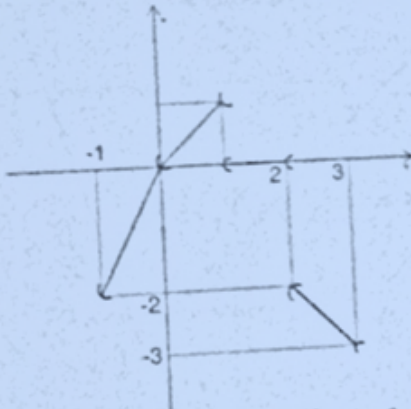
2- هل الدالة  $f$  متصلة في النقطتين  $x_0 = 0$  و  $x_1 = 1$  ؟

## الحل :

1-  $f(x) = x - xE(x)$  (حيث  $E$  هي دالة الجزء الصحيح)

$$\begin{cases} f(x) = 2x & ; x \in [-1, 0[ \\ f(x) = x & ; x \in [0, 1[ \\ f(x) = 0 & ; x \in [1, 2[ \\ f(x) = -x & ; x \in [2, 3[ \end{cases}$$

ومنه منحنى  $f$  هو :



2- مبياتيا :  $f$  متصلة في 0 وغير متصلة في 1 .

حسابيا :

لدينا :

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0$$

ومنه  $f$  متصلة في 0 .

ثم لدينا :

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \neq f(1)$$

ومنه  $f$  غير متصلة في 1 .



### التمرين رقم 23:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; \quad x \neq -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

- 1- هل الدالة  $f$  متصلة في  $-1$  ؟ علل جوابك .
- 2- كيف يمكن اختيار قيمة  $f(-1)$  لكي تكون الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ؟

### الحل :

1- اتصال  $f$  في  $(-1)$  :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \\ &= -2 \neq f(-1) \end{aligned}$$

ومنه  $f$  غير متصلة في  $(-1)$

- 2- لكي تكون الدالة  $f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  يجب أن تكون متصلة في  $(-1)$  ، لأجل ذلك يجب أن نأخذ :

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$f(-1) = -2$$

### التمرين رقم 24:

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$$

حيث  $x \neq 2$  و  $x \in J = [-4, 4]$

متر مبيانيا الدالة  $g$  ثم استنتج مبيانيا هل هي متصلة على المجال  $J$  .

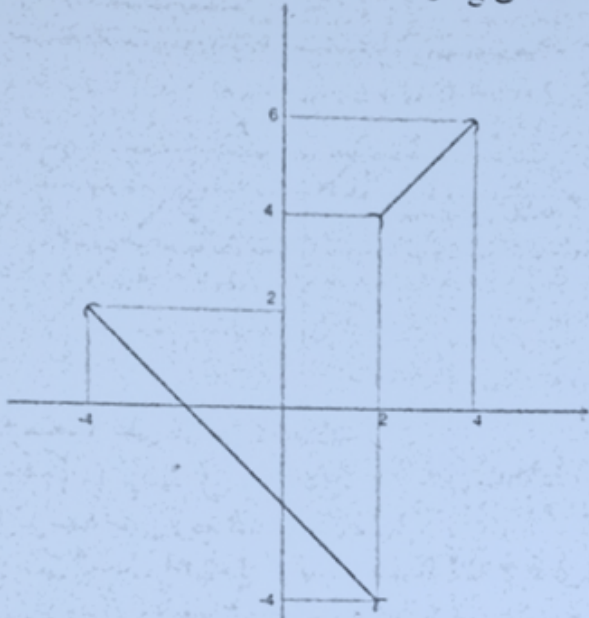
### الحل :

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} \quad ; \quad x \in J - \{2\}$$

اعتمادا على جدول إشارة  $(x - 2)$  نجد :

$$\begin{cases} g(x) = -(x + 2) & ; \quad x \in [-4, 2[ \\ g(x) = x + 2 & ; \quad x \in ]2, 4] \end{cases}$$

ومنه منحنى  $g$  هو :

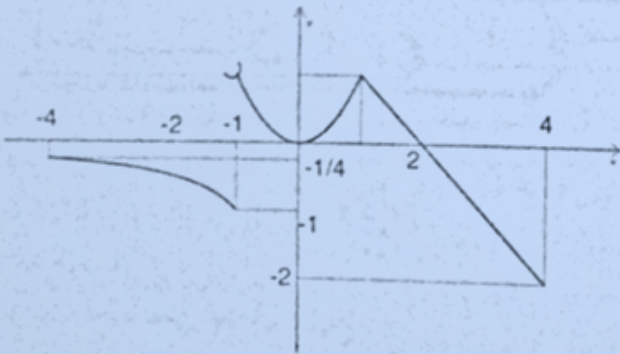


$g$  ليست متصلة على المجال  $J$  لأنه لا يمكن إنشاء منحنائها بدون رفع اليد .

### التمرين رقم 25:

نعتبر التمثيل المبياني الذي يمثل الدالة العددية  $f$  على

المجال  $[-4, 4]$  :



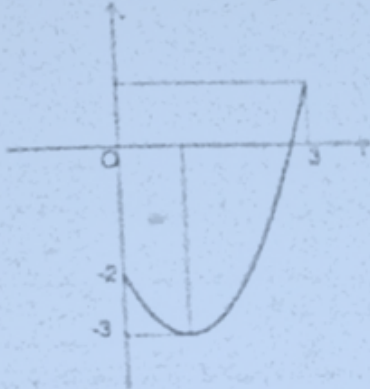
1- هل الدالة  $f$  متصلة على المجالات التالية :

$[-4, -1]$  ;  $[-1, 0]$  ;  $[0, 4]$  ;  $[-2, 0]$

2- حدد مجالا سعة 5 بحيث تكون  $f$  متصلة عليه .

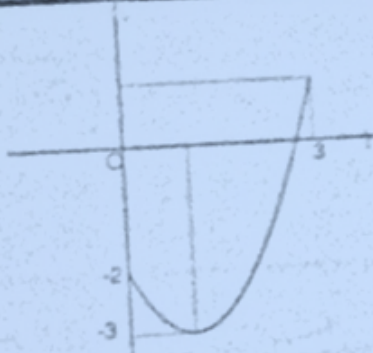
## التمرين رقم 27:

نعتبر الدالة العددية  $f$  الممثلة أسفله :



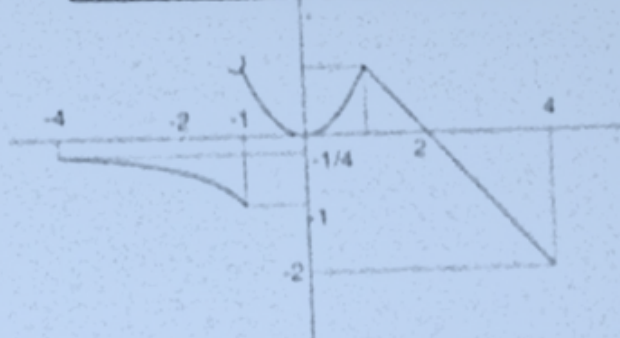
- 1- حدد صورة المجالين  $[0, 1]$  و  $[1, 3]$  بالدالة  $f$  (مباشري).
- 2- استنتج صورة المجال  $[0, 3]$  بالدالة  $f$ .

## الحل :



- 1) \*  $f$  تناقصية قطعاً على المجال  $[0, 1]$   
ولدينا :  $f(0) = -2$  و  $f(1) = -3$   
ومنه  $f([0, 1]) = [-3, -2]$
- \*  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $[1, 3]$   
ولدينا  $f(1) = -3$  و  $f(3) = 1$   
إن  $f([1, 3]) = [-3, 1]$
- 2- استنتاج :  
 $f$  ليست رتيبة على المجال  $[0, 3]$   
ولدينا  $[0, 3] = [0, 1] \cup [1, 3]$   
إن  $f([0, 3]) = f([0, 1]) \cup f([1, 3])$   
 $= [-3, -2] \cup [-3, 1]$   
 $= [-3, 1]$

## الحل :



- 1-  $f$  متصلة على كل من المجالات :  
 $[-4, -1]$  ;  $[-1, 0]$  ;  $[0, 4]$  . لأن منحناها  
يمكن رسمه بدون رفع اليد في كل منها .  
نكن على المجال  $[-2, 0]$  .  $f$  ليست متصلة لأنه لا يمكن  
رسم منحناها على هذا المجال بدون رفع اليد .
- 2-  $f$  متصلة على المجال  $[-1, 4]$  لأن منحناها يمكن  
رسمه بدون رفع اليد ولدينا سعة المجال هو :  $4 - (-1) = 5$

## التمرين رقم 26:

حدد صورة المجال  $I = [0, 5]$  بالدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & ; x \in [0, 2] \\ f(x) = -x + 6 & ; x \in ]2, 5] \end{cases}$$

## الحل :

- لدينا  $f(I \cup J) = f(I) \cup f(J)$   
كيفما كان  $I$  و  $J$  مجالين .  
إن  $f([0, 5]) = f([0, 2]) \cup f(]2, 5])$   
تحديد  $f([0, 5])$  :  
 $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $[0, 2]$   
إن  $f([0, 2]) = [0, 4]$   
و  $f$  تناقصية قطعاً على المجال  $]2, 5]$   
إن  $f(]2, 5]) = [f(5), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)[$   
 $= [1, 4[$   
وبالتالي  $f([0, 5]) = [0, 4] \cup [1, 4[$   
 $= [0, 4]$



## التمرين رقم 28:

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة بحدول تغيراتها التالي :

| $x$    | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|---|-----------|
| $g(x)$ |           | 4 | 0 |           |

حدد بالدالة  $g$  المجال  $I$  في الحالات التالية :

$$I = ]-\infty, 2] \quad -1$$

$$I = ]-\infty, 3[ \quad -2$$

$$I = [2, 3[ \cup ]3, +\infty[ \quad -3$$

## الحل :

| $x$    | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|---|-----------|
| $g(x)$ |           | 4 | 0 |           |

(1) صورة المجال  $I = ]-\infty, 2]$

$g$  تزايدية على المجال  $I$  ، ومنه

$$g(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(2) \right] \\ = ]2, 4]$$

(2) صورة المجال  $I = ]-\infty, 3[$

$g$  ليست رتيبة على المجال  $I$  و  $I = ]-\infty, 2] \cup [2, 3[$

حيث  $g$  تزايدية على  $]-\infty, 2]$  وتناقصية على  $[2, 3[$

إذن :

$$g(I) = g(]-\infty, 2]) \cup g([2, 3[) \\ = ]2, 4] \cup ]-\infty, 4] \\ = ]-\infty, 4]$$

(3) صورة المجال  $I = [2, 3[ \cup ]3, +\infty[$

$g$  تزايدية على المجال  $]3, +\infty[$  وتناقصية على المجال

$[2, 3[$  ، إذن :

$$g(I) = g([2, 3[) \cup g(]3, +\infty[) \\ = ]-\infty, 4] \cup ]0, 5[ \\ = ]-\infty, 5[$$

## التمرين رقم 29:

بين أن المعادلة  $x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  ، ثم حدد تأطيرا للعدد  $\alpha$ .

