وفق البرنامج الجديد لوزارة التربية الوطنية

سلسلة $\frac{20^+}{20}$

للسنة الثالثة ثانوي إعدادي

الأسدس الثاني

$\frac{20^+}{20}$

لجميع المواد

- الرياضيات
- علوم الحياة والأرض
- العلوم الفيزيائية
- اللغة العربية
- الإجتماعيات
- التربية الإسلامية
- الفرنسية
- الإنجليزية

3

- ✔ ملخصات دروس مركزة
- ✔ تمارين محلولة
- ✔ فروض واختبارات جهوية محلو
- ✔ تمارين أولمبياد الرياضيات

مادة الرياضيات

1 المعادلات

معارف أساسية

a و b و c و d أعداد حقيقية.

- $a=b$ يعني أن : $a+c=b+c$
- إذا كان $ab=c$ و $b\neq 0$ فإن: $a=\frac{c}{b}$
- $ab=0$ يعني أن: $a=0$ أو $b=0$
- إذا كان $b\neq 0$ و $d\neq 0$ فإن: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يعني $a\times d=b\times c$

■ حل المعادلة: $ax+b=0$

$ax+b=0$

- $a\neq 0$: $x=-\frac{b}{a}$ ($-\frac{b}{a}$ هو الحل الوحيد)
- $a=0$:
  - $b=0$ (جميع الأعداد الحقيقية هي حلول)
  - $b\neq 0$ (المعادلة ليس لها حلولا)

■ معادلة على شكل: $(ax+b)(cx+d)=0$

حلول المعادلة: $(ax+b)(cx+d)=0$

هي حلول كل من المعادلتين:

$ax+b=0$ و $cx+d=0$

■ معادلة على شكل: $x^2=a$

- إذا كان $a=0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو العدد 0.
- إذا كان $a>0$ فإن المعادلة تقبل حلين وهما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
- إذا كان $a<0$ فإن المعادلة لاتقبل أي حل.

تمارين تطبيقية

تمرين 1

حل المعادلات التالية:

- $3x-7=5$
- $-5x-6=-2x+3$
- $2(x-3)+3(x-1)=2x-3$
- $3(2x-1)-7x=x-1$

تمرين 2

حل المعادلتين التاليتين:

- $x\sqrt{3}+\sqrt{2}=x\sqrt{2}+\sqrt{3}$
- $\sqrt{3}(x-1)+1=(1-\sqrt{3})x-1$

تمرين 3

حل المعادلات التالية:

- $(3x-7)(7x-3)=0$
- $(2x+\sqrt{3})(x\sqrt{3}-\sqrt{12})=0$
- $3x(2x-3)\left(\frac{7}{3}x-\frac{1}{2}\right)=0$
- $x^2-9=0$
- $x^2+12=4\sqrt{3}x$

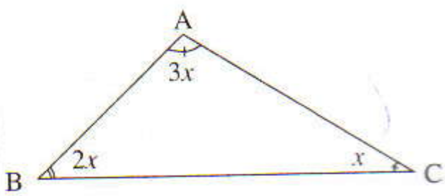
تمرين 4

حل المعادلات التالية:

- $\frac{x}{7}=\frac{x+1}{4}$
- $\frac{x-1}{2}=\frac{x+3}{3}-\frac{x+5}{6}$
- $\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

تمرين 5

لاحظ الشكل جانبه



x قياس الزاوية بالدرجات.

1) احسب x.

2) حدد طبيعة المثلث ABC.

تمارين لتقوية التعلمات

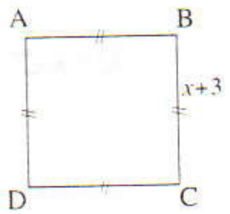
تمرين 6

حل المعادلات التالية:

- $1-(2x-1)-3(x-2)-4(x-3)=0$
- $(x+3)(x+2)+(x+3)(x+1)=0$
- $(3x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{3})=(3x+\sqrt{7})(x-\sqrt{27})$
- $(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})=(\sqrt{3}-x)(x-5)$
- $(3x-5)^2=(x-1)^2$
- $x^2+6x-7=0$

تمرين 7

لاحظ الشكل أسفله:



❋ حدد قيمة العدد x لكي تكون مساحة المربع ABCD تساوي $64cm^2$

تمرين 8

حل المعادلات التالية:

- $\sqrt{3}(x-1)+3(x-\sqrt{2})=\sqrt{12}x-\sqrt{8}$
- $\frac{\sqrt{3}(x-1)}{2}-\frac{\sqrt{2}(x+1)}{3}=\sqrt{27}+\sqrt{8}$
- $\sqrt{\frac{3}{5}}(x+1)+\sqrt{\frac{5}{3}}(x-1)=\frac{1}{15}$

تمرين 9

تقاسم ثلاثة أشخاص مبلغ 35500 درهما فيما بينهم.

إذا علمت أن نصيب الثاني يفوق نصيب الأول بمقدار 3000 درهما و أن نصيب الثالث ينقص عن نصف نصيب الثاني بمقدار 500 درهما.

✳ فما هو نصيب كل واحد منهم؟

تمرين 10

1) انشر وبسط: $(x+1)^2-4$

2) عمل: $(x+1)^2-4$

3) حدد أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية علما أن هذه الأطوال أعداد صحيحة طبيعية متتابعة.

تمارين توليفية

تمرين 11

انطلق راكب دراجة على الساعة الواحدة بعد الزوال من مدينة A قاصدا مدينة B بسرعة متوسطة قدرها 30km/h وعند وصوله إلى B استراح لمدة 15mn ثم عاد إلى A بسرعة متوسطة قدرها 20km/h فوصل إليها على الساعة السادسة مساءا.

* احسب المسافة بين المدينتين A و B.

تمرين 12

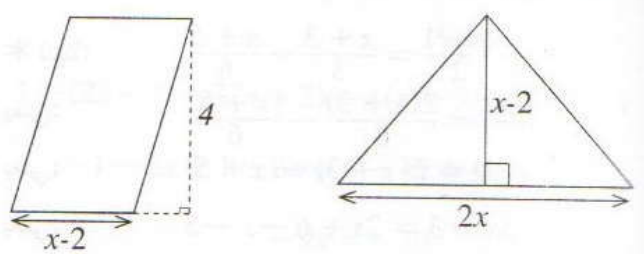
المسافة بين مدينتين A و B تساوي 400km.

غادرت شاحنة المدينة A على الساعة الثامنة متوجهة إلى المدينة B بسرعة 80km/h وفي نفس الوقت غادرت سيارة المدينة B متوجهة إلى A بسرعة 120km/h.

في أي ساعة تلتقي السيارة و الشاحنة؟

تمرين 13

لاحظ الشكلين أسفله:



حدد قيمة العدد x لكي تكون ساحة المثلث مساوية لمساحة متوازي الأضلاع.

تمرين 14

جداء عددين موجبين يساوي 972، مجموع مربعيهما يساوي 3240

* احسب مجموع هاذين العددين

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

أحل المعادلات التالية:

• لدينا: $3x-7=5$

يعني: $3x=5+7$

يعني: $x=\frac{12}{3}$

إذن: $\boxed{x=4}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد 4.

• لدينا: $-5x-6=-2x+3$

يعني: $-5x+2x=3+6$

يعني: $-3x=9$

إذن: $\boxed{x=\frac{9}{-3}=-3}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد 3-.

• لدينا: $2(x-3)+3(x-1)=2x-3$

يعني: $2x-6+3x-3=2x-3$

يعني: $\cancel{2x}+3x-\cancel{2x}=-\cancel{3}+6+\cancel{3}$

يعني: $3x=6$

إذن: $\boxed{x=\frac{6}{3}=2}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد 2

• لدينا: $3(2x-1)-7x=x-1$

يعني: $6x-3-7x=x-1$

يعني: $6x-7x-x=-1+3$

يعني: $-2x=2$

إذن: $\boxed{x=\frac{2}{-2}=-1}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد 1-

تمرين 2

أحل المعادلات التالية:

* لدينا: $x\sqrt{3}+\sqrt{2}=x\sqrt{2}+\sqrt{3}$

يعني: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

أي: $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\boxed{x=1}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد 1.

* لدينا: $\sqrt{3}(x-1)+1=(1-\sqrt{3})x-1$

يعني: $\sqrt{3}x-\sqrt{3}+1=(1-\sqrt{3})x-1$

يعني: $\sqrt{3}x-(1-\sqrt{3})x=\sqrt{3}-1-1$

يعني: $(\sqrt{3}-1+\sqrt{3})x=\sqrt{3}-2$

يعني: $(2\sqrt{3}-1)x=\sqrt{3}-2$

يعني: $x=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}-1}$

$$x=\frac{(\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}=\frac{6+\sqrt{3}-4\sqrt{3}-2}{(2\sqrt{3})^2-1^2}$$

إذن: $\boxed{x=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{11}}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{11}$

* لدينا: $x^2-9=0$

يعني: $(x-3)(x+3)=0$

يعني: $x-3=0$ أو $x+3=0$

إذن: $\boxed{x=-3}$ أو $\boxed{x=3}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان 3- و 3.

* لدينا: $x^2+12=4\sqrt{3}x$

يعني: $x^2-4\sqrt{3}x+12=0$

يعني: $x^2-2\times 2\sqrt{3}\times x+(2\sqrt{3})^2=0$

يعني: $(x-2\sqrt{3})^2=0$

$x-2\sqrt{3}=0$

إذن: $\boxed{x=2\sqrt{3}}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد $2\sqrt{3}$.

تمرين 3

أحل المعادلات التالية:

* لدينا: $(3x-7)(7x-3)=0$

يعني: $7x-3=0$ أو $3x-7=0$

يعني: $7x=3$ أو $3x=7$

إذن: $\boxed{x=\dfrac{3}{7}}$ أو $\boxed{x=\dfrac{7}{3}}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان $\dfrac{3}{7}$ و $\dfrac{7}{3}$

* لدينا: $(2x+\sqrt{3})(x\sqrt{3}-\sqrt{12})=0$

يعني: $x\sqrt{3}-\sqrt{12}=0$ أو $2x+\sqrt{3}=0$

يعني: $x\sqrt{3}=\sqrt{12}$ أو $2x=-\sqrt{3}$

$x=\dfrac{\cancel{\sqrt{3}}\times\sqrt{4}}{\cancel{\sqrt{3}}}$ أو $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

إذن: $x=2$ أو $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان 2 و $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

* لدينا: $3x(2x-3)\left(\dfrac{7}{3}x-\dfrac{1}{2}\right)=0$

يعني: $\dfrac{7}{3}x-\dfrac{1}{2}=0$ أو $2x-3=0$ أو $3x=0$

إذن: $\boxed{x=\dfrac{3}{14}}$ أو $\boxed{x=\dfrac{3}{2}}$ أو $x=0$

ومنه فإن حلول هذه المعادلة هي الأعداد 0 و $\dfrac{3}{2}$ و $\dfrac{3}{14}$

تمرين 4

أحل المعادلات التالية:

* لدينا: $\dfrac{x}{7}=\dfrac{x+1}{4}$

يعني: $\dfrac{4x}{28}=\dfrac{7(x+1)}{28}$

يعني: $4x=7x+7$

أي: $4x-7x=7$

$-3x=7$

إذن: $\boxed{x=-\dfrac{7}{3}}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد $-\dfrac{7}{3}$

* لدينا: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{x+3}{3}-\dfrac{x+5}{6}$

يعني: $\dfrac{3(x-1)}{6}=\dfrac{2(x+3)}{6}-\dfrac{(x+5)}{6}$

يعني: $3(x-1)=2(x+3)-(x+5)$

يعني: $3x-3=2x+6-x-5$

يعني: $3x-2x+x=6-5+3$

يعني: $2x=4$

يعني: $x=\dfrac{4}{2}$

إذن: $\boxed{x=2}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد 2.

* لدينا: $\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

يعني: $6x = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

يعني: $6x = \sqrt{6}$

إذن: $\boxed{x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

تمرين 5

1) أحسب x:

نعلم أن مجموع قياسات زوايا مثلث تساوي $180°$.

إذن: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

ولدينا: $\hat{A} = 3x$ و $\hat{B} = 2x$ و $\hat{C} = x$

أي أن: $3x + 2x + x = 180°$

يعني: $6x = \dfrac{180°}{6}$

إذن: $x = 30°$

2) أحدد طبيعة المثلث ABC.

لدينا: $\hat{A} = 3x$ و $\hat{B} = 2x$ و $\hat{C} = x$ و $x = 30°$

إذن: $\hat{A} = 3 \times 30° = 90°$ و $\hat{B} = 2 \times 30° = 60°$

و $\hat{C} = 30°$ ومنه فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A.

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 6

أحل المعادلات التالية:

* لدينا: $1-(2x-1)-3(x-2)-4(x-3)=0$

يعني: $1-2x+1-3x+6-4x+12=0$

يعني: $-9x=-20$

$\boxed{x=\dfrac{-20}{-9}=\dfrac{20}{9}}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد $\dfrac{20}{9}$

* لدينا: $(x+3)(x+2)+(x+3)(x+1)=0$

يعني: $(x+3)[(x+2)+(x+1)]=0$

لدينا: $(x+3)(x+2+x+1)=0$

يعني: $(x+3)(2x+3)=0$

$2x+3=0$ أو $x+3=0$

$\boxed{x=-\dfrac{3}{2}}$ أو $\boxed{x=-3}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان $-\dfrac{3}{2}$ و -3.

* لدينا:

$$(3x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{3})=(3x+\sqrt{7})(x-\sqrt{27})$$

يعني:

$$(3x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{3})-(3x+\sqrt{7})(x-\sqrt{27})=0$$

يعني: $(3x+\sqrt{7})[(2x-\sqrt{3})-(x-\sqrt{27})]=0$

يعني: $(3x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{3}-x+3\sqrt{3})=0$

يعني: $(3x+\sqrt{7})(x+2\sqrt{3})=0$

يعني: $x+2\sqrt{3}=0$ أو $3x+\sqrt{7}=0$

إذن: $x=-2\sqrt{3}$ أو $x=-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ و $-2\sqrt{3}$

* لدينا: $(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})=(\sqrt{3}-x)(x-5)$

يعني: $(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-x)(x-5)=0$

يعني: $(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3})+(x-\sqrt{3})(x-5)=0$

يعني: $(x-\sqrt{3})(2x+\sqrt{3}+x-5)=0$

يعني: $(x-\sqrt{3})(3x+\sqrt{3}-5)=0$

يعني: $3x+\sqrt{3}-5=0$ أو $x-\sqrt{3}=0$

إذن: $\boxed{x=\dfrac{5-\sqrt{3}}{3}}$ أو $\boxed{x=\sqrt{3}}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان $\sqrt{3}$ و $\dfrac{5-\sqrt{3}}{3}$.

* لدينا: $(3x-5)^2=(x-1)^2$

يعني: $(3x-5)^2-(x-1)^2=0$

يعني: $(3x-5-x+1)(3x-5+x-1)=0$

يعني: $(2x-4)(4x-6)=0$

يعني: $4x-6=0$ أو $2x-4=0$

إذن: $\boxed{x = \frac{3}{2}}$ أو $\boxed{x = 2}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان 1 و 2.

* لدينا: $x^2 + 6x - 7 = 0$

يعني: $x^2 + 6x - 6 - 1 = 0$

يعني: $x^2 - 1 + 6x - 6 = 0$

$(x-1)(x+1) + 6(x-1) = 0$

يعني: $(x-1)[(x+1)+6] = 0$

يعني: $(x-1)(x+7) = 0$

يعني: $x - 1 = 0$ أو $x + 7 = 0$

إذن: $\boxed{x = -7}$ أو $\boxed{x = 1}$

ومنه فإن حلي هذه المعادلة هما العددان 7- و 1.

تمرين 7

* أحسب قيمة x:

لتكن S مساحة المربع ABCD.

إذن: $S = (x+3)^2$

ونعلم أن: $S = 64cm^2$

ومنه فإن: $(x+3)^2 = 64$

أي أن: $x + 3 = -\sqrt{64}$ أو $x + 3 = \sqrt{64}$

يعني: $x + 3 = -8$ أو $x + 3 = 8$

$x = -8 - 3$ أو $x = 8 - 3$

إذن: $x = -11$ أو $x = 5$

وبما أن: x يمثل مسافة.

فإن: x عدد موجب

وبالتالي فإن: $\boxed{x = 5}$

تمرين 8

أحل المعادلات التالية:

* لدينا: $\sqrt{3}(x-1) + 3(x - \sqrt{2}) = \sqrt{12}x - \sqrt{8}$

يعني: $\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 3x - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}$

يعني: $\sqrt{3}x + 3x - 2\sqrt{3}x = \sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}$

يعني: $(\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3})x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

يعني: $(3 - \sqrt{3})x = (\sqrt{3} + \sqrt{2})$

يعني: $\boxed{x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}}}$

$$x = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}$$

$$x = \frac{3\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3^2 - (\sqrt{3})^2}$$

إذن: $\boxed{x = \frac{3\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}}$

ومنه فإن:

حل هذه المعادلة هو العدد: $\frac{3\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}$

* لدينا: $\frac{\sqrt{3}(x-1)}{2} - \frac{\sqrt{2}(x+1)}{3} = \sqrt{27} + \sqrt{8}$

يعني: $\frac{3\sqrt{3}(x-1)}{6} - \frac{2\sqrt{2}(x+1)}{6} = \frac{6\sqrt{27} + 6\sqrt{8}}{6}$

$3\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2} = 18\sqrt{3} + 12\sqrt{2}$

$(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})x = 18\sqrt{3} + 12\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

يعني: $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})x = 21\sqrt{3} + 14\sqrt{2}$

يعني: $\boxed{x = \frac{21\sqrt{3} + 14\sqrt{2}}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}}$

يعني: $x = \frac{(21\sqrt{3} + 14\sqrt{2})(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}$

يعني: $x = \frac{189 + 42\sqrt{6} + 42\sqrt{6} + 56}{(3\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2}$

إذن: $\boxed{x = \frac{245 + 84\sqrt{6}}{19}}$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد $\frac{245 + 84\sqrt{6}}{19}$

* لدينا: $\sqrt{\frac{3}{5}}(x+1) + \sqrt{\frac{5}{3}}(x-1) = \frac{1}{15}$

يعني: $\sqrt{15}\left[\sqrt{\frac{3}{5}}(x+1) + \sqrt{\frac{5}{3}}(x-1)\right] = \sqrt{15} \times \frac{1}{15}$

$\sqrt{15} \times \sqrt{\frac{3}{5}}(x+1) + \sqrt{15} \times \sqrt{\frac{5}{3}}(x-1) = \frac{\sqrt{15}}{15}$

يعني: $\sqrt{\frac{45}{5}}(x+1) + \sqrt{\frac{75}{3}}(x-1) = \frac{\sqrt{15}}{15}$

يعني: $\sqrt{9}(x+1) + \sqrt{25}(x-1) = \frac{\sqrt{15}}{15}$

يعني: $3(x+1)+5(x-1)=\frac{\sqrt{15}}{15}$

يعني: $3x+3+5x-5=\frac{\sqrt{15}}{15}$

يعني: $8x=\frac{\sqrt{15}}{15}+2$

يعني: $8x=\frac{\sqrt{15}+30}{15}$

إذن: $x=\frac{\sqrt{15}+30}{15}\times\frac{1}{8}$

$$\boxed{x=\frac{\sqrt{15}+30}{120}}$$

ومنه فإن حل هذه المعادلة هو العدد $\frac{\sqrt{15}+30}{120}$

تمرين 9

*** اختيار المجهول:**

لتكن x نصيب الشخص الثاني

إذن: نصيب الشخص الأول هو : $x-3000$ ونصيب الشخص الثالث هو: $\frac{x}{2}-500$.

*** صياغة المعادلة:**

نعلم أن المبلغ الذي تقاسمه الأشخاص الثلاث هو: 35500.

إذن: $(x-3000)+x+\frac{x}{2}-500=35500$

*** حل المعادلة:**

لدينا: $(x-3000)+x+\frac{x}{2}-500=35500$

يعني أن: $x+x+\frac{x}{2}=35500+3000+500$

يعني: $\frac{2x+2x+x}{2}=39000$

يعني: $5x=39000\times 2$

$5x=78000$

$x=\frac{78000}{5}$

إذن: $\boxed{x=15600}$

*** الرجوع إلى المسألة المطروحة:**

- نصيب الشخص الأول هو: 3000-15600 أي: $\boxed{12600DH}$
- نصيب الشخص الثاني هو: $\boxed{15600DH}$
- نصيب الشخص الثالث هو: $\frac{15600}{2}-500$

أي: $\boxed{7300DH}$

*** التحقق:**

$12600+15600+7300=35500DH$

تمرين 10

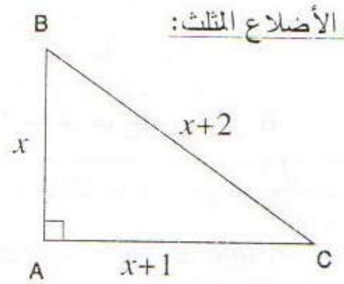
1) أنشر وأبسط:

$$\begin{aligned}(x-1)^2-4&=x^2-2x+1-4\\&=\underline{x^2-2x-3}\end{aligned}$$

2) أعمل:

$$\begin{aligned}(x-1)^2-4&=(x-1)^2-2^2\\&=[(x-1)-2][(x-1)+2]\\&=\underline{(x-3)(x+1)}\end{aligned}$$

3) أحدد أطوال الأضلاع المثلث:



نضع $AB=x$ و $AC=x+1$ و $BC=x+2$

وبتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة على المثلث ABC القائم الزاوية في A.

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2$

أي أن: $(x+2)^2=x^2+(x+1)^2$

يعني: $x^2+4x+4=x^2+x^2+2x+1$

$\cancel{x^2}+4x+4\cancel{-x^2}-x^2-2x-1=0$

يعني: $-x^2+2x+3=0$

يعني: $x^2-2x-3=0$

وحسب السؤالين 1 و 2

لدينا: $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

ومنه فإن: $x^2-2x-3=0$

يعني: $(x-3)(x+1)=0$

$x-3=0$ أو $x+1=0$

$x=3$ أو $x=-1$

وبما أن x يمثل مسافة

فإن x عدد موجب

وبالتالي فإن: $\boxed{x=3}$.

ومنه: AB = 3

AC = 3 + 1 = 4

BC = 3 + 2 = 5

تمارين توليفية

تمرين 11

أحسب المسافة بين المدينتين A و B.

لتكن d المسافة بين المدينتين A و B و t_1 المدة الزمنية للذهاب من A نحو B

إذن : $d = 30 \times t_1$

أي: $\boxed{t_1 = \frac{d}{30}}$ ①

لتكن t_2 المدة اللازمة للرجوع من A إلى B.

إذن: $d = 20t_2$ ② أي: $\boxed{t_2 = \frac{d}{20}}$

◆ ←مدة الاستراحة $15mn = \frac{1}{4}h$

← الوقت المستغرق أثناء الرحلة هو 6h−1h أي 5h

ومنه فإن: ③ $\boxed{t_1 + t_2 + \frac{1}{4} = 5}$

من النتائج ① و ② و ③

أستنتج أن: $\frac{d}{30} + \frac{d}{20} + \frac{1}{4} = 5$

يعني أن: $\frac{2d}{60} + \frac{3d}{60} + \frac{15}{60} = \frac{300}{60}$

$5d = 300 - 15$

$5d = 285$

$d = \frac{285}{5}$

إذن: $\boxed{d = 57km}$

وبالتالي فإن المسافة بين المدينتين هي: 57km.

تمرين 12

تذكير: $d = vt$ (d المسافة و t المدة و v السرعة)

◆ اختيار المجهول

لتكن t المدة اللازمة لكي تلتقي السيارة بالشاحنة (بالساعات).

◆ صياغة المعادلة

لتكن M نقطة من [AB] التي تلتقي فيها السيارة والشاحنة.

إذن: AM = 80t و BM = 120t

ولدينا: AM + BM = AB

إذن: 80t + 120t = 400

◆ حل المعادلة

لدينا: 80t + 120t = 400

يعني: 200t = 400

$t = \frac{400}{200}$ أي $\boxed{t = 2h}$

◆ الرجوع إلى المسألة

بعد 2h الشاحنة ستقطع 160km من النقطة A في اتجاه B.

والسيارة ستقطع مسافة 240km من النقطة B في اتجاه A.

ولدينا: $160 + 240 = 400km$

◆ استنتاج: لدينا: $8h + 2h = 10h$

الشاحنة والسيارة تلتقيان على الساعة 10.

تمرين 13

★ أحدد قيمة العدد x:

لتكن S_1 مساحة المثلث و S_2 مساحة متوازي الأضلاع

إذن: $S_1 = \frac{2x(x-2)}{2}$ و $S_2 = 4 \times (x-2)$:

ولدينا: $S_1 = S_2$ يعني أن: $x(x-2) = 4(x-2)$

يعني: $x(x-2) - 4(x-2) = 0$

$(x-2)(x-4) = 0$

$x - 4 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$\boxed{x = 4}$ أو $\boxed{x = 2}$ وبما أن: $x - 2$ تمثل طول ضلع

فإن : $x - 2 > 0$ أي $x > 2$ ومنه فإن: $\boxed{x = 4}$

تمرين 14

★ ليكن x و y العددين المطلوبين.

لدينا: $xy = 972$

و: $x^2 + y^2 = 3240$

ونعلم أن: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

إذن: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

أي أن: $(x+y)^2 = 3240 + 2 \times 972$

$(x+y)^2 = 5184$

وبما أن: x و y عددان موجبان

فإن: x+y عدد موجب

إذن: $x + y = \sqrt{5184}$

ومنه فإن: $\boxed{x + y = 72}$

2 المتــراجــحـات

معارف أساسية

معارف أساسية :

تذكير:

لتكن a و b و c أعداد حقيقية

- إذا كان $a \leq b$ فإن : $a+c \leq b+c$
- إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن : $ac \leq bc$
- إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن : $ac \geq bc$

متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

- تعريف:

كل متفاوتة يمكن أن تكتب على شكل $ax+b \geq 0$ أو $ax+b \leq 0$ حيث a و b معلومان و x عدد مجهول تسمى متراجحة

ملاحظة : - حل متراجحة يعني تحديد جميع قيم المجهول x التي تحقق المتفاوتة.

نظمة متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف:

لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية معلومة .

المتراجحتان $ax+b \geq 0$ و $cx+d \geq 0$ تسمى **نظمة** متراجحتين و تكتب أيضا: $\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ cx+d \geq 0 \end{cases}$

ملاحظة :

حل النظمة $\begin{cases} ax+b \geq 0 \, (I_1) \\ cx+d \geq 0 \, (I_2) \end{cases}$ يعني تحديد جميع قيم x التي تحقق المتراجحتين (I_1) و (I_2) معا.

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

- حل المتراجحات التالية:

$4x-32 \geq 0$; $3x+1 \geq 0$; $5-4x \geq 0$

$1-x\sqrt{2} \geq 0$; $x\sqrt{3}+\sqrt{6} > 0$

تمرين 2

- حل المتراجحات التالية :

$13+x < 31$; $2x+1 \geq 31-4x$; $7x > 7-3x$;

$x\sqrt{8}-\sqrt{7} > x\sqrt{2}+\sqrt{28}$; $-14x+1 \geq 2x-2$

تمرين 3

- حل النظمتين و مثل الحلول على محور:

$$\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ 2x-3 \leq 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x+6 > 0 \\ -x+1 > 0 \end{cases}$$

تمرين 4

- حل النظمتين:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} \geq x \\ x+1 \geq \dfrac{x}{3} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x-4 < x-3 \\ 7x+8 < 3x+7 \end{cases}$$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 5

- حل المتراجحات:

$$\frac{x-1}{3}-\frac{x-1}{4}\le\frac{x-1}{6}+\frac{x-1}{9}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{x+1}{3}<\frac{1}{4}-\frac{x}{6}$$

$$\frac{2x+1}{8}-\frac{3-x}{6}>x$$

تمرين 6

- حل المتراجحات :

$$\sqrt{11}\,(1-x)\le 3\,(x+1)$$

$$\sqrt{7}\,(x-1)>\sqrt{5}\,(x+1)$$

$$\frac{x+\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\le\frac{x-\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$$

تمرين 7

- حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية حلول المتراجحة $5x-7<2x+3$

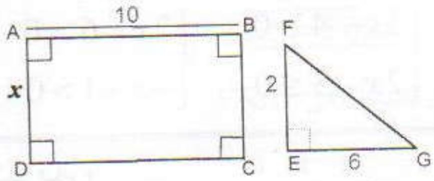
تمرين 8

- بين أن العدد $1+\sqrt{2}$ حل للمتراجحة :

$$x^2-1<2x+1$$

تمرين 9

- لاحظ الشكلين:



1. حدد قيم العدد x التي من أجلها يكون محيط المستطيل اكبر من محيط المثلث .
2. حدد قيم العدد x التي من أجلها يكون مساحة المثلث أكبر من مساحة المستطيل.
3. حدد قيم العدد x التي من أجلها يكون مساحة المثلث أكبر من مساحة. المستطيل ومحيط المستطيل اكبر من محيط المثلث.

تمارين توليفية

تمرين 10

-حل المتراجحات التالية:

$$)(2x-1)\ge(4x-6)\left(\frac{x}{2}+3\right)$$

$$2)^2+3(x+1)^2>5(x-3)(x+3)$$

تمرين 11

- يعرض نادي للسينما

التعريفتين التاليتين:

التعريفة الأولى : 30درهما لكل عرض سينمائي.

التعريفة الثانية : 100 درهم انخراط سنوي زائد

درهم لكل عرض.

بعد كم من عرض ستصبح التعريفة الأولى أفضل

التعريفة الثانية ؟

تمرين 12

-A وB وC ثلاثة نقط من المستوى حيث

AB=4 وAC=2BC.

حدد جميع قيم BC لكي تكون النقط A وB وC رو

مثلث .

تمرين 13

- ABC مثلث و x عدد موجب حيث:

$\hat{B}=2x$ و $\hat{C}=3x$

كيف يجب اختيار العدد x لكي تكون الزاوية $B\hat{A}C$

منفرجة و قياس $A\hat{C}B$ يساوي 30 درجة على الأق

تمرين 14

- حل المتراجحة :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)+\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-2)>x\sqrt{3}-2$$

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

- * $4x-32\geq 0$ يعني أن $4x\geq 32$

يعني أن $x\geq\frac{32}{4}$ يعني أن $x\geq 8$

الأعداد الأكبر من أو تساوي 8 هي حلول هذه المتراجحة.

* $3x+1\geq 0$ يعني أن $3x\geq -1$ يعني أن $x\geq\frac{-1}{3}$

الأعداد الأكبر من أو تساوي $\frac{-1}{3}$ هي حلول هذه المتراجحة.

* $5-4x\geq 0$ يعني أن $-4x\geq -5$

يعني أن $x\leq\frac{-5}{-4}$ أي $x\leq\frac{5}{4}$

الأعداد الأصغر من أو تساوي $\frac{5}{4}$ هي حلول هذه المتراجحة.

* $1-x\sqrt{2}\geq 0$ يعني أن $-x\sqrt{2}\geq -1$

يعني أن $x\leq\frac{-1}{-\sqrt{2}}$ يعني أن $x\leq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

أي $x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

الأعداد الأصغر من أو تساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هي حلول هذه المتراجحة.