## الحل :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

$f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ولدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

إذن  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .

ولدينا  $f(-1) = -1$  و  $f(0) = 1$

يعني  $f(0) \cdot f(-1) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة ، المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-1 < \alpha < 0$

يعني المعادلة  $x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث

$$-1 < \alpha < 0$$

## التمرين رقم 30:

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a, b]$  بحيث :

$$f(b) < b \text{ و } f(a) > a$$

بين أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلاً على الأقل على

المجال  $[a, b]$

## الحل :

نعتبر الدالة العددية  $g$  على المجال  $[a, b]$  كما يلي :

$$g(x) = f(x) - x$$

$g$  متصلة على  $[a, b]$  لأنها مجموع دالتين متصلتين على

$$x \mapsto -x \text{ و } f : [a, b]$$

ولدينا :  $g(a) = f(a) - a > 0$

$$g(b) = f(b) - b < 0$$

يعني  $g(a) \cdot g(b) < 0$

المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل على الأقل حلاً  $\alpha$  من المجال  $[a, b]$

يعني المعادلة  $f(x) = x$  تقبل على الأقل حلاً  $\alpha$  من المجال

$[a, b]$

## التمرين رقم 31:

بين أن المعادلة  $x^3 + 3x = 5$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على  $\mathbb{R}$ ،  
ثم أعط قيمة مقربة للعدد  $\alpha$  بسعة  $25 \cdot 10^{-2}$

## الحل:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$f(x) = x^3 + 3x - 5$$

$f$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ولدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$$

ومنه  $f$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$ .

$$\text{ولدينا } f(1) = -1 \text{ و } f(2) = 9$$

$$\text{يعني } f(1) \cdot f(2) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة، المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1 < \alpha < 2$

يعني المعادلة  $x^3 + 3x = 5$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث

$$1 < \alpha < 2$$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{45}{64} \end{cases}$$

وبإتباع تقنية التفرع الثنائي نجد:

$$\text{يعني } f(1) \cdot f\left(\frac{5}{4}\right) < 0 \text{ ومنه } 1 < \alpha < \frac{5}{4}$$

$$\text{ولدينا } \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} = 25 \cdot 10^{-2}$$

## التمرين رقم 32:

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بحيث

$$f(x) = x + \sqrt{x} - 1$$

1- ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

2- أ) استنتج أن المعادلة  $x + \sqrt{x} = 1$  (E): تقبل حلا

وحيدا  $\alpha$  على المجال  $[0, +\infty[$ .

ب) أعط تائيرا للعدد  $\alpha$  سعة  $5 \cdot 10^{-2}$

3- أعط القيمة المضبوطة للعدد  $\alpha$ .

## الحل:

1- تغيرات الدالة  $f$  بحيث:  $f(x) = x + \sqrt{x} - 1$

$f$  معرفة ومتصلة على المجال  $[0, +\infty[$  وقابلة للاشتقاق

على  $]0, +\infty[$

$$\text{ولدينا } f(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \sqrt{x} - 1 \right) = +\infty$$

$$\text{و } (\forall x \in ]0, +\infty[); f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

$f$  تزايدية قطعا على المجال  $]0, +\infty[$ .

جدول تغيرات  $f$ :

| $x$     | 0  | $+\infty$ |
|---------|----|-----------|
| $f(x)$  | -1 | +         |
| $f'(x)$ | -1 | $+\infty$ |

2- أ) لدينا  $f$  متصلة وتزايدية قطعا على المجال  $[0, +\infty[$

$$\text{و } f(1) = 1 \text{ و } f(0) = -1$$

$$\text{يعني } f(1) \cdot f(0) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة، المعادلة  $f(x) = 0$

( $x + \sqrt{x} - 1 = 0$ ) تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]0, 1[$

$$\text{وبما أن } ]0, 1[ \subset [0, +\infty[$$

و  $f$  تزايدية قطعا على المجال  $[0, +\infty[$

فإن المعادلة  $x + \sqrt{x} - 1 = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  على

$$[0, +\infty[$$

ب)- حسب السؤال السابق لدينا:  $0 < \alpha < 1$

وبإتباع تقنية التفرع الثنائي نستنتج أن  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  لأن

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0$$

$$\text{ولدينا } \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = 5 \cdot 10^{-2}$$



لنحل المعادلة  $x + \sqrt{x} - 1 = 0$  : 32

نضع  $t = \sqrt{x}$  و  $t \geq 0$  و  $x \geq 0$  و  $t^2 + t - 1 = 0$  ومنه  $\Delta = 5$

ومن هنا نجد  $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  و  $t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  أي

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

وبما أن  $t > 0$  فإن  $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  يعني  $\sqrt{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

(لاحظ أن  $0 < \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$ )

### التمرين رقم 34:

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = x^3 + x$$

- 1- أعط جدول تغيرات الدالة  $f$ .
- 2- أنشئ منحنى  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 3- بين أن  $f$  تقبل دالة عكسية  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$ . ثم أنشئ  $(\mathcal{C}_g)$  منحنى  $g$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 4- بين أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : (g(x))^3 = g(x) = x$

### الحل :

$$1- f(x) = x^3 + x$$

$f$  متصلة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (حدودية)، ولدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

يعني أن  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .  
جدول تغيرات الدالة  $f$ .

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | + | +         |
| $f(x)$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

### التمرين رقم 33:

نعتبر الدالة الحدودية  $f$  المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x^2 - 4x + 2$$

- 1- بين أن  $f$  تقابل من المجال  $[2, 4]$  نحو المجال  $f([2, 4])$ .
- 2- حدد  $f^{-1}(x)$  ;  $\forall x \in f([2, 4])$

### الحل :

$$1) f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$f$  متصلة وقابلة للاشتقاق على المجال  $I = [2, 4]$  ، ولدينا :

$$\forall x \in I : f'(x) = 2(x - 2) \geq 0$$

إذن  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $I$  ومنه  $f$  تقابل من  $I$  نحو المجال  $f(I)$

$$f(I) = [f(2), f(4)] = [-2, 2]$$

2- تحديد  $f^{-1}(x)$  ;  $\forall x \in [-2, 2]$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

$$x \in [-2, 2] ; y \in [2, 4]$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 4y + 2 = x$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)^2 = x + 2$$

بما أن  $y - 2 \geq 0$  و  $x + 2 \geq 0$  فإن  $y \in [2, 4]$  و  $x \in [-2, 2]$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x + 2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{x + 2}$$

$$\text{ومن هنا } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x + 2}$$

## الحل :

1-  $x \in [0,1]$  حيث  $f(x) = x^4 - 2x^2$   
 $f$  متصلة وقابلة للاشتقاق على  $[0,1]$  ، ولدينا :

$$(\forall x \in [0,1]); f'(x) = 4x^3 - 4x \leq 0$$

يعني أن  $f$  تناقصية قطعاً على  $[0,1]$  .

وبالتالي  $f$  تقابل من  $[0,1]$  نحو المجال

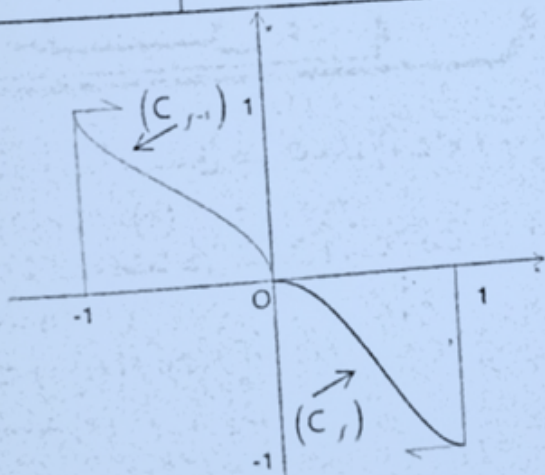
$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] \\ = [-1, 0]$$

إذن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  معرفة على المجال  $[-1,0]$

2- إنشاء منحني  $f$  و  $f^{-1}$  في نفس المعلم المتعامد الممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

جدول تغيرات الدالة  $f$  .

|        |   |    |
|--------|---|----|
| $x$    | 0 | 1  |
| $f(x)$ | 0 | -  |
| $f(x)$ | 0 | -1 |



3- تحديد  $f^{-1}(x)$  ؛  $\forall x \in [-1,0]$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

$$x \in [-1,0] : y \in [0,1]$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y^4 - 2y^2 = x$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 2y^2 + 1 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 = x + 1$$

تذكرة حل التمرين رقم 34 :

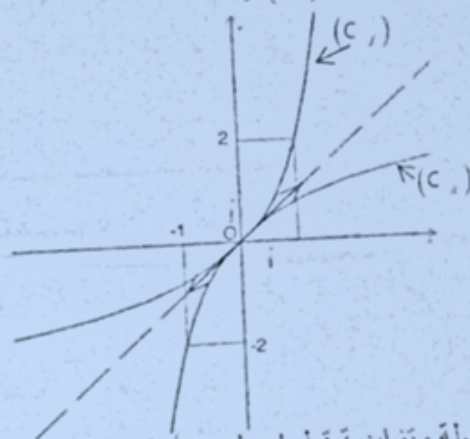
2- إنشاء  $(C_f)$  منحني  $f$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

ومنه  $(C_f)$  يقبل فرعاً شامجياً في اتجاه محور الأرتيب بجوار  $+\infty$  و  $-\infty$

\* معادلة المماس عند النقطة O هي  $y = x$

$$f(1) = 2 \text{ و } f(-1) = -2$$



3-  $f$  متصلة وتزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$  إذن فهي تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو  $\mathbb{R}$

$$f(\mathbb{R}) = \left[ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \mathbb{R}$$

ومنه  $f$  تقبل دالة عكسية  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  .