* $x\sqrt{3}+\sqrt{6}>0$ يعني أن $x\sqrt{3}>-\sqrt{6}$ يعني أن

$x>\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$ يعني أن $x>-\sqrt{\frac{6}{3}}$

أي $x>-\sqrt{2}$

الأعداد الأكبر قطعا من $-\sqrt{2}$ هي حلول هذه المتراجحة.

تمرين 2

- * $13+x<31$ يعني أن $x<31-13$ أي

$x<18$

الأعداد الأصغر قطعا من 18 هي حلول هذه المتراجحة.

* $2x+1\geq 31-4x$ يعني أن $2x+4x\geq 31-1$

يعني أن $6x\geq 30$ يعني أن $x\geq\frac{30}{6}$

يعني أن $x\geq 5$

الأعداد الأكبر من أو تساوي 5 هي حلول هذه المتراجحة.

* $7x>7-3x$ هي $7x+3x>7$

يعني أن $10x>7$ ومنه $x>\frac{7}{10}$

الأعداد الأكبر قطعا من $\frac{7}{10}$ هي حلول هذه المتراجحة.

* $x\sqrt{8}-\sqrt{7}>x\sqrt{2}+\sqrt{28}$

يعني أن $x\sqrt{8}-x\sqrt{2}>\sqrt{28}+\sqrt{7}$

يعني أن $x2\sqrt{2}-x\sqrt{2}>2\sqrt{7}+\sqrt{7}$

يعني أن $x(2\sqrt{2}-\sqrt{2})>\sqrt{7}(2+1)$

يعني أن $x\sqrt{2}>3\sqrt{7}$ ومنه $x>\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

يعني أن $x>\frac{3\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$ أي $x>\frac{3\sqrt{14}}{2}$

الأعداد الأكبر قطعا من $\frac{3\sqrt{14}}{2}$ هي حلول هذه المتراجحة.

* $-14x+1\geq 2x-2$

يعني أن $-14x-2x\geq -2-1$

يعني أن $-16x\geq -3$ يعني أن $x\leq\frac{-3}{-16}$

ومنه $x\leq\frac{3}{16}$

الأعداد الأصغر من أو تساوي $\frac{3}{16}$ هي حلول هذه المتراجحة.

تمرين 3

- * $\begin{cases}2x+6>0\\ -x+1>0\end{cases}$ يعني أن : $\begin{cases}2x>-6\\ -x>-1\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}x>\frac{-6}{2}\\ x<1\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x>-3\\ x<1\end{cases}$

إذن لدينا $x<1$ و $x\geq -3$ ومنه فإن $-3<x<1$

الأعداد الأكبر أو تساوي -3 والأصغر من أو تساوي 1 هي حلول هذه النظمة.

* $\begin{cases}3x+4\geq 0\\ 2x-3\leq 0\end{cases}$ يعني أن : $\begin{cases}3x\geq -4\\ 2x\leq +3\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}x\geq \frac{-4}{3}\\ x\leq \frac{+3}{2}\end{cases}$ ومنه فإن $\frac{-4}{3}\leq x\leq \frac{3}{2}$

الأعداد الأكبر من أو تساوي $\frac{-4}{3}$ والأصغر من أو تساوي $\frac{3}{2}$ هي حلول هذه النظمة.

تمرين 4

- * $\begin{cases}2x-4<x-3\\ 7x+8<3x+7\end{cases}$

يعني أن $\begin{cases}2x-x<-3+4\\ 7x-3x<7-8\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x<1\\ 4x<-1\end{cases}$

هي $\begin{cases}x<1\\ x<\frac{-1}{4}\end{cases}$. إذن لدينا $x<1$ و $x<\frac{-1}{4}$

ومنه $x<\frac{-1}{4}$. الأعداد الأصغر قطعا من $\frac{-1}{4}$ هي حلول هذه النظمة.

* $\begin{cases}\frac{x+1}{3}\geq x\\ x+1\geq \frac{x}{3}\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x+1\geq 3x\\ 3x+3\geq x\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x-3x\geq -1\\ 3x-x\geq -3\end{cases}$

يعني $\begin{cases}-2x\geq -1\\ 2x\geq -3\end{cases}$

يعني أن $\begin{cases}x\leq \frac{1}{2}\\ x\geq \frac{-3}{2}\end{cases}$

إذن لدينا $x\leq \frac{1}{2}$ و $x\geq \frac{-3}{2}$

ومنه فإن $\frac{-3}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}$

الأعداد الأكبر من أو تساوي $\frac{-3}{2}$ والأصغر من أو تساوي $\frac{1}{2}$ هي حلول هذه النظمة.

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 5

-* $\frac{x-1}{3}-\frac{x-1}{4}\leq \frac{x-1}{6}+\frac{x-1}{9}$

يعني $\frac{12(x-1)}{36}-\frac{9(x-1)}{36}\leq \frac{6(x-1)}{36}+\frac{4(x-1)}{36}$

يعني $12x-12-9x+9\leq 6x-6+4x-4$

يعني $3x-3\leq 10x-10$ أي $3x-10x\leq -10+3$

أي $-7x\leq -7$ يعني أن $x\geq \frac{-7}{-7}$ ومنه $x\geq 1$

الأعداد الأكبر من أو تساوي 1 هي حلول هذه المتراجحة.

* $\frac{x}{2}-\frac{x+1}{3}<\frac{1}{4}-\frac{x}{6}$ يعني أن $\frac{6x}{12}-\frac{4(x+1)}{12}<\frac{3}{12}-\frac{2x}{12}$

يعني أن $6x-4x-4<3-2x$

يعني أن $6x-4x+2x<3+4$ ومنه $4x<7$

يعني أن $x<\frac{7}{4}$

الأعداد الأصغر قطعا من $\frac{7}{4}$ هي حلول هذه النظمة.

* لدينا $\frac{2x+1}{8}-\frac{3-x}{6}>x$

يعني $\frac{3(2x+1)}{24}-\frac{4(3-x)}{24}>\frac{24x}{24}$

يعني $6x+3-12+4x>24x$ أي $6x+4x-24x>-3+12$

يعني $-14x>9$ أي $x<\frac{-9}{14}$

الأعداد الأصغر قطعا من $\frac{-9}{4}$ هي حلول هذه المتراجحة.

تمرين 6

* لدينا $\sqrt{11}(1-x)\le 3(x+1)$

يعني $\sqrt{11}-x\sqrt{11}\le 3x+3$

يعني $-x\sqrt{11}-3x\le 3-\sqrt{11}$

يعني $x(-\sqrt{11}-3)\le 3-\sqrt{11}$

ألاحظ أن العدد $-\sqrt{11}-3$ سالب

ومنه فإن $x\ge \frac{3-\sqrt{11}}{(-\sqrt{11}-3)}$

يعني $x\ge\frac{3-\sqrt{11}}{-(\sqrt{11}+3)}$ أي $x\ge\frac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+3}$

يعني أن $x\ge\frac{\left(\sqrt{11}-3\right)^2}{\left(\sqrt{11}+3\right)\left(\sqrt{11}-3\right)}$

يعني أن $x\ge\frac{11-6\sqrt{11}+9}{11-9}$ أي $x\ge\frac{20-6\sqrt{11}}{2}$

يعني أن $x\ge 10-3\sqrt{11}$

وبالتالي الأعداد الأكبر من أو تساوي $10-3\sqrt{11}$ حلول هذه المتراجحة

* لدينا $\sqrt{7}(x-1)>\sqrt{5}(x+1)$

يعني $x\sqrt{7}-\sqrt{7}>\sqrt{5}x+\sqrt{5}$

يعني $x\sqrt{7}-\sqrt{5}x>\sqrt{5}+\sqrt{7}$

يعني $x(\sqrt{7}-\sqrt{5})>\sqrt{5}+\sqrt{7}$

بما أن العدد $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ موجب قطعا، فإن $x>\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

يعني: $x>\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}$ يعني: $x>\frac{12+2\sqrt{35}}{2}$

إذن $x>6+\sqrt{35}$

الأعداد الأكبر قطعا من $6+\sqrt{35}$ هي حلول هذه المتراجحة

* $\frac{x+\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\le\frac{x-\frac{3}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$

يعني $\sqrt{3}\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\le\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

يعني أن $x\sqrt{3}+2\le x\sqrt{2}-3$

يعني $x\sqrt{3}-x\sqrt{2}\le -3-2$ يعني $x(\sqrt{3}-\sqrt{2})\le -5$

بما أن $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ موجب قطعا فإن $x\le\frac{-5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

يعني أن $x\le\frac{-5\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$

أي $x\le -5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$

إذن الأعداد الأصغر من أو تساوي $-5\sqrt{3}-5\sqrt{2}$ هي حلول هذه المتراجحة.

تمرين 7

* لدينا $5x-7<2x+3$

يعني $5x-2x<3+7$ يعني أن $3x<10$

يعني أن $x<\frac{10}{3}$

الأعداد الصحيحة الطبيعية التي هي حلول هذه المتراجحة هي 3 ؛ 2 ؛ 1 ؛ 0.

تمرين 8

* لكي نبين أن العدد $1+\sqrt{2}$ حل للمتراجحة، يجب أن يحقق هذا العدد المتفاوتة.

لدينا $x^2-1<2x+1$

أعوض x بالعدد $1+\sqrt{2}$

$(1+\sqrt{2})^2-1<2(1+\sqrt{2})+1$

$1+2\sqrt{2}+2-1<2+2\sqrt{2}+1$

$2\sqrt{2}-2\sqrt{2}<2+1-2$

$0<1$

العدد $1+\sqrt{2}$ يحقق المتراجحة $x^2-1<2x+1$

إذن : هو حل للمتراجحة $x^2-1<2x+1$

تمرين 9

* لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E إذن حسب مبرهنة فيتاغورس : $FG^2=EF^2+EG^2$

يعني أن $FG^2=2^2+6^2$ ومنه $FG^2=4+36=40$

يعني $FG=\sqrt{40}$ أي $FG=2\sqrt{10}$

نعتبر P_1 وP_2 محيطي المثلث EFG والمستطيل ABCD على التوالي.

و S_1 وS_2 مساحتي المثلث EFG والمستطيل ABCD على التوالي.

$P_1=EF+EG+FG=2+6+2\sqrt{10}$

$=8+2\sqrt{10}$

$P_2=2(AB+CD)=2(10+x)=20+2x$

$S_1=\frac{EF\times EG}{2}=\frac{2\times 6}{2}=6$

$S_2=AB\times AD=10x$

1) لدينا محيط المستطيل أكبر من محيط المثلث يعني أن : $P_2 > P_1$

يعني أن $20+2x > 8+2\sqrt{10}$

يعني أن $2x > 8+2\sqrt{10}-20$

يعني أن $2x > 2\sqrt{10}-12$

يعني أن $x > \frac{2(\sqrt{10}-6)}{2}$ أي $x > \sqrt{10}-6$

وبما أن $\sqrt{10}-6$ سالب و x عدد موجب غير منعدم فإن $x>0$.

2) لدينا مساحة المثلث أكبر من مساحة المستطيل يعني أن $S_1 > S_2$

يعني أن $6 > 10x$

يعني $10x < 6$ ومنه $x < 0,6$

أي $0 < x < 0,6$

3) لدينا مساحة المثلث أكبر من مساحة المستطيل ومحيط المستطيل أكبر من محيط المثلث

يعني $\begin{cases} S_1 > S_2 \\ P_2 > P_1 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x > 0 \\ x < 0,6 \end{cases}$

ومنه نستنتج أن $0 < x < 0,6$

تمارين توليفية

تمرين 10

* $(x+2)(2x-1) \geq (4x-6)\left(\frac{x}{2}+3\right)$

يعني $2x^2 - x + 4x - 2 \geq \frac{4x^2}{2} + 12x - \frac{6x}{2} - 18$

يعني $2x^2+3x-2 \geq 2x^2+12x-3x-18$

يعني $\cancel{2x^2}-\cancel{2x^2}+3x-12x+3x \geq -18+2$

يعني $-6x \geq -16$ يعني أن $x \leq \frac{-16}{-6}$

يعني أن $x \leq \frac{8}{3}$

الأعداد الأصغر من أو تساوي $\frac{8}{3}$ هي حلول هذه المتراجحة.

* $2(x-2)^2 + 3(x+1)^2 > 5(x-3)(x+3)$

يعني $2(x^2-4x+4)+3(x^2+2x+1) > 5(x^2-9)$

يعني $2x^2-8x+8+3x^2+6x+3 > 5x^2-45$

يعني $5x^2-2x+11 > 5x^2-45$

يعني $5x^2-5x^2-2x > -45-11$

يعني $-2x > -56$ يعني $x < \frac{-56}{-2}$ يعني أن $x < 28$

الأعداد الأصغر قطعا من 28 هي حلول هذه المتراجحة.

تمرين 11

- ليكن x هو عدد العروض التي تتم مشاهدتها .إذن $P_1=30x$ (حسب التعريفة الأولى) و $P_2=25x+100$ (حسب التعريفة الثانية)

لكي تكون التعريفة الأولى أفضل من التعريفة الثانية يجب أن يكون : $P_1 < P_2$

أي $30x<20x+100$

يعني $30x-20x<100$ يعني $10x<100$

يعني أن $x < \frac{100}{10}$ أي $\boxed{x<10}$

استنتاج :

ستصبح التعريفة الأولى أفضل من التعريفة الثانية عندما يكون عدد العروض التي سيتم مشاهدتها أقل من 10

تمرين 12

- **تذكير** :

مجموع طولي ضلعين في مثلث أصغر قطعا من طول الضلع الثالث :

A و B و C رؤوس مثلث يعني أن :

$\begin{cases} AB < AC+BC \\ AC < AB+BC \\ BC < AB+AC \end{cases}$

نضع $BC=x$ (x عدد موجب)

إذن $AC=2BC=2x$

وبالتالي نحصل على المنظمة $\begin{cases} 4 < 2x+x \\ 2x < 4+x \\ x < 4+2x \end{cases}$

يعني أن $\begin{cases} 3x > 4 \\ 2x-x < 4 \\ x-2x < 4 \end{cases}$ يعني أن $\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x < 4 \\ -x < 4 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x < 4 \\ x > -4 \end{cases}$ ومنه $\frac{4}{3} < x < 4$

وبالتالي $\frac{4}{3} < BC < 4$

استنتاج :لكي تكون A و B و C رؤوس مثلث يجب أن يكون $\frac{4}{3} < BC < 4$

تمرين 13

-* لدينا الزاوية $B\hat{A}C$ منفرجة يعني أن قياس

$B\hat{A}C$ محصور بين $90°$ و $180°$ درجة وبما أن مجموع قياسات زوايا مثلث يساوي $180°$.

فإننا نستنتج أن $A\hat{C}B + A\hat{B}C < 90°$

ومنه فإن $3x + 2x < 90$ أي $5x < 90$

ولدينا قياس $A\hat{C}B$ يساوي 30 درجة على الأقل إذن

$A\hat{C}B \geq 30$ ومنه $3x \geq 30$

وبالتالي نحصل على النظمة $\begin{cases} 5x < 90 \\ 3x \geq 30 \end{cases}$

يعني $\begin{cases} 5x < 90 \\ x \geq \frac{30}{3} \end{cases}$ يعني أن $\begin{cases} x < \frac{90}{5} \\ x \geq \frac{30}{3} \end{cases}$

أي $\begin{cases} x < 18 \\ x \geq 10 \end{cases}$ وبالتالي فإن $\boxed{10 \leq x < 18}$

تمرين 14

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) + \frac{3\sqrt{3}}{2}(x-2) > x\sqrt{3} - 2 -$$

يعني

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3\sqrt{3} \times 2}{2} > x\sqrt{3} - 2$$

يعني: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x - x\sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}} - 2 + 3\sqrt{3}$

أي: $\left(\frac{2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{6}\right)x > \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 + 3\sqrt{3}$

يعني: $\left(\frac{2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{6}\right)x > \frac{2\sqrt{3}}{6} - \frac{12}{6} + \frac{18\sqrt{3}}{6}$

يعني $\frac{5\sqrt{3}}{6}x > \frac{20\sqrt{3} - 12}{6}$ يعني $5\sqrt{3}x > 20\sqrt{3} - 12$

أي $x > \frac{20\sqrt{3} - 12}{5\sqrt{3}}$ يعني أن $x > \frac{\sqrt{3}\left(20\sqrt{3} - 12\right)}{5\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$

ومنه $x > \frac{20 \times 3 - 12\sqrt{3}}{5 \times 3}$ أي $x > \frac{3(20 - 4\sqrt{3})}{3 \times 5}$

ومنه $x > \frac{20 - 4\sqrt{3}}{5}$

الأعداد الأكبر قطعا من $\frac{20 - 4\sqrt{3}}{5}$ هي حلول هذه المتراجحة.

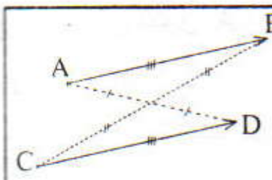
3 المتجهات والإزاحة

معارف أساسية

1- تساوي متجهتين

• A و B و C و D نقط من المستوى
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن: [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن:
– (AB) و (DC) متوازيان.
– $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنحنى
– AB=DC



• إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن ABDC متوازي الأضلاع.

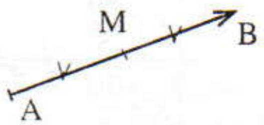
• إذا كان ABDC متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

• $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$ (متجهة منعدمة)

• إذا كان $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ فإن $A = B$ (A و B منطبقتان).

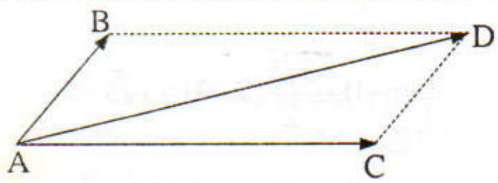
2- المتجهة والمنتصف

• A و B و M ثلاث نقط
M منتصف [AB] يعني أن: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



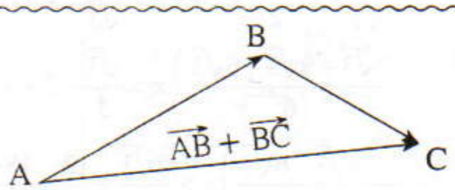
3- مجموع متجهتين

مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو المتجهة $\overrightarrow{AD}$
بحيث: ABDC متوازي الأضلاع.
نكتب: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$



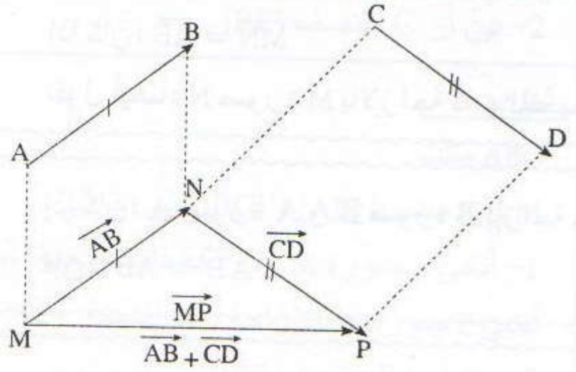
4- علاقة شال

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ مهما تكن النقط A و B و C في المستوى



نتيجة: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

ملاحظة:



A و B و C و D و M نقط من المستوى

لإنشاء النقطة P حيث: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

نتبع الخطوات التالية:

← ننشئ النقطة N حيث: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

← ننشئ النقطة P حيث: $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CD}$

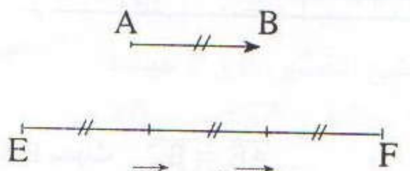
5- ضرب متجهة في عدد حقيقي

A و B و E و F نقط من المستوى و k عدد حقيقي.

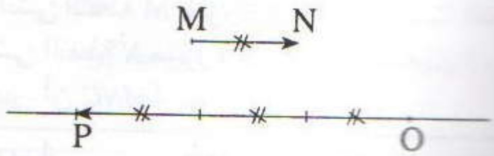
• $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{EF}$ يعني أن: (AB) و (EF) متوازيان.

← وإذا كان: $k > 0$ فإن: $AB = kEF$ و$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EF}$ لهما نفس المنحى.

← وإذا كان: $k < 0$ فإن: $AB = -kEF$ و$\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EF}$ لهما منحنيين متعاكسين.



$\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{OP} = -3\overrightarrow{MN}$

حالتان خاصتان:

• $k \times \vec{0} = \vec{0}$ و $0 \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

نتيجة:

$k \times \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ يعني أن: k=0 أو $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

خاصيات:

A و B و C و D نقط من المستوى و k عدد حقيقي.

- إذا كان: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.
- إذا كان: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ فإن: $(AB) \mathbin{/\!/} (CD)$ (نقول: المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان)

الإزاحة

A و B و M و N نقط من المستوى.

• نقول إن: N صورة M بالإزاحة التي تحول A إلى B

إذا كان: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$

نقول أيضا: N صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

إذا كان: A صورة A' و B' صورة B بإزاحة.

فإن: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

بإزاحة ذات متجهة معلومة

• صورة قطعة هي قطعة تقايسها.
• صورة مستقيم (D) هو مستقيم يوازي (D)
• صورة زاوية هي زاوية تقايسها
• صورة دائرة هي دائرة تقايسها.

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

ABC مثلث

1- أنشئ النقطة E بحيث $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$

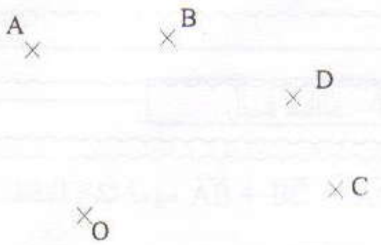
وأنشئ النقطة F بحيث $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$

2- بين أن: A منتصف [EF].

تمرين 2

انقل الشكل أسفله ثم انشئ النقطة H حيث:

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD}$



تمرين 3

ABC مثلث

1- أنشئ النقطة M صورة A بالإزاحة ذات المتجه

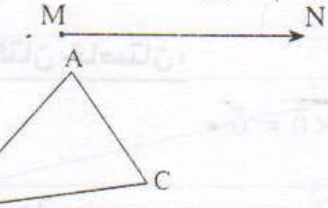
• أنشئ النقطة N صورة B بالنسبة للنقطة C.

2- بين أن AMNC متوازي الأضلاع.

تمرين 4

انقل الشكل وارسم صورة المثلث ABC بالإزاحة ذ

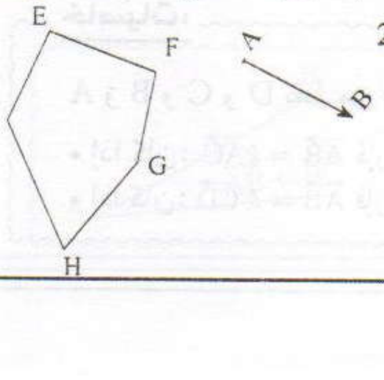
المتجهة $\overrightarrow{MN}$



تمرين 5

انقل الشكل ثم ارسم صورة المضلع EFGHI بالإزا

ذات المتجهة $2\overrightarrow{AB}$



تمرين 6

ABC مثلث

1- أنشئ النقطتين E و F بحيث:

$\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{AB}$

2- بين أن: A و F و C مستقيمية.

تمرين 7

بسط ما يلي:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ER} + \overrightarrow{BE}$
- $\overrightarrow{BA} - 2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$

تمرين 8

ABC مثلث و I منتصف [BC]

A' مماثلة A بالنسبة للنقطة I

بين أن: $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CA}$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 9

ABCD متوازي الأضلاع و E نقطة خارجه.

1- أنشئ النقطة F بحيث: $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}$

2- بين أن: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$

تمرين 10

ABC مثلث و I و J و K هي منتصفات [AB] و [BC] و [AC] على التوالي.

1- بين أن: $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IK}$

2- بين أن: $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$

تمرين 11

ABC مثلث.

أنشئ النقط M و N و P بحيث:

$\overrightarrow{AP} = 2\,\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM} =$ [illegible]

بين أن النقط M و N و P مستقيمية.

تمرين 12

ABCD متوازي أضلاع.

1- أنشئ النقطة E بحيث: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$

2- بين أن C منتصف [BE].

تمرين 13

ABC مثلث.

M و N منتصفا [AB] و [BC] على التوالي.

1- أنشئ E صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{CM}$

أنشئ F صورة N بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AN}$

2- بين أن: B منتصف [EF].

تمرين 14

ABCD متوازي أضلاع.

والنقطة E هي مماثلة D بالنسبة للنقطة A

والنقطة F هي مماثلة B بالنسبة للنقطة C

بين أن: F صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $2\,\overrightarrow{AD}$

تمرين 15

ABC مثلث و I منتصف [BC].

1- أنشئ النقطتين E و F حيث:

$\overrightarrow{AF} = -3\,\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB}$

2- بين أن: $(AI) \parallel (EF)$.

تمرين 16

ABCD متوازي أضلاع.

1- أنشئ النقطتين E و F بحيث:

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2- بين أن النقط A و C و F مستقيمية.

تمارين توليفية

تمرين 17

A و B و C و D أربعة نقط من المستوى حيث:

$3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{BC}$

بين أن النقط A و C و D مستقيمية.

تمرين 18

ABCD متوازي أضلاع .

1- أنشئ النقطتين E و F بحيث:

$\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

2- بين أن: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$

3- أ) اكتب $\overrightarrow{FD}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{CB}$

ب) استنتج أن النقط D و E و F مستقيمية .

تمرين 19

ABCD متوازي أضلاع و E منتصف [BC] و F منتصف [CD].

بين أن : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

تمرين 20

ليكن ABC مثلثا و k عددا حقيقيا

ولتكن E و F نقطتين من المستوى بحيث:

$\overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{AB} + (1+k)\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AF} = (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}$

1- بين أن المتجهتين $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{CB}$ مستقيميتان مهما تكن قيمة العدد الحقيقي k.

2- احسب قيمة k إذا كان E=F.

3- احسب قيمة k لكي يكون الرباعي BCEF متوازي الأضلاع .

تمرين 21

ABC مثلث متساوي الساقين حيث:

AB=BC=5 و AC=6 .

D صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

1- حدد طبيعة المثلث ADC ثم احسب DC .

2- E نقطة بحيث: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$

المستقيم (EB) يقطع [AC] في F .

✤ بين أن: F منتصف [AC] .

3- أ) المستقيمان (CB) و (AE) يتقاطعان في I .

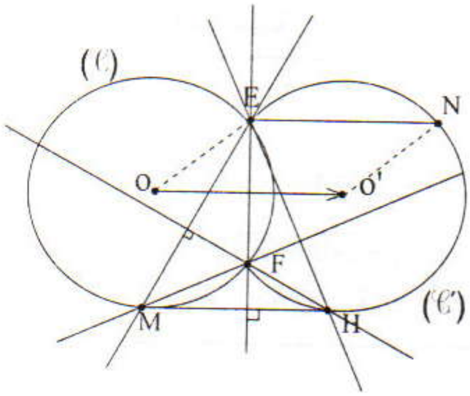
✤ بين أن: I منتصف [AE] .

ب) المستقيمان (CE) و (BD) يتقاطعان في J

✤ بين أن: $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان .

تمرين 22

$(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ دائرتان لهما نفس الشعاع r ومراكزهما o و o' على التوالي بحيث $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يتقاطعان في النقطتين E و F.



1- N مماثلة E بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{oo'}$ (انظر الشكل) .

أ) بين أن N تنتمي إلى الدائرة $(\mathscr{C}')$

ب) بين أن [FN] قطر للدائرة $(\mathscr{C}')$

ج) حدد طبيعة المثلث NEF .

2- لتكن M نقطة من الدائرة $(\mathscr{C})$ و H صورتها بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{oo'}$.

أ) بين أن المستقيمين (EF) و (MH) متعامدان .

ب) بين أن المستقيمين (FH) و (EM) متعامدان .

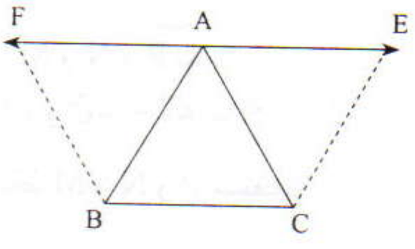
ج) استنتج أن المستقيم (EH) عمودي على المستقيم (MF) .

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

1- الشكل



لاحظ أن : ABCE و ACBF متوازي الأضلاع .

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$

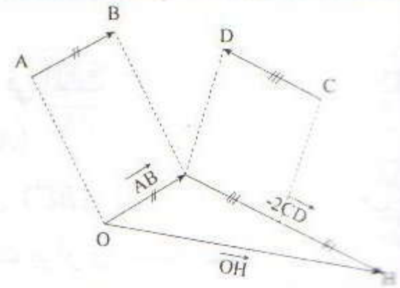
يعني أن: $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AF}$

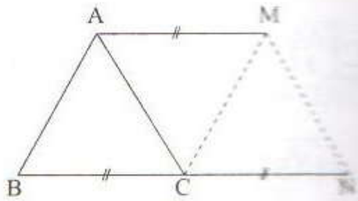
فإن A منتصف [EF].

تمرين 2



$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{DC}$.

تمرين 3



M صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BC}$

① $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

مماثلة النقطة B بالنسبة للنقطة C.

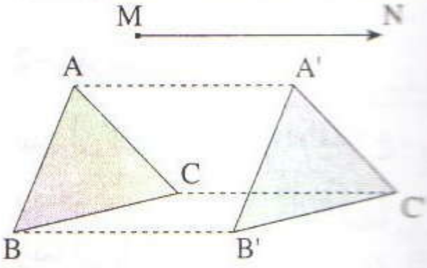
منتصف [BN].

② $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CN}$

من ① و ② نستنتج أن: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$

فإن الرباعي AMNC متوازي الأضلاع.

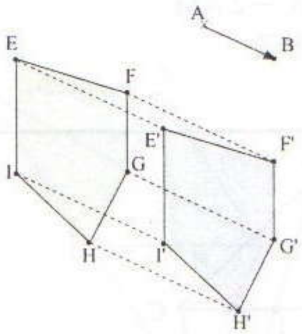
تمرين 4



هو صورة المثلث ABC بالإزاحة ذات

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$

تمرين 5

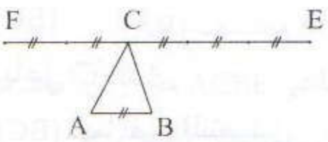


المضلع $E'F'G'H'I'$ هو صورة المضلع EFGHI بالإزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{II'} = 2\overrightarrow{AB}$

تمرين 6

1- الشكل



2- أبين أن النقط E و F و C مستقيمية.

لدينا: $\overrightarrow{CE} = 3\,\overrightarrow{AB}$

يعني أن: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$

ولدينا: $\overrightarrow{CF} = -\,2\,\overrightarrow{AB}$

إذن: $\overrightarrow{CF} = -\,2 \times \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}\right)$

$$\boxed{\overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}}$$

ومنه فإن النقط E و F و C مستقيمية.

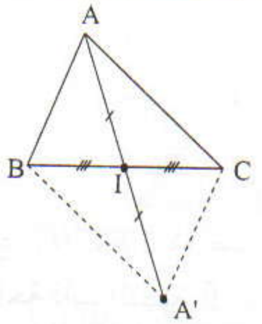
تمرين 7

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$
$= \overrightarrow{AA}$
$= \vec{0}$

- $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ER} + \overrightarrow{BE}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ER} + \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CE}$
$= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{CE}$
$= \vec{0} + \overrightarrow{CE}$
$= \overrightarrow{CE}$

◆ $\overrightarrow{BA} - 2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$
$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - 2\,\overrightarrow{AM}$
$= \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MA}$
$= 3\overrightarrow{MA}$

تمرين 8



أبين أن: $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CA}$

لدينا: 'A مماثلة A بالنسبة لـ I

إذن: I منتصف [A'A]

ولدينا: I منتصف [BC]

وبالتالي فإنه في الرباعي $ABA'C$

القطران [AA'] و [BC] لهما نفس المنتصف.

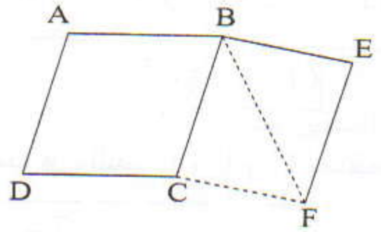
إذن: $ABA'C$ متوازي الأضلاع.

ومنه فإن: $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CA}$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 9

-1



-2 لدينا: $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BC}$

يعني أن: $\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC}$

يعني أن: $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC}$

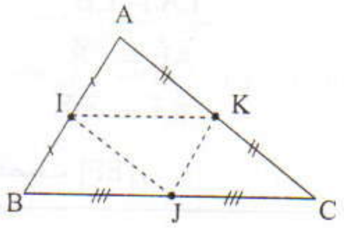
يعني أن: $\boxed{\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}}$ ①

ولدينا ABCD متوازي الأضلاع.

إذن: $\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}}$ ②

ومن العلاقتين ① و ② نستنتج أن: $\boxed{\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}}$

تمرين 10



-1 في المثلث ABC لدينا I منتصف [AB] و k منتصف [AC].

إذن $(IK) \parallel (BC)$ (المستقيم المار من منتصفي ضلعي مثلث يوازي الضلع الثالث).

وبما أن: $J \in (BC)$

فإن: $\boxed{(IK) \parallel (BJ)}$

ولدينا k و J منتصفا الضلعين [AC] و [BC] على التوالي.

إذن: $(JK) \parallel (AB)$ وبما أن $I \in (AB)$

فإن: $\boxed{(JK) \parallel (IB)}$

ومنه في الرباعي IKJB لدينا:

$(IK) \parallel (BJ)$ و $(IB) \parallel (KJ)$

إذن: IKJB متوازي أضلاع.

ومنه: $\boxed{\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BJ}}$

وبما أن: Jمنتصف [BC].

فإن: $\boxed{\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC}}$

وبالتالي فإن: $\boxed{\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{IK}}$

-2 بطريقة مماثلة لما سبق

نبين أن IKCJ متوازي الأضلاع.

ومنه: $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{KC}}$ ①

وبما أن k منتصف [AC]

فإن: $\boxed{\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{KC}}$ ②

ومن العلاقتين ① و ②

نستنتج أن: $\boxed{\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}}$

تمرين 11

ABC مثلث

لنبين أن النقط M و N و P مستقيمية.

حسب علاقة شال لدينا:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$$

يعني أن: $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$

وبما أن: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

إذن: $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

يعني أن: $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

يعني أن: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

يعني أن: ① $\boxed{\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}}$

ولدينا: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$

وبما أن: $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$

إذن: $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

يعني أن: $\overrightarrow{MP} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

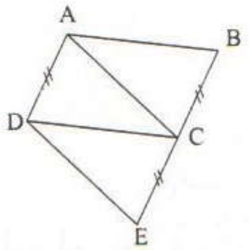
يعني أن: ② $\boxed{\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{BC}}$

من المتساويتين ① و ② نستنتج أن: $\boxed{\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}}$

وبالتالي فإن النقط M و N و P مستقيمية.

تمرين 12

1- الشكل



2- لنبين أن: C منتصف [BE]

لدينا: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$

إذن: ACED متوازي أضلاع.

ومنه: ① $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}}$

وبما أن ABCD متوازي أضلاع.

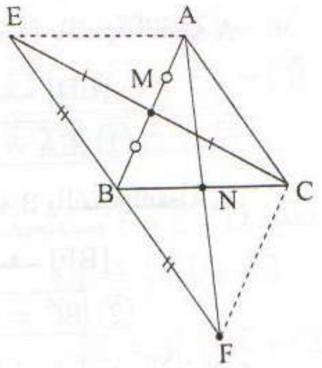
ومنه: ② $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}$

من العلاقتين ① و ② نستنتج أن: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$

وبالتالي فإن: C منتصف [BE].

تمرين 13

1- الشكل



2- أبين أن Bمنتصف [EF]:

لدينا E صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{CM}$

إذن: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{ME}$

ومنه : M منتصف [CE]

وبما أن M منتصف [AB]

فإن الرباعي ACBE متوازي الأضلاع.

(القطران لهما نفس المنتصف)

ومنه : ① $\boxed{\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC}}$

ولدينا F صورة N بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AN}$

إذن: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NF}$

ومنه N منتصف [AF].

وبما أن N منتصف [BC].

فإن الرباعي ACFB متوازي الأضلاع.

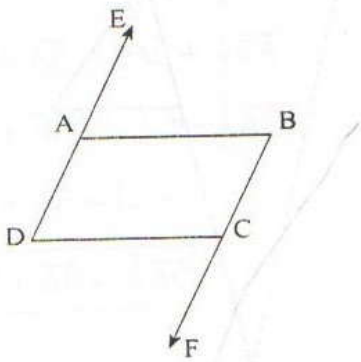
ومنه : ② $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}}$

من العلاقتين ① و ② نستنتج أن: $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$

وبالتالي فإن B منتصف [EF].

تمرين 14

الشكل



لكي نبين أن F صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{AD}$.

يجب أن نبين أن: $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{AD}$

لدينا: E مماثلة D بالنسبة للنقطة A

إذن: A منتصف [ED]

ومنه $\boxed{\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD}}$ ①

لدينا: F مماثلة B بالنسبة للنقطة C.

إذن: C منتصف [BF].

ومنه $\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CF}}$ ②

ولدينا ABCD متوازي الأضلاع

إذن: $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}$ ③

ومن العلاقات ① و ② و ③ نستنتج أن:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CF}$$

وحسب علاقة شال لدينا: $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$

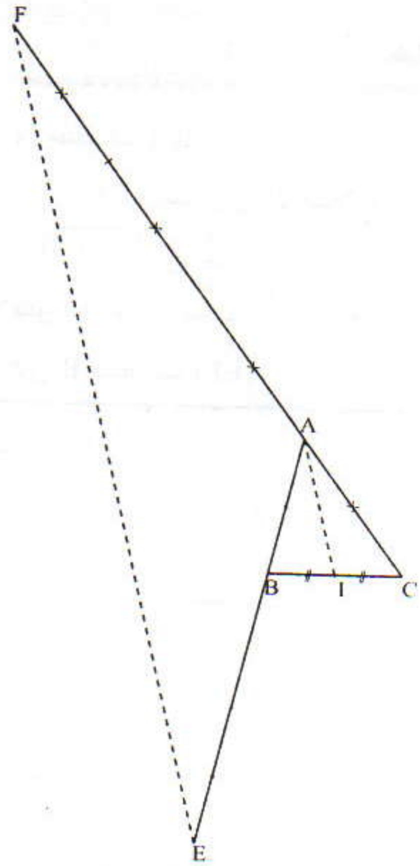
يعني أن: $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$

ومنه $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{AD}$

وبالتالي: النقطة F هي صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $2\overrightarrow{AD}$

تمرين 15

1- الشكل



2- أبين أن: $(AI) \parallel (EF)$:

حسب علاقة شال لدينا:

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$

ونعلم أن: $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$

و: $\overrightarrow{AF} = -3\overrightarrow{AC}$

إذن: $\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

يعني أن: $\overrightarrow{EF} = -3(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) - 3(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})$

يعني أن: $\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{AI} - 3\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{EF} = -6\overrightarrow{AI} - 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$

وبما أن: I منتصف [BC]

فإن: $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

أي: $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}$

ومنه: $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

إذن: $\overrightarrow{EF} = -6\,\overrightarrow{AI} - 3 \times \vec{0}$

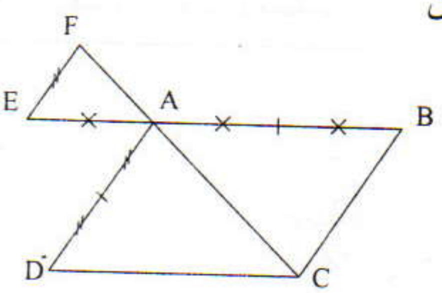
يعني: $\overrightarrow{EF} = -6\,\overrightarrow{AI} + \vec{0}$

أي: $\overrightarrow{EF} = -6\,\overrightarrow{AI}$

وبالتالي: $(AI) \parallel (EF)$

تمرين 16

1- الشكل



2- أبين أن النقط A و C و F مستقيمية

حسب علاقة شال لدينا: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$

وبما أن: $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

فإن: $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

يعني أن: $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA})$

يعني أن: $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

وبما أن ABCD متوازي أضلاع.

فإن: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

...: $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

يعني أن: $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

وبالتالي النقط A و C و F مستقيمية.

تمارين توليفية

تمرين 17

لدينا: $5\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BD}$

يعني أن: $5(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{BA} + 2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

يعني أن: $5\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}$

يعني أن: $5\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}$

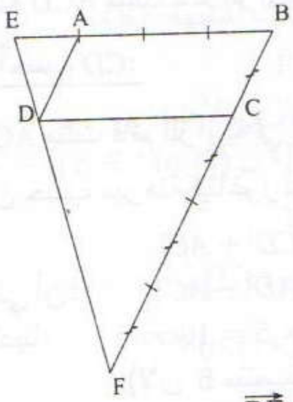
يعني أن: $5\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

ومنه: $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

وبالتالي النقط A و C و D مستقيمية

تمرين 18

1- الشكل



2- أبين أن: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$

نعلم أن: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$ (علاقة شال)

ولدينا: $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ لأن ABCD متوازي أضلاع.

$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB} + \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)$

$\boxed{\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}}$

... $\overrightarrow{FD}$ بدلالة $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{BF} = -4\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FD} = -4\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$

يعني: $\overrightarrow{FD} = 4\overrightarrow{CB}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

وبما أن ABCD متوازي الأضلاع فإن: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

ومنه: $\overrightarrow{FD} = 4\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

يعني: $\overrightarrow{FD} = 4\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CB}$

يعني: $\boxed{\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CB}}$

ب) أستنتج أن النقط D و E و F مستقيمية:

لدينا: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$

يعني: $3\overrightarrow{DE} = 3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}\right)$

يعني: $\boxed{3\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CB}}$

ولدينا: $\boxed{\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{CB}}$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{FD} = 3\overrightarrow{DE}}$

وبالتالي النقط D و E و F مستقيمية.

تمرين 19

أبين أن: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

لدينا: E منتصف [BC] إذن: $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

ولدينا: F منتصف [CD] إذن: $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

وحسب علاقة شال لدينا:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}$

$= 2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$

وبما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

وبالتالي:

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA})$

يعني: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

يعني: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

يعني: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = \left(2-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}$

ومنه: $\boxed{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$

تمرين 20

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + (1+k)\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AF} = (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

1- أبين أن المتجهتين $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{CB}$ مستقيميتان:

لكي أبين أن $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{CB}$ مستقيميتان يكفي أن أبين أن $\overrightarrow{EF}$ تساوي جداء $\overrightarrow{CB}$ في عدد حقيقي

حسب علاقة شال لدينا:

يعني: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$

يعني: $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$$\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{AB} - (1+k)\overrightarrow{AC} + (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{EF} = (1+k-3)\overrightarrow{AB} + (3-1-k)\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{AB} + (2-k)\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{AB} - (k-2)\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{EF} = (k-2)(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$
$$\overrightarrow{EF} = (k-2)(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$
$$\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{CB}$$

وبالتالي المتجهتان $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{CB}$ مستقيميتان.

2- أحدد قيمة العدد k إذا كان E=F

إذا كان: E=F فإن $\overrightarrow{EF} = \vec{0}$

ولدينا: $\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{CB}$

يعني: $(k-2)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

يعني: $(k-2) = 0$ أو $\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

وبما أن B≠C (لأن ABC مثلث)

فإن: $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$

ومنه: $k-2=0$

يعني: $\boxed{k=2}$

3- أحدد قيمة k لكي يكون BCEF متوازي أضلاع:

BCEF متوازي أضلاع.

يعني أن: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$

وبما أن: $\overrightarrow{EF} = (k-2)\overrightarrow{CB}$

فإن: $\overrightarrow{CB} = (k-2)\overrightarrow{CB}$

يعني: $\overrightarrow{CB} - (k-2)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

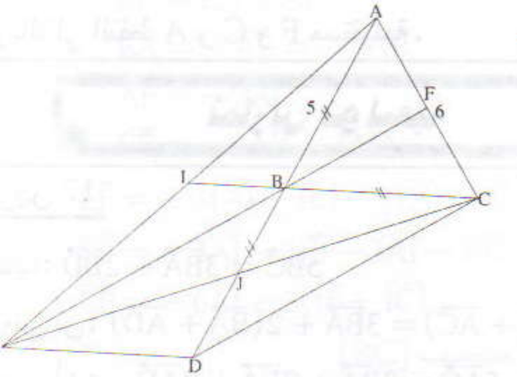
يعني: $(1-k+2)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

يعني: $(3-k)\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

وبما أن: $\overrightarrow{CB} \neq \vec{0}$ فإن 3-k=0

يعني: $\boxed{k=3}$

تمرين 21



1- ♣ أحدد طبيعة المثلث ADC

لدينا D صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

إذن: B منتصف [AD]

ولدينا: AB=BC.

إذن: AB=BC=BD

أي B منتصف [AD] متساوي المسافة عن رؤوس المثلث ACD

ومنه ACD مثلث قائم الزاوية في C.

♣ أحسب CD:

ACD مثلث قائم الزاوية في C

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس لدينا:

$$AD^2 = CD^2 + AC^2$$

يعني أن: $CD^2 = AD^2 - AC^2$

ولدينا: $AD = 2AB = 2\times 5 = 10cm$

(لأن B منتصف [AD])

إذن: $CD^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$

يعني: $CD = \sqrt{64}$

ومنه فإن: $\boxed{CD = 8cm}$

2- أبين أن F منتصف [AC]

لدينا: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$

إذن الرباعي DEBC متوازي أضلاع.

ومنه: $(EB) \parallel (DC)$

وبالتالي فإنه في المثلث ADC لدينا:

المستقيم (EB) يمر من B منتصف الضلع [AD] ويوازي حامل الضلع [DC].

إذن المستقيم (EB) يقطع الضلع [AC] في منتصفه.

ومنه: F منتصف [AC].

أ) ♣ أبين أن I منتصف [AE]:

DEBC متوازي الأضلاع .

إذن: $(BC) \parallel (ED)$

في المثلث ADE لدينا المستقيم (BC) يمر من B منتصف [AD] ويوازي حامل الضلع $[ED]$.

إذن (BC) يقطع الضلع $[AE]$ في منتصفه.

ومنه: I منتصف [AE].

ب) ♣ أبين أن $\overrightarrow{IJ}$ و$\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان:

لدينا BCDE متوازي أضلاع .

إذن قطراه [CE] و [BD] يتقاطعان في منتصفهما

ومنه J منتصف [EC].

في المثلث EAC لدينا I منتصف [EA] و J منتصف [EC]

إذن $(IJ) \parallel (AC)$

ومنه المتجهتان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان.

تمرين 22

1- أ) أبين أن N تنتمي إلى الدائرة (C):

لدينا N مماثلة E بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OO'}$

إذن: $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{OO'}$

ومنه الرباعي $ENO'O$ متوازي الأضلاع.

وبالتالي: $O'N = OE = r$ (لأن $(E \in \mathcal{C}(o,r))$)

إذن: $\boxed{N \in \mathcal{C}'(o',r)}$

ب) أبين أن [FN] قطر للدائرة $(\mathcal{C}')$.

لدينا E و F نقطتان من الدائرة $\mathcal{C}(o,r)$

إذن: ① OE=OF=r

و E و F نقطتان من الدائرة $\mathcal{C}'(o',r)$

إذن: ② $O'E = O'F = r$

من التساويين ① و ② نستنتج أن:

$OE = OF = O'E = O'F$

إذن الرباعي $OEO'F$ معين.

إذن $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO'}$ ولدينا $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{O'N}$

(لأن الرباعي $ENO'O$ متوازي الأضلاع).

إذن $\overrightarrow{FO'} = \overrightarrow{O'N}$

ومنه O' منتصف [FN].

وبما أن N و F تنتميان إلى الدائرة $(\mathcal{C}')$ و O' منتصف

[FN] فإن [FN] قطر للدائرة $(\mathcal{C}')$.

ج) أحدد طبيعة المثلث NEF:

في المثلث NEF لدينا O' منتصف [FN] .

و $O'N = OF = O'E = r$ (لأن N و E نقطتان من $\mathcal{C}'(o',r)$ و F نقطة من $\mathcal{C}(o,r)$) .

إذن: NEF مثلث قائم الزاوية في F.

2- أ) أبين أن المستقيمين (EF) و (MH) متعامدان:

H صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{OO'}$

إذن: $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OO'}$

وبما أن: $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{EN}$

فإن: $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{EN}$

ومنه: $\boxed{(EN) \parallel (MH)}$ ③

ولدينا NEF مثلث قائم الزاوية في E.

إذن: $\boxed{(EN) \perp (EF)}$ ④

ومن العلاقتين ③ و ④ نستنتج أن: $\boxed{(EF) \perp (MH)}$

إذن (EF) و (MH) متعامدان.

ب) أبين أن المستقيمين (FH) و (EM) متعامدان:

لدينا: $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{OO'}$

إذن: $MHO'O$ متوازي الأضلاع.

ومنه: $O'H = OM = r$

إذن: $H \in \mathcal{C}(o',r)$

ولدينا: o' منتصف القطر [NF] في الدائرة $(\mathcal{C}')$

إذن: $O'N = O'F = O'H = r$

ومنه المثلث HNF قائم الزاوية في H.

وهذا يعني أن: $\boxed{(HN) \perp (FH)}$ ⑤

ولدينا: $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MH}$

إذن: ENHM متوازي الأضلاع.

ومنه: $\boxed{(EM) \parallel (HN)}$ ⑥

ومن العلاقتين ⑤ و ⑥ نستنتج أن: $\boxed{(FH) \perp (EM)}$

إذن (FH) و (EM) متعامدان.

ج) أستنتج أن المستقيم (EH) عمودي على المستقيم (MF)

في المثلث FHM

لدينا: $(EF) \perp (MH)$

إذن (EF) هو الارتفاع الموافق للضلع [FH].

وبما أن E هي النقطة المشتركة بين الارتفاعين (EF) و (EM).

فإن: E هي مركز تعامد المثلث FHM.

ومنه (EH) هو الارتفاع الموافق للضلع [MF].

وبالتالي فإن: $(MF) \perp (EH)$.

مراقبة مستمرة رقم 1

تمرين 1

1) حُلّ المعادلة: $\frac{x+1}{3}-\frac{x}{2}=\frac{2x+5}{4}$

2) حُلّ المتراجحة: $7(x-\sqrt{5})+4x \geqslant 2(x+\sqrt{5})$

3) أ) أثبت المتساوية: $(2x-3)^2-(x-1)^2=(x-2)(3x-4)$

ب) حُلّ المعادلة: $(2x-3)^2-(x-1)^2=x^2-4$

تمرين 2

ABC مثلث و M نقطة من المستوى بحيث A تخالف M.

1) ارسم E و F حيث: $\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{FM}=-2\overrightarrow{AC}$

2) اكتب $\overrightarrow{EF}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$.

تمرين 3

ABCD شبه منحرف قاعدتاه [AB] و [DC] و T الإزاحة التي تحول A إلى D.

1) * ارسم B' صورة B بالإزاحة T.

* بين أن B' تنتمي إلى (DC).

2) * ارسم C' صورة C بالإزاحة T.

* بين أن $(DC')//(AC)$.

3) $(\mathscr{C}_1)$ الدائرة التي مركزها B والمارة من A و $(\mathscr{C}_2)$ صورة $(\mathscr{C}_1)$ بالإزاحة T.

أ) حدد مركز الدائرة $(\mathscr{C}_2)$

ب) بين أن: $D\in(\mathscr{C}_2)$

حلول المراقبة المستمرة رقم 1

تمرين 1

1) أحُل المعادلة: $\frac{x+1}{3}-\frac{x}{2}=\frac{2x+5}{4}$

$\frac{4(x+1)}{12}-\frac{6x}{12}=\frac{3(2x+5)}{12}$

يعني أن $4(x+1)-6x=3(2x+5)$

يعني أن $4x+4-6x=6x+15$

يعني أن $-2x+4=6x+15$

يعني أن $-2x-6x=15-4$

يعني أن $-8x=11$

يعني أن $\boxed{x=-\frac{11}{8}}$

ومنه فإن: $-\frac{11}{8}$ هو حل هذه المعادلة.

2) حُلّ المتراجحة:

لدينا: $7(x-\sqrt{5})+4x\geqslant 2(x+\sqrt{5})$

يعني أن $7x-7\sqrt{5}+4x\geqslant 2x+2\sqrt{5}$

يعني أن $11x-2x\geqslant 2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$

يعني أن $9x\geqslant 9\sqrt{5}$

يعني أن $x\geqslant\frac{9\sqrt{5}}{9}$

يعني أن $x\geqslant\sqrt{5}$

الأعداد الأكبر من أو تساوي $\sqrt{5}$ هي حلول هذه المتراجحة.

3) أ) أثبت المتساوية:

$(2x-3)^2-(x-1)^2=[(2x-3)+(x-1)][(2x-3)-(x-1)]$

$=(2x-3+x-1)(2x-3-x+1)$

$=(3x-4)(x-2)$

ب) أَحُلّ المعادلة:

$(2x-3)^2-(x-1)^2=x^2-4$

يعني أن $(3x-4)(x-2)=x^2-2^2$

يعني أن $(3x-4)(x-2)=(x-2)(x+2)$

يعني أن $(3x-4)(x-2)-(x-2)(x+2)=0$

يعني أن $(x-2)[(3x-4)-(x+2)]=0$

يعني أن $(x-2)(3x-4-x-2)=0$

يعني أن $(x-2)(2x-6)=0$

يعني أن $2x-6=0$ أو $x-2=0$

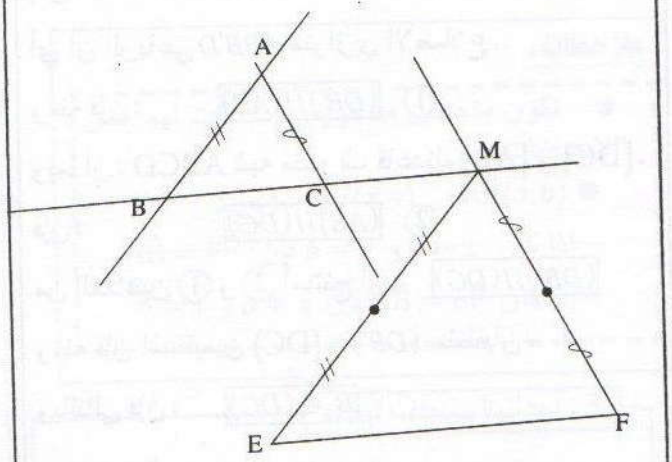
يعني أن $2x=6$ أو $x=2$

يعني أن $x=\frac{6}{2}=3$ أو $x=2$

العددان 2 و 3 هما حلي هذه المعادلة.

تمرين 2

1) أنشئ E و F:



2) أكتب $\overrightarrow{EF}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$

لدينا حسب علاقة شال: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}$

ونعلم أن: $\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{FM}=-2\overrightarrow{AC}$

إذن: $\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{AC}$

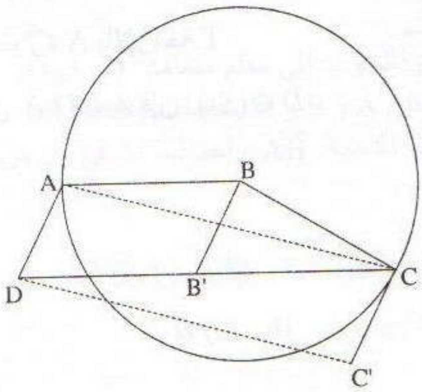
ومنه فإن: $\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}$

أي أن: $\overrightarrow{EF}=2(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$

$\boxed{\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{BC}}$

تمرين 3

الشكل:



1) أبين أن B' تنتمي إلى (DC):

T الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AD}$

لدينا B' صورة B بالإزاحة ذات المتجهة T.

إذن: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD}$

أي أن الرباعي $ABB'D$ متوازي الأضلاع.

ومنه فإن: $\boxed{(DB')//(AB)}$ ①

وبما أن: ABCD شبه منحرف قاعدتاه [AB] و [DC].

فإن: $\boxed{(AB)//(DC)}$ ②

من العلاقتين ① و ② أستنتج أن: $\boxed{(DB')//(DC)}$

ومنه فإن المستقيمين (DC) و (DB') منطقيان.

وبالتالي فإن: $\boxed{B' \in (DC)}$

2) أبين أن: $(DC')//(AC)$

صورتا A و C على التوالي بالإزاحة T هما D و C'.

إذن: صورة المستقيم (AC) هو المستقيم (DC')

ومنه فإن: $\boxed{(DC')//(AC)}$

3) أ- أحدد مركز الدائرة $(\mathscr{C}_2)$

صورة B بالإزاحة T هي B'.

بما أن: B مركز الدائرة $(\mathscr{C}_1)$

فإن B' هو مركز الدائرة $(\mathscr{C}_2)$ صورة $(\mathscr{C}_1)$ بالإزاحة T.

ب- أبين أن: $D \in (\mathscr{C}_2)$

$(\mathscr{C}_2)$ صورة $(\mathscr{C}_1)$ بالأزاحة T

و D صورة A بالإزاحة T

وبما أن $A \in (\mathscr{C}_1)$ فإن: $D \in (\mathscr{C}_2)$

4 المعلم في المستوى

معارف أساسية

1- حساب إحداثيتا متجهة

في معلم إذا كان $A(X_A, Y_A)$ و $B(X_B, Y_B)$

فإن: $X_B - X_A$ و $Y_B - Y_A$ هما إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$

نكتب: $\overrightarrow{AB}(X_B - X_A, Y_B - Y_A)$

ملاحظات:

- تكون متجهتين متساويتين إذا كانت لهما نفس الإحداثيات.
- $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{EF}(x,y)$ متجهتان:

- إذا كان $a = x$ و $b = y$ فإن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ فإن $a = x$ و $b = y$.

2- إحداثيتا مجموع متجهتين

في معلم إذا كان $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{EF}(x,y)$ متجهتين

فإن: $a+x$ و $b+y$ هما إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$

3- إحداثيتا منتصف قطعة

في معلم إذا كان $A(X_A, Y_A)$ و $B(X_B, Y_B)$

فإن: إحداثيتا M منتصف [AB] هما:

$X_M = \dfrac{X_A + X_B}{2}$ و $Y_M = \dfrac{Y_A + Y_B}{2}$

4- المسافة الفاصلة بين نقطتين

في معلم متعامد ممنظم إذا كان $A(X_A, Y_A)$ و $B(X_B, Y_B)$

فإن: $\boxed{AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}$

ملاحظات:

في معلم متعامد ممنظم إذا كان $\overrightarrow{AB}(x,y)$

فإن: $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (O , I , J)

نعتبر النقط التالية:

A (-2 ; -3) ; B (-3 ; 4) ; C (3,5 ; 4)
D (0 ; -5) ; E (-5 ; 0)

- حدد إحداثيتا كل من المتجهات: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$

تمرين 2

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (O , I , J)

نعتبر النقطتين A و B و M منتصف [AB]

حدد إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$ وإحداثيتا M في كل من الحالتين التاليتين:

أ- A (-1,8 ; 5,7)   B (2,4 ; -3,5)

ب - A (-5 ; -7) ; B (-3 ; 4)

تمرين 3

في المعلم (O , I , J) نعتبر النقط :

A (3 ; 7) و B (-2 ; 4) و C (-3 , -2)

حدد إحداثيات النقطة D حيث $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

تمرين 4

في معلم (O , I , J) نعتبر النقط

A (4 ,1) و B (0 , 4) و C (-3 , -2) و D (1 , -5)

1) بين أن ABCD متوازي أضلاع

2) حدد إحداثيتا M مركز متوازي الأضلاع ABCD

تمرين 5

في معلم (O , I , J) نعتبر النقط :

A (-1 , -1) و B (2 , 2) و C (-3 , 3) و D (3 , -3)

1 - حدد إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{EF}$ حيث :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

2 - حدد إحداثيتا F إذا علمت أن : E (0 , -5)

تمرين 6

في معلم (O , I , J) نعتبر النقط :

A (3 , 5) و B (4 , -2) و C (3 , 1) و D (1 , -1)

1) حدد إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{EF}$ حيث : $\overrightarrow{EF} = -3\overrightarrow{AB}$

2) حدد إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{FG}$ حيث : $\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{CD}$

استنتج إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{EG}$

تمرين 7

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (O , I , J)

نعتبر النقط : A (0 , 3) و B (1 , 5) و C (-1 , 1)

1) هل النقط A و B و C مستقيمية ؟ علل جوابك .

2) أنشئ النقط A و B و C .

تمرين 8

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (O , I , J) نعتبر

النقط A و B و C وD

حيث: $\overrightarrow{AB}$ (2 , 3) وC (-1 , -5) و D (3 , 1)

أحسب إحداثيتا $\overrightarrow{CD}$

هل المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان ؟ علل جوابك .

تمرين 9

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O,I,J) نعتبر النقط A و B و C و D حيث :

$\overrightarrow{AB}$(2 , 3) و C (3 , 1) و D (-1 , 7) .

♣ أحسب المسافات OC و AB و CD.

تمرين 10

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط :

A (4 , -2) و B (2 , 0) و C (6 , 2)

– ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ علل جوابك

تمرين 11

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط :

A (0 , 4) و B (3 , 8) و C (6 , 4) و D (3 , 0)

- ارسم الشكل .

- احسب أطوال أضلاع الرباعي ABCD . وحدد طبيعته .

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 12

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط : $A(0, -2)$

و $B(4,2)$ و $C(4,6)$

1) أحسب محيط المثلث ABC.

2) أحسب مساحة المثلث ABC.

تمرين 13

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم(O , I , J) نعتبر النقطة A ($\sqrt{3}$, 1) .

♣ بين أن A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وشعاعها

2- أرسم النقطة A .

تمرين 14

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطتين :

A (-5 , -3) و B (8 , 3)

هل النقطة E (1,1) تنتمي إلى واسط [AB]؟ علل جوابك .

نفس السؤال السابق بالنسبة للنقطة F (-3 , $\frac{39}{4}$)

تمرين 15

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط
A (1 , -2) و B (3 , 2) و C (7 , 0)
و D نقطة حيث ABCD متوازي أضلاع .

♣ بين أن ABCD معين .

تمرين 16

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط :
A (4 ,1) و B (0 , 4) و C (-6 , -4)

1) بين أن المثلث ABC قائم الزاوية.
2) حدد إحداثيتا النقطة E مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تمرين 17

في معلم متعامد ممنظم (O , I , J) نعتبر النقط A (2 , 4) و B (4 , 2) و C (0 , 4) و D (4 , 4) و E (4 , 0).