منحني  $g$  هو مماثل منحني  $f$  .

بالنسبة للمنتصف الأول المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  في

معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (انظر الشكل)

$$4- \text{نعلم أن : } (\forall x \in \mathbb{R}); f \circ g(x) = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); (g(x))^3 + g(x) = x$$

## التمرين رقم 35:

نعتبر الدالة الحدودية  $f$  المعرفة كما يلي :

$$x \in [0,1] \text{ حيث } f(x) = x^4 - 2x^2$$

1- بين أن  $f$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  وحدد مجموعة تعريف  $f^{-1}$  .

2- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  منحني  $f$  و  $f^{-1}$  .

3- حدد  $f^{-1}(x)$



التمرين رقم 35 :

يعلم أن  $y \in [0,1]$  وفان  $y^2 \in [0,1]$  و  $y^2 - 1 \leq 0$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y^2 - 1 = \sqrt{1-y^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 1 - \sqrt{1-y^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{1 - \sqrt{1-y^2}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}}$$
 ومنه

### التمرين رقم 36:

لنأخذ الأعداد الحقيقية التالية  $a = \sqrt[3]{7}$  و  $b = \sqrt[3]{3}$  و  $c = \sqrt[3]{11}$

**الحل :**

لنأخذ  $a = \sqrt[3]{7}$  و  $b = \sqrt[3]{3}$  و  $c = \sqrt[3]{11}$

لنأخذ  $a$  و  $b$  و  $c$  نوجد رتبة الجذر باستعمال الخاصية :

$$(n, p \in \mathbb{N}^*); \sqrt[n]{x} = \sqrt[p]{x^{\frac{n}{p}}} \quad (x \geq 0)$$

$$a = \sqrt[3]{7^3}$$
 لدينا

$$b = \sqrt[3]{3^3}$$

$$c = \sqrt[3]{11^3}$$

$$3^3 < 11^3 < 7^3$$

ويعلم أن دالة الجذر التولي تزايدية على  $[0, +\infty[$  فان :

$$\sqrt[3]{3^3} < \sqrt[3]{11^3} < \sqrt[3]{7^3} \quad \text{يعني } b < c < a$$

### التمرين رقم 37:

أعمل مقامات الكسور التالية جذرية :

$$\diamond A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad ; \quad \diamond B = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$\diamond C = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{4}} \quad ; \quad \diamond D = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

**الحل :**

$$a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$$
 لدينا

$$\sqrt{2}-1 = \frac{(\sqrt{2})^3 - (1)^3}{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} + 1}$$

$$= \frac{2-1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}+1}$$
 ومنه

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{4} + \sqrt{2} + 1 \quad \text{إن}$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{5})^3 - (\sqrt{3})^3}{(\sqrt{5})^2 + \sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} \quad \text{كذلك :}$$

$$= \frac{5-3}{\sqrt{25}+\sqrt{15}+\sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{25}+\sqrt{15}+\sqrt{9}}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3}{2}(\sqrt{25}+\sqrt{15}+\sqrt{9}) \quad \text{إن}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad \text{لدينا } \sqrt{4}+\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\sqrt{2}+1 = \frac{(\sqrt{2})^3 + (1)^3}{(\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + (1)^2} \quad \text{ومنه}$$

$$= \frac{2+1}{\sqrt{4}-\sqrt{2}+1} = \frac{3}{\sqrt{4}-\sqrt{2}+1}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{2}+1} \quad \text{إن}$$

### التمرين رقم 38:

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين موجبين قطعاً :  
عبر عن العدد  $a$  بدلالة  $b$  لكي يكون لدينا :

$$a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} = 0$$

**الحل :**

$$a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}} \quad (a \geq 0; b \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow a = b^3$$

## التمرين رقم 40:

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \quad \boxed{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \quad \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x} \quad \boxed{4}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \quad \boxed{3}$$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \quad \text{حساب النهاية : } \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2}+\sqrt{2x}+\sqrt{4})}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2} + \sqrt{2x} + \sqrt{4}$$

$$= 3\sqrt{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \quad \text{حساب النهاية : } \boxed{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt{x+1}+1}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \quad \text{حساب النهاية : } \boxed{3}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{x+1} + \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \left( \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \sqrt{2}$$

## التمرين رقم 39:

$$(1) \text{ احسب : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+19}-3}{x-2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x-2}$$

$$(2) \text{ استنتج : } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt[3]{4x+19}}{x-2}$$

الحل :

(1) \* حساب النهاية :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x+3-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+x+3}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+x+3}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+3} = \frac{5}{6}$$

\* حساب النهاية :

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x+19}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+19-3^3}{(x-2)((\sqrt[3]{4x+19})^2+3\sqrt[3]{4x+19}+9)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(\sqrt[3]{4x+19})^2+3\sqrt[3]{4x+19}+9} = \frac{4}{27}$$

(2) استنتج النهاية :

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt[3]{4x+19}}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x-2} - \frac{\sqrt[3]{4x+19}-3}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x+19}-3}{x-2}$$

$$= \ell_1 - \ell_2$$

$$= \frac{5}{6} - \frac{4}{27}$$

$$= \frac{37}{54}$$



$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( -\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} \quad (\text{شكل غير محدد})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x \quad \text{حساب النهاية}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x + 1})^3 - x^3}{(\sqrt[3]{x^3 + x + 1})^2 + x\sqrt[3]{x^3 + x + 1} + x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left[ \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + 1 \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x \left[ \left( \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} + 1 \right]}$$

$$= 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3\sqrt[3]{x^2} \quad \text{حساب النهاية}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 + 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 + 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{-x^3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 + 3\sqrt[3]{\frac{-1}{x}} \right)$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \quad \text{حساب النهاية}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{x}{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \right)$$

$$= +\infty$$

## تمهيد حل التمرين رقم 40 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x} \quad \text{حساب النهاية}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} - \frac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \left( \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1 \right)} - \frac{1}{x \left( \sqrt[4]{x+1} - 1 \right) \left( \sqrt[4]{x+1} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} - \frac{1}{(\sqrt[4]{x+1} - 1)(\sqrt[4]{x+1} + 1)}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

$$(a-b) = \frac{a^4 - b^4}{(a+b)(a^2 + b^2)} \quad (\text{تذكير})$$

## التمرين رقم 41:

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x \quad \text{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \quad \text{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \quad \text{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 3\sqrt[3]{x^2} \quad \text{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} \quad \text{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \quad \text{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x}} \right) x^{\frac{1}{12}} \quad \text{7}$$

## الحل :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \quad \text{حساب النهاية}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} + x \quad (\text{شكل غير محدد})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)$$

نضع  $(x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow t \rightarrow 1) \quad t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1} = \frac{4}{3}$$

### التمرين رقم 42:

(E): حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة:  $\frac{x}{\sqrt[3]{3x^2-1}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$

**الحل:**

لنحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة:  $\frac{x}{\sqrt[3]{3x^2-1}} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}$  (E)

لتكن D مجموعة تعريف المعادلة (E)

$$x \in D \Leftrightarrow 3x^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right[ \cup \left] \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right[$$

$$D = \left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right[ \cup \left] \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right[$$

\* إذا كان  $x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right[$  فإن المعادلة (E) لا تقبل أي

حل في  $\mathbb{R}$  (لأن  $\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} > 0$  و  $\sqrt[3]{3x^2-1} > 0$ )

\* إذا كان  $x \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right[$  فإن:

$$(E) \Leftrightarrow \left( \frac{x}{\sqrt[3]{3x^2-1}} \right)^3 = \left( \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{3x^2-1} = \frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 = x^2(3x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2[2x - (3x^2-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(-3x^2+2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2+2x+1 = 0 \quad ; (x > 0)$$

$$\Delta = 16$$

### تكملة حل التمرين رقم 41:

حساب النهاية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$  [5]

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}$$

$$= 1$$

حساب النهاية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}-\sqrt{x+1}}$  [6]

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^0}}$$

نضع  $t = \sqrt[3]{x+1}$

ومنه  $t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x+1}-\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4-t^3}{t^2-t^6}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4}{-t^6} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{t^2} = 0$$

حساب النهاية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}} \right) x^{\frac{1}{12}}$  [7]

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{x+1}{x}} - 1 \right)}{\sqrt[3]{x} \left( \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} - 1 \right)} x^{\frac{1}{12}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left( \sqrt{\left( \frac{x+1}{x} \right)^4} - 1 \right)}{\sqrt[3]{x} \left( \sqrt[3]{\left( \frac{x+1}{x} \right)^3} - 1 \right)} x^{\frac{1}{12}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\left( \frac{x+1}{x} \right)^4} - 1}{\sqrt[3]{\left( \frac{x+1}{x} \right)^3} - 1} \quad \left( \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \right)$$



لثمة حل التمرين رقم 42 :

$$x_2 = 1 \in \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right] \text{ و } x_1 = -\frac{1}{3} \in \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty \right]$$

إن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :  $S = \{1\}$

### التمرين رقم 43:

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة :  $(E): \sqrt{1-8x^3} = m$  (حيث  $m$  عدد حقيقي).  
ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$

### الحل :

لحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة :  $(E): \sqrt{1-8x^3} = m$

تكن  $D$  مجموعة تعريف المعادلة (E)

$$x \in D \Leftrightarrow 1-8x^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)(1+2x+4x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

(لأن مميز  $1+2x+4x^2$  هو  $-12$ )

$$D = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

\* إذا كان  $m < 0$  فإن المعادلة (E) ليس لها حلول في  $\mathbb{R}$   
وفي هذه الحالة مجموعة حلول المعادلة (E) هي  $S = \emptyset$   
\* إذا كان  $m \geq 0$  فإن المعادلة (E) تصبح :

$$1-8x^3 = m^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{1-m^2}{8}$$

حول إشارة  $1-m^2$  :

| $m$     | 0 | 1   | $+\infty$ |
|---------|---|-----|-----------|
| $1-m^2$ | + | ( ) | -         |

$$(E) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{1-m^2}}{2} : m \in [0, 1] \quad (1)$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :  $S = \left\{ \frac{\sqrt[3]{1-m^2}}{2} \right\}$

$$(E) \Leftrightarrow (-x)^3 = \frac{m^2-1}{8} : m \in [1, +\infty[ \quad (2)$$

$$(E) \Leftrightarrow -x = \frac{\sqrt[3]{m^2-1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt[3]{m^2-1}}{2}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \left\{ \frac{-\sqrt[3]{m^2-1}}{2} \right\}$$

### التمرين رقم 44:

(1) حدد مجموعة تعريف كل من الدوال العددية التالية :

$$f(x) = \sqrt[10]{4-x^2} ; g(x) = \sqrt{x^2-4}$$

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2+5}$$

(2) حدد الدالة المشتقة لكل من الدوال السابقة.