1) أنشئ الشكل.
2) أحسب مساحة المثلث OAB.
3) لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (OB). أحسب AH.

تمرين 18

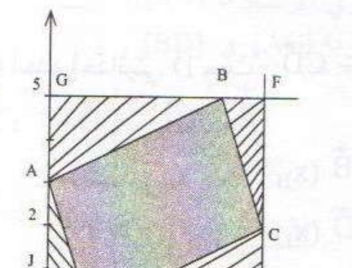
في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط :
A (4 , 5) و B (-4 , 1) و C (0 , -3) . ليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

1) أحسب AG .
2) بين أن المثلث ABC متساوي الساقين.
3) أحسب S مساحة المثلث ABC.

تمارين توليفية

تمرين 19

لاحظ الشكل أسفله :



1) حدد إحداثيات النقط A و B و C .
2) بين أن ABCI متوازي الأضلاع .
3) أحسب مساحة الرباعي ABCI
4) لتكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) أحسب AH.

تمرين 20

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطتين : A (-2 , 4) و B (6 , 3).

1 - أحسب $\cos O\hat{B}A$
2 - حدد قيمة مقربة إلى 0,1 درجة لقياس $O\hat{A}B$

تمرين 21

في معلم متعامد ممنظم (O , I , J) نعتبر النقطتين A (2 , 3) و B (5 , 0).

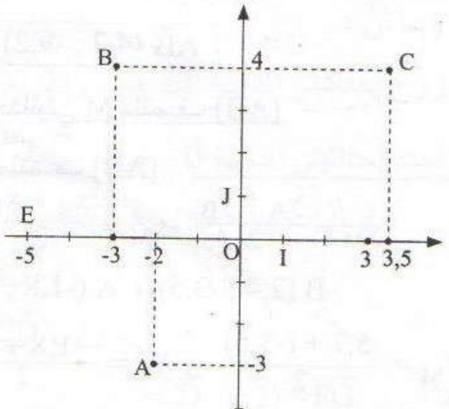
1 - أحسب مساحة المثلث OAB.
2 - H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB) أحسب OH.
3 - أحسب $\sin\hat{A}$ و $\sin\hat{B}$
4 - تأكد من المتساوية :
$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \times OA \times AB \times \cos\hat{A}$

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

1– الشكل



1 * أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

نعلم أن : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A , y_B - y_A)$

ولدينا : $A\,(-2 , -3)$ و $B\,(-3 , 4)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\,(-3+2 ; 4+3)$

أي : $\boxed{\overrightarrow{AB}\,(-1 ; 7)}$

* أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{CD}$

نعلم أن : $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C ; y_D - y_C)$

ولدينا : $C\,(3,5 ; 4)$ و $D\,(0 ; -5)$

إذن : $\overrightarrow{CD}(0 - 3,5 ; -5 - 4)$

أي : $\boxed{\overrightarrow{CD}\,(-3,5 ; -9)}$

* أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{DE}$

نعلم أن : $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D ; y_E - y_D)$

ولدينا : $E\,(-5 ; 0)$ و $D\,(0 ; -5)$

إذن : $\overrightarrow{DE}\,(-5 - 0 ; 0 + 5)$

أي : $\boxed{\overrightarrow{DE}\,(-5 ; 5)}$

تمرين 2

أ - * أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

نعلم أن : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

ولدينا : $A\,(-1,8 ; 5,7)$ و $B\,(2,4 ; -3,5)$

إذن : $\overrightarrow{AB}(2,4 + 1,8 ; -3,5 - 5,7)$

أي أن : $\boxed{\overrightarrow{AB}\,(4,2 ; -9,2)}$

* أحدد إحداثيتي M منتصف [AB]

نعلم أن M منتصف [AB]

إذن : $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ و $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

ولدينا : $A\,(-1,8 ; 5,7)$ و $B\,(2,4 ; -3,5)$

إذن : $X_M = \dfrac{-1,8 + 2,4}{2}$ و $Y_M = \dfrac{5,7 + (-3,5)}{2}$

$X_M = \dfrac{0,6}{2}$ و $Y_M = \dfrac{2,2}{2}$

أي أن : $\boxed{X_M = 0,3}$ $\boxed{Y_M = 1,1}$

ومنه فإن : زوج إحداثيتي النقطة M هو : (0,3 ; 1,1)

ب - * أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

نعلم أن : $\overrightarrow{AB}(X_B - X_A , Y_B - Y_A)$

ولدينا : $A\,(-5 , -7)$ و $B\,(-3 , 4)$

إذن : $\overrightarrow{AB}(-3+5 ; 4+7)$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\,(2 ; 11)}$

* أحدد إحداثيتي M منتصف [AB]

نعلم أن : M منتصف [AB]

إذن : $X_M = \dfrac{X_A + X_B}{2}$ و $Y_M = \dfrac{Y_A + Y_B}{2}$

ولدينا : $A\,(-5 , -7)$ و $B\,(-3 , 4)$

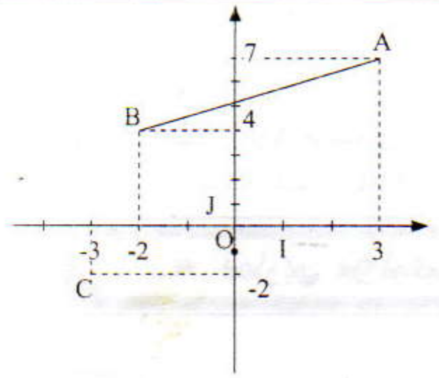
أي أن : $X_M = \dfrac{(-5) + (-3)}{2}$ و $Y_M = \dfrac{(-7) + 4}{2}$

إذن : $X_M = \dfrac{-8}{2}$ و $Y_M = \dfrac{-3}{2}$

$\boxed{X_M = -4}$ $\boxed{Y_M = -1,5}$

ومنه فإن زوج إحداثيتي M هو: (-4 ; -1,5)

تمرين 3



* أحدد إحداثيتي D حيث: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

لدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

و $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A ; y_B - y_A)$

$\overrightarrow{CD}\,(x_D - x_C ; y_D - y_C)$

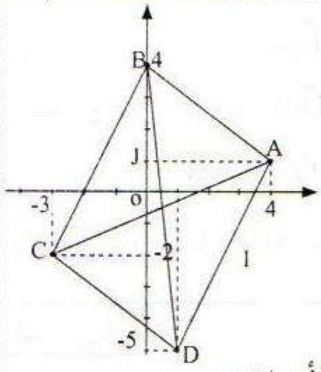
إذن: $\begin{cases} X_D - X_C = X_B - X_A \\ Y_D - Y_C = Y_B - Y_A \end{cases}$

ونعلم أن : $A(3\,;7)$ و $B(-2\,;4)$ و $C(-3\,;-2)$

أي أن :
$$\begin{cases} X_D + 3 = -2 - 3 \\ Y_D + 2 = 4 - 7 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_D + 3 = -5 \\ Y_D + 2 = -3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_D = -5 - 3 = -8 \\ Y_D = -3 - 2 = -5 \end{cases}$$

ومنه فإن زوج إحداثيتي النقطة D هو: $(-8\,;-5)$

تمرين 4



لنبين أن : ABCD متوازي الأضلاع

لدينا : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$

أي : $\overrightarrow{AB}(0 - 4\,;\,4 - 1)$

أي : $\boxed{\overrightarrow{AB}\,(-4\,;3)}$ ①

ولدينا : $\overrightarrow{DC}\,(x_C - x_D\,;\,y_C - y_D)$

أي : $\overrightarrow{DC}(-3 - 1\,;\,-2 + 5)$

أي : $\boxed{\overrightarrow{DC}\,(-4\,;3)}$ ②

من ① و ② نستنتج أن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

وبالتالي فإن ABCD متوازي الأضلاع.

لنحدد إحداثيتي M مركز متوازي الأضلاع :

لدينا : M مركز متوازي الأضلاع ABCD

أي : M منتصف قطريه [AC] و [BD]

أي أن :
$$\begin{cases} X_M = \dfrac{X_A + X_C}{2} \\ Y_M = \dfrac{Y_A + Y_C}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_M = \dfrac{4 + (-3)}{2} = \dfrac{1}{2} \\ Y_M = \dfrac{1 + (-2)}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ومنه فإن زوج إحداثيتي النقطة M مركز ABCD هو : $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

تمرين 5

أحدد إحداثيتي $\overrightarrow{EF}$ حيث : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(X_B - X_A; Y_B - Y_A)$

$\overrightarrow{AB}(2 + 1; 2 + 1)$

$\overrightarrow{AB}(3; 3)$

و $\overrightarrow{CD}\,(x_D - x_C\,;\,y_D - y_C)$

أي: $\overrightarrow{CD}(3 + 3; -3 - 3)$

$\overrightarrow{CD}(6; -6)$

ومنه فإن : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}(3 + 6; 3 + (-6))$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}(9; -3)$

وبالتالي فإن زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{EF}$ هو : $(9\,;-3)$.

تمرين 6

أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{EF}$ حيث : $\overrightarrow{EF} = -3\,\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$

$\overrightarrow{AB}\,(4 - 3\,;\,-2 - 5)$

$\overrightarrow{AB}\,(1\,;-7)$

$-3\,\overrightarrow{AB}\,(-3\,;21)$

وبما أن : $\overrightarrow{EF} = -3\,\overrightarrow{AB}$

فإن زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{EF}$ هو: $(-3\,;21)$

2 – أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{FG}$ حيث : $\overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{CD}$

لدينا : $\overrightarrow{CD}\,(x_D - x_C\,;\,y_D - y_C)$

$\overrightarrow{CD}\,(1 - 3\,;\,-1 - 1)$

$\overrightarrow{CD}\,(-2\,;-2)$

وبما أن : $-\overrightarrow{CD}(2\,;2) = \overrightarrow{FG}$

فإن زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{FG}$ هو: $(2\,;2)$

أستنتج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{EG}$:

نعلم حسب علاقة شال أن : $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$

وبما أن $\overrightarrow{EF}(-3 ; 21)$ و $\overrightarrow{FG}(2 ; 2)$

فإن: $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}(-1 ; 23)$

ومنه فإن زوج إحداثيتي $\overrightarrow{EG}$ هو : $(-1 ; 23)$

تمرين 7

1 - أبين أن النقط A و B و C مستقيمية.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A ; y_B - y_A)$

$\overrightarrow{AB}\ (1 - 0 ; 5 - 3)$

$\overrightarrow{AB}\ (1 ; 2)$ ①

لدينا : $\overrightarrow{AC}\ (x_C - x_A ; y_C - y_A)$

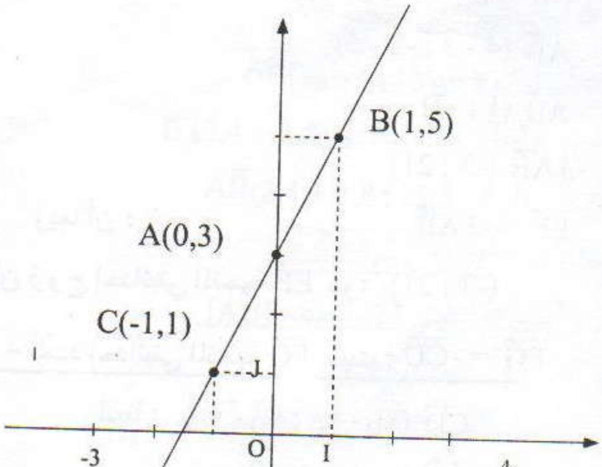
$\overrightarrow{AC}\ (-1 - 0 ; 1 - 3)$

$\overrightarrow{AC}\ (-1 ; -2)$ ②

من ① و ② نستنتج $\overrightarrow{AB} = -1 \times \overrightarrow{AC}$

ومنه فإن النقط A و B و C مستقيمية.

(2



تمرين 8

1- أحدد إحداثيتي $\overrightarrow{CD}$

لدينا : $\overrightarrow{CD}\ (x_D - x_C ; y_D - y_C)$

أي أن : $\overrightarrow{CD}(3 + 1 ; 1 + 5)$

إذن : $\overrightarrow{CD}(4 ; 6)$

2 - أبين أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان.

لدينا : $\overrightarrow{AB}\ (2 ; 3)$

أي : $2\overrightarrow{AB}(4 ; 6)$

وبما أن : $\overrightarrow{CD}(4 ; 6)$

فإن : $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي فإن $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتان.

تمرين 9

أحسب OC و AB و CD

لدينا $\overrightarrow{OC}(3;1)$ إذن: $OC = \sqrt{3^2 + 1^2}$

$= \sqrt{9 + 1}$

$\boxed{OC = \sqrt{10}}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}\ (2 ; 3)$

$AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9}$

$\boxed{AB = \sqrt{13}}$

لدينا : $C(2 ; 3)$ $D(-1 ; 7)$

إذن :

$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$

$= \sqrt{(-1 - 3)^2 + (7 - 1)^2}$

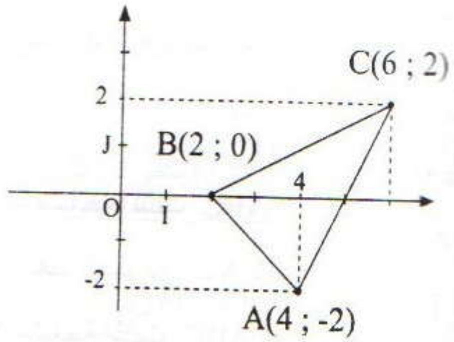
$= \sqrt{(-4)^2 + (6)^2}$

$= \sqrt{16 + 36}$

$CD = \sqrt{52}$

$\boxed{CD = 2\sqrt{13}}$

10



حدد طبيعة المثلث ABC.

حساب المسافتين CA و CB

$$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$
$$= \sqrt{(4-6)^2 + (-2-2)^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+16}$$
$$\boxed{CA = \sqrt{20}}$$

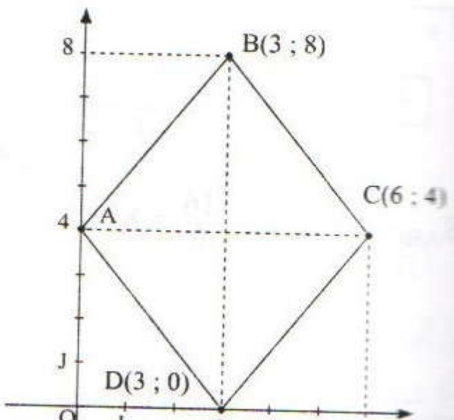
$$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$
$$= \sqrt{(2-6)^2 + (0-2)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{16+4}$$
$$\boxed{CB = \sqrt{20}}$$

$CA = \sqrt{20}$ و $CB = \sqrt{20}$

$CA = CB$

فإن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه C.

11



أحسب أطوال أضلاع الرباعي ABCD وأحدد طبيعته

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2}$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$\boxed{AB = 5}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(6-3)^2 + (4-8)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$\boxed{BC = 5}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$
$$= \sqrt{(3-6)^2 + (0-4)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$\boxed{CD = 5}$$

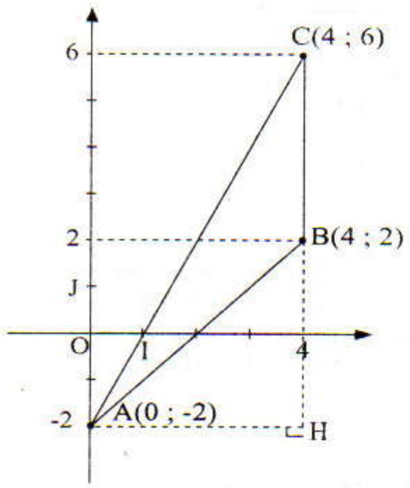
$$DA = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$$
$$= \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$\boxed{DA = 5}$$

ومنه فإن $AB = BC = CD = DA = 5$

إذن : ABCD معين.

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 12



1 - أحسب محيط المثلث CBA

ليكن P محيط المثلث ABC

إذن : $P = AB + AC + BC$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(4-0)^2 + (2+2)^2}$$
$$= \sqrt{16+16}$$
$$= \sqrt{32}$$
$$\boxed{AB = 4\sqrt{2}}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(4-0)^2 + (6+2)^2}$$
$$= \sqrt{16+64}$$
$$= \sqrt{80}$$
$$\boxed{AC = 4\sqrt{5}}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(4-4)^2 + (6-2)^2}$$
$$= \sqrt{0^2 + 4^2}$$
$$BC = \sqrt{16}$$
$$\boxed{BC = 4}$$

ومنه فإن :

$$P = AB + AC + BC$$
$$= 4\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 4$$
$$\boxed{P = 4(\sqrt{2} + \sqrt{5} + 1)}$$

2 - أحسب مساحة المثلث ABC.

لتكن H المسقط العمودي لـ A على (BC)

إذن : **S** مساحة المثلث ABC هي :

$$S = \frac{AH \times BC}{2}$$

* أحسب AH :

← النقطتان B و C لهما نفس الأفصول 4

إذن : (BC) يوازي (OJ)

وبما أن H تنتمي إلى (BC)

فإن : $x_H = 4$

← H المسقط العمودي لـ A على (BC)

إذن : (AH) عمودي على (BC) و (OI) عمودي (OJ).

و (BC) يوازي (OJ)

إذن : (AH) يوازي (OI)

ومنه فإن H و A لهما نفس الأرتوب

وبما أن $y_A = -2$ فإن $y_H = -2$

ومنه فإن زوج إحداثيتي H هو : (2- ; 4)

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(4-0)^2 + (-2+2)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + 0^2}$$
$$\boxed{AH = 4}$$

ومنه فإن :

$$S_{ABC} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8\ cm^2$$

تمرين 13

* أبين أن النقطة A تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها O وشعاعها 2 .

لكي تنتمي النقطة A إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ يكفي أن تكون $OA = 2$

* أحسب : OA

لدينا : $\overrightarrow{OA}(\sqrt{3}\ ;\ 1)$ إذن $A(\sqrt{3}\ ;\ 1)$

$OA = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$

$OA = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

وبالتالي فإن A تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$

تمرين 14

تذكير :

تكون نقطة M منتمية إلى واسط قطعة [AB]

إذا كان : $MA = MB$

1 - أتحقق: هل E تنتمي إلى واسط [AB] ؟

$EA = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2}$

$= \sqrt{(-5-1)^2 + (-3-1)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{36+16}$

$EA = \sqrt{52}$

$\boxed{EA = \sqrt{52}}$

$EB = \sqrt{(8-1)^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{7^2 + 2^2}$

$= \sqrt{49+4}$

$EB = \sqrt{53}$

بما أن : $EA \neq EB$

فإن E لا تنتمي إلى واسط [AB]

2 - أتحقق هل F تنتمي إلى واسط [BA] ؟

$FA = \sqrt{(x_A - x_F)^2 + (y_A - y_F)^2}$

$FA = \sqrt{(-5+3)^2 + \left(-3 - \frac{39}{4}\right)^2}$

$FA = \sqrt{(-2)^2 + \left(-\frac{51}{4}\right)^2}$

$FA = \sqrt{4 + \frac{2601}{16}}$

$FA = \sqrt{\frac{2665}{16}}$

$\boxed{FA = \frac{\sqrt{2665}}{2}}$

$FB = \sqrt{(x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2}$

$FB = \sqrt{(8+3)^2 + \left(3 - \frac{39}{4}\right)^2}$

$FB = \sqrt{11^2 + \left(\frac{-27}{4}\right)^2}$

$FB = \sqrt{121 + \frac{729}{16}}$

$FB = \sqrt{\frac{1936 + 729}{16}}$

$FB = \sqrt{\frac{2665}{16}}$

$\boxed{FB = \frac{\sqrt{2665}}{4}}$

إذن : $FA = FB$

أي أن F متساوية المسافة عن طرفي [AB]

وبالتالي فإن F تنتمى إلى واسط [AB].

تمرين 15

أبين أن متوازي الأضلاع ABCD هو معين:

لكي يكون متوازي الأضلاع ABCD معينا يكفي أن تكون: $AB = BC$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2}$

$= \sqrt{2^2 + 4^2}$

$= \sqrt{4+16}$

$AB = \sqrt{20}$

$\boxed{AB = 2\sqrt{5}}$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(7-3)^2 + (0-2)^2}$$
$$= \sqrt{(4)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{16+4}$$
$$BC = \sqrt{20}$$
$$\boxed{BC = 2\sqrt{5}}$$

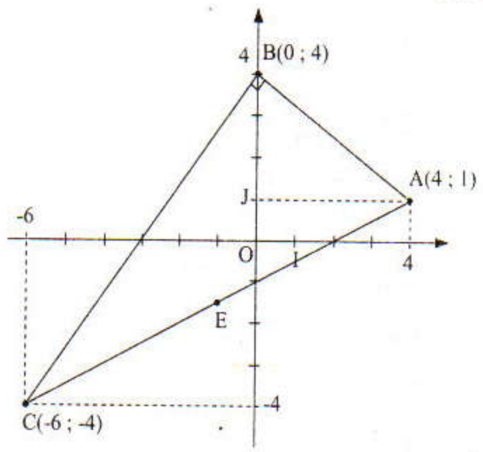
ومنه فإن : $AB = BC = 2\sqrt{5}$

بما أن ABCD متوازي الأضلاع

و : $AB = BC$

فإن ABCD معين.

تمرين 16



1 - أبين أن ABC قائم الزاوية.

أحسب المسافات AB و AC و BC

فأجد : $BC = 10$ و $AC = 5\sqrt{5}$ و $AB = 5$

لدينا :

$$BC^2 + AB^2 = 10^2 + 5^2 = 100 + 25 = 125$$

و : $AC^2 = (5\sqrt{5})^2 = 25 \times 5 = 125$

إذن : $BC^2 + AB^2 = AC^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية نستنتج أن : ABC قائم الزاوية في B.

2 - أحدد إحداثيتي E مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في B فإن مركز الدائرة المحيطة هو منتصف وتره [AC]

أي أن : E منتصف [AC]

ومنه فإن :

$$y_E = \frac{y_A + y_C}{2} \quad \text{و} \quad x_E = \frac{x_A + x_C}{2}$$

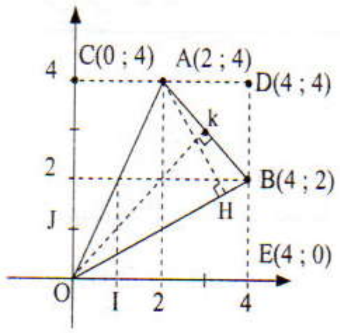
$$x_E = \frac{4 + (-6)}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{و}$$

$$y_E = \frac{1 + (-4)}{2} = \frac{-3}{2} = -1,5$$

و بالتالي فإن زوج إحداثيتي النقطة E هو : (-1 ; -1,5)

تمرين 17

1) أنشئ النقط A و B و C و D و E



2 - أحسب مساحة المثلث BAO :

✤ لدينا : $A(2 ; 4)$ و $\overrightarrow{OA}(2 ; 4)$

أي : $OA = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ولدينا : $B(4 ; 2)$ إذن : $\overrightarrow{OB}(4 ; 2)$

أي : $OB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{4+16}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ومنه فإن : $OA = OB$

إذن OAB مثلث متساوي الساقين في O.

✤ لتكن S مساحة المثلث OAB.

إذن : $S = \dfrac{OK \times AB}{2}$

حيث : K المسقط العمودي لـ O على (AB).وبما أن OAB متساوي الساقين فإن K منتصف [AB].

← نحسب AB.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(4 - 2)^2 + (2 - 4)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{4 + 4}$$
$$= \sqrt{8}$$
$$\boxed{AB = 2\sqrt{2}}$$

← نحسب إحداثيتي K :

K منتصف [AB]

إذن :

$$x_k = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_k = \frac{y_A + y_B}{2}$$
$$x_k = \frac{2 + 4}{2} \quad \text{و} \quad y_k = \frac{4 + 2}{2}$$
$$x_k = 3 \quad \text{و} \quad y_k = 3$$

← نحسب OK :

K منتصف [AB]

لدينا : K (3 ; 3)   إذن : $\overrightarrow{OK}(3 ; 3)$

$$OK = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 9}$$
$$OK = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن :

$$S = \frac{3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2}$$
$$= 3 \times \sqrt{2}^2$$
$$\boxed{S = 3 \times 2 = 6}$$

3 - أحسب AH :

بما أن : H المسقط العمودي لـ A على (OB).

فإن : AH هو الإرتفاع الموافق لـ (OB).

إذن :

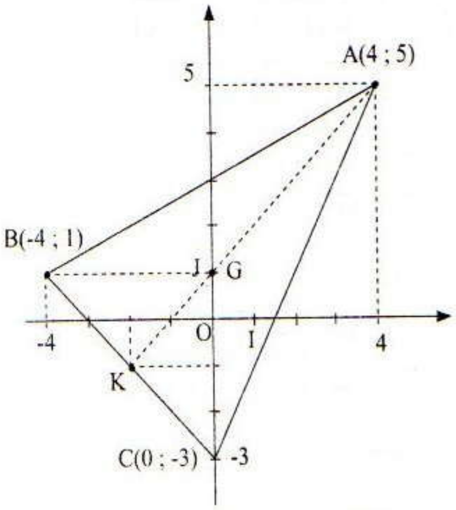
$$S = \frac{AH \times OB}{2}$$

ونعلم أن: $S = 6$ و $OB = 2\sqrt{5}$

إذن :

$$\frac{6}{1} = \frac{AH \times 2\sqrt{5}}{2}$$
$$AH \times 2\sqrt{5} = 2 \times 6$$
$$\boxed{AH = \frac{2 \times 6}{2\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}}$$

تمرين 18



1 - أحسب AG :

G مركز ثقل المثلث ABC

إذن : $AG = \frac{2}{3}AK$

مع K منتصف [BC]

❖ أحدد زوج إحداثيتي K.

K منتصف [BC]

إذن : $x_k = \frac{x_B + x_C}{2}$ و $y_k = \frac{y_B + y_C}{2}$

أي : $x_k = \frac{-4 + 0}{2}$ و $y_k = \frac{1 + (-3)}{2}$

$x_k = -2$ و $y_k = -1$

ومنه فإن زوج إحداثيتي K هو : (1- ; 2-)

❖ أحسب المسافة AK

$$AK = \sqrt{(x_k - x_A)^2 + (y_k - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (-1 - 5)^2}$$
$$= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{36 + 36}$$
$$= \sqrt{72}$$
$$\boxed{AK = 6\sqrt{2}}$$

وبالتالي فإن :

$$AG = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$
$$\boxed{AG = 4\sqrt{2}}$$

2 - أبين أن المثلث ABC متساوي الساقين في A

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(-4 - 4)^2 + (1 - 5)^2}$$
$$= \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 16}$$
$$= \sqrt{80}$$
$$\boxed{AB = 4\sqrt{5}}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(0 - 4)^2 + (-3 - 5)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 64}$$
$$= \sqrt{80}$$
$$\boxed{AC = 4\sqrt{5}}$$

إذن :

ومنه فإن : $AB = AC$

وبالتالي فإن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A.

3 - أحسب S مساحة المثلث ABC :

✤ بما أن : ABC متساوي الساقين في A و K منتصف [BC]

فإن : AK هو الإرتفاع الموافق لـ [BC]

ومنه فإن : $S = \dfrac{AK \times BC}{2}$

✤ أحسب المسافة BC.

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(0 + 4)^2 + (-3 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{4^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 16}$$
$$= \sqrt{32}$$
$$\boxed{BC = 4\sqrt{2}}$$

✤ أحسب S :

نعلم أن : $BC = 4\sqrt{2}$ و $AK = 6\sqrt{3}$

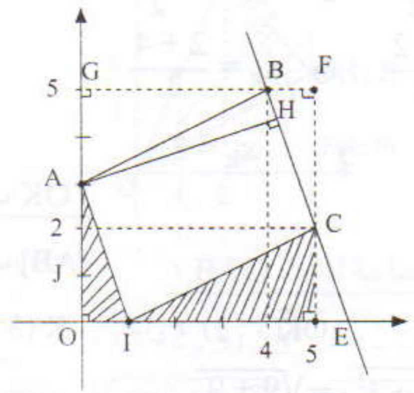
$$S = \frac{AK \times BC}{2}$$

إذن :

$$S = \frac{6\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{24\sqrt{6}}{2}$$
$$\boxed{S = 12\sqrt{6}}$$

تمارين توليفية

تمرين 19



1 - أحدد إحداثيات النقط A و B و C

من خلال الشكل نستنتج أن :

زوج إحداثيتي A هو : $(0 ; 3)$

زوج إحداثيتي B هو : $(4 ; 5)$

زوج إحداثيتي C هو : $(5 ; 2)$

2 - أبين أن الرباعي ABCI متوازي الأضلاع .

لدينا : $\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A , y_B - y_A)$

أي أن : $\overrightarrow{AB}(4 - 0 , 5 - 3)$

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\ (4 ; 2)}$$

ولدينا : $\overrightarrow{IC}\ (x_C - x_I , y_C - y_I)$

أي أن : $\overrightarrow{IC}(5 - 1 , 2 - 0)$

$$\boxed{\overrightarrow{IC}\ (4 ; 2)}$$

ومنه فإن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$

وبالتالي فإن : ABCI متوازي الأضلاع

3 - أحسب مساحة الرباعي ABCI

✤ مساحة الرباعي ABCI هي فرق مساحة المربع OEFG ومجموع مساحات المثلثات IEC و CFB و ABG و OAI

✤ أحسب مساحة المربع OEFG

لدينا من خلال الشكل $E(5\,;0)$

إذن : $\overrightarrow{OE}(5\,;0)$

ومنه فإن : $OE = \sqrt{5^2+0^2} = 5$

وبالتالي فإن : $S_{OEFG} = OE^2 = 5^2$

ومنه: $\boxed{S_{OEFG} = 25}$

✤ أحسب مساحات المثلثات IEC و CFB و ABG و OAI

← المثلث IEC قائم الزاوية في E

إذن : $S_{IEC} = \dfrac{EI \times EC}{2}$

$$EI = \sqrt{(x_I - x_E)^2 + (y_I - y_E)^2}$$
$$= \sqrt{(1-5)^2 + (0-0)^2}$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + 0^2}$$
$$\boxed{EI = 4}$$

$$EC = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2}$$
$$= \sqrt{(5-5)^2 + (2-0)^2}$$
$$= \sqrt{0^2 + 2^2}$$
$$\boxed{EC = 2}$$

ومنه فإن : $S_{IEC} = \dfrac{EI \times EC}{2}$

$$= \frac{4 \times 2}{2}$$
$$\boxed{S_{IEC} = 4}$$

وبالمثل أبينُ أنَّ : $\boxed{S_{AGB} = 4}$

← المثلث OAI قائم الزاوية في O

إذن : $S_{OAI} = \dfrac{OA \times OI}{2}$

ولدينا : $OI = 1$ و $OA = 3$

إذن : $\boxed{S_{OAI} = \dfrac{3 \times 1}{2} = 1{,}5}$

وبالمثل أبين أن : $\boxed{S_{BFC} = 1{,}5}$

← وبالتالي فإن :

$$S_{ABCI} = S_{OEFG} - (S_{IEC} + S_{CFB} + S_{ABG} + S_{OAI})$$
$$S_{ABCI} = 25 - (4 + 1{,}5 + 4 + 1{,}5)$$
$$S_{ABCI} = 25 - 11$$
$$\boxed{S_{ABCI} = 14}$$

4 - أحسب المسافة AH :

لدينا : $S_{ABCI} = AH \times BC$

$$AH = \frac{S_{ABCI}}{BC}$$

ونعلم حسب السؤال السابق :

$$S_{ABCI} = 14$$

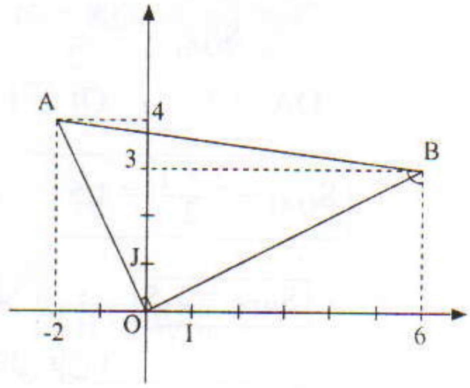
ولدينا : $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$$= \sqrt{(5-4)^2 + (2-5)^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{1+9}$$
$$\boxed{BC = \sqrt{10}}$$

ومنه فإن :

$$AH = \frac{14}{\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{10} = \frac{7\sqrt{10}}{5}$$
$$\boxed{AH = \frac{7\sqrt{10}}{5}}$$

تمرين 20



1 - أحسب $\cos O\hat{B}A$

أبين أن المثلث OBA قائم الزاوية.