### الحل :

(1) تحديد مجموعة تعريف :

$$f(x) = \sqrt[10]{4-x^2} \quad \text{أ-}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4-x^2 \geq 0\}$$

لدينا :

| $x$     | $-\infty$ | -2  | 2   | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|
| $4-x^2$ | -         | ( ) | ( ) | -         |

$$\text{إذن } D_f = [-2, 2]$$

$$\text{ب- } g(x) = \sqrt{x^2-4}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \geq 0\}$$

لدينا :

| $x$     | $-\infty$ | -2  | 2   | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----|-----------|
| $x^2-4$ | +         | ( ) | ( ) | +         |

$$\text{إذن } D_g = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

$$\text{ج- } h(x) = \sqrt[4]{x^2+5}$$

$$D_h = \mathbb{R} \quad (\text{لأن } x^2+5 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}))$$

للمة حل التمرين رقم 44 :

(2) نحدد الدالة المشتقة :

$$f(x) = \sqrt[10]{4-x^2}$$

قابلية للاشتقاق على المجال  $]-2, 2[$  ولدنيا :

$$f'(x) = \frac{(4-x^2)}{10\sqrt[9]{(4-x^2)^9}}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{5\sqrt[9]{(4-x^2)^9}}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2-4}$$

g قابلية للاشتقاق على كل من المجالين  $]2, +\infty[$  و  $]-\infty, -2[$  ولدنيا :

$$g'(x) = \frac{(x^2-4)}{5\sqrt[4]{(x^2-4)^4}}$$

$$g'(x) = \frac{2x}{5\sqrt[4]{(x^2-4)^4}}$$

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2+5}$$

h قابلية للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدنيا :

$$h'(x) = \frac{(x^2+5)}{4\sqrt[3]{(x^2+5)^3}}$$

$$h'(x) = \frac{x}{2\sqrt[3]{(x^2+5)^3}}$$

التمرين رقم 45 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2-2}$$

الدرس قابلية اشتقاق f على اليسار في  $-\sqrt{2}$  ، ثم أعط تاويلا مبيانا للنتيجة المحصل عليها.

الحل :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2-2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2 \geq 0\}$$

$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ أو } x = \sqrt{2}$$

ولدنيا :

|         |           |             |            |           |
|---------|-----------|-------------|------------|-----------|
| x       | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $x^2-2$ | -         | +           | ( ) - ( )  | +         |

$$D_f = ]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$$

- قابلية اشتقاق f على اليسار في  $(-\sqrt{2})$

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})} \frac{f(x) - f(-\sqrt{2})}{x + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})} \frac{x + \sqrt{x^2-2} + \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})} \frac{x + \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{x^2-2}}{x + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})} 1 + \frac{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{(x + \sqrt{2})\sqrt{x^2-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})} 1 + \frac{x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$= -\infty$$

إن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في  $(-\sqrt{2})$  مبيانيا : منحني الدالة f يقبل نصف مماس عمودي (أو موازي لمحور الأرتيب) على يسار النقطة  $A(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  موجه نحو الأعلى.

التمرين رقم 46 :

لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = \sqrt{x} ; \quad g(x) = \sin^2 x$$

1- حدد مجموعة تعريف الدالة fog

2- أعط تعبيراً للدالة fog(x).

3- حدد مجال اشتقاق fog ، ثم احسب (fog)'(x)



## الحل :

$$f(x) = -x + \sqrt{1+x^2}$$

1-1) ليكن  $D_f$  حيز تعريف الدالة  $f$ :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1+x^2 \geq 0\}$$

لدينا  $(\forall x \in \mathbb{R}); 1+x^2 > 0$

إذن  $D_f = \mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); 1+x^2 > x^2 \quad (ب)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2} > |x|$$

ونعلم أن  $|x| \geq x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); \sqrt{1+x^2} > x \quad \text{إذن}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); -x + \sqrt{1+x^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}); f(x) > 0$$

2-1)  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{ب) لدينا}$$

ونعلم أن  $\sqrt{1+x^2} > 0$  و  $f(x) > 0$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) < 0 \quad \text{إذن}$$

إذن  $f$  تناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}$ .

ولدينا جدول تغيرات  $f$ :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$  |           |           |
| $f'(x)$ | $+\infty$ | $0$       |

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \right)$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = 0 \right)$$

## الحل :

$$f(x) = \sqrt{x} ; \quad g(x) = \sin^2 x$$

1- ليكن  $D$  مجموعة تعريف الدالة  $f \circ g$ :

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } g(x) \in D_f\}$$

$$D_f = [0, +\infty[ \text{ و } D_g = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in D_g ; g(x) \geq 0$$

$$\forall x \in D_g ; g(x) \in D_f$$

$$D = [0, +\infty[$$

2- نعتبر  $(\forall x \in D) ; f \circ g(x) :$

$$(\forall x \in D) ; f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$= f(\sqrt{x})$$

$$= \sin^2(\sqrt{x})$$

3-  $g$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  و  $f$  قابلة للاشتقاق على

$$(\forall x \in ]0, +\infty[); g(x) \in D_f \text{ و } \mathbb{R}$$

إذن  $f \circ g$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$ ، ولدينا:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$= (\sqrt{x})' (\sin^2)'(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2 \sin(\sqrt{x}) \cos(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(2\sqrt{x})$$

$$= \frac{\sin(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

## تمرين رقم 47:

تكن  $f$  الدالة المعرفة بما يلي:  $f(x) = -x + \sqrt{1+x^2}$

1- أ) حدد حيز تعريف الدالة  $f$ .

ب) بين أن  $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) > 0$

$$2- \text{ أ) بين أن } (\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

ب) استنتج تغيرات الدالة  $f$  على حيز تعريفها.

3- بين أن  $f$  تقبل من  $\mathbb{R}$  نحو مجال  $I$  يتم تحديده.

$$\text{فحدد } f^{-1}(x) ; \quad \forall x \in I$$

ومنه

$$t^3 - 3t - 18$$

$$= (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})^3 - 3(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) - 18$$

$$= 18 + 3\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} (\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) - 3(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) - 18$$

$$- 3(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) - 18$$

$$= 3(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}) - 3(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})$$

$$= 0$$

$$\text{إن } t \text{ حل للمعادلة } x^3 - 3x + 18 = 0$$

(ب) استنتاج :

$$x^3 - 3x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 6)$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ أو } x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$\Delta = -15 < 0$$

إن الحل الوحيد للمعادلة هو 3

وبما أن  $t$  حل للمعادلة فإن  $t = 3$

$$\text{إن } \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}} = 3$$

### التمرين رقم 49:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} + 2$$

1- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف  $f$ .

$$2- \text{ أ) بين أن لكل } x \text{ من } \mathbb{R}_+^* \text{، لدينا } f'(x) = \frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}}$$

(ب) ضع جدول تغيرات  $f$ .

3- أ) بين أن  $f$  تقابل من  $D_f$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده.

(ب) حدد  $f^{-1}(x)$  ;  $(\forall x \in J)$

### تتمة حل التمرين رقم 47 :

3-  $f$  متصلة وتناقصية قطعاً على  $\mathbb{R}$  إن  $f$  تقابل من  $\mathbb{R}$

$$\text{نحو } J = f(\mathbb{R}) = ]0, +\infty[$$

4- تحديد  $f^{-1}(x)$  ;  $\forall x \in J$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

$$y \in \mathbb{R} \quad x \in J$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow -y + \sqrt{1+y^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = x+y$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2 = (x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-x^2}{2x}$$

$$\text{ومنه } (x > 0); f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}$$

### التمرين رقم 48:

1- حدد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + ax + b)$$

$$2- \text{ نضع } t = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$$

$$\text{أ) بين أن } t \text{ حل للمعادلة } x^3 - 3x + 18 = 0$$

(ب) استنتاج أن  $t = 3$

### الحل :

1- لنحدد العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث :

$$x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + ax + b)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = x^3 + (a-3)x^2 + (b-3a)x - 3b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3=0 \\ b-3a=-3 \\ -3b=-18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$$

$$\text{ومنه } x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + 3x + 6)$$

$$2- \text{ أ) نعلم أن } (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$



$$\begin{cases} f^{-1}(x) = (1 + \sqrt{x-3})^2 & ; x \geq 3 \\ f^{-1}(x) = (1 - \sqrt{3-x})^2 & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

### التمرين رقم 50:

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  نحو المجال  $]-\infty, 1[$  و  $g$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  نحو المجال  $]1, +\infty[$  بحيث  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان على  $\mathbb{R}$  ويوجد عنصران  $x_1$  و  $x_2$  من  $\mathbb{R}_+^*$  يحققان  $x_1 < x_2$  و  $f(x_1) = x_1$  و  $f(x_2) = x_2$  و  $g(x_1) = x_2$  و  $g(x_2) = x_1$  بين أنه يوجد عنصر  $x_3$  من المجال  $]x_1, x_2[$  بحيث  $f(x_3)g(x_3) = x_3$ .

### الحل:

لدينا:  $f: \mathbb{R} \rightarrow ]-\infty, 1[$

$$x \mapsto f(x)$$

$g: \mathbb{R} \rightarrow ]1, +\infty[$

$$x \mapsto g(x)$$

حيث  $f$  و  $g$  متصلتان على  $\mathbb{R}$

ولدينا  $x_1 > 0$  و  $x_2 > 0$  و  $x_1 < x_2$

نعتبر الدالة العددية  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$h(x) = f(x)g(x) - x$$

$h$  متصلة على  $\mathbb{R}$  ولدينا:  $h(x_1) = f(x_1)g(x_1) - x_1$

$$= x_1(g(x_1) - 1) > 0$$

(لأن  $x_1 > 0$  و  $g(x_1) \in ]1, +\infty[$ )

$$h(x_2) = f(x_2)g(x_2) - x_2$$

$$= x_2(f(x_2) - 1) < 0$$

(لأن  $x_2 > 0$  و  $f(x_2) \in ]-\infty, 1[$ )

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة  $h(x) = 0$

تقبل حلاً  $x_3$  على الأقل بحيث  $x_3 \in ]x_1, x_2[$

يعني يوجد على الأقل  $x_3$  من المجال  $]x_1, x_2[$  بحيث:

$$f(x_3)g(x_3) = x_3$$

### الحل:

$$f(x) = x\sqrt{x-3} - 3x + 3\sqrt{x} + 2$$

1- تعريف  $f$  هو:  $D_f = [0, +\infty[$

2- لدينا  $f(x) = (\sqrt{x}-1)^2 + 3$

رقيقة لا تتفق على  $D_f - \{0\}$

ولدينا لكل  $x$  من  $D_f - \{0\}$ :  $f(x) = 3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)^2$

$$= \frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}}$$

ب) لكل  $x > 0$  لدينا  $2\sqrt{x} > 0$  و  $3(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ و } f(x) \geq 0$$

لأن  $f$  تزايدية قطعاً على  $D_f$  ومنه جدول تغيرات  $f$ :

| $x$    | 0 | 1 | $+\infty$          |
|--------|---|---|--------------------|
| $f(x)$ |   | + | ( ) +              |
| $f(x)$ |   | 2 | $\nearrow +\infty$ |

3-  $f$  متصلة وتزايدية قطعاً على  $]0, +\infty[$  إذن فهي

تقابل من  $]0, +\infty[$  نحو  $]2, +\infty[$  أي  $J = f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$

ب) نعيّن  $f^{-1}(x)$ :  $(\forall x \in J)$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

$$y \in [0, +\infty[ \quad x \in J$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)^2 + 3 = x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{y}-1)^2 = x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{y}-1)^2 = x-3 & ; x \geq 3 \\ (\sqrt{y}-1)^2 = x-3 & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}-1 = \sqrt{x-3} & ; x \geq 3 \\ -(\sqrt{y}-1) = \sqrt{3-x} & ; x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 1 + \sqrt{x-3} & ; x \geq 3 \\ \sqrt{y} = 1 - \sqrt{3-x} & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (1 + \sqrt{x-3})^2 & ; x \geq 3 \\ y = (1 - \sqrt{3-x})^2 & ; 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

## التمرين رقم 51:

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$

- 1- حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
- 2- احسب نهاية  $f$  عند محدات  $D_f$ .
- 3- ليكن  $x$  و  $y$  من المجال  $]1, +\infty[$  بحيث  $x < y$ .  
(أ) بين أن  $f(x) < f(y)$ .  
(ب) استنتج رتبة  $f$  على المجال  $]1, +\infty[$ .
- 4- بين أن  $f$  تقابل من  $]1, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده
- 5- حدد  $f^{-1}(x)$  ;  $(\forall x \in J)$

## الحل :

$$f(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$$

- 1- تحديد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  :  
 $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$  و  $1 - \sqrt[3]{x} \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x \geq 0$  و  $x \neq 1$   
ومنه  $D_f = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$
- 2- نهاية  $f$  عند محدات  $D_f$  :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

لاحظ أن :

|                 |   |   |           |
|-----------------|---|---|-----------|
| $x$             | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $1-\sqrt[3]{x}$ | + | ○ | -         |

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-\sqrt[3]{x}) = -\infty \right)$$

- 3- (أ) ليكن  $x$  و  $y$  من المجال  $]1, +\infty[$  بحيث  $x < y$ .  
إن  $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$  (دالة الجذر التوئي تزايدية)  
ومنه  $1 - \sqrt[3]{x} > 1 - \sqrt[3]{y}$   
إن  $\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{1-\sqrt[3]{y}}$   
يعني أن  $f(x) < f(y)$

(ب)  $f$  تزايدية قطعاً على المجال  $]1, +\infty[$ .

4-  $f$  متصلة وتزايدية قطعاً على المجال  $]1, +\infty[$  ومنه فهي تقابل من  $]1, +\infty[$  نحو المجال :

$$J = f(]1, +\infty[) = ]-\infty, 0[$$

5- تحديد  $f^{-1}(x)$  ;  $(\forall x \in J)$

$$f(y) = x \Leftrightarrow y = f^{-1}(x)$$

$$y \in ]1, +\infty[ \quad x \in ]-\infty, 0[$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt[3]{y}} = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = \left( \frac{x-1}{x} \right)^3$$

$$\text{ومنه } (\forall x \in J); f^{-1}(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right)^3$$

## التمرين رقم 52:

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = -x + (\sqrt[3]{3x-1})^2$$

1- (أ) حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(ب) بين أن  $f(x) = x \left[ -1 + \sqrt[3]{\frac{(3x-1)^2}{x^3}} \right]$  لكل  $x$  من  $D_f$

(ج) ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- (أ) تحقق من أن :

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{x - \frac{1}{3}} = -1 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3x-1}}$$

(ب) ادرس قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في  $\frac{1}{3}$  ، ثم أعط تاويلا هندسياً للنتيجة المحصلة .

(ج) بين أن :  $f'(x) = -1 + \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}}$  لكل  $x$  من  $D_f - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

(د) أعط جدول تغيرات  $f$  .

3- بين أن المعادلة  $x^3 - (3x-1)^2 = 0$  تقبل حلين على المجال  $\left[ \frac{1}{3}, +\infty \right]$ .



(ب) قابلية اشتقاق  $f$  على اليمين في  $\frac{1}{3}$  :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{x - \frac{1}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}^+} -1 + 3\sqrt[3]{\frac{1}{3x-1}}$$

$$= +\infty$$

إذن  $f$  غير قابلة للاشتقاق على اليمين في  $\frac{1}{3}$  ،

مبياتيا :  $(\mathcal{C}_f)$  منحنى  $f$  يقبل نصف مماس عمودي موجه

نحو الأعلى ، على اليمين في النقطة  $A\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

(ج) لنبين أن :  $f'(x) = -1 + \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}}$  :  $\forall x \in D_f - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$f'(x) = \left(-x + (3x-1)^{\frac{2}{3}}\right)'$$

$$= -1 + \frac{2}{3}(3x-1)' \cdot (3x-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= -1 + 2 \frac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$$

$$= -1 + \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}}$$

(د) \* إشارة  $f'(x)$  :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = 8$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$x \geq 3 \Leftrightarrow 3x-1 \geq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3x-1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{8}{3x-1} \leq 0$$

إذن  $f$  تناقصية على المجال  $[3, +\infty[$

الحل :

$$f(x) = -x + (\sqrt[3]{3x-1})^2$$

1-1 تحديد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$  :

$$x \in D_f \Leftrightarrow 3x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

$$D_f = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$$

(ب) لكل  $x \in D_f$  لدينا :

$$f(x) = -x + (\sqrt[3]{3x-1})^2$$

$$= x \left(-1 + \frac{(\sqrt[3]{3x-1})^2}{x}\right)$$

$$= x \left(-1 + \sqrt[3]{\frac{(3x-1)^2}{x^3}}\right) \quad \left(x \geq \frac{1}{3}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-1 + \sqrt[3]{\frac{(3x-1)^2}{x^3}}\right) : \text{استنتاج}$$

$$= -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x-1)^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x} = 0 \text{ لأن } \right)$$

2-1 لكل  $x$  من  $D_f - \left\{\frac{1}{3}\right\}$  :

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{1}{3}\right)}{x - \frac{1}{3}} = \frac{-x + (\sqrt[3]{3x-1})^2 + \frac{1}{3}}{x - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{-x + \frac{1}{3} + \frac{(\sqrt[3]{3x-1})^2}{x - \frac{1}{3}}}{x - \frac{1}{3}}$$

$$= -1 + 3 \frac{(\sqrt[3]{3x-1})^2}{3x-1}$$

$$= -1 + 3 \sqrt[3]{\frac{(3x-1)^2}{(3x-1)^3}} \quad (3x-1 > 0)$$

$$= -1 + 3 \sqrt[3]{\frac{1}{3x-1}}$$

$$\frac{1}{3} < x \leq 3 \Leftrightarrow 0 < 3x-1 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3x-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{3x-1}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{8}{3x-1} \geq 0$$

إن  $f$  تزايدية على المجال  $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$

\* جنول تعبرات  $f$  :

|        |               |                |                         |
|--------|---------------|----------------|-------------------------|
| $x$    | $\frac{1}{3}$ | 3              | $+\infty$               |
| $f(x)$ |               | +              | ( ) -                   |
| $f(x)$ |               | $-\frac{1}{3}$ | $1 \rightarrow -\infty$ |

3- نسين أن المعادلة  $x^3 - (3x-1)^2 = 0$  تقبل حلين على المجال  $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right]$  :

$$\text{المعادلة تكافئ } x^3 = (3x-1)^2$$

$$\text{تكافئ } x = \sqrt[3]{(3x-1)^2}$$

$$\text{تكافئ } \left(\forall x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right]; -x + (\sqrt[3]{3x-1})^2 = 0\right)$$

$$\text{تكافئ } f(x) = 0$$

في المجال  $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$  ،  $f$  متصلة وتزايدية قطعاً  $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot f(3) < 0$

إن حسب مبرهنة القيم الوسيطة ، المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  بحيث  $\frac{1}{3} < \alpha < 3$

في المجال  $[3, +\infty[$  ،  $f$  متصلة وتناقصية قطعاً إذن  $f$  تقابل من  $[3, +\infty[$  إلى  $]-\infty, 1]$  و  $f([3, +\infty[) = ]-\infty, 1]$  و  $0 \in ]-\infty, 1]$  إذن يوجد عنصر وحيد  $\beta$  من  $[3, +\infty[$  بحيث  $f(\beta) = 0$  :



# المتتاليات العددية

معارف أساسية

1- نهاية المتتالية الهندسية  $(q^n)$  :

خاصية :

ليكن  $q$  عددا حقيقيا

\* إذا كان  $q > 1$  فإن  $\lim q^n = +\infty$

\* إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim q^n = 0$

\* إذا كان  $q = 1$  فإن  $\lim q^n = 1$

\* إذا كان  $q \leq -1$  فإن المتتالية  $(q^n)$  لا تقبل نهاية .