لدينا : $A(-2\,;\,4)$ و $B(6\,;\,3)$

إذن : $\overrightarrow{OA}(-2\,;\,4)$ و $\overrightarrow{OB}(6\,;\,3)$ و $\overrightarrow{AB}(8\,;\,-1)$

ومنه فإن :

$$OA = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$
$$= 2\sqrt{5}$$
$$OB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$
$$= 3\sqrt{5}$$
$$AB = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$$

بما أن :

$$OA^2 + OB^2 = (2\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 = 65$$
$$AB^2 = (\sqrt{65}\,)^2 = 65$$

فإن : $OA^2 + OB^2 = AB^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية نستنتج أن OAB قائم الزاوية في O.

✤ في المثلث OAB القائم الزاوية في O

$$\text{Cos } O\hat{B}A = \frac{OB}{AB}$$
$$\text{Cos } O\hat{B}A = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{65}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{13} \times \sqrt{5}}$$
$$\text{Cos } O\hat{B}A = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

2 - أحدد قيمة مقربة إلى 1,0 درجة لقياس $O\hat{A}B$

باستعمال الآلة الحاسبة العلمية ومن خلال :

$$\cos O\hat{B}A = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

نستنتج أن : $O\hat{B}A \approx 33{,}6$

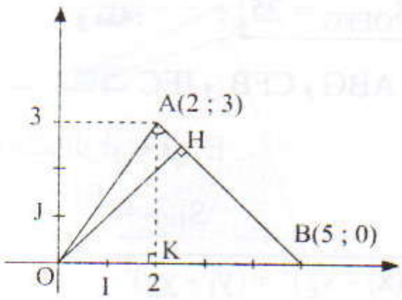
وبما أن : OBA قائم الزاوية

فإن : $O\hat{B}A + O\hat{A}B = 90°$

أي : $O\hat{A}B = 90° - O\hat{B}A$

$$O\hat{A}B \approx 90° - 33{,}6$$
$$\boxed{O\hat{A}B \approx 56{,}4}$$

تمرين 21



1 - أحسب مساحة المثلث OAB

مساحة OAB هي : $S_{OAB} = \dfrac{AK \times OB}{2}$

حيث K المسقط العمودي لـ A على (OB)

← لدينا : $B(5\,;\,0)$ و $\overrightarrow{OB}\ (5\,;\,0)$

ومنه فإن : $OB = \sqrt{5^2 + 0} = 5$

← لدينا : $A(2\,;\,3)$ و $K(2\,;\,0)$

إذن :

$$AK = \sqrt{(x_k - x_A)^2 + (y_k - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(2 - 2)^2 + (0 - 3)^2}$$
$$= \sqrt{0^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{9} = 3$$
$$\boxed{AK = 3}$$
$$\boxed{S_{OAI} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5}$$

2 - أحسب OH :

OH هو الارتفاع الموافق للضلع [AB]

إذن : $S_{OAB} = \dfrac{OH \times AB}{2}$

لدينا : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(5-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{18}$

$\boxed{AB = 3\sqrt{2}}$

ولدينا : $S_{OAB} = 7{,}5$

إذن : $7{,}5 = \dfrac{OH \times 3\sqrt{2}}{2}$

أي أن : $7{,}5 \times 2 = OH \times 3\sqrt{2}$

$OH = \dfrac{15}{3\sqrt{2}} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{OH = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}}$

3 - أحسب $\sin \hat{A}$ و $\cos \hat{A}$

❖ في المثلث OAH القائم الزاوية في H.

$\sin \hat{A} = \dfrac{OH}{OA}$

ولدينا : $OH = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

و : $OA = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\sin \hat{A} = \dfrac{\frac{5\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{13}}$

$\boxed{\sin \hat{A} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}}$

لدينا : $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$

أي : $\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A}$

$\cos^2 \hat{A} = 1 - \left(\dfrac{5\sqrt{26}}{26}\right)^2$

$\cos^2 \hat{A} = 1 - \dfrac{650}{676}$

$\cos^2 \hat{A} = 1 - \dfrac{325}{338} = \dfrac{338 - 325}{338}$

$\cos^2 \hat{A} = \dfrac{13}{338} = \dfrac{1}{26}$

بما أن : $\cos \hat{A} > 0$

$\cos \hat{A} = \sqrt{\dfrac{1}{26}} = \dfrac{\sqrt{26}}{26}$

$\boxed{\cos \hat{A} = \dfrac{\sqrt{26}}{26}}$

3 - أتأكد أن :

$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2OA \times AB \times \cos \hat{A}$

← لدينا : $OB = 5$ إذن : $\boxed{OB^2 = 25}$ (1)

← لدينا : $OA = \sqrt{13}$ إذن : $OA^2 = 13$

$AB = 3\sqrt{2}$ إذن : $AB^2 = 18$

$\cos \hat{A} = \dfrac{\sqrt{26}}{26}$

ومنه فإن :

$OA^2 + AB^2 - 2OA \times AB \times \cos \hat{A}$

$= 13 + 18 - 2 \times \sqrt{13} \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{26}}{26}$

$= 31 - 2 \times 3 \times \dfrac{\sqrt{26} \times \sqrt{26}}{26}$

$= 31 - 2 \times 3 \times \dfrac{\sqrt{26}^2}{26}$

$= 31 - 2 \times 3 \times \dfrac{\cancel{26}}{\cancel{26}}$

$= 31 - 6$

$= 25$

أي أن :

(2) $\boxed{OA^2 + AB^2 - 2OA \times AB \cos \hat{A} = 25}$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$\boxed{OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2OA \times AB \times \cos \hat{A}}$

5 الدالــة الخطيــة

معارف أساسية

1 - تـعـاريـــف

a عدد معلوم.

كل علاقة تربط عددا x بالجداء ax. تسمى دالة خطية معاملها a.

إذا رمزنا لهذه الدالة بالرمز f فإننا نكتب : $f : x \longrightarrow ax$ أو $f(x) = ax$.

الكتابة $f(x)$ تقرأ صورة العدد x بالدالة الخطية f.

إذن ax هي صورة x بالدالة الخطية f.

2 - خــاصيـــة

f دالة خطية معاملها a

لدينا $a = \dfrac{f(x)}{x}$ مهما كانت قيمة العدد الغير المنعدم x.

ملاحظات:

لتحديد دالة خطية نحدد معاملها.

3 - نـتـائـج

- كل وضعية تناسبية تترجم بدالة خطية معاملها هو معامل التناسب.
- كل دالة خطية تترجم بوضعية تناسبية معاملها هو معامل الدالة الخطية.

4 - التمثيل المبياني لدالة خطية :

في معلم متعامد.

- التمثيل المبياني لدالة خطية معاملها a هو مجموعة النقط $M(x ; f(x))$ أي $M(x ; ax)$.
- التمثيل المبياني لدالة خطية معاملها a هو المستقيم المار من أصل المعلم ومن النقطة $A(1 ; a)$.

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

f دالة خطية حيث : $f : x \longrightarrow -4x$

أتمم ملأ الجدول :

x	6	$-\frac{5}{2}$		
$f(x)$			$\frac{3}{2}$	-1

تمرين 2

احسب معامل الدالة الخطية f في كل حالة من الحالات التالية :

① $f(-8) = 3$	② $f(5) = \frac{2}{3}$
③ $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3$	④ $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3}$

تمرين 3

① حدد الدالة الخطية f التي بواسطتها صورة 2 هي 120 .

② حدد الدالة الخطية g التي بواسطتها 2 - هي صورة (8 -)

تمرين 4

في معلم متعامد (O,I,J) أرسم التمثيلات المبيانية للدوال التالية :

$f : x \longrightarrow \frac{7}{5}x$	$g : x \longrightarrow -\frac{2}{3}x$
$h : x \longrightarrow -4x$	

تمرين 5

دالة حيث : $f : x \longrightarrow 2x$.

نعتبر النقط A(- 1; - 2) و B(0,3 ; 0,7)

و C(13 ; -26) و D(-12,2 ; -24,4)

* حدد من بين النقط A و B و C و D التي تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f .

تمرين 6

حدد معامل الدالة الخطية f في كل حالة من الحالات التالية :

* $f : x \longrightarrow x + \frac{20}{100}x \; ; f : x \longrightarrow x - 3x$

* $f : x \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + x\sqrt{2}$

* $f : x \longrightarrow \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{4} - \frac{x+7}{12}$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 7

نعتبر الدالة h حيث : $h : x \longrightarrow -2x$

1 – في معلم متعامد أرسم التمثيل المبياني للدالة h.

2 – حدد مبيانيا قيمة العدد a علما أن النقطة $A(3 , a)$ تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة h

3 – حدد مبيانيا قيمة العدد b علما أن النقطة $B(b; -4)$ تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة h .

تمرين 8

لتكن $d(x)$ هي المسافة التي تقطعها سيارة بسرعة ثابتة قدرها $90km/h$ في مدة x (بالساعة)

1) أكتب $d(x)$ بدلالة x.

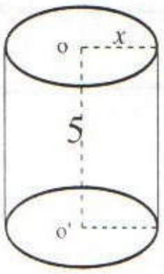
2) حدد المسافة التي تقطعها هذه السيارة في 1h24min.

3) حدد المدة التي تستغرقها السيارة لقطع مسافة 72km

تمرين 9

ليكن $V(x)$ هو حجم أسطوانة قائمة شعاعها x وارتفاعها 5.

1)* أتمم ملأ الجدول التالي :



x	3	4	5	π	
$V(x)$					π

2)* أعط صيغة للحجم $V(x)$ بدلالة x.

* هل هذه الصيغة تحدد دالة خطية ؟

تمرين 10

h دالة خطية حيث :

$$h\left(-\frac{3}{2}\right)-h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

* حدد معامل الدالة h

تمرين 11

لتكن $A(x)$ المساحة الجانبية بـ cm^2

لأسطوانة قائمة شعاع قاعدتها 5cm وارتفاعها x.

نعتبر الدالة A حيث $A : x \longrightarrow A(x)$

1)* هل الدالة A خطية ؟ علل جوابك .

2)* احسب قيمة العدد h حيث $A(h)=20\pi$.

تمارين توليفية

تمرين 12

بمناسبة نجاح صفقة تجارية ضخمة قررت شركة الرفع من

أجور جميع عمالها بنسبة 15% .

ليكن $S(x)$ الراتب الشهري الجديد لعامل و x راتبه القديم

بالدرهم .

* نعتبر الدالة $S : x \longrightarrow S(x)$

1) بين أن S دالة خطية معاملها 1,15

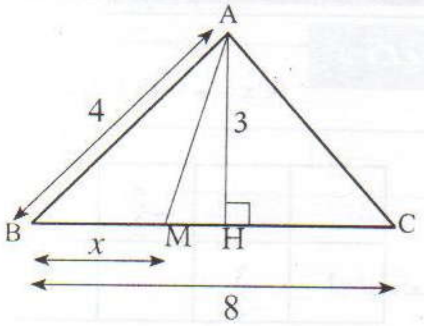
2) احسب الراتب الجديد لعامل راتبه القديم هو: 4375 درهما .

3) حدد الراتب القديم لعامل راتبه الجديد هو: 3450 درهما .

تمرين 13

ABC مثلث و M نقطة من [BC]

نضع $BM = x$ كما في الشكل



لتكن $A(x)$ مساحة المثلث ABM

1) بين أن الدالة $A : x \longrightarrow A(x)$ خطية وحدد معاملها .

2) حدد الوضع الهندسي للنقطة M علما أن $A(x) = 6$:

3) بين أنه لايوجد عدد حقيقي x حيث : $A(x) = 21$.

4) في معلم (O,I,J) متعامد أرسم التمثيل المبياني للدالة A نعتبر $A(0) = 0$.

تمرين 14

ABC مثلث قائم الزاوية في B حيث:

BC = 4cm و BA = 3cm

M نقطة من القطعة [AB].

نضع $AM = x$

العمودي على (AB) في النقطة M يقطع (AC) في نقطة N.

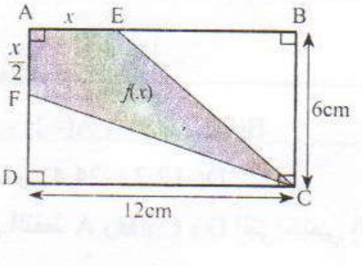
1) بين أن المحيط $p(x)$ للمثلث AMN هو دالة خطية للعدد x.

2) حدد القيم التي تأخدها x.

3) ماهو التمثيل المبياني لهذه الدالة؟

تمرين 15

نعتبر الشكل أسفله



1) احسب مساحة الرباعي AECF بدلالة x.

2) حدد طبيعة الدالة $f(x)$

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

$f : x \longrightarrow -4x$

أتمم ملأ الجدول :

$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{2}$	6	x
-1	$\frac{3}{2}$	10	-24	$f(x)$

تمرين 2

نحسب a معامل الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

نعلم أن : $\frac{f(x)}{x} = a$ مهما كان العدد الغير المنعدم x.

1) إذا كان $f(-8) = 3$ فإن $a = \frac{f(-8)}{-8}$

أي: $\boxed{a = \frac{3}{-8} = -\frac{3}{8}}$

2) إذا كان $f(5) = \frac{2}{3}$ فإن : $a = \frac{f(5)}{5}$

أي : $a = \frac{\frac{2}{3}}{5}$

$a = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

إذن : $\boxed{a = \frac{2}{15}}$

3) إذا كان $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3$ فإن : $a = \frac{f\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3}}$

$a = \frac{3}{\frac{2}{3}} = 3 \times \frac{3}{2}$

إذن : $\boxed{a = \frac{9}{2}}$

4) إذا كان $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{7}{3}$ فإن : $a = \frac{f\left(\frac{5}{3}\right)}{\frac{5}{3}}$

$a = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)}{\frac{5}{3}}$

$a = \frac{7}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{5}$

إذن : $\boxed{a = \frac{7}{5}}$

تمرين 3

1) لدينا : $f(2) = 120$

وليكن a معامل الدالة الخطية f.

إذن : $a = \frac{f(2)}{2}$

$a = \frac{120}{2}$

ومنه : $\boxed{a = 60}$

إذن : f دالة خطية حيث $f : x \longrightarrow 60x$

2) لدينا : $g(-8) = -2$

وليكن m معامل الدالة الخطية g.

إذن : $m = \frac{g(-8)}{-8}$

$m = \frac{-2}{-8}$

ومنه : $\boxed{m = \frac{1}{4}}$

إذن : g دالة خطية حيث $g : x \longrightarrow \frac{1}{4} x$

تمرين 4

نرسم في معلم متعامد (O,I,J)

$(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ و $(\mathcal{C}_h)$ التمثيلات المبيانية للدوال f و g و h على التوالي.

* $f : x \longrightarrow \frac{7}{5} x$

$(\mathcal{C}_f)$ التمثيل المبياني للدالة الخطية f هو المستقيم المار من أصل المعلم و من النقطة ذات الإحداثيات:

$(5 ; f(5))$ أي : $(5 ; 7)$

* $g : x \longrightarrow -\frac{2}{3} x$

$(\mathcal{C}_g)$ التمثيل المبياني للدالة الخطية g هو

المستقيم المار من أصل المعلم و من النقطة ذات الاحداثيات :

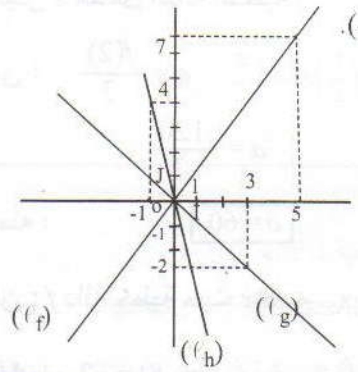
$(3\ ;\ g(3))$ أي : $(3\ ;\ -2)$.

$h : x \longrightarrow -4x$ *

$(\mathcal{C}_h)$ التمثيل البياني للدالة الخطية h هو

المستقيم المار من أصل المعلم و من النقطة ذات الاحداثيات :

$(-1;\ h(-1))$ أي : $(-1\ ;\ 4)$.



تمرين 5

لدينا : f دالة خطية حيث : $f : x \longrightarrow 2x$

تذكير

> لكي تكون نقطة $M(x\ ;\ y)$ تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f يجب أن تكون : $f(x) = y$

✤ لدينا : $A(-1,-2)$ و $f(-1) = 2 \times (-1) = -2$

إذن : $f(x_A) = y_A$

ومنه فإن النقطة A تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f.

✤ لدينا : $B(0,3\ ;\ 0,7)$

و $f(0,3) = 2 \times 0,3 = 0,6 \neq 0,7$

إذن : $f(x_B) \neq y_B$

ومنه فإن النقطة B لا تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f.

✤ لدينا : $C(13\ ;\ -26)$

و $f(13) = 2 \times 13 = 26 \neq -26$

إذن : $f(x_C) \neq y_C$

ومنه فإن النقطة C لا تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f.

✤ لدينا : $D(-12,2\ ;\ -24,4)$

و $f(-12,2) = 2 \times (-12,2) = -24.4$

إذن : $f(x_D) = y_D$

ومنه فإن النقطة D تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f.

تمرين 6

نحدد معامل الدالة الخطية f في كل حالة من الحالات التالية :

♣ 1) $f : x \longrightarrow x - 3x$

$$f(x) = x - 3x = (1-3)x = -2x$$

إذن : $f : x \longrightarrow -2x$

ومنه فإن (-2) هو معامل f.

♣ 2) $f : x \longrightarrow x + \frac{20}{100}x$

$$f(x) = x + \frac{20}{100}x$$
$$= \left(1 + \frac{2}{10}\right)x$$
$$f(x) = \frac{12}{10}x = \frac{6}{5}x$$

إذن : $f : x \longrightarrow \frac{6}{5}x$

ومنه فإن $\frac{6}{5}$ هو معامل الدالة الخطية f.

♣ 3) $f : x \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} + x\sqrt{2}$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} + x\sqrt{2}$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)x$$
$$= \left(\frac{1+\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}}\right)x$$
$$= \frac{1+2}{\sqrt{2}}x$$
$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}x = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$$

ومنه فإن $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ هو معامل الدالة الخطية f.

× 4) $f : x \longrightarrow \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{4} - \frac{x+7}{12}$

$$f(x) = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{4} - \frac{x+7}{12}$$
$$= \frac{4(x+1)}{12} + \frac{3(x+1)}{12} - \frac{(x+7)}{12}$$
$$= \frac{4x+4+3x+3-x-7}{12}$$
$$f(x) = \frac{6}{12}x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

إذن : $f : x \longrightarrow \frac{1}{2}x$

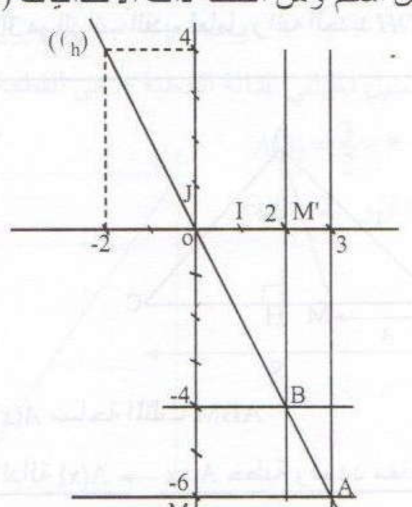
ومنه فإن $\frac{1}{2}$ هو معامل الدالة الخطية f.

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 7

* 1) $h : x \longrightarrow -2x$.

h دالة خطية إذن التمثيل البياني للدالة h هو المستقيم المار من أصل المعلم ومن النقطة ذات الاحداثيات $(4\ ;\ -2)$



2) نحدد مبيانيا قيمة a حيث النقطة $A(a\,;3)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة h.

♣ النقطة A هي نقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة h مع الموازي لمحور الأراتيب (OJ) والمار من النقطة ذات الاحداثيات (0 ; 3) وللحصول على قيمة العدد a ارتوب A نرسم M المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (OJ) ونحصل على : $\boxed{a = -6}$

3) نحدد مبيانيا قيمة b حيث النقطة $B(b\ ;\ -4)$ تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة h.

♣ النقطة B هي نقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة h و المستقيم الموازي لمحور الأفاصيل (OI) و المار من النقطة ذات الاحداثيات (4- ; 0) وللحصول على قيمة العدد b نرسم M' المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (OI) ونحصل على : $\boxed{b = 2}$

تمرين 8

تذكير: المسافة = السرعة × المدة

* 1) لتكن x المدة بالساعات اللازمة لقطع مسافة $d(x)$.

إذن : $d : x \longrightarrow 90x$

أي : $\boxed{d(x) = 90x}$

* 2) لدينا : $1h42min = 1,7h$

$d(1,7) = 90 \times 1,7 = 153$

إذن : $153km$ هي المسافة التي تقطعها السيارة في 1h42min

* 3) لتكن t هي المدة بالساعات اللازمة لقطع مسافة 72km

إذن : $d(t) = 72$

يعني : $90\,t = 72$

$t = \frac{72}{90}$

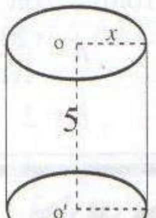
$t = 0,8h$

$\boxed{t = 48min}$

إذن : 48min هي المدة التي تستغرقها السيارة لقطع مسافة 72km.

تمرين 9

$V(x)$ حجم الأسطوانة القائمة شعاعها x وارتفاعها 5.



1) أتمم الجدول التالي :

x	3	4	5	π	$\frac{\sqrt{5}}{5}$
$V(x)$	45π	80π	125π	$5\pi^3$	π

2) x شعاع الأسطوانة التي ارتفاعها 5

إذن : $\boxed{V(x) = 5\pi x^2}$

ومنه فإن : $V(x)$ لا يحدد صيغة لدالة خطية.

تمرين 10

ليكن العدد a هو معامل الدالة الخطية h.

إذن : $h(x) = ax$

ولدينا : $h\left(-\frac{3}{2}\right) - h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

يعني أن : $-\frac{3}{2}a - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}$

يعني أن : $-\frac{6a}{2} = \frac{1}{2}$

يعني أن : $\boxed{a = -\frac{1}{6}}$

ومنه فإن العدد $-\frac{1}{6}$ هو معامل الدالة الخطية h.

تمرين 11

1) لدينا : $A : x \longrightarrow A(x)$

حيث : $A(x)$ هي المساحة الجانبية لأسطوانة قائمة شعاعها 5 وارتفاعها x

إذن : $A(x) = 2\pi \times 5 \times x$

يعني أن : $\boxed{A(x) = 10\pi . x}$

إذن : $A : x \longrightarrow 10\pi x$

ومنه فإن : A دالة خطية معاملها 10π.

2) لدينا : $A(h) = 20\pi$

يعني $10\pi h = 20\pi$

$h = \frac{20\pi}{10\pi}$

ومنه فإن : $h = 2$

تمارين توليفية

تمرين 12

1) لدينا x هو الراتب القديم لعامل بالشركة

إذن : قيمة الزيادة في الأجرة هي : $15\%x$ أي : $0,15x$

ولدينا : $S(x)$ هو الراتب الجديد للعامل.

إذن : $S(x) = x + 0,15x$

يعني : $\boxed{S(x) = 1,15x}$

أي : $S : x \longrightarrow 1,15x$

ومنه فإن : S دالة خطية معاملها 1,15.

2) حساب الراتب الجديد لعامل كان راتبه القديم هو 4375.

$S(4375) = 1,15 \times 4375 = 5031,25$

إذن : $5031,25\,DH$ هو الراتب الجديد لعامل راتبه القديم هو : $4375DH$

3) حساب الراتب القديم لعامل راتبه الجديد هو : $3450DH$

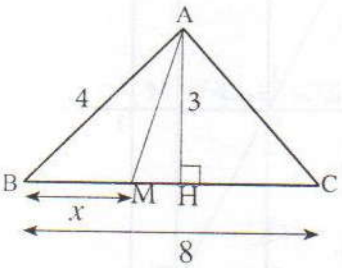
$S(x) = 3450$

$1,15x = 3450$

$x = \frac{3450}{1,15} = 3000$

إذن : $3000DH$ هو الراتب القديم لعامل راتبه الجديد $3450DH$.

تمرين 13



$BM = x$ و $A(x)$ مساحة المثلث ABM

1) نبين أن الدالة $A : x \longrightarrow A(x)$ خطية ونحدد معاملها.

لدينا : $A : x \longrightarrow A(x)$

حيث : $A(x)$ مساحة المثلث ABM

إذن : $A(x) = \frac{1}{2} \times AH \times BM$

و لدينا : $AH = 3$ و $BM = x$

إذن : $\boxed{A(x) = \frac{3}{2}x}$

ومنه فإن الدالة A خطية ومعاملها هو العدد $\frac{3}{2}$.

2) نحدد الوضع الهندسي للنقطة M علما أن : $A(x) = 6$

* $A(x) = 6$ يعني أن : $\frac{3}{2}x = 6$.

أي : $x = 6 \times \frac{2}{3}$ $\boxed{x = 4}$

وبالتالي فإن : $A(x) = 6$

إذا كانت M نقطة من القطعة [BC]

حيث : $BM = 4\text{ cm}$ (M منتصف $[BC]$)

3) نبين أنه لا يوجد عدد حقيقي x حيث : $A(x) = 12$

$A(x) = 21$ يعني أن : $\frac{3}{2}x = 21$

$x = 21 \times \frac{2}{3}$

$\boxed{x = 14\text{ cm}}$

أي أن : ① $BM = 14cm$

وبما أن M نقطة من القطعة [BC]

فإن : $BM \leqslant BC$

أي : $BM \leqslant 8cm$ ②

من ① و ② نستنتج أن هناك تناقض .

وبالتالي فإنه لا يوجد عدد حقيقي x يحقق

$A(x) = 21$

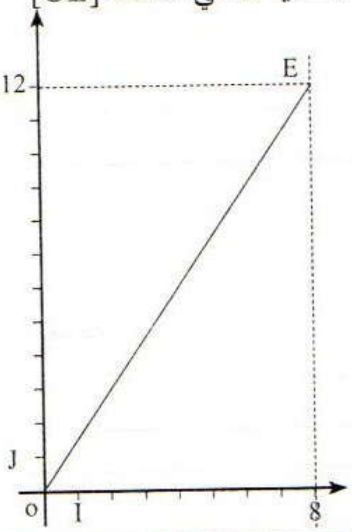
4) لدينا: $A(0) = 0$ و $0 \leqslant BM \leqslant BC$

ومنه: $0 \leqslant x \leqslant 8$

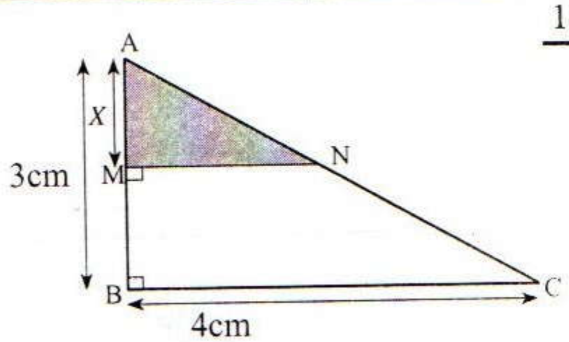
إذن التمثيل المبياني للدالة الخطية A هي القطعة [OE]

$A(8) = \frac{3}{2} \times 8 = 12$

$O(0\,;0)$ و $E(8\,;12)$



تمرين 14



1) * نحسب AC :

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس على المثلث ABC القائم الزاوية في B نجد أن :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2$$
$$= 9 + 16 = 25$$

إذن : $\boxed{AC = 5}$

* نحسب : MN و AN بدلالة x :

بتطبيق خاصية طاليس المباشرة على المثلث ABC حيث :

$(MN) // (BC)$

نجد أن : $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

أي : $\frac{MN}{4} = \frac{x}{3} = \frac{AN}{5}$

ومنه فإن : $\boxed{AN = \frac{5}{3}x}$ و $\boxed{MN = \frac{4}{3}x}$

* نحسب $p(x)$ بدلالة x :

$p(x) = AM + MN + AN$

$p(x) = x + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}x$

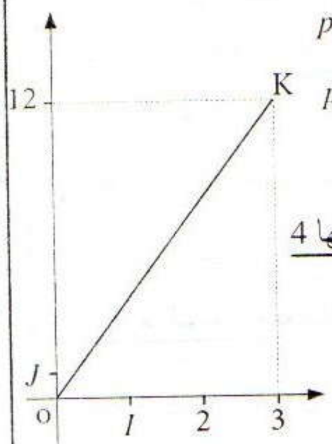
ومنه فإن : $\boxed{p(x) = 4x}$

إذن : الدالة p دالة خطية معاملها 4

2) * إذا كانت $M = A$ فإن $x = 0$

وإذا كانت $M = B$ فإن $x = 3$

ومنه فإن : $\boxed{0 \leqslant x \leqslant 3}$



3) * التمثيل المبياني لهذه الدالة هي :

القطعة [OK] حيث o أصل المعلم و $K(3\,;12)$.

تمرين 15

1) * مساحة الرباعي AECF تساوي مجموع مساحتي AEC و AFC.

* مساحة المثلث AEC هي : $\frac{6 \times x}{2}$ أي: $3x$

* مساحة المثلث AFC هي : $\frac{1}{2}\left(12 \times \frac{x}{2}\right)$

أي: $3x$

ومنه فإن : $f(x) = 3x + 3x$ أي : $\boxed{f(x) = 6x}$

2) بما أن $f(x) = 6x$ فإن الدالة f خطية معاملها العدد 6.

6 الدالـة التآلفيـة

معارف أساسية

1- تعاريف

a و b عددان معلومان.

العلاقة التي تربط العدد x بالعدد ax + b تسمى دالة تآلفية معاملها a.

إذا رمزنا لهذه الدالة بالرمز f فإننا نكتب :

$f : x \longrightarrow ax + b$ أو $f(x) = ax + b$

العدد ax + b يسمى صورة العدد x بالدالة f

ملاحظات:

الدالة الخطية هي دالة تآلفية

2- دالتان خاصتان

• إذا كان $a = 0$ فإن $f : x \longrightarrow b$ والدالة تسمى دالة ثابتة.