2- توسيع العمليات على النهايات :

نقبل جميع العمليات الآتية. لتكن  $(U_n)$  و  $(V_n)$  متتاليتين و  $\ell$  و  $\ell'$  عددين حقيقيين.

النمابة والجمع :

|                  |                |           |           |           |           |                |
|------------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| $\lim U_n$       | $\ell$         | $\ell$    | $\ell$    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$      |
| $\lim V_n$       | $\ell'$        | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$      |
| $\lim U_n + V_n$ | $\ell + \ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | الشكل غير محدد |

النمابة والضرب :

|                  |              |            |            |            |            |           |           |           |                |
|------------------|--------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|----------------|
| $\lim U_n$       | $\ell$       | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0              |
| $\lim V_n$       | $\ell'$      | $+\infty$  | $+\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $\infty$       |
| $\lim (U_n V_n)$ | $\ell \ell'$ | $+\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | الشكل غير محدد |

النمابة والخارج :

|                        |                |          |          |          |          |                |
|------------------------|----------------|----------|----------|----------|----------|----------------|
| $\lim U_n$             | $\ell$         | $\ell$   | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0              |
| $\lim V_n$             | $\ell' \neq 0$ | $\infty$ | $\ell$   | 0        | $\infty$ | 0              |
| $\lim \frac{U_n}{V_n}$ | $\ell / \ell'$ | 0        | $\infty$ | $\infty$ |          | الشكل غير محدد |

### 3- المتتالية المتقاربة :

#### تعريف :

- \* نقول إن متتالية متقاربة إذا كانت تقبل نهاية منتهية
- \* نقول إن متتالية متباعدة إذا كانت غير متقاربة

#### خاصات :

- \* كل متتالية تزايدية ومكبورة تكون متقاربة
- \* كل متتالية تناقصية ومصغورة تكون متقاربة

نتيجة :

- \* كل متتالية تناقصية وموجبة تكون متقاربة
- \* كل متتالية تزايدية وسالبة تكون متقاربة

### 4- النهايات والترتيب :

#### مصاديق تقارب متتالية :

لنكن  $(U_n)_{n \geq p}$  و  $(V_n)_{n \geq p}$  و  $(W_n)_{n \geq p}$  متتاليات عددية و  $\ell$  عددا حقيقيا

- \* إذا كان  $V_n \leq U_n$  لكل  $n \geq p$  وكان  $\lim V_n = +\infty$  فإن  $\lim U_n = +\infty$
- \* إذا كان  $U_n \leq V_n$  لكل  $n \geq p$  وكان  $\lim V_n = -\infty$  فإن  $\lim U_n = -\infty$
- \* إذا كان  $|U_n - \ell| \leq V_n$  لكل  $n \geq p$  وكان  $\lim V_n = 0$  فإن  $\lim U_n = \ell$
- \* إذا كان  $V_n \leq U_n \leq W_n$  لكل  $n \geq p$  وكان  $\lim V_n = \lim W_n = \ell$  فإن  $\lim U_n = \ell$

مثال 1 : لدينا  $\forall n \in \mathbb{N}; n-1 \leq n + \cos(n)$

بما أن  $\lim n-1 = +\infty$  فإن  $\lim n + \cos n = +\infty$

مثال 2 : إذا كان  $\left| U_n + \frac{1}{3} \right| \leq \frac{1}{2^n}$  لكل  $n \in \mathbb{N}$

وبما أن  $\lim \frac{1}{2^n} = 0$  فإن  $\lim U_n = -\frac{1}{3}$

#### خاصة :

لنكن  $(U_n)_{n \geq p}$  و  $(V_n)_{n \geq p}$  متتاليتين متقاربتين و  $U_n < V_n$  لكل  $n \geq p$  فإن  $\lim U_n \leq \lim V_n$  : نتيجة

- \* لنكن  $(U_n)$  متتالية متقاربة.
- \* إذا كانت  $(U_n)$  موجبة فإن  $\lim U_n \geq 0$
- \* إذا كانت  $(U_n)$  سالبة فإن  $\lim U_n \leq 0$



3. متتاليات من النوع  $U_{n+1} = f(U_n)$  ومتتاليات من النوع  $V_n = f(U_n)$

ومتتاليات من النوع  $U_{n+1} = f(U_n)$

خاصية:

تكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  بحيث  $f(I) \subset I$  و  $(U_n)_{n \geq 0}$  متتالية متصلة معرفة بحسابات

من العلاقة  $U_{n+1} = f(U_n)$  لكل  $n$  من  $N$

إذا كانت  $(U_n)_{n \geq 0}$  متقاربة فإن نهايتها  $\ell$  هي حل للمعادلة  $f(x) = x$  ( $x \in I$ )

مثال: نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي:  $U_0 = 1$  و  $U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n}$  لكل  $n$  من  $N$

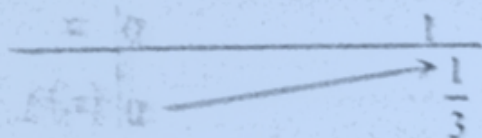
\* نرهن بالترجع أن:  $\forall n \in N; U_n > 0$

\* المتتالية  $(U_n)$  تناقصية لأن لكل  $n$  من  $N$ :  $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{2+U_n} - U_n = \frac{-U_n^2 - U_n}{2+U_n} < 0$

وبالتالي  $(U_n)$  متقاربة إلى عدد حقيقي  $\ell$ .

نلاحظ أن  $U_{n+1} = f(U_n)$  حيث  $f$  دالة متخاطبة جدول

تغيراتها ومنحنائها على المجال  $]0,1]$  هو كما يلي:



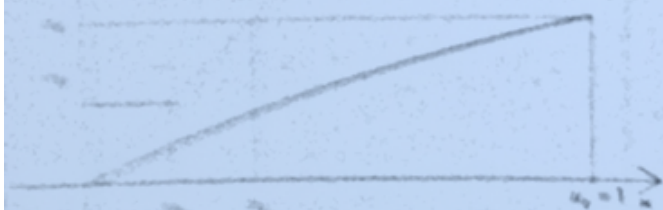
لدينا  $f$  متصلة على  $]0,1]$

ونتحقق  $f([0,1]) = [0, \frac{1}{3}] \subset ]0,1]$  و  $U_n \in ]0,1]$  لكل  $n$  من  $N$

وبما أن  $(U_n)$  متقاربة إلى  $\ell$  فإن  $\ell$  تحقق  $f(\ell) = \ell$

$$\frac{\ell}{\ell+2} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 + 2\ell = 0 \quad \begin{cases} \ell \neq -2 \\ \ell \in [0,1] \end{cases}$$

$$\lim U_n = 0 \Leftrightarrow \ell = 0 \text{ أو } \ell = -2$$



ومتتالية من النوع  $V_n = f(U_n)$

خاصية:

نقبل الخاصية:

إذا كانت  $(U_n)$  متتالية متقاربة إلى عدد حقيقي  $\ell$  و  $f$  دالة متصلة في  $\ell$  فإن المتتالية  $(V_n)$  المتعريف

$V_n = f(U_n)$  متقاربة ونهايتها هي  $f(\ell)$

# نصوص وحلول التمارين

## التمرين رقم 2:

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي

$$f(x) = \cos(2\pi x)$$

1- أ- بين أن  $f$  زوجية ودورية دورها 1

ب- ادرس تغيرات  $f$  وانشئ  $(Cf)$

ج- هل  $f$  تقبل نهاية عند  $+\infty$

2- نعتبر المتتالية  $(U_n)$  بحيث  $U_n = f(n)$

أ- بين أن  $(U_n)$  متتالية ثابتة

ب- استنتج  $\lim U_n$

## الحل:

1- أ- لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ;  $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \cos(2\pi(-x)) = \cos(-2\pi x)$$

$$= \cos 2\pi x = f(x)$$

إذن  $f$  دالة زوجية

ب- لدينا  $x+1 \in \mathbb{R}$  لكل  $x \in \mathbb{R}$

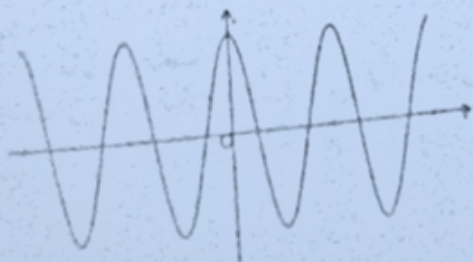
$$f(x+1) = \cos(2\pi(x+1))$$

$$= \cos(2\pi x + 2\pi) = \cos 2\pi x = f(x)$$

إذن  $f$  دالة دورية دورها 1

يكفي دراسة  $f$  على المجال  $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

ليكن  $x$  من  $I$  ؛  $f'(x) = -2 \sin 2\pi x$  ؛  $f'(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $I$



## التمرين رقم 1:

احسب النهايات التالية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 - n + 1 \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n^2-n+1} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n^3 - n^2 - n - 2} \quad (3)$$

## الحل:

1- نعتبر الدالة العددية  $f$  بحيث  $f(x) = 2x^2 - x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

ولدينا  $U_n = f(n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

2- نلاحظ أن  $U_n = f(n)$  حيث  $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

3- لدينا  $U_n = f(n)$  حيث  $f$  دالة عددية معرفة بـ :

$$f(x) = \sqrt{2x^3 - x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x^2 - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$



### تمرين رقم 2 :

جـ- من خلال التمثيل المبياني لـ  $f(x)$  نلاحظ أن  $f(x)$  ليست لها نهاية عند ما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$   
 2- أ- لدينا  $(\forall x \in \mathbb{N}) : \cos(2\pi x) = 1$   
 ومنه  $f(x) = 1$  لكل  $x$  من  $\mathbb{N}$

ب-  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

### التمرين رقم 3:

احسب النهايات

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - 2^n$

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}$

(3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{n-1}}$

(4) ناقش حسب قيم  $\alpha$  من  $\mathbb{R}$  النهائية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^n \alpha$

### التمرين رقم 4:

احسب النهايتين :

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2\sqrt[3]{n} + 3\sqrt[4]{n}$

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}}$

### الحل :

-1

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2\sqrt[3]{n} + 3\sqrt[4]{n}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} - 2n^{1/3} + 3n^{1/4}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} \left( 1 - 2\frac{n^{1/3}}{n^{1/2}} + 3\frac{n^{1/4}}{n^{1/2}} \right)$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} \left( 1 - 2n^{-1/6} + 3n^{-1/4} \right)$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt[6]{n}} + \frac{3}{\sqrt[4]{n}} \right) = +\infty$

-2

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}} + \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[4]{n}}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{\frac{n^3}{n}} + \sqrt[4]{\frac{n^2}{n}}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{n^2} + \sqrt[4]{n} = +\infty$

### الحل :

(1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n - 2^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left( 1 - \frac{2^n}{3^n} \right)$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \right)^n \right) = +\infty$

لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0$  ( $-1 < \frac{2}{3} < 1$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n \left( 1 + \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)}{5^n \left( 1 - \left( \frac{2}{5} \right)^n \right)}$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \left( \frac{2}{5} \right)^n}{1 - \left( \frac{2}{5} \right)^n} = 1$

لأن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{5} \right)^n = 0$  ( $-1 < \frac{2}{5} < 1$ )

(3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+2}}{2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n \times 3^2}{2^n \times \frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^n \times 18 = +\infty$

لأن  $1 < \frac{3}{2}$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{2} \right)^n = +\infty$

د- بين أن  $(U_n)$  متقاربة

**الحل :**

1- ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right) - \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

إذن  $(U_n)$  تزايدية قطعاً

2- أ- ليكن  $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$   $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$   $\Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

ب- لدينا حسب السؤال (1) أ-

$$\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$$

$$\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2 \times 1} \quad \text{من أجل } k=2$$

$$\frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{3 \times 2} \quad \text{من أجل } k=3$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \text{من أجل } k=n$$

نجمع طرفاً بطرف ونحصل على ما يلي :

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

إذن :  $U_n \leq V_n$   $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

ج- لدينا  $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$   $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\frac{1}{2 \times 1} = 1 - \frac{1}{2} \quad \text{فإن } k=2$$

$$\frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \quad \text{فإن } k=3$$

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{فإن } k=n$$

$$\frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$V_n = 2 - \frac{1}{n}$$

د- لدينا  $U_n \leq V_n$  و  $V_n \leq 2$  ومنه  $U_n \leq 2$  إذن  $(U_n)$  مكبورة بالعند 2. وبما أنها تزايدية فهي متقاربة

## التمرين رقم 5:

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

\* حدد  $\lim U_n$

**الحل :**

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  لدينا

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \sqrt{1} \leq \sqrt{n} \\ \sqrt{2} \leq \sqrt{n} \\ \sqrt{3} \leq \sqrt{n} \\ \vdots \\ \sqrt{n-1} \leq \sqrt{n} \\ \sqrt{n} \leq \sqrt{n} \end{array}$$

نجمع المتفاوتات طرفاً بطرف ونحصل على ما يلي :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} \leq U_n \quad \text{ومنه } n \times \frac{1}{\sqrt{n}} \leq U_n$$

بما أن  $\lim \sqrt{n} = +\infty$  فإن  $\lim U_n = +\infty$

## التمرين رقم 6:

نعتبر المتتالية  $(U_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :

$$U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

1- ادرس رتبة  $(U_n)$

2- نعتبر المتتالية  $(V_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي :

$$V_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}$$

- تحقق أن :  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$   $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

ب- بين أن :  $U_n \leq V_n$   $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ج- بين أن  $V_n = 2 - \frac{1}{n}$  (لاحظ أن  $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ )



## التمرين رقم 7:

A- نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-6\}$  بما يلي:

$$f(x) = \frac{8x+3}{x+6}$$

1- اكتب جدول تغيرات  $f$  وحدد  $f([1,3])$

2- نعتبر المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بما يلي:

$$U_1 = \frac{1}{2} \text{ و } U_{n+1} = f(U_n) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

أ- بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 < U_n < 3$

ب- بين أن  $(U_n)$  تزايدية قطعاً ثم استنتج أن  $(U_n)$

متقاربة

ج- حدد نهاية  $(U_n)$

B- نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بما يلي:

$$g(x) = \frac{x-3}{x+1}$$

1- بين أن  $g$  متصلة في 3

2- نعتبر المتتالية  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي  $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$

بين أن  $(V_n)$  متقاربة وحدد نهايتها.

## الحل:

$$f'(x) = \frac{45}{(x+6)^2} > 0 \quad (1-A)$$

| x    | $-\infty$ | -6 | 1 | 3 | $+\infty$ |
|------|-----------|----|---|---|-----------|
| f(x) | +         |    | + | + | +         |
| f(x) |           |    |   | 3 |           |

$f$  تزايدية قطعاً ومتصلة على  $]1,3[$

$$f(]1,3[) = \left] \frac{11}{7}, 3 \right[ \subset ]1,3[$$

2- من أجل  $n=1$   $U_1 = \frac{14}{13} \in ]1,3[$

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  نفرض أن  $1 < U_n < 3$

$$\text{بما أن } U_n \in ]1,3[ \text{ و } f(]1,3[) \subset ]1,3[$$

فإن  $f(U_n) \in ]1,3[$  ومنه  $1 < U_{n+1} < 3$

إن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 < U_n < 3$

$$\text{ب- لدينا } U_1 = \frac{14}{13} \text{ و } U_2 = \frac{151}{92}$$

إن  $U_1 < U_2$

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  نفرض أن  $U_n < U_{n+1}$

وبما أن  $f$  تزايدية قطعاً على  $]1,3[$  فإن:

$$f(U_n) < f(U_{n+1})$$

إن  $U_{n+1} < U_{n+2}$

ومنه  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : U_n < U_{n+1}$  وبالتالي  $(U_n)$  تزايدية

وبما أن  $(U_n)$  مكبورة بالعدد 3 فإن  $(U_n)$  متقاربة إلى عدد  $\ell$ .

ج- لدينا  $f$  متصلة على  $]1,3[$  و  $f(]1,3[) \subset ]1,3[$

و  $U_n \in ]1,3[$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  و  $(U_n)$  متقاربة إلى  $\ell$

$$\text{فإن } f(\ell) = \ell \Leftrightarrow \frac{8\ell+3}{\ell+6} = \ell$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ell \neq -6 \\ \ell \in ]1,3[ \end{cases} \ell^2 - 2\ell - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 3 \text{ أو } \ell = -1 \text{ ومنه } \lim U_n = 3 \text{ و } (-1 \notin ]1,3[)$$

B- 1  $g$  متخاطة فهي متصلة في كل نقطة من

$\mathbb{R} - \{-1\}$

إن  $g$  متصلة في 3

$$2- \text{ لدينا } V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$$

بما أن  $g$  متصلة في 3 فإن  $(V_n)$  متقاربة ونهايتها هي

$$g(3) = 0$$

## التمرين رقم 8:

لتكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بما يلي:

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2U_n + 2} \text{ و } U_0 = 2$$

1- نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]-1, +\infty[$  على  $f(x) = \frac{x}{2x+2}$

أ- بين أن لكل  $x > 0$  لدينا  $f(x) > 0$

ب- استنتج باستعمال برهان بالترجع أن  $U_n > 0$  لكل  $n \in \mathbb{N}$

2- أ- بين أن  $f(x) < \frac{x}{2}$  ( $\forall x > 0$ )

ب- استنتج أن  $U_n < \frac{1}{2}U_{n-1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

3- بين بالترجع أن  $U_n < \frac{1}{2^{n-1}}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

4- استنتج نهاية المتتالية  $(U_n)$

## الحل:

1- أ- لدينا  $x > 0$  إذن  $2x+2 > 0$

$$\text{ومنه } f(x) = \frac{x}{2x+2} > 0$$

إذن لكل  $x > 0$  لدينا  $f(x) > 0$

ب- لدينا من أجل  $n=0$  :  $U_0 = 2 > 0$

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  نفترض أن  $U_n > 0$  ولنبين أن  $U_{n+1} > 0$

لدينا  $U_{n+1} = f(U_n)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

حسب السؤال 1-أ)

بما أن  $U_n > 0$  فإن  $f(U_n) > 0$  إذن  $U_{n+1} > 0$

إذن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $U_n > 0$

2- أ- ليكن  $x > 0$

لدينا  $2 < 2x+2$  (لأن  $x > 0$ )

$$\text{إذن } \frac{1}{2x+2} < \frac{1}{2}$$

بما أن  $x > 0$  فإن  $\frac{x}{2x+2} < \frac{x}{2}$

إذن لكل  $x > 0$  فإن  $f(x) < \frac{x}{2}$

ب- لدينا لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $U_n = f(U_{n-1})$

بما أن  $U_{n-1} > 0$  فإن  $U_n < \frac{1}{2}U_{n-1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

(حسب السؤال 2-أ)

إذن  $U_n < \frac{1}{2}U_{n-1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

3- من أجل  $n=1$

$$U_1 = \frac{U_0}{2U_0+2}$$

لدينا:

$$= \frac{2}{2 \times 2 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = 1$$

ولدينا  $1$

إذن  $U_1 \leq \frac{1}{2^{1-1}}$  عبارة صحيحة

ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لنفترض أن  $U_{n-1} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

ولنبين أن  $U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\text{لدينا } U_{n-1} \leq \frac{1}{2^{n-2}} \Rightarrow \frac{1}{2}U_{n-1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}U_{n-1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

وبما أن  $U_n \leq \frac{1}{2}U_{n-1}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ) (حسب السؤال 2-ب)

فإن  $U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

إذن  $U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ )

4- لدينا لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

إذن  $|U_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$  (لأن  $U_n > 0$ )

وبما أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$



## تمرين رقم 9:

تكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بما يلي:

$$U_{n+1} = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2} \text{ و } U_0 = 1$$

1- مـ في معلم متعامد ممنظم منحني الدالة  $f$  المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{7x+6}{x+2} \quad (U_n)$$

2- بين بالترجع أن  $U_n > 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

$$3- \text{ بين أن } |U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_n - 6|$$

4- استنتج بالترجع أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); |U_n - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 6|$$