• إذا كان $a = 0$ و $b = 0$ **فإن** $f : x \longrightarrow 0$ والدالة تسمى دالة منعدمة.

3- خاصية:

f دالة تآلفية معاملها a.

مهما كان العددان المختلفان x و y

لدينا $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = a$

4- خاصية:

$f : x \longrightarrow ax + b$

التمثيل المبياني للدالة التآلفية هو مجموعة النقط $M(x\ ,\ ax + b)$

التمثيل المبياني لدالة تآلفية هو مستقيم

ملاحظة:

ـ التمثيل المبياني لدالة ثابتة هو مستقيم يوازي محور الأفاصيل.

ـ التمثيل المبياني لدالة منعدمة هو محور الأفاصيل.

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

دالة تآلفية حيث : $f : x \longrightarrow \frac{2}{3}x - 1$

أتمم ملأ الجدول التالي :

x	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$			
f(x)				1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

تمرين 2

f دالة تآلفية : $f : x \longrightarrow \frac{1}{3}x - 3$

1 – احسب صورة $\frac{3}{4}$ بالدالة f.

2 – حدد العدد الذي صورته بالدالة f هي: $\frac{3}{4}$

تمرين 3

f دالة تآلفية : $f(x) = -3x - \frac{1}{3}$

1 – احسب $f(\frac{1}{3})$ و $f(-\frac{1}{3})$

2 – حل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}$.

3 – حدد العدد الذي يساوي صورته بالدالة f .

تمرين 4

في معلم (O,I,J) متعامد مثل الدوال التالية :

$g : x \longrightarrow -3x + 2 \quad ; \quad f : x \longrightarrow -3x$

$l : x \longrightarrow 3 \quad ; \quad h : x \longrightarrow x$

تمرين 5

دالة تآلفية حيث $f : x \longrightarrow -2x - 3$:

A و B نقطتان من التمثيل المبياني للدالة f.

1 – حدد أرتوب النقطة A علما أن أفصولها هو (1-)

2 – حدد أفصول النقطة B علما أن أرتوبها هو 1

3 – في معلم (O,I,J) متعامد، أنشئ المستقيم (D) التمثيل المبياني للدالة f .

تمرين 6

بين أن النقطة A(3;4) تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f حيث : $f : x \longrightarrow x + 1$

تمرين 7

1 – حدد الدالة التآلفية f التي تمثيلها المبياني يمر من النقطتين A(3,3) و B(-3,-3) .

2 – هل النقطة C(-4,4) تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f ؟ علل جوابك

تمرين 8

حدد الدالة التآلفية f حيث $f(1) = 3$ و $f(3) = 1$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 9

f و g دالتان حيث :

$f : x \longrightarrow 3x - 2$ و $g : x \longrightarrow 2x - 3$.

1 – في معلم (O,I,J) متعامد، ارسم التمثيلين المبيانيين للدالتين لـ f و g

2 – حدد مبيانيا إحداثيتا K نقطة تقاطع التمثيلين المبيانيين (C_f) و (C_g)

تمرين 10

لتكن f دالة تآلفية :

– بين أن : $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$

تمرين 11

ABC مثلث حيث AB=5 و AC=6 و BC = x ليكن P(x) هو محيط المثلث ABC. و الدالة : $P : x \longrightarrow P(x)$

1 – ماهي القيم الممكنة للعدد x ؟ علل جوابك.

2 – بين أن P دالة تآلفية.

3 – في معلم (O,I,J) متعامد، ارسم التمثيل المبياني للدالة P.

تمرين 12

$f : x \longrightarrow 2x + 4$ و $g : x \longrightarrow -x + 1$

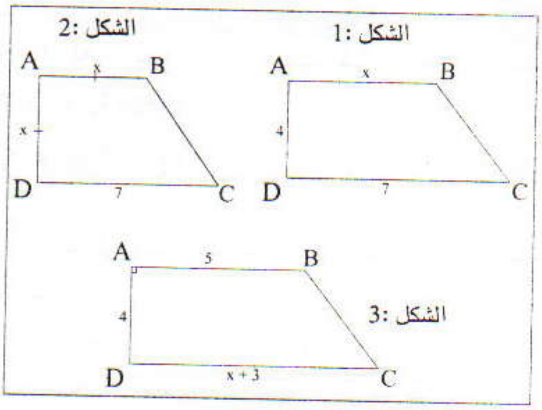
1 – في معلم (O,I,J) متعامد، ارسم التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g

2 – حل مبيانيا المعادلة $f(x) = g(x)$.

3 – تأكد من النتيجة جبريا .

تمرين 13

لاحظ الأشكال التالية :



لتكن $A(x)$ مساحة شبه المنحرف و$A: x \longmapsto A(x)$.

تأكد في كل حالة هل الدالة A تآلفية.

تمارين توليفية

تمرين 14

ABC مثلث حيث :

$BC = 10cm$ و $AC = 6cm$ و $AB = 8cm$

لتكن M نقطة من [AB] تخالف A و B نضع $AM = x$

(x عدد حقيقي موجب).

الموازي للمستقيم (BC) المار من M يقطع (AC) في N.

1 - حدد قيم x الممكنة.

2 - نعتبر الدالة : $P: x \longmapsto P(x)$ حيث $P(x)$ هو محيط شبه المنحرف MNCB.

أ - بين أن : P دالة تآلفية وحدد معاملها.

ب - احسب محيط شبه المنحرف إذا كان $x = 6cm$

ج - حدد قيمة x إذا كان محيط MNCB هو 22cm .

3 - بين أن محيط شبه المنحرف MNCB لا يمكن ان يساوي 19cm.

4 - اعط تأطيرا لمحيط شبه المنحرف MNCB.

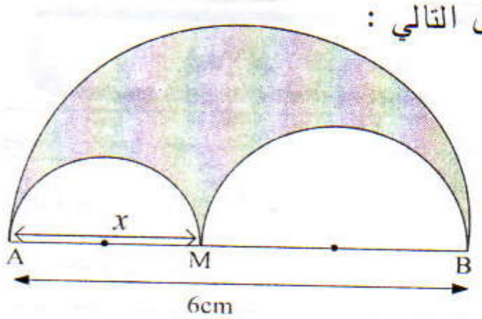
تمرين 15

f دالة تآلفية حيث : $f(4) - f(3) = 4$

احسب : $f(5) - f(2)$

تمرين 16

لاحظ الشكل التالي :



نعتبر الدالة $P: x \longmapsto P(x)$ حيث : $P(x)$ هو محيط الجزء الملون.

- حدد طبيعة الدالة P.

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

f دالة تآلفية حيث : $f : x \longmapsto \frac{2}{3}x - 1$ أتمم الجدول التالي :

x	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	3	$\frac{15}{4}$	$-\frac{3}{4}$
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	0	-2	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

تمرين 2

$f : x \longmapsto \frac{1}{3}x - 3$

1 - أحسب صورة $\frac{3}{4}$ بالدالة f :

$$f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - 3 = \frac{1}{4} - 3 = \frac{1 - 12}{4} = \frac{-11}{4}$$

إذن $-\frac{11}{4}$ هي صورة $\frac{3}{4}$ بالدالة f.

2 – أحدد العدد الذي صورته بالدالة f هو: $\frac{3}{4}$

يعني أن $f(x) = \frac{3}{4}$ $\quad \frac{1}{3}x - 3 = \frac{3}{4}$

يعني أن $\frac{1}{3}x = \frac{3}{4} + 3$

يعني أن $\frac{1}{3}x = \frac{3 + 12}{4}$

يعني أن $\frac{1}{3}x = \frac{15}{4}$

يعني أن $x = \frac{15}{4} \times 3$

ومنه فإن $x = \frac{45}{4}$

العدد الذي صورته بالدالة f تساوي $\frac{3}{4}$ هو : $\frac{45}{4}$

تمرين 3

$f(x) = -3x - \frac{1}{3}$

1 – أحسب : $f(-\frac{1}{3})$ و $f(\frac{1}{3})$

$$f(-\frac{1}{3}) = -3 \times (\frac{-1}{3}) - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{3}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{3 - 1}{3}$$
$$f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$$
$$f(\frac{1}{3}) = -3 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{-3}{3} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{-4}{3}$$
$$f(\frac{1}{3}) = \frac{-4}{3}$$

2 – أحل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}$

يعني أن $f(x) = \frac{1}{2}$ $\quad -3x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

يعني أن: $-3x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

يعني أن: $-3x = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

يعني أن: $-3x = \frac{5}{6}$

يعني أن: $x = \frac{5}{6} \times \frac{1}{-3}$

ومنه فإن: $x = \frac{-5}{18}$

إذن $\frac{-5}{18}$ هو حل المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$

3 – أحدد العدد x حيث $f(x) = x$

يعني أن $f(x) = x$ $\quad -3x - \frac{1}{3} = x$

يعني: $-3x - x = \frac{1}{3}$

يعني $-4x = \frac{1}{3}$

يعني: $x = \frac{1}{3} \times \frac{1}{-4}$

ومنه: $x = \frac{-1}{12}$

$(\frac{-1}{12})$ هو العدد الذي يساوي صورته بالدالة f.

تمرين 4

* $f : x \longmapsto -3x$

f دالة خطية

إذن $(\mathcal{C}_f)$ التمثيل المبياني للدالة f هو المستقيم المار من أصل المعلم ومن النقطة ذات الاحداثيات $(1, -3)$

حيث: $f(1) = -3$

* $g : x \longmapsto -3x + 2$

g دالة تآلفية

إذن $(\mathcal{C}_g)$ التمثيل المبياني للدالة g هو المستقيم المار من النقطتين ذات الاحداثيات $(0, 2)$ و $(2, -4)$

حيث : $g(0) = 2$ و $g(2) = -4$

* $h : x \longmapsto x$

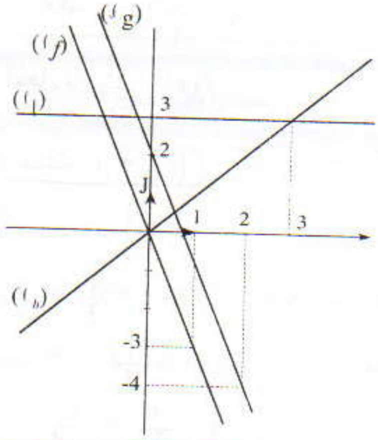
h دالة خطية

إذن ($(\mathcal{C}_h)$) التمثيل البياني للدالة هو المستقيم المار من أصل المعلم و من النقطة ذات الاحداثيات $(3 , 3)$ حيث $h(3) = 3$

* $l : x \longmapsto 3$

l دالة ثابتة

إذن ($(\mathcal{C}_l)$) التمثيل البياني للدالة l هو المستقيم الموازي لمحور الأفاصيل والمار من النقطة $(0 , 3)$.



تمرين 5

f دالة تآلفية حيث : $f : x \longmapsto -2x - 3$

1 – أحدد أرتوب النقطة A علما أن أفصولها هو 1 - .

✤ النقطة A تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f.

إذن: $f(x_A) = y_A$

ولدينا: $x_A = -1$

ومنه فإن: $f(-1) = y_A$

أي: $y_A = -2 \times (-1) - 3$

$y_A = 2 - 3$

$\boxed{y_A = -1}$

إذن العدد 1 - هو أرتوب النقطة A

2 – أحدد أفصول النقطة B علما أن أرتوبها هو 1.

✤ النقطة B تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f.

إذن $f(x_B) = y_B$ ولدينا $y_B = 1$.

ومنه فإن $f(x_B) = 1$

أي: $-2x_B - 3 = 1$

$-2x_B = 3 + 1$

$-2x_B = 4$

$x_B = \dfrac{-4}{2}$

$\boxed{x_B = -2}$

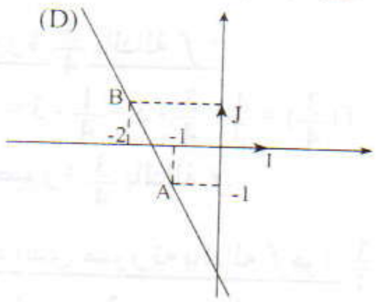
إذن العدد 2 - هو أفصول النقطة B

3 – أنشئ التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد (O,I,J).

f دالة تآلفية

إذن التمثيل البياني للدالة هو المستقيم (AB) حيث :

$A(-1 , -1)$ و $B(-2 , 1)$



تمرين 6

f دالة تآلفية : $f : x \longmapsto x + 1$

أبين أن النقطة $A(3 , 4)$ تنتمي إلى $(\mathcal{C}_f)$.

لكي تنتمي النقطة A إلى $(\mathcal{C}_f)$ يجب أن يتحقق : $f(x_A) = y_A$

ولدينا $x_A = 3$ و $y_A = 4$

$f(x_A) = f(3) = 3 + 1 = 4$

إذن $f(x_A) = y_A$

ومنه فإن النقطة A تنتمي إلى التمثيل البياني للدالة f.

تمرين 7

1 – أحدد الدالة التآلفية f التي تمثيلها المبياني يمر من النقطتين $A(3 , 3)$ و $B(-3 , -3)$

✤ التمثيل المبياني للدالة f يمر من النقطتين A و B

يعني أن $f(x_A) = y_A$ و $f(x_B) = y_B$

أي أن $f(3) = 3$ و $f(-3) = -3$

نضع : $f(x) = ax + b$

أحسب العدد a : $a = \dfrac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$

$= \dfrac{3 - (-3)}{3 - (-3)} = \dfrac{3+3}{3+3} = \dfrac{6}{6} = 1$

ومنه فإن $a = 1$

إذن $f(x) = x + b$

أحسب العدد b :

بما أن $f(3) = 3$ فإن $b + 3 = 3$

$b = 3 - 3$

إذن $b = 0$

ومنه فإن $f(x) = x$

إذن f دالة تآلفية حيث : $f : x \longrightarrow x$

ملاحظة :الدالة f هي دالة خطية.

2 - أبين أن النقطة $C(-4\,,4)$ لا تنتمي إلى $(\mathscr{C}_f)$

لدينا : $C(-4\,,4)$

$f(x_C) = f(-4) = -4 \neq 4$

إذن $f(x_C) \neq y_C$

ومنه فإن النقطة C لا تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة f.

تمرين 8

أحدد الدالة التآلفية f حيث :

$f(1) = 3$ و $f(3) = 1$

نضع : $f(x) = ax + b$

✤ أحدد العدد a :

$a = \dfrac{f(1) - f(3)}{1 - 3} = \dfrac{3 - 1}{1 - 3} = \dfrac{2}{-2} = -1$

$a = -1$

ومنه فإن $f(x) = -x + b$

✤ أحدد العدد b :

بما أن : $f(3) = 1$ فإن : $-3 + b = 1$

$b = 1 + 3$

$b = 4$

وبالتالي فإن : $f(x) = -x + 4$

إذن : f دالة تآلفية حيث : $f : x \longrightarrow -x + 4$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 9

f و g دالتان تآلفيتان حيث :

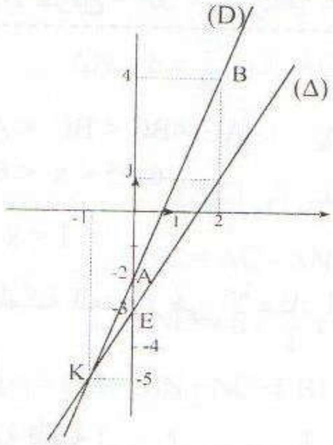
1) $f : x \longrightarrow 3x - 2$ و $g : x \longrightarrow 2x - 3$

✤ التمثيل المبياني للدالة التآلفية f هو المستقيم (D).

المستقيم (D) يمر من النقطتين $A(0\,,-2)$ و $B(2\,,4)$

✤ التمثيل المبياني للدالة التآلفية g هو المستقيم (Δ)

المستقيم (Δ) يمر من النقطتين $E(0\,,-3)$ و $F(2\,,1)$



2) المستقيمان (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة K ومن خلال الشكل لدينا: $K(-1;-5)$

تمرين 10

f دالة تآلفية

إذن $f(x) = ax + b$ مع a و b عددان حقيقيان

أبين أن : $f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$

$f(\dfrac{x+y}{2}) = a(\dfrac{x+y}{2}) + b$

$= \dfrac{ax + ay}{2} + b$

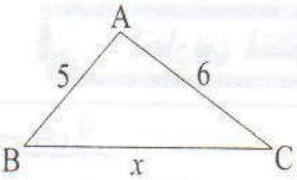
$= \dfrac{ax + ay + 2b}{2}$

$= \dfrac{ax + ay + b + b}{2}$

$= \dfrac{(ax + b) + (ay + b)}{2}$

ومنه فإن $f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$

تمرين 11



$P : x \longrightarrow P(x)$

$P(x)$ محيط المثلث ABC

1 - أحدد القيم الممكنة للعدد x :

تذكير : طول ضلع مثلث محصور بين فرق ومجموع طولي الضلعين الآخرين

ABC مثلث .

إذن $AC - BC < BC < AC + BC$

يعني أن $6 - 5 < x < 6 + 5$

$1 < x < 11$

ومنه فإن القيم الممكنة للعدد x هي الأعداد الحقيقية التي تحقق $1 < x < 11$

2 - أبين أن P دالة تآلفية :

$P(x) = AB + AC + BC$

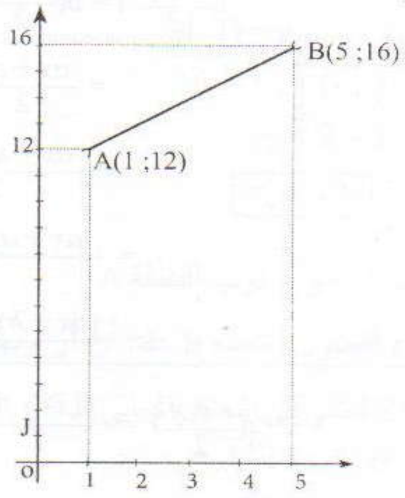
$P(x) = 5 + 6 + x$

$P(x) = x + 11$

إذن $P(x)$ دالة تآلفية معاملها 1 .

3 - أمثل (C_P) :

بما أن $1 < x < 11$ فإن (C_P) هي القطعة [AB] باستثناء النقطتين A و B .



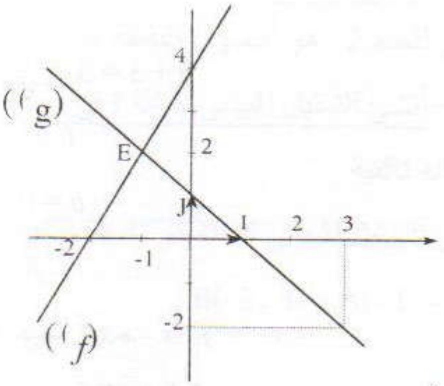
تمرين 12

$f : x \longrightarrow 2x + 4$ و $g : x \longrightarrow -x + 1$

1 - أنشئ (C_f) و (C_g) :

x	0	-2
$f(x)$	4	0

x	0	3
$g(x)$	1	-2



2 - أحل مبيانيا المعادلة : $f(x) = g(x)$

لتكن E نقطة تقاطع (C_f) و (C_g)

إذن من خلال التمثيل المبياني لدينا $E(-1 , 2)$

ومنه فإن x_E هو حل المعادلة $f(x) = g(x)$

إذن $f(x) = g(x)$ يعني أن : $x = -1$

3 - أحل جبريا المعالة : $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ يعني أن $2x + 4 = -x + 1$

يعني أن $2x + x = 1 - 4$

يعني أن $3x = -3$

يعني أن $x = \frac{-3}{3}$

إذن $x = -1$

ومنه فإن 1 - هو حل المعادلة $f(x) = g(x)$

تمرين 13

لتكن الدالة : $A : x \longrightarrow A(x)$

حيث : $A(x)$ مساحة شبه المنحرف ABCD.

1 - بالنسبة للشكل ① لدينا :

$A(x) = (x + 7) \times \frac{4}{2}$

يعني أن: $A(x) = 2 \times (x + 7)$

$A(x) = 2x + 14$

ومنه فإن A دالة تآلفية معاملها العدد 2.

2 - بالنسبة للشكل ② لدينا :

$A(x) = (x + 7) \times \frac{x}{2}$ يعني أن $A(x) = \frac{x^2 + 7x}{2}$

$A(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x$

ومنه فإن A دالة غير تآلفية

3 - بالنسبة للشكل ③ لدينا :

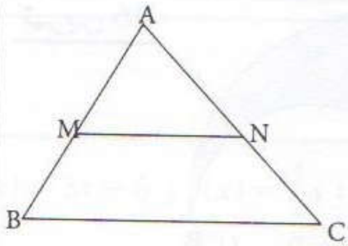
$A(x) = (5 + x + 3) \times \frac{4}{2}$ يعني أن: $A(x) = (x + 8) \times 2$

$A(x) = 2x + 16$

ومنه فإن A دالة تآلفية معاملها 2

تمارين توليفية

تمرين 14



1 - أحدد قيم x الممكنة :

لدينا M تنتمي إلى [AB]

و $M \neq A$ و $M \neq B$

إذن $0 < AM < AB$

وبما أن $AM = x$ و $AB = 8$

فإن $0 < x < 8$

القيم الممكنة للعدد x هي الأعداد الحقيقية التي تحقق $0 < x < 8$

2 - نعتبر الدالة : $P : x \rightarrow p(x)$

حيث $p(x)$ هو محيط شبه المنحرف MNCB

أ- أبين أن P دالة تآلفية وأحدد معاملها :

$p(x)$ محيط شبه المنحرف MNCB

إذن $p(x) = BM + MN + NC + CB$

✤ أحسب BM بدلالة x :

لدينا M تنتمي إلى [AB]

إذن $BM = AB - AM$

يعني $BM = 8 - x$

✤ أحسب MN و NC :

في المثلث : ABC

لدينا M تنتمي إلى (AB)

و N تنتمي إلى (AC)

و $(MN) \parallel (BC)$

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{8}$$

• $\frac{MN}{BC} = \frac{x}{8}$ يعني $MN = BC \times \frac{x}{8}$

ولدينا $BC = 10$ إذن $MN = \frac{10}{8}x$

أي $MN = \frac{5}{4}x$

• $\frac{AN}{AC} = \frac{x}{8}$ يعني $AN = AC \times \frac{x}{8}$

ولدينا $AC = 6$ إذن $AN = 6 \times \frac{x}{8}$

أي $AN = \frac{3}{4}x$

ولدينا N تنتمي إلى [AC]

إذن $NC = AC - AN$

ومنه فإن $NC = 6 - \frac{3}{4}x$

وبالتالي فإن: $p(x) = BM + MN + NC + CB$

$$= 8 - x + \frac{5}{4}x + 6 - \frac{3}{4}x + 10$$

$$= \frac{-4x + 5x - 3x}{4} + 8 + 6 + 10$$

$$p(x) = -\frac{2}{4}x + 24$$

$$p(x) = -\frac{1}{2}x + 24$$

إذن p دالة تآلفية معاملها $-\frac{1}{2}$

ب - أحسب محيط شبه المنحرف MNCB إذا كان $x = 6cm$

محيط شبه المنحرف MNCB لـ $x = 6$ هو : $p(6)$

إذن $p(6) = -\frac{1}{2} \times 6 + 24$

$$= -3 + 24$$

$$p(6) = 21$$

محيط شبه المنحرف MNCB لـ $x = 6cm$ هو : 21cm

ج - أحدد قيمة x إذا كان محيط شبه المنحرف MNCB هو 22cm .

محيط شبه المنحرف MNCB يساوي 22cm

يعني أن $p(x) = 22$

يعني أن: $-\frac{1}{2}x + 24 = 22$

يعني أن: $-\frac{1}{2}x = 22 - 24$

يعني أن: $-\frac{1}{2}x = -2$

يعني أن: $x = (-2) \times (-2)$

إذن: $x = 4$

ومنه فإن محيط شبه المنحرف MNCB يساوي 22cm إذا كان : $x = 4cm$

3 – أبين أن محيط شبه المنحرف MNCB لا يمكن أن يساوي 19cm

إذا كان محيط شبه المنحرف يساوي 19cm

فإن $p(x) = 19$

يعني أن: $-\frac{1}{2}x + 24 = 19$

يعني أن: $-\frac{1}{2}x = 19 - 24$

يعني أن: $-\frac{1}{2}x = -5$

يعني أن: $x = (-5) \times (-2)$

إذن: $x = 10$

ونعلم أن: $0 < x < 8$

إذن لا يمكن لمحيط شبه المنحرف MNCB أن يساوي 19cm

4 – تأطير محيط شبه المنحرف : MNCB

لدينا: $0 < x < 8$

إذن: $-\frac{1}{2} \times 8 < -\frac{1}{2}x < -\frac{1}{2} \times 0$

يعني: $-4 < -\frac{1}{2}x < 0$

$-4 + 24 < -\frac{1}{2}x + 24 < 0 + 24$

ومنه فإن: $20 < p(x) < 24$

تمرين 15

f دالة تآلفية حيث : $f(4) - f(3) = 4$

✤ أحسب $f(5) - f(2)$

f دالة تآلفية إذن $f(x) = ax + b$

ولدينا $f(4) - f(3) = 4$

يعني أن $(4a + b) - (3a + b) = 4$

$4a + b - 3a - b = 4$

$\boxed{a = 4}$

ومنه فإن : $f(x) = 4x + b$

إذن : $f(5) - f(2) = (4 \times 5 + b) - (4 \times 2 + b)$

$f(5) - f(2) = 20 + \cancel{b} - 8 - \cancel{b}$

وبالتالي فإن : $\boxed{f(5) - f(2) = 12}$

طريقة ثانية :

f دالة تآلفية إذن : $f(x) = ax + b$

ونعلم أن: $a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

مع $x_1 \neq x_2$

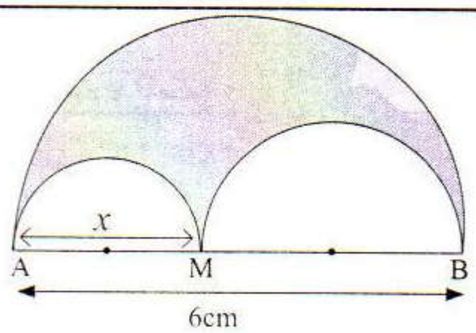
إذن: $a = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3}$

$= \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{4}{1}$

ومنه فإن: $f(5) - f(2) = 3 \times \frac{4}{1}$

أي أن : $f(5) - f(2) = 12$

تمرين 16



أحدد طبيعة الدالة : $p(x)$

$p(x)$ محيط الجزء الملون هو مجموع محيطات أنصاف الدوائر التي أقطارها هي : AB و AM و MB على التوالي

p_1- محيط نصف الدائرة التي قطرها [AB]

$p_1 = \frac{AB}{2} \times \pi = \frac{6}{2}\pi = 3\pi$

p_2 محيط نصف الدائرة التي قطرها [AM]

$p_2 = \frac{AM}{2} \times \pi = \frac{x}{2} \times \pi = \frac{\pi}{2}.x$

p_3 محيط نصف الدائرة التي قطرها [MB]

$MB = AB - AM = 6 - x$ و $p_3 = \frac{MB}{2} \times \pi$

$p_3 = \frac{6 - x}{2} \times \pi$

$P_3 = \left(3 - \frac{x}{2}\right)\pi$

$\boxed{P_3 = 3\pi - \frac{x}{2} \times \pi}$

وبالتالي فإن : $p(x) = p_1 + p_2 + p_3$

$p(x) = 3\pi + \cancel{\frac{\pi}{2}x} + 3\pi - \cancel{\frac{\pi}{2}x}$

$p(x) = 6\pi$

إذن : $p(x)$ دالة ثابتة.

مراقبة مستمرة رقم 2

تمرين 1

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

نعتبر النقط $A(1;4)$ و $B(-2;1)$ و $C(-4;-1)$ و $D(3;-4)$.

1) أنشئ النقط A و B و C و D.

2) أ- حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AC}$.

ب) بين أن النقط A و B و C مستقيمية.

3) احسب AB و AD.

4) بين أن المثلث ABD قائم الزاوية.

5) حدد إحداثيتي E لكي يكون ABDE مستطيلا.

تمرين 2

f و g دالتان حيث: $f(x) = \frac{3}{2}x$ و $g(x) = 3x - 6$

1) احسب: $f(-2)$ و $g(2)$.

2) حدد قيمة العدد a حيث: $g(a+2) = a$.

3) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

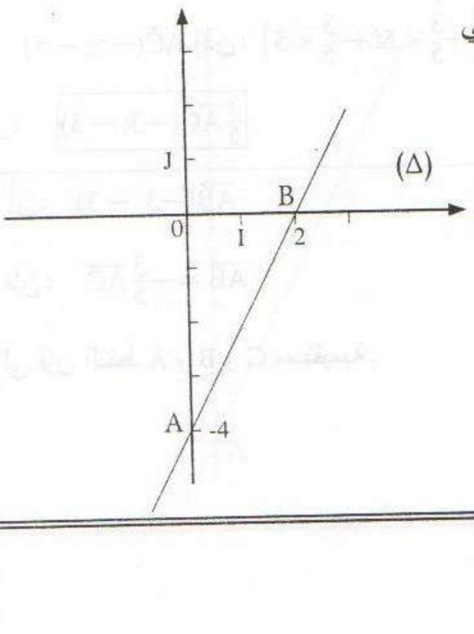
أرسم التمثيلين المبيانين للدالتين f و g.

تمرين 3

ليكن المستقيم (Δ) الممثل في الشكل أسفله هو التمثيل المبياني لدالة تآلفية h.

1) حدد مبيانيا $h(0)$

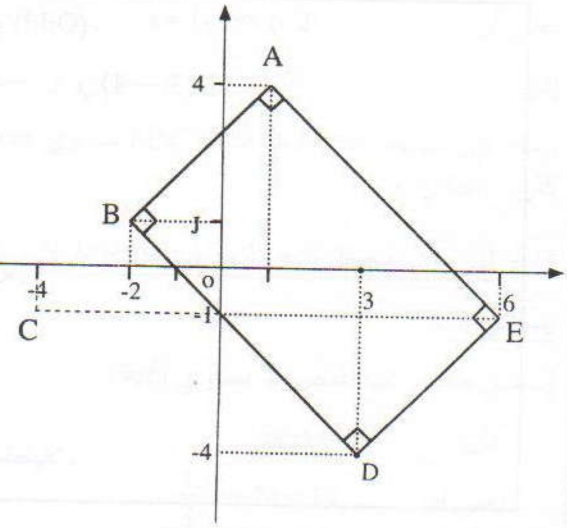
2) حدد الدالة h



حل المراقبة المستمرة رقم 2

تمرين 1

1) أنشئ النقط A و B و C و D:



2) أ) أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AC}(x_c - x_A; y_c - y_A)$

أي أن: $\overrightarrow{AC}(-4-1; -1-4)$

إذن: $\overrightarrow{AC}(-5; -5)$

ب) أبين أن النقط A و B و C مستقيمية.

✱ أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

أي أن: $\overrightarrow{AB}(-2-1; 1-4)$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{AB}(-3; -3)}$

لدينا: $\overrightarrow{AC}(-5; -5)$ إذن: $\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\left(-\frac{3}{5}\times 5; -\frac{3}{5}\times 5\right)$

أي أن: $\boxed{\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}(-3; -3)}$

ونعلم أن: $\overrightarrow{AB}(-3; -3)$

ومنه فإن: $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

3) أحسب المسافتين AB و AD:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(-2-1)^2 + (1-4)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{9+9}$$
$$= \sqrt{18}$$
$$\boxed{AB = 3\sqrt{2}}$$

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{(3-1)^2 + (-4-4)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{4+64}$$
$$\boxed{AD = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}}$$

4) أبين أن المثلث ABD قائم الزاوية:

✱ أحسب BD:

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$
$$= \sqrt{(3+2)^2 + (-4-1)^2}$$
$$= \sqrt{5^2 + (-5)^2}$$
$$= \sqrt{25+25}$$
$$= \sqrt{50}$$
$$\boxed{BD = 5\sqrt{2}}$$

◗ لدينا: $AB^2 + BD^2 = (3\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2$

$= 18 + 50$

$AB^2 + BD^2 = 68$

و: $AD^2 = \sqrt{68}^2 = 68$

إذن: $AB^2 + BD^2 = AD^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية أستنتج أن: المثلث ABD قائم الزاوية في B.

5) أحدد إحداثيتي E لكي يكون $ABDE$ مستطيلا:

لكي أحدد إحداثيتي E لكي يكون $ABDE$ مستطيلا يكتفي أن أحدد إحداثيتي E لكي يكون ABDE متوازي الأضلاع لأن ABD مثلث قائم الزاوية في B.

ABDE متوازي الأضلاع يعني أن: $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}$

ولدينا: $\overrightarrow{DE}(x_E-3;y_E+4)$ و $\overrightarrow{BA}(3;3)$

إذن: $x_E-3=3$ و $y_E+4=3$

أي : $x_E=3+3$ و $y_E=3-4$

أي أن: $x_E=6$ و $y_E=-1$

ومنه فإن: $\boxed{E(6;-1)}$

تمرين 2

$f(x)=\frac{3}{2}x$ و $g(x)=3x-6$

1) أحسب $f(-2)$ و $g(2)$.

$f(-2)=\frac{3}{2}\times(-2)=-3$

$g(2)=3\times2-6=6-6=0$

2) أحدد قيمة العدد a حيث: $g(a+2)$.

$g(a+2)=a$ يعني: $3(a+2)-6=a$

يعني: $3a+\cancel{6}-\cancel{6}=a$

يعني: $3a-a=0$

يعني: $2a=0$

ومنه $\boxed{a=0}$

3) أرسم التمثيلين المبيانين للدالتين f و g.

تذكير: f دالة خطية يعني التمثيل المبياني للدالة f هو مستقيم يمر من أصل المعلم و g دالة تآلفية إذن التمثيل المبياني للدالة g هو مستقيم.

$f(x)=\frac{3}{2}x$

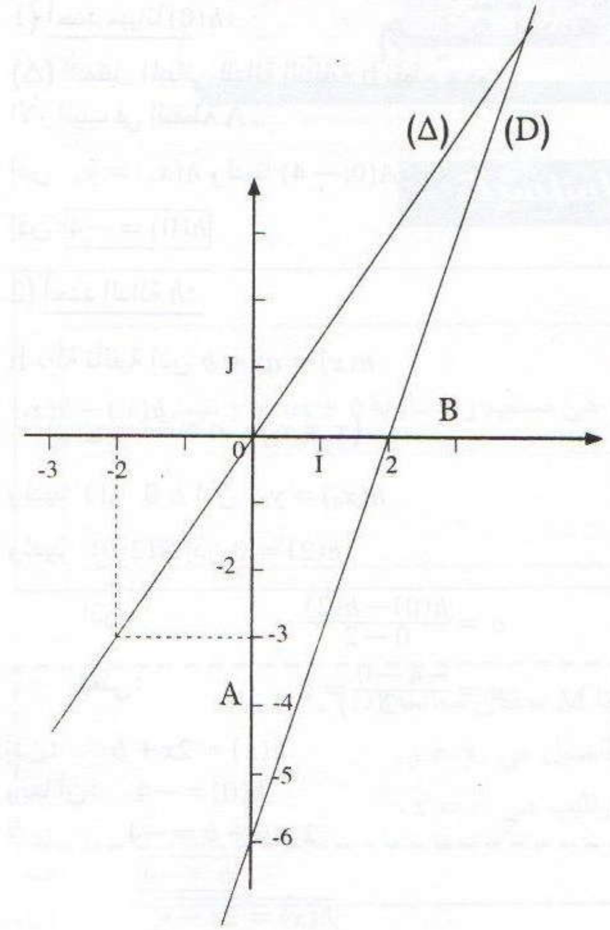
x	0	-2
$f(x)$	0	-3

$g(x)=3x-6$

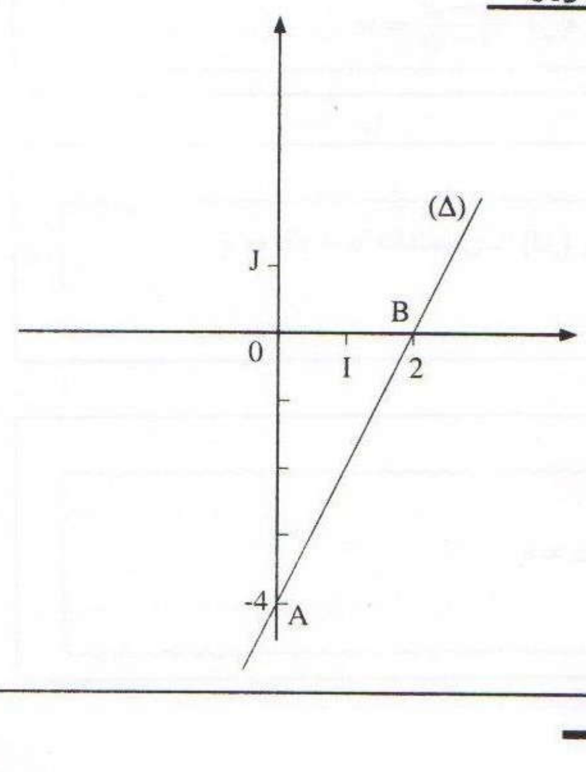
x	0	2
$g(x)$	-6	0

التمثيل المبياني للدالة f هو المستقيم (D). المار من أصل المعلم ومن النقطة ذات الإحداثيات $(-2;-3)$.

التمثيل المبياني للدالة g هو الميتقيم (Δ)، والمار من النقطتين ذات الإحداثيات $(0;-6)$ و $(2;0)$.



تمرين 3



1) أحدد مبيانا $h(0)$:

(Δ) التمثيل المبياني للدالة التألفية h يقطع محور الأراتيب في النقطة A .

إذن $h(x_A)=y_A$ ولدينا $A(0;-4)$.

إذن: $\boxed{h(0)=-4}$

2) أحدد الدالة h:

h دالة تآلفية إذن $h(x)=ax+b$

$a=\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2} \quad (x_1\neq x_2)$.

ولدينا $B \,\square\, (\square)$ إذن $h(x_B)=y_B$

ولدينا $B(2;0)$ إذن $h(2)=0$

إذن: $a=\dfrac{h(0)-h(2)}{0-2}$

يعني: $a=\dfrac{-4-0}{-2}=2$

إذن: $h(x)=2x+b$

وبما أن: $h(0)=-4$

فإن: $2\times 0+b=-4$

ومنه: $\boxed{b=-4}$

إذن: $\boxed{h(x)=2x-4}$

7 معادلات مستقيم

معارف أساسية

1- تعاريف

$(O.I;J)$ معلم و a و b عددان حقيقيان.
مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المعادلة $y = ax + b$ هي مستقيم والمتساوية $y = ax + b$ تسمى المعادلة المختصرة للمستقيم.
العدد a يسمى المعامل الموجه أو ميل المستقيم.
العدد b يسمى الأرتوب عند الأصل.

ملاحظات:

- تكون نقطة M منتمية إلى مستقيم (D) إذا كانت إحداثيا M تحققان معادلة (D).
- معادلة مستقيم مار بنقطة معلومة A ويوازي محو الأفاصيل هي $y = y_A$.
- معادلة مستقيم مار بنقطة معلومة A ويوازي محو الأراتيب هي $x = x_A$.

2- خاصية

لتكن $y = mx + p$ هي معادلة مستقيم (D).
إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين من (D) حيث: $x_A \neq x_B$ فإن: $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

3- شرط توازي مستقيمين

في معلم نعتبر مستقيمين (D_1) الذي معادلته $y = ax + b$ و (D_2) الذي معادلته $y = a'x + b'$
$(D_2) \parallel (D_1)$ يعني أن: $a = a'$

4- شرط تعامد مستقيمين

في معلم متعامد ممنظم نعتبر مستقيمين:
(D_1) الذي معادلته $y = ax + b$ و (D_2) الذي معادلته $y = a'x + b'$
$(D_2) \perp (D_1)$ يعني أن: $a \times a' = -1$

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

في المستوى المنسوب إلى معلم نعتبر النقط:

$A(1;2)$ و $B(2;5)$ و $C(1;5)$

- حدد معادلة للمستقيم (AB)
- حدد معادلة للمستقيم (AC)
- حدد معادلة للمستقيم (BC)

تمرين 2

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (O;I;J) نعتبر المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x - 3$.

1) أرسم المستقيم (D).

2) حدد قيمة العدد a علما أن (D) يمر من النقطة $E(a-1;4)$

تمرين 3

في المستوى المنسوب إلى معلم نعتبر النقط $A(3;1)$ و $B(-3;1)$ و $C\left(\frac{3}{2};0\right)$.

والمستقيم (D) ذا المعادلة $y = \frac{2}{3}x - 1$.

1) حدد من بين النقط A و B و C التي تنتمي إلى المستقيم (D).

2) حدد معادلة للمستقيم (D_1) الذي ميله 5 ويمر من النقطة $E(-2;7)$

3) حدد معادلة للمستقيم (D_2) الذي يمر من النقطة $F(1;8)$ و أرتوبه عند الأصل هو 3.

تمرين 4

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيمات.

$$(D_1): y = \frac{3}{2}x + 1$$

$$(D_2): y = -\frac{2}{3}x + 1$$

$$(D_3): y = \frac{3}{2}x - 1$$

1) هل المستقيمان (D_1) و (D_2) متوازيان؟ علل جوابك.

2) هل المستقيمان (D_1) و (D_2) متعامدان؟ علل جوابك.

3) هل المستقيمان (D_1) و (D_3) متوازيان؟ علل جوابك.

4) أنشئ المستقيمات (D_1) و (D_2) و (D_3).

تمرين 5

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) ذا المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

لتكن $M(m-1;2m+3)$ نقطة من المستوى.

حدد قيمة m لكي تنتمي النقطة M للمستقيم (D).

تمرين 6

في معلم متعامد (O.I.J) ارسم المستقيمات التالية:

- (D_1) ذا المعادلة: $y = -3x$
- (D_2) ذا المعادلة: $y = 2x + 3$
- (D_3) ذا المعادلة: $x = 3$
- (D_4) ذا المعادلة: $y = 3$

تمرين 7

(O;I;J) معلم متعامد ممنظم

(D) ذا المعادلة: $y = (4m - \sqrt{3})x + 1$

و (Δ) ذا المعادلة: $y = (4m + \sqrt{3})x$

حدد قيم العدد m لكي يكون (D) عموديا على (Δ).

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 8

في معلم متعامد (O;I;J) نعتبر النقط $A(-3;-4)$ و $B(6;2)$ و $C(-3;2)$.

1) أحسب المعامل الموجه للمستقيم (AB).

2) حدد معادلة المستقيم (Δ) المار من C والموازي للمستقيم (AB).

تمرين 9

في معلم متعامد ممنظم نعتبر المستقيم (D) ذا المعادلة: $y = -\frac{2}{3}x + 3$ والنقطة $E(3;-1)$

1) هل النقطة E تنتمي إلى المستقيم (D)؟ علل جوابك.

2) أنشئ المستقيم (D).

3) أنشئ المستقيم (Δ) العمودي على (D) والمار من E.

4) حدد معادلة للمستقيم (Δ).

تمرين 10

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) نعتبر المستقيمين:

(D) ذا المعادلة: $x-y+1=0$

و (Δ) ذا المعادلة: $x+y+1=0$

1) هل (D) و (Δ) متوازيان؟ علل جوابك.

2) هل (D) و (Δ) متعامدان؟ علل جوابك.

3) انشئ المستقيمان (D) و (Δ)

4) حدد مبيانيا إحداثيتا F نقطة تقاطع (D) و (Δ).

تمرين 11

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) نعتبر النقط $A(-1;0)$ و $B(-3;2)$ و $C(-1;2)$

والمستقيم (D) الذي معادلته: $x+y+3=0$.

1) حدد معادلة المستقيم (AB).

2) حدد قيمة العدد الحقيقي m علما أن (D) يمر من النقطة $E(3m-4;2-m)$

3) حدد F نقطة تقاطع (D) مع محور الأفاصيل.

4) حدد معادلة المستقيم (Δ) العمودي على (D) والمار من A.

تمرين 12

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) نعتبر المستقيمين: $(D): y=(3m-1)x+m-7$

$(\square): y=(2m+1)x+2m-1$

1) حدد قيمة العدد m لكي يمر (D) من النقطة I.

2) حدد قيمة العدد m لكي يكون (D) موازيا لـ (Δ).

3) حدد قيمة العدد m لكي يكون (D) عموديا على (Δ).

تمارين توليفية

تمرين 13

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط:

$A(2;4)$ و $B(-3;1)$ و $C(4;-8)$ و $G(1;-1)$.

1) بين أن A و B و C غير مستقيمية.

2) بين أن المستقيم (AG) يمر من منتصف [BC].

3) بين أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC.

تمرين 14

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط:

$A(-1;0)$ و $B(4;1)$ و $C(-2;-2)$

1) بين أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2) لتكن [AH] ارتفاعا للمثلث ABC.

حدد معادلة المستقيم (AH).

تمرين 15

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد وممنظم نعتبر النقطتين: $A(0;-2)$ و $B(1;1)$.

لتكن (𝒞) الدائرة التي قطرها [AB].

حدد معادلة المستقيم (Δ) المماس لـ (𝒞) في النقطة A.

تمرين 16

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطتين: $A(2;3)$ و $B(-4;-7)$.

1) حدد معادلة واسط [AB].

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

$A(1;2)$ و $B(2;5)$ و $C(1;5)$

✤ أحدد معادلة المستقيم (AB).

لدينا: $x_A \neq x_B$ و $y_A \neq y_B$ إذن المستقيم (BA) قاطع لمحوري المعلم.

ومنه معادلة (AB) تكتب $y=ax+b$

ولدينا: $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

يعني أن: $a=\dfrac{5-2}{2-1}=\dfrac{3}{1}=3$

ومنه: $(AB): y=3x+b$

لدينا: $A\in(AB)$ إذن: $y_A=3x_A+b$

يعني: $2=3\times1+b$

$b=2-3=-1$

وبالتالي فإن $y=3x-1$ هي معادلة المستقيم (AB).

❖ أحدد معادلة المستقيم (AC).

لدينا: $x_A = x_C$ و $y_A \neq y_B$ إذن المستقيم (AC) يوازي محور الأراتيب ومعادلته هي: $x = x_A$.

إذن: $x = 1$ هي معادلة المستقيم (AC).

❖ أحدد معادلة المستقيم (BC).

لدينا: $x_B \neq x_C$ و $y_B = y_C$ إذن المستقيم (BC) يوازي محور الأفاصيل ومعادلته هي: $y = y_B$.

إذن: y=5 هي معادلة المستقيم (BC).

تمرين 2

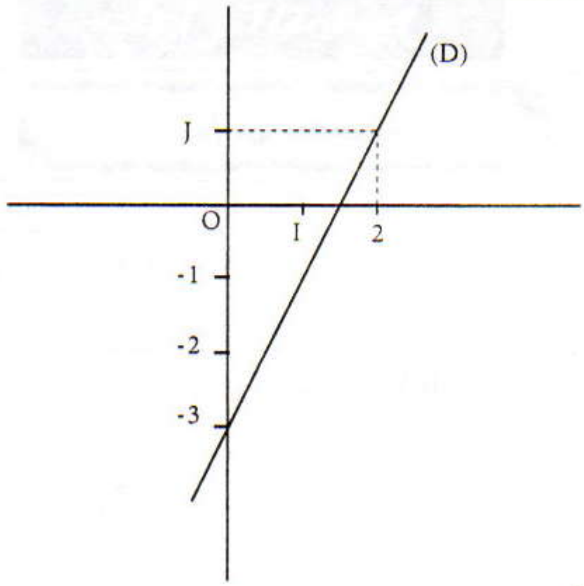
$E(a-1;4)$ و $(D): y = 2x - 3$

1) أرسم المستقيم (D)

لرسم المستقيم (D) يجب تحديد نقطتين مختلفتين تحققان معادلته وذلك بالاستعانة بالجدول التالي:

x	0	2
y	-3	1

(نعوض في المعادلة x بقيمة فنحصل على قيمة لـ y)



2) أحدد قيمة a حيث $E \in (D)$

لدينا: $E(a-1;4)$ و $(D): y = 2x - 3$

لكي تنتمي نقطة إلى مستقيم يجب أن تحقق إحداثيتا هذه النقطة معادلة المستقيم.

إذن: $E \in (D)$ يعني أن: $y_E = 2x_E - 3$

يعني: $4 = 2(a-1) - 3$

يعني: $4 = 2a - 2 - 3$

يعني: $4 = 2a - 5$

يعني: $2a = 4 + 5$ يعني أن: $2a = 9$ يعني أن: $\boxed{a = \frac{9}{2}}$

تمرين 3

$A(3;1)$ و $B(-3;1)$ و $C\left(\frac{3}{2};0\right)$.

و $(D): y = \frac{2}{3}x - 1$

1) أحدد النقط التي تنتمي إلى (D) من بين النقط A و B و C

$(D): y = \frac{2}{3}x - 1$

★ $\frac{2}{3}x_A - 1 = \frac{2}{3} \times 3 - 1 = 2 - 1 = 1 = y_A$

إحداثيتا A تحققان معادلة (D)

إذن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (D).

★ $\frac{2}{3}x_B - 1 = \frac{2}{3} \times (-3) - 1 = -2 - 1 = -3 \neq y_B$

إحداثيتا B لا تحققان معادلة (D).

إذن النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم (D).

★ $\frac{2}{3}x_C - 1 = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 = y_C$

إحداثيتا C تحققان معادلة (D).

إذن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (D).

2) أحدد معادلة المستقيم (D_1)

5 هو ميل (D_1) و $E(-2;7) \in (D_1)$

ليكن m هو الأرتوب عند الأصل لمعادلة (D_1).

إذن: $(D_1): y = 5x + m$

وبما أن $E \in (D_1)$ فإن: $y_E = 5x_E + m$

يعني: $7 = 5 \times (-2) + m$

يعني: $7 = -10 + m$

يعني: $m = 7 + 10$

يعني: $\boxed{m = 17}$

وبالتالي فإن $y = 5x + 17$ هي معادلة (D_1)

3) أحدد معادلة المستقيم (D_2)

3 هو الأرتوب عند الأصل لـ (D_2) و $F(1;8) \in (D_2)$

ليكن a هو المعامل الموجه لـ (D_2).

إذن: $(D_2): y = ax + 3$

وبما أن: $F \in (D_2)$ فإن: $y_F = ax_F + 3$

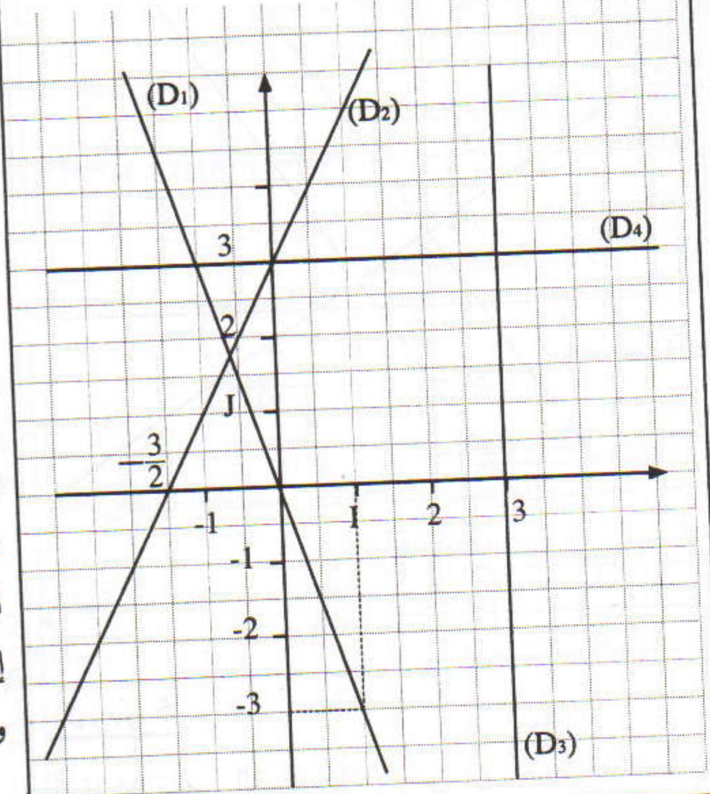
يعني: $8 = a \times 1 + 3$

يعني: $a = 8 - 3$ أي: $\boxed{a = 5}$

إذن: $y = 5x + 3$ هي معادلة المستقيم (D_2)

* (D_4) ذا المعادلة $y=3$.

إذن (D_4) يوازي محور الأفاصيل ويمر من النقطة ذات الإحداثيات $(0;3)$.



تمرين 7

– لنحدد قيم العدد m.

لدينا ميل المستقيم (D) هو: $4m-\sqrt{3}$

وميل المستقيم (Δ) هو: $4m+\sqrt{3}$

بما أن $(D)\perp(\Delta)$ فإن جداء ميليهما يساوي -1.

إذن:

$$(4m-\sqrt{3})\times(4m+\sqrt{3})=-1$$

$$(4m)^2-(\sqrt{3})^2=-1$$

$$16m^2-3=-1$$

$$16m^2=-1+3=2$$

$$m^2=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

ومنه فإن: $m=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

أو: $m=-\sqrt{\frac{1}{8}}=-\frac{\sqrt{8}}{8}=-\frac{2\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

إذن: $m=\frac{\sqrt{2}}{4}$ أو $m=\frac{-\sqrt{2}}{4}$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 8

$A(-3;-4)$ و $B(6;2)$ و $C(-3;2)$.

1) أحسب المعامل الموجه للمستقيم (AB).

ليكن a هو المعامل الموجه لمعادلة (AB).

إذن:

$$a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$a=\frac{2-(-4)}{6-(-3)}=\frac{2+4}{6+3}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

إذن $\frac{2}{3}$ هو المعامل الموجه للمستقيم (AB).

2) أحدد معادلة المستقيم (Δ).

ليكن $y=mx+p$ هي معادلة المستقيم (Δ).

بما أن $(\Delta)//(AB)$ و $\frac{2}{3}$ المعامل الموجه لـ (AB).

فإن $\boxed{m=\frac{2}{3}}$

إذن معادلة (Δ) تكتب $y=\frac{2}{3}x+p$

وبما أن (Δ) يمر من C فإن:

$$y_C=\frac{2}{3}x_C+p$$

يعني أن: $2=\frac{2}{3}\times(-3)+p$

يعني: $2=-2+p$

يعني: $p=2+2$

أي: $\boxed{p=4}$

إذن $y=\frac{2}{3}x+4$ هي معادلة المستقيم (Δ).

تمرين 9

1) النقطة E تنتمي إلى المستقيم (D) يعني أن إحداثيتا E تحققان معادلة (D) أي $y_E=-\frac{2}{3}x_E+3$

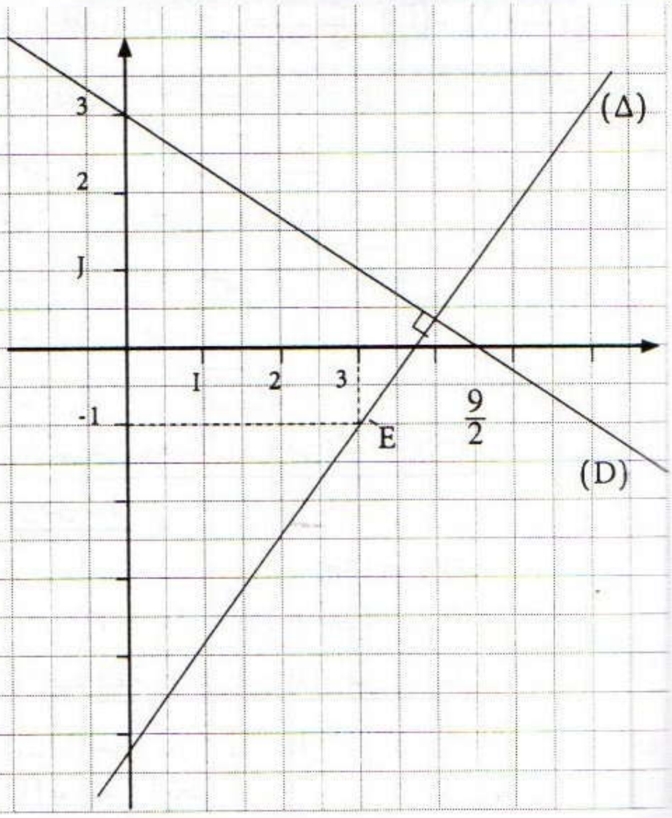
يعني أن:

$$-\frac{2}{3}x_E+3=-\frac{2}{\cancel{3}}\times\cancel{3}+3=-2+3=1\neq y_E$$

إذن إحداثيتا E لا تحققان معادلة (D) ومنه $E\notin(D)$

2) $(D): y=-\frac{2}{3}x+3$

x	0	$\frac{9}{2}$
y	3	0



3) <u>لنحدد معادلة للمستقيم</u> (Δ)

لتكن $y = ax + b$ هي معادلة المستقيم (Δ) .

ولدينا $y = \frac{-2}{3}x + 3$ هي معادلة المستقيم (D) .

• نحدد a:

بما أن $(D) \perp (\Delta)$ فإن $a \times \frac{-2}{3} = -1$ أي: $a = \frac{3}{2}$

إذن: $(\Delta): y = \frac{3}{2}x + b$

• نحدد b:

لدينا (Δ) يمر من النقطة $E(3; -1)$

إذن $y_E = \frac{3}{2}x_E + b$ إذن $-1 = \frac{3}{2} \times 3 + b$

أي $-1 = \frac{9}{2} + b$ أي $-1 - \frac{9}{2} = b$

ينتج أن : $b = -\frac{11}{2}$

وبالتالي $y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$ هي معادلة المستقيم (Δ).

تمرين 10

1) <u>نكتب الصيغة المختصرة لمعادلة المستقيم (D).</u>

لدينا: $x - y + 1 = 0$ أي: $-y = -x - 1$

أي: $y = x + 1$

إذن ميل المستقيم (D) هو 1

2) نكتب الصيغة المختصرة لمعادلة المستقيم (Δ) .

لدينا: $x + y + 1 = 0$ أي: $y = -x - 1$

إذن ميل المستقيم (Δ) هو 1-

وبما أن 1≠1- فإن (D) لا يوازي (Δ).

2) بما أن $1 \times 1 = -1-$ فإن $(D) \perp (\Delta)$

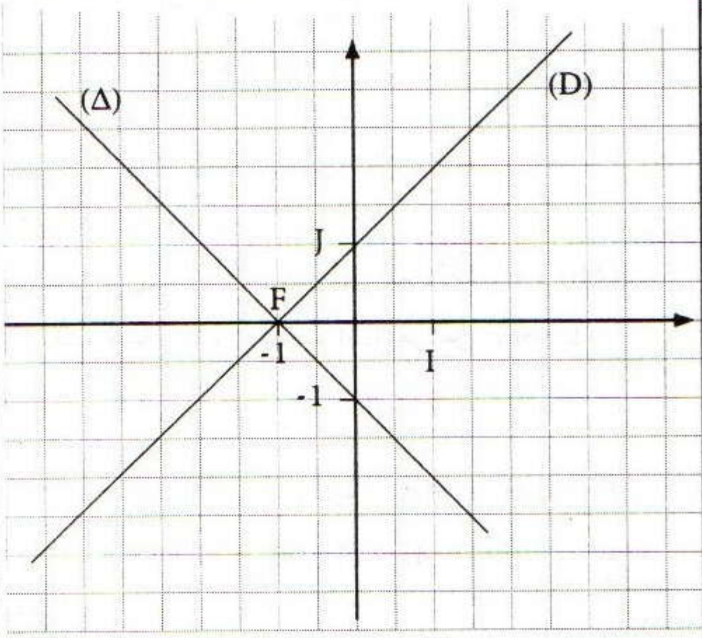
3) نرسم المستقيمين (D) و (Δ):

$(\Delta): y = -x - 1$

x	-1	0
y	0	-1

$(D): y = x + 1$

x	-1	0
y	0	1



3) <u>لنحدد مبيانيا إحداثيتا F نقطة تقاطع (D) و (Δ):</u>

المستقيمان (D) و (Δ) يتقاطعان في النقطة $F(-1;0)$

تمرين 11

$A(-1;0)$ و $B(-3;2)$ و $C(-1;2)$

$(D): x+y+3=0$

1) أحدد معادلة المستقيم (AB).

لدينا: $x_A \neq x_B$ و $y_A \neq y_B$

إذن معادلة (AB) تكتب: $y = ax+b$

ولدينا: $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$a = \frac{2-0}{-3+1} = \frac{2}{-2} = -1$$

إذن: $(AB): y = -x+b$

ولدينا: $A \in (AB)$ إذن: $y_A = -x_A + b$

يعني: $0 = -(-1)+b$ أي: $1+b=0$

يعني: $\boxed{b=-1}$

وبالتالي فإن: $y=-x-1$ هي معادلة المستقيم (AB).

2) أحدد قيمة العدد m بحيث (D) يمر من النقطة E.

لدينا: $(D): x+y+3=0$

وبما أن: $E \in (D)$

فإن: $x_E + y_E + 3 = 0$ ولدينا: $E(3m-4; 2-m)$

إذن: $(3m-4)+(2-m)+3=0$

يعني: $2m+1=0$

يعني: $2m=-1$

ومنه $\boxed{m=-\dfrac{1}{2}}$

3) أحدد F نقطة تقاطع (D) مع محور الأفاصيل.

F نقطة تقاطع (D) مع محور الأفاصيل.

يعني أن $F \in (D)$ أي: $x_F + y_F + 3 = 0$

و F تنتمي إلى محور الأفاصيل أي: $y_F = 0$

ومنه: $x_F + 0 + 3 = 0$

يعني: $x_F = -3$

وبالتالي فإن: $F(-3;0)$

4) أحدد معادلة (Δ) العمودي على (D) والمار من A.

لدينا: $(D): x+y+3=0$

يعني: $(D): y=-x-3$

ولتكن $y=mx+p$ هي معادلة (Δ).

بما أن $(D)\perp(\Delta)$ فإن جداء ميلي (D) و (Δ) يساوي -1

ومنه فإن: $(-1)\times m = -1$

يعني: $\boxed{m=1}$

إذن: $(\Delta); y = x+p$

ولدينا $A \in (\Delta)$ يعني: $y_A = x_A + p$

يعني أن: $0=-1+p$

إذن: $\boxed{p=1}$

وبالتالي فإن معادلة (Δ) هي: $y=x+1$

تمرين 12

$(D): y = (3m-1)x + m - 7$

$(\Delta): y = (2m+1)x + 2m - 1$

1) أحدد قيمة m لكي يمر (D) من النقطة I

(O;I;J) معلم إذن: $I(1;0)$

(D) يمر من I يعني أن:

$$y_I = (3m-1)x_I + m - 7$$

يعني: $0 = (3m-1)\times 1 + m - 7$

يعني: $0 = 4m-8$

يعني: $4m=8$ يعني: $m = \dfrac{8}{4}$

أي: $\boxed{m=2}$

2) أحدد قيمة m لكي يكون (D) و (Δ) متوازيين:

$(D)//(\Delta)$ يعني أن ميل (D) يساوي ميل (Δ).