5- بين أن  $\lim U_n = 6$

## الحل:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2} \text{ و } U_0 = 1$$

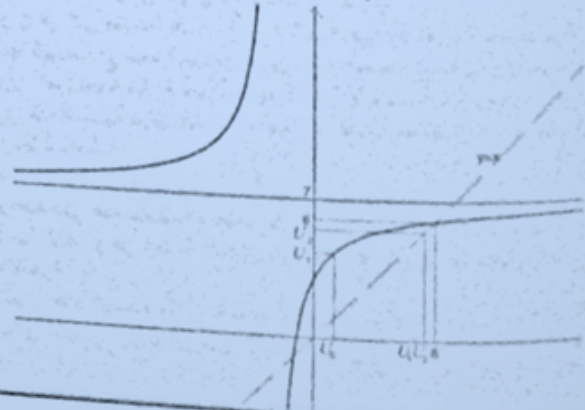
$$f(x) = \frac{7x+6}{x+2} \quad -1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

| x      | $-\infty$ | -2 | 0 | 6 | $+\infty$ |
|--------|-----------|----|---|---|-----------|
| $f(x)$ | +         |    | + |   |           |
| $f(x)$ |           |    |   |   |           |

ومنه  $f$  هنلول مركزه  $\Omega(-2, 7)$



2- لدينا من أجل  $n=0$ :  $U_1 > 0$

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  نفترض أن  $U_n > 0$  ولنبين أن  $U_{n+1} > 0$

$$U_{n+1} = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2} > 0 \quad (U_n > 0)$$

وبالتالي  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 0$

$$3- \text{ لنبين أن } |U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_n - 6|$$

لدينا لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ :

$$U_{n+1} - 6 = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2} - 6$$

$$= \frac{U_n - 6}{U_n + 2}$$

$$\text{ومنه } (\forall n \in \mathbb{N}); |U_{n+1} - 6| = \frac{|U_n - 6|}{|U_n + 2|}$$

نعلم أن  $U_n > 0$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

ومنه  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n + 2 > 2$

$$\text{إن } (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{U_n + 2} < \frac{1}{2}$$

$$\text{وبالتالي } (\forall n \in \mathbb{N}); |U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_n - 6|$$

$$4- \text{ لنستنتج أن: } |U_n - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 6|$$

$$\text{نعلم أن } (\forall n \in \mathbb{N}); |U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_n - 6|$$

$$\text{إن } (k \in \mathbb{N} \text{ و } \forall k \in [0, n-1]); |U_{k+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_k - 6|$$

$$\text{من أجل } |U_1 - 6| \leq \frac{1}{2} |U_0 - 6| \quad ; \quad k=0$$

$$|U_2 - 6| \leq \frac{1}{2} |U_1 - 6| \quad ; \quad k=1$$

$$\vdots$$

$$|U_n - 6| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - 6| \quad ; \quad k=n-1$$

بضرب المتفاوتات طرفاً بطرف نجد:

$$(\forall n \in \mathbb{N}); |U_n - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 6|$$

لثمة حل التمرين رقم 9 :

5- بما أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); |U_n - 6| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 6|$

فإن  $|U_n - 6| \leq 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن  $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right); \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

فإن  $\lim U_n = 6$

### التمرين رقم 10:

لنكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بما يلي :

$U_0 = 1$  و  $U_{n+1} = U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

1- بين أن  $(U_n)$  متتالية تزايدية وموجبة

2- بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} > U_n + \frac{n}{2}$

3- استنتج  $\lim U_n$

### الحل :

1- لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 0$

من أجل  $n=0$  لدينا  $U_0 > 0$  لأن  $U_0 = 1$

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  نفترض أن  $U_n > 0$  إذن  $1+U_n > 0$

و  $1+2U_n > 0$  إذن  $\frac{1+U_n}{1+2U_n} > 0$

ومنه  $U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n} > 0$

إذن  $U_{n+1} > 0$

ومنه  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 0$

\* لنبين أن  $(U_n)$  تزايدية :

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  لدينا  $U_{n+1} - U_n = \frac{1+U_n}{1+2U_n} > 0$

ومنه  $(U_n)$  تزايدية .

2- لنبين بالترجع أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > \frac{n}{2}$

من أجل  $n=0$  لدينا  $U_0 > \frac{0}{2}$  صحيح لأن  $U_0 = 1$

لكل  $n \in \mathbb{N}$  نفترض أن  $U_n > \frac{n}{2}$  لنبين أن  $U_{n+1} > \frac{n+1}{2}$

لدينا  $U_{n+1} = U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n}$

ولدينا  $\frac{1+U_n}{1+2U_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+2U_n-1-2U_n}{1+2U_n}$

$= \frac{1}{1+2U_n} > 0$

لأن  $U_n > 0$

ومنه  $\frac{1+U_n}{1+2U_n} > \frac{1}{2}$

وبما أن  $U_n > \frac{n}{2}$  (الفرض للترجع)

إذن  $U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$

أي  $U_{n+1} > \frac{n+1}{2}$

ومنه  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > \frac{n}{2}$

3- لدينا  $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > \frac{n}{2}$

وبما أن  $\lim \frac{n}{2} = +\infty$  فإن  $\lim U_n = +\infty$

#### الرياضيات

يعتبر إقليدس المعلم اليوناني الذي استطاع أن يجمع ثلثات ما تم إنجازها في مجال الرياضيات بعد اليونان وأسس عليه سقراط هندسياً يسمى بالهندسة الإقليدية . وينتسب إليه هذا الرياضي بعد إقليدس على :

أ- التعريفات : هي التي يتم بواسطتها وضع وتحديد المفاهيم والتصورات الأولية التي تشكل المادة الخام لدراسة الرياضيات

ب- المسلمات : وهي القضايا التي يفرضها العالم ويصعبها كأسس منطقية منه في عملية البرهان دون أن يقدم عليها برهاناً

ج- البديهيات : وهي القضايا الواضحة التي نستند صدقها من ذاتها ولا تحتاج إلى برهان

الهندسة الإقليدية وظهور الهندسات اللاإقليدية :

كان ينظر إلى هندسة إقليدس وإلى نتائجها على أنها صائفة صدقاً مطلقاً وأنها الهندسة الوحيدة الممكنة إلا أن كون المسلمة الخامسة لإقليدس والتي تقول : "من نقطة خارج خط مستقيم لا يمر إلا خط مستقيم وحيد يوازيه"

كون هذه المسلمة لم يتم البرهان صدقها منذ البداية جعلها موضعاً موضع شك من طرف العلماء .

وعندما حاول كل من ريمان (الألماني) ولوبشفسكي (الروسي)

البرهان على هذه المسلمة ، خلص كل منهما إلى هندسة أخرى تختلف عن هندسة الأخر وعن هندسة إقليدس . وسميت هذه الهندسات بالهندسات اللاإقليدية .

وظهور هذه الهندسات كل له دوره الأساسي في توجيه أول صيرورة التفكير المنطقي لمبادئ ونتائج البرهان الاستدلالي في الرياضيات



## التمرين رقم 11:

لنكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة بـ

$$U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \text{ و } U_0 = 0$$

1- مثل في معلم متعاود ممنظم  $(n, \bar{f}, \bar{f})$  منحنى الدالة  $f$

$$f = \sqrt{2+x}$$

والحدود الأربع الأولى للمتتالية  $(U_n)$

2- بين بالترجع أن  $0 \leq U_n < 2$   $\forall n \in \mathbb{N}$

3- لنكن المتتالية  $(V_n)$  المعرفة بـ  $V_n = 2 - U_n$  لكل  $n \in \mathbb{N}$

أ- ما هي إشارة  $V_n$  ؟

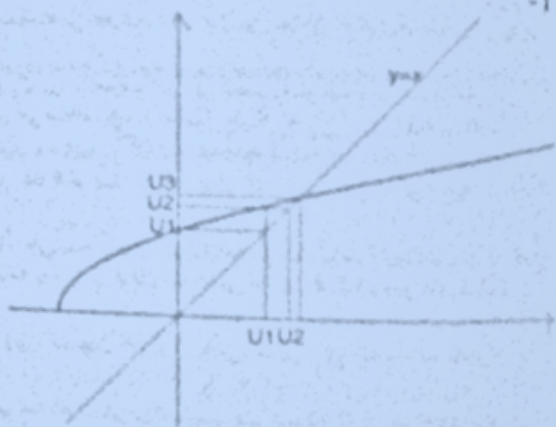
$$\text{ب- بين أن : } \forall n \in \mathbb{N}; \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{ج- بين بالترجع أن : } V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$$

د- استنتج نهاية المتتالية  $(V_n)$  ثم نهاية المتتالية  $(U_n)$

## الحل :

1-



2- بين بالترجع أن  $0 \leq U_n < 2$   $\forall n \in \mathbb{N}$

من أجل  $n=0$  لدينا  $0 \leq U_0 < 2$  لأن  $U_0 = 0$

لنكن  $n \in \mathbb{N}$  نفترض أن  $0 \leq U_n < 2$  ولنبين أن

$$0 \leq U_{n+1} < 2$$

$$\text{لدينا } 0 \leq U_n < 2 \Rightarrow 2 \leq U_n + 2 < 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{U_n + 2} < 2$$

$$\text{بما أن } 0 \leq \sqrt{2} < 2 \text{ فإن } 0 \leq U_{n+1} < 2$$

$$\text{وهو } \forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq U_n < 2$$

3- أ- لنكن المتتالية  $(V_n)$  بحيث  $V_n = 2 - U_n$

$$\text{بما أن } \forall n \in \mathbb{N}; U_n < 2$$

$$\text{فإن } \forall n \in \mathbb{N}; 0 < 2 - U_n$$

$$\text{إذن } \forall n \in \mathbb{N}; 0 < V_n$$

وبالتالي  $V_n$  موجبة.

$$\text{ب- لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}); 2 \leq 2 + \sqrt{2 + U_n}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{1}{2 + \sqrt{2 + U_n}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{2 - \sqrt{2 + U_n}}{(2 + \sqrt{2 + U_n})(2 - \sqrt{2 + U_n})} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{2 - \sqrt{2 + U_n}}{4 - 2 - U_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{2 - U_{n+1}}{2 - U_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}); \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{وبالتالي } \forall n \in \mathbb{N}; \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{ج- لنبين بالترجع أن : } V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{من أجل } n=0 \text{ لدينا } V_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ لأن } V_0 = 2 - U_0 = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

لنكن  $n \in \mathbb{N}$  نفترض أن  $V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  ولنبين أن

$$V_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{لدينا (1) } \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow V_{n+1} \leq \frac{1}{2} V_n$$

$$\text{وبما أن (2) } \frac{1}{2} V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ فإن } \forall n \in \mathbb{N}; V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{ومن (1) و (2) نستنتج أن } V_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{إذن } \forall n \in \mathbb{N}; V_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