إذن: $3m-1 = 2m+1$

يعني: $3m-2m = 1+1$

أي: $\boxed{m=2}$

3) أحدد قيمة m لكي يكون (D) و (Δ) متعامدين:

(D) و (Δ) متعامدان يعني أن جداء ميليهما يساوي -1.

إذن: $(D)\perp(\Delta)$

يعني أن: $(3m-1)(2m+1) = -1$

يعني: $6m^2 + m = -1+1$

يعني: $m(6m+1)=0$

يعني: $m=0$ أو $6m+1=0$

يعني: $\boxed{m=0}$ أو $\boxed{m=-\dfrac{1}{6}}$

تمارين توليفية

تمرين 13

ـ الطريقة الأولى:

1) النقط A و B و C مستقيمية يعني أن A و B و C تنتمي إلى مستقيم (D) معادلته $y = ax + b$

إذن: $y_A = ax_A + b$ و $y_B = ax_B + b$ و $y_C = ax_C + b$

إذن: $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$ و $y_B - y_A = a(x_C - x_A)$

ومنه: $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$

شرط استقامية النقط A و B و C هو:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

لدينا: $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1 - 4}{-3 - 2} = \dfrac{-3}{-5} = \dfrac{3}{5}$

و: $\dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{-8 - 4}{4 - 2} = \dfrac{-12}{2} = -6$

بما أن $\frac{3}{5} \neq -6$ فإن A و B و C غير مستقيمية.

ـ الطريقة الثانية:

نجد معادلة المستقيم(AB) ثم نعوض إحداثيتا C في معادلة (AB)، ونستنتج أن $C \notin (AB)$ أي أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2) نحدد إحداثيتا H منتصف [BC].

لكن: H منتصف [BC] إذن: $H\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}; \dfrac{y_B + y_C}{2}\right)$

أي: $H\left(\dfrac{-3 + 4}{2}; \dfrac{1 + (-8)}{2}\right)$ إذن: $H\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{-7}{2}\right)$

نحدد معادلة المستقيم (AG).

لدينا: $x_A \neq x_G$ و $y_A \neq y_G$ إذن $\dfrac{x - x_A}{x_G - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_G - y_A}$

يعني أن: $\dfrac{x - 2}{1 - 2} = \dfrac{y - 4}{-1 - 4}$ أي: $\dfrac{x - 2}{-1} = \dfrac{y - 4}{-5}$

يعني أن:

$-5x + 10 = -y + 4$ أي: $-5x + y + 10 - 4 = 0$

إذن: $-5x + y + 6 = 0$ هي معادلة المستقيم (AG).

نتحقق أن إحداثيتا $H\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{-7}{2}\right)$ منتصف [BC].

تحققان المعادلة $-5x + y + 6 = 0$

لدينا: $-5\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{7}{2} + 6 = \frac{-5}{2} - \frac{7}{2} + 6 = \frac{-12}{2} + 6 = -6 + 6 = 0$

إذن (AG) يمر من منتصف [BC].

3) لنبين أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC:

G هي مركز ثقل المثلث ABC.

يعني أن: $AG = \dfrac{2}{3}AH$

لدينا: $AG = \sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2}$

$$= \sqrt{(1 - 2)^2 + (-1 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{-7}{2} - 4\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{225}{4}}$$

$$AH = \sqrt{\frac{234}{4}} = \frac{\sqrt{234}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 \times 26}}{2} = \frac{3}{2} \times \sqrt{26}$$

إذن: $AG = \dfrac{2}{3}AH$

ومنه فإن G هي مركز ثقل المثلث ABC.

تمرين 14

$A(-1;0)$ و $B(4;1)$ و $C(-2;-2)$

1) أبين أن النقط A و B و C غير مستقيمية:

لكي نبين أن النقط A و B و C غير مستقيمية يكفي أن نبين أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (BC).

✤ لنحدد معادلة المستقيم (BC).

لتكن $y = ax + b$ هي معادلة (BC).

إذن: $a = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{-2 - 1}{-2 - 4} = \dfrac{-3}{-6} = \dfrac{1}{2}$

ومنه: $(BC): y = \dfrac{1}{2}x + b$

وبما أن $B \in (BC)$ فإن: $y_B = \dfrac{1}{2}x_B + b$

يعني: $1 = \dfrac{1}{2} \times 4 + b$

يعني: $1 = 2 + b$

أي: $\boxed{b = -1}$

وبالتالي فإن $(BC): y = \dfrac{1}{2}x - 1$

✤ لنتحقق أن النقطة $A \notin (BC)$

لدينا: $\dfrac{1}{2}x_A - 1 = \dfrac{1}{2} \times (-1) - 1$

$$= \frac{-1 - 2}{2} = -\frac{3}{2} \neq y_A$$

إذن: $A \notin (BC)$

ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

2) أحدد معادلة (AH) ارتفاع المثلث ABC.

[AH] ارتفاع المثلث ABC.

يعني: $(AH)\perp(BC)$

لتكن $y=mx+p$ هي معادلة (AH).

بما أن $y=\frac{1}{2}x-1$ هي معادلة (BC).

و $(AH)\perp(BC)$ فإن $m\times\frac{1}{2}=-1$

يعني: $m=(-1)\div\frac{1}{2}$ أي: $\boxed{m=-2}$

إذن: $(AH): y=-2x+p$

• ولدينا: $A\in(AH)$

يعني أن: $y_A=-2x_A+p$

يعني أن: $0=-2\times(-1)+p$

يعني: $0=2+p$

يعني: $\boxed{p=-2}$

وبالتالي فإن: $y=-2x-2$ هي معادلة (AH).

تمرين 15

$A(0;-2)$ و $B(1;1)$.

و $(\mathscr{C})$ الدائرة التي قطرها [AB].

1) أحدد معادلة (Δ) المماس لـ $(\mathscr{C})$ في A.

(Δ) مماس للدائرة $(\mathscr{C})$ في النقطة A.

إذن (Δ) عمودي على (AB) في النقطة A.

ليكن $y=ax+b$ هي معادلة المستقيم (AB).

إذن: $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1+2}{1-0}=3$

ومنه: $(AB): y=3x+b$

ولدينا: $A\in(AB)$ يعني: $y_A=3x_A+b$

يعني أن: $-2=3\times0+b$

يعني: $\boxed{b=-2}$

إذن: $(AB): y=3x-2$

لتكن $y=mx+p$ هي معادلة (Δ).

بما أن $(\Delta)\perp(D)$ فإن $m\times3=-1$

يعني: $\boxed{m=-\frac{1}{3}}$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac{1}{3}x+p$

ولدينا: $A\in(\Delta)$ إذن: $y_A=-\frac{1}{3}x_A+p$

يعني: $-2=-\frac{1}{3}\times0+p$

ومنه: $\boxed{p=-2}$

وبالتالي فإن $y=-\frac{1}{3}x-2$ هي معادلة المستقيم (Δ)

تمرين 16

• نحدد معادلة المستقيم (AB) ثم نحدد معادلة المستقيم (Δ)واسط [AB].

(Δ) واسط [AB] يعني أن (Δ) عمودي على (AB) ويمر من منتصف [AB].

لتكن H منتصف [AB] إذن: $H\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

أي: $H\left(\frac{2+(-4)}{2};\frac{-7+3}{2}\right)$ إذن: $H(-1;-2)$

• نحدد معادلة المستقيم (AB)

لدينا: $x_B\neq x_A$ و $y_B\neq y_A$ إذن المستقيم (AB) يقطع محوري المعلم.

إذن: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$

يعني أن: $\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y-3}{-7-3}$ أي: $\frac{x-2}{-6}=\frac{y-3}{-10}$

يعني أن: $\frac{5(x-2)}{-30}=\frac{3(y-3)}{-30}$

يعني أن: $5(x-2)=3(y-3)$

يعني أن: $5x-10=3y-9$ أي: $3y=5x-10+9$

يعني أن: $3y=5x-1$

إذن: $y=\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$ هي الصيغة المختصرة لمعادلة (AB).

• لتكن $y=mx+p$ معادلة (Δ) واسط [AB]

- لنحدد m:

لدينا: $(\Delta)\perp(AB)$ إذن: $m\times\frac{5}{3}=-1$ يعني: $m=-\frac{3}{5}$

إذن: $y=-\frac{3}{5}x+p$

- لنحدد p:

(Δ) يمر من $H(-1;-2)$ منتصف [AB].

إذن: $-2=-\frac{3}{5}\times(-1)+p$ يعني: $-2=\frac{3}{5}+p$

يعني أن: $p=-2-\frac{3}{5}$ إذن: $p=-\frac{13}{5}$

إذن $y=-\frac{3}{5}x-\frac{13}{5}$ هي معادلة (Δ) واسط [AB].

8 نظمة معادلتين

معارف أساسية

1- تعاريف

الكتابة : $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$

تكتب أيضا : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ وتسمى نظمة

معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y.

حل هذه النظمة يعني تحديد الأزواج (x,y) التي تحقق المعادلتين $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ معا.

مثال :

النظمة : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$

هي نظمة من الدرجة الأولى بمجهولين.

الزوج $(0,1)$ يحقق المعادلتين معا إذن

الزوج $(0,1)$ هو حل لهذه النظمة.

2- الحل المبياني لنظمة معادلتين :

مثال :

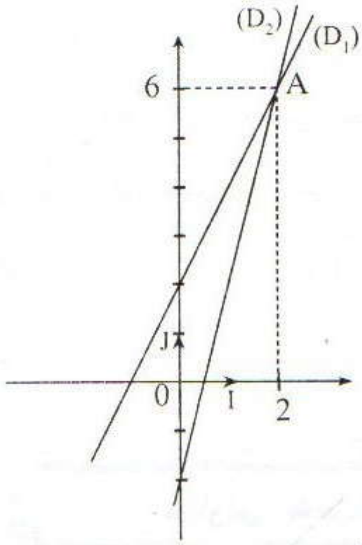
• نعتبر النظمة : $S : \begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$

ليكن (D_1) المستقيم ذو المعادلة $4x - y - 2 = 0$

ليكن (D_2) المستقيم ذو المعادلة $2x - y + 2 = 0$

المستقيمان (D_1) و (D_2) يتقاطعان في النقطة $A(2 ; 6)$

الزوج $A(2 ; 6)$ هو حل النظمة S.



ملاحظة:

بما أن حل نظمة مرتبط بالوضع النسبي لمستقيمين فإن النظمة يمكن أن يكون لها حل وحيد أو ليس لها حلا أو لها ما لانهاية من الحلول.

3- الحل الجبري لنظمة معادلتين :

• طريقة التعويض :

مثال :

حل النظمة التالية : $\begin{cases} 2x + y = 11 & (1) \\ x + 3y = 18 & (2) \end{cases}$

في المعادلة (1) نحسب y بدلالة x إذن : $y = 11 - 2x$

نعوض y بالقيمة $2x - 11$ في المعادلة (2) فنجد $x + 3(11 - 2x) = 18$ أي $x + 33 - 6x = 18$

أي: $-5x = -15$ إذن $\boxed{x = 3}$

نحسب قيمة y : لدينا : $y = 11 - 2x$ و $x = 3$

إذن: $y = 11 - 2 \times 3$ أي $\boxed{y = 5}$ وبالتالي فإن الزوج (3;5) هو حل النظمة.

طريقة التألفية الخطية :

مثال :

حل النظمة التالية :
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \quad (1) \\ 5x + 6y = 14 \quad (2) \end{cases}$$

لحل هذه النظمة نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد -2 فنحصل على النظمة التالية :
$$\begin{cases} -4x - 6y = -10 \\ 5x + 6y = 14 \end{cases}$$

ثم نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرفا بطرف. وهكذا نتخلص من المجهول y :

أي أن $-4x + 5x - 6y + 6y = -10 + 14$ ومنه فإن : $\boxed{x = 4}$

لحساب y يمكن أن نتبع نفس الطريقة بالتخلص من المجهول x.

أو نعوض في إحدى المعادلتين x بقيمتها للحصول على قيمة y.

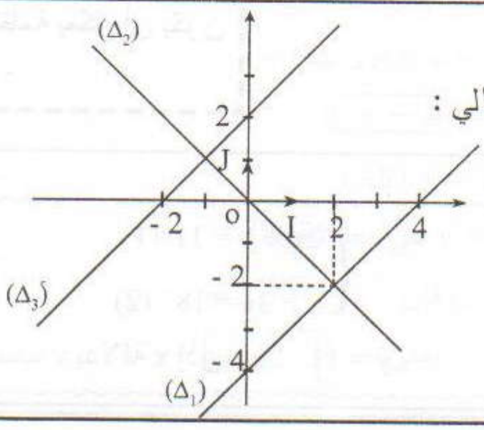
يعني: $8 + 3y = 5$ ، $3y = -3$ إذن $\boxed{y = -1}$ وبالتالي فإن الزوج $\boxed{(4,-1)}$ هو حل هذه النظمة.

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

لاحظ المبيان التالي :



(Δ_1) المستقيم ذا المعادلة : $x - y - 4 = 0$

(Δ_2) المستقيم ذا المعادلة : $x + y = 0$

(Δ_3) المستقيم ذا المعادلة : $x - y + 2 = 0$

حل مبيانيا النظمات التالية :

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

تمرين 2

حل النظمات التالية :

$$\begin{cases} x = y \\ y = 2x - 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$$

تمرين 3

حل النظمات التالية :

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 9x + 8y = 30 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 5x + 12y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x = 2y \\ y = 3x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x - 7y = 8 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

تمرين 4

حل النظمات التالية :

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x - 7y = 21 \\ \sqrt{2}x + 6y = -18 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + y = x + 1 \\ 3x + 2y = x - y + 1 \end{cases}$$

تمرين 5

1 - تأكد من أن الزوج (1,1) حل المعادلة : $2x + y - 3 = 0$

- اذكر خمسة حلول أخرى لهذه المعادلة.

2 - حدد قيمة العدد a لكي يكون الزوج $(a;-1)$ حلا لهذه المعادلة.

تمرين 6

حدد عددين مجموعهما يساوي 182 وفرقهما يساوي 4.

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 7

تعتبر المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = ax + b$.

1) – أوجد العلاقة بين a و b حيث النقطة $A(1,2)$ تنتمي إلى المستقيم (D).

2) – أوجد العلاقة بين a و b حيث النقطة $B(-3,1)$ تنتمي إلى المستقيم (D).

3) – حدد معادلة المستقيم (AB).

تمرين 8

حل النظمات التالية :

$$\begin{cases} \frac{-x+y}{2} + x = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2y(3x+1) - 6x(y+2) = 2 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y-4}{6} = 0 \\ \frac{2x}{3} - \frac{3y-1}{2} = -3 \end{cases}$$

تمرين 9

اشترى منصف قميصا وحذاءين وأدى 500 درهم واشترى فيصل قميصين وحذاء واحد من نفس النوع بثمن 400 درهم.

- ماهو ثمن القميص الواحد ؟
- ماهو ثمن الحذاء الواحد ؟

تمرين 10

احسب العدد $\frac{a}{b}$ علما أنه إذا أضفنا إلى بسطه ومقامه 2 نحصل على $\frac{1}{3}$ ، وإذا طرحنا من بسطه ومقامه 2 نحصل على $\frac{1}{7}$.

تمرين 11

يتكون مبلغ مالي قدره 1850 درهم من أوراق من فئة 10 درهم و 100 درهم. إذا علمت أن عدد أوراق المبلغ هو 95 ورقة.

- فما هو عدد أوراق كل فئة ؟

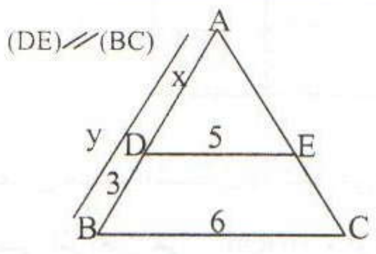
تمرين 12

ساهمت مجموعة تتكون من 20 فردا (أساتذة وتلاميذ) في شراء مجموعة من الكتب لخزانة مدرستهم بثمن 320 درهما إذا علمت أن كل أستاذ ساهم ب 30 درهم وكل تلميذ ب 10 درهم.

- فماهو عدد الأساتذة وعدد التلاميذ المساهمين ؟

تمرين 13

لاحظ الشكل :



- احسب x و y.

تمارين توليفية

تمرين 14

نقط تقاطع المستقيمات المعرفة بالمعادلات الآتية تحدد مثلثا :

$(D) : x - 3y + 10 = 0$

و: $(\Delta) : 4x + 3y - 5 = 0$

و: $(L) : x = 2$

– أنشئ الشكل في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم .

– احسب إحداثيات رؤوس المثلث.

– احسب مساحة المثلث.

تمرين 15

كان عدد المنخرطات في جمعية رياضية عند التأسيس يزيد على عدد الذكور ب 26 امرأة. انسحب 15رجلا و15 امرأة من الجمعية وأصبح عدد الإناث يساوي ثلاثة أضعاف عدد الذكور.

– ماهو عدد الذكور وماهو عدد الإناث عند تأسيس الجمعية ؟

تمرين 16

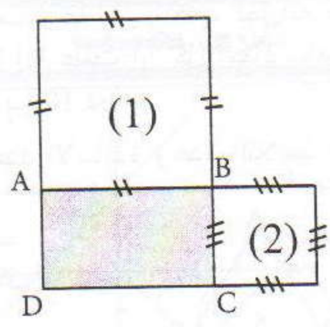
محيط مستطيل يساوي 36m .

إذا أضفنا إلى إحد أبعاده 2m و طرحنا من البعد الآخر 3 فإن مساحة لا تتغير.

– حدد بعدي المستطيل.

تمرين 17

نعتبر الشكل التالي :

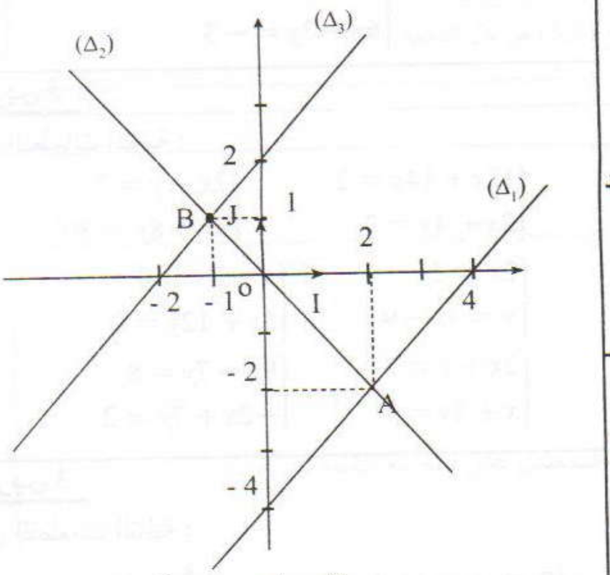


– علما أن مساحة المستطيل $ABCD$ هي : $60cm^2$، وأن مجموع مساحتي المربعين هي : $169cm^2$ ، أوجد بعدي المستطيل.

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1



• أحل مبيانيا النظمة $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

من خلال الشكل نلاحظ أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في نقطة واحدة.

إذن للنظمة حل وحيد. لتكن A نقطة تقاطع (Δ_1) و (Δ_2) زوج إحداثيي النقطة A هو حل النظمة

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

ولدينا : $A(2 ; - 2)$

ومنه فإن حل هذه النظمة هو الزوج : $(2 ; - 2)$

• أحل مبيانيا النظمة $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

من خلال الشكل نلاحظ أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_3) متوازيان قطعا أي : لا يشتركان في أية نقطة ومنه فإن : النظمة ليس لها حلا.

• أحل مبيانيا النظمة $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$

بالمثل نبين أن زوج إحداثيي النقطة B نقطة تقاطع (Δ_2) و (Δ_3) هو حل هذه النظمة.

إذن حل هذه النظمة هو الزوج $(-1;1)$.

تمرين 2

أحل النظمة : $\begin{cases} x = y \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} x = y \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x = y \\ y = 2y - 3 \end{cases}$ (نعوض y ب x في المعادلة $y = 2x - 3$)

يعني : $\begin{cases} x = y \\ -y = -3 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x = y \\ y = 3 \end{cases}$

ومنه فإن $x = 3$ و $y = 3$ إذن : حل هذه النظمة هو الزوج $(3 ; 3)$.

✤ أحل النظمة : $\begin{cases} x + y = 8 \ \ (1) \\ 2x - y = -3 \ \ (2) \end{cases}$

✤ نحسب y بدلالة x في المعادلة (1).

لدينا : $x + y = 8$ إذن : $\boxed{y = 8 - x}$

← نعوض y بالقيمة $8 - x$ في المعادلة (2).

لدينا : $y = 8 - x$ و $2x - y = -3$

إذن : $2x - (8 - x) = -3$

أي : $2x - 8 + x = -3$

$3x = -3 + 8$

$3x = 5$

$\boxed{x = \frac{5}{3}}$

← نحسب قيمة y :

لدينا : $y = 8 - x$ و $x = \frac{5}{3}$

يعني أن : $y = 8 - \frac{5}{3}$

$\boxed{y = \frac{19}{3}}$

بالتالي فإن الزوج $\left(\frac{5}{3}; \frac{19}{3}\right)$ هو حل النظمة $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

✤ أحل النظمة : $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$

لحل هذه النظمة نتبع الخطوات التالية :

$\begin{cases} ① \ 3x + y = 1 \\ ② \ 6x - 3y = -3 \end{cases}$

← لإزالة المجهول y نضرب طرفي المعادلة ① في العدد 3 ونضرب طرفي المعادلة ② في العدد 1 فنحصل على النظمة التالية : $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$

ثم نجمع طرفي المعادلتين طرفا بطرف فنحصل على :

$9x + 6x + \cancel{3y} - \cancel{3y} = 3 - 3$

$15x = 0$

$x = \frac{0}{15}$

إذن : $\boxed{x = 0}$

← نحسب قيمة y :

لدينا : $3x + y = 1$ و $x = 0$

إذن $3 \times 0 + y = 1$

إذن : $\boxed{y = 1}$

وبالتالي فإن الزوج $(0 ; 1)$ هو حل النظمة $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$

تمرين 3

ملاحظة :

لحل نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين يمكن أن نتبع طريقة التعويض أو طريقة التآلفية الخطية .

✤ أحل النظمة : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 9x + 8y = 30 \end{cases}$

طريقة التعويض :

لدينا : $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 9x + 8y = 30 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} -y = 2 - 2x \\ 9x + 8y = 30 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} y = -2 + 2x \\ 9x + 8(-2 + 2x) = 30 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -2 + 2x \\ 9x - 16 + 16x = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 + 2x \\ 25x = 30 + 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 + 2x \\ 25x = 46 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ x = \frac{46}{25} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-50 + 92}{25} = \frac{42}{25} \\ x = \frac{46}{25} \end{cases}$$

إذن $\begin{cases} y = \frac{42}{25} \\ x = \frac{46}{25} \end{cases}$ وبالتالي فإن الزوج $\left(\frac{46}{25};\frac{42}{25}\right)$ هو حل هذه النظمة

✤ أحل النظمة : $\begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

طريقة التألفية الخطية :

← للتخلص من المجهول x نضرب طرفي المعادلة ① في العدد 1 - ونضرب طرفي المعادلة ② في العدد 6.

فنحصل على النظمة : $\begin{cases} -12x - 14y = -2 \\ 12x + 24y = 12 \end{cases}$

ثم نجمع المعادلتين طرفا بطرف فنحصل على

$$-\cancel{12x} + \cancel{12x} - 14y + 24y = -2 + 12$$

$$10y = 10$$

$$\boxed{y = \frac{10}{10} = 1}$$

نحسب قيمة x :

لدينا $2x + 4y = 2$ و $y = 1$

إذن : $2x + 4 \times 1 = 2$

$$2x + 4 = 2$$

$$2x = 2 - 4$$

$2x = -2$ أي $x = -1$

وبالتالي فإن الزوج $(1 ; 1 -)$ هو حل هذه النظمة .

باتباع إحدى الطريقتين نجد أن :

← الزوج $(0 ; 0)$ هو حل النظمة $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 5x + 12y = 0 \end{cases}$

← الزوج $(9 ; 6)$ هو حل النظمة $\begin{cases} 3x = 2y \\ y = 3x - 9 \end{cases}$

← الزوج $\left(\frac{10}{7};\frac{34}{49}\right)$ هو حل النظمة $\begin{cases} 9x - 7y = 8 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases}$

← الزوج $\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$ هو حل النظمة $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

تمرين 4

أحل النظمة $\begin{cases} \frac{3}{4}x - 7y = 21 \\ \sqrt{2}\,x + 6y = -18 \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} \frac{3}{4}x - 7y = 21 \\ \sqrt{2}\,x + 6y = -18 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} \frac{3}{4}x = 21 + 7y \\ \sqrt{2}\,x + 6y = -18 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} x = \frac{4}{3}(21 + 7y) \\ \sqrt{2}\,x + 6y = -18 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} \times 21 + \frac{4}{3} \times 7y \\ \sqrt{2}\,x + 6y = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 + \frac{28}{3}y \\ \sqrt{2}\left(28 + \frac{28}{3}y\right) + 6y = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 + \frac{28}{3}y \\ 28\sqrt{2} + \frac{28\sqrt{2}}{3}y + 6y = -18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 + \frac{28}{3}y \\ \left(\frac{28}{3}\sqrt{2} + 6\right)y = -18 - 28\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 + \dfrac{28}{3}y \\ \left(\dfrac{28\sqrt{2}+18}{3}\right)y = -(18+28\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 + \dfrac{28}{3}y \\ y = \dfrac{-(18+28\sqrt{2})\times 3}{(18+28\sqrt{2})} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 + \dfrac{28}{3}y \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 28 + \dfrac{28}{\cancel{3}} \times (-\cancel{3}) \\ y = -3 \end{cases}$$

إذن
$$\begin{cases} x = 28 - 28 = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

ومنه فإن الزوج (0 ; -3) هو حل هذه النظمة.

❖ <u>أحل النظمة :</u>
$$\begin{cases} 2x + y = x + 1 \\ 3x + 2y = x - y + 1 \end{cases}$$

لدينا :
$$\begin{cases} 2x + y = x + 1 \\ 3x + 2y = x - y + 1 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} 2x - x + y = 1 \\ 3x - x + 2y + y = 1 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 2x + 3(1 - x) = 1 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 2x + 3 - 3x = 1 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ -x = 1 - 3 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = 1 - x \\ -x = -2 \end{cases}$$

يعني أن :
$$\begin{cases} y = 1 - 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

إذن :
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

ومنه فإن حل هذه النظمة هو الزوج (2 ; -1).

<u>تمرين 5</u>

1) – أتأكد أن الزوج (1 ; 1) حل للمعادلة :

$2x + y - 3 = 0$

لدينا:

$2 \times 1 + 1 - 3 = 2 + 1 - 3 = 3 - 3 = 0$

إذن الزوج (1 ; 1) يحقق المعادلة.

إذن : (1 ; 1) حل لهذه المعادلة.

• للحصول على خمسة حلول للمعادلة

$2x + y - 3 = 0$ نعطي لـ x قيمة (أو لـ y) ثم نبحث على y. (أو على x)

← إذا كان $x = 0$ فإن $2 \times 0 + y - 3 = 0$ أي $y = 3$

إذن الزوج (0 ; 3) حل لهذه المعادلة.

← إذا كان $x = 2$ فإن $y = -1$

إذن الزوج (2 ; -1) حل للمعادلة $2x + y - 3 = 0$.

← بالمثل الأزواج $\left(\frac{3}{2};0\right)$ ، (-1 ; 5) ، (3 ; -3) حلول للمعادلة

$2x + y - 3 = 0$

② أحدد قيمة العدد a حيث الزوج $(a ; -1)$ حل للمعادلة :

$2x + y - 3 = 0$

لدينا : (a ; -1) حل للمعادلة $2x + y - 3 = 0$

إذن : $2 \times a - 1 - 3 = 0$

أي $2a - 4 = 0$

$2a = 4$

ومنه فإن : $\boxed{a = \dfrac{4}{2} = 2}$

<u>تمرين 6</u>

أحدد عددين مجموعها يساوي 182 وفرقهما يساوي 4.

• ليكن x و y العددين المطلوبين إذن: $\begin{cases} x + y = 182 \\ x - y = 4 \end{cases}$

• لدينا $\begin{cases} x + y = 182 \\ x - y = 4 \end{cases}$ بعد جمع طرفي المعادلتين طرف بطرف

أحصل على: $2x = 186$

$\boxed{x = \dfrac{186}{2} = 93}$

• من $x + y = 182$ و $x = 93$

نستنتج أن: $y = 182 - x = 182 - 93$

$$\boxed{y = 89}$$

أتحقق: $\begin{cases} x + y = 93 + 89 = 182 \\ x - y = 93 - 89 = 4 \end{cases}$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 7

نعتبر المستقيم (D) ذا المعادلة:

$$y = ax + b$$

1) لدينا : $A(1 ; 2)$ تنتمي إلى المستقيم (D) إذن زوج إحداثيتي النقطة A يحقق معادلة المستقيم (D)

أي أن : $2 = a \times 1 + b$

إذن: $\boxed{a + b = 2}$ ①

2) لدينا : $B(-3 ; 1)$ تنتمي إلى المستقيم (D) إذن : زوج إحداثيتي النقطة B يحقق معادلة المستقيم (D)

أي أن : $1 = a \times (-3) + b$

إذن: $\boxed{-3a + b = 1}$ ②

3) أحدد معادلة للمستقيم (AB) .

بما أن A و B تنتميان لـ (D). و $A \neq B$

فإن : $(AB) = (D)$

ومنه فإن : تحديد معادلة (AB) يرجع إلى تحديد معادلة (D) .

ولأجل ذلك يجب تحديد العددين a و b.

• من خلال العلاقتين ① و ② نستنتج أن العددين a و b يحققان النظمة $\begin{cases} a + b = 2 \\ -3a + b = 1 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} b = 2 - a \\ -3a + 2 - a = 1 \end{cases}$

يعني أن $\begin{cases} b = 2 - a \\ -4a = 1 - 2 \end{cases}$

يعني أن $\begin{cases} b = 2 - a \\ -4a = -1 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} b = 2 - a \\ a = \frac{-1}{-4} \end{cases}$

$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{cases}$

$\boxed{a = \frac{1}{4}}$ و $\boxed{b = \frac{7}{4}}$

وبالتالي فإن المعادلة : $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$ هي معادلة المستقيم (AB).

تمرين 8

أحل النظمة التالية :

(S₁) $\begin{cases} 2y(3x + 1) - 6x(y + 2) = 2 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} 2y(3x + 1) - 6x(y + 2) = 2 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} \cancel{6xy} + 2y - \cancel{6xy} - 12x = 2 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} -12x + 2y = 2 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$

نجمع المعادلتين طرفا بطرف فنحصل

على : $-12x + 3x + \cancel{2y} - \cancel{2y} = 2 + 7$

أي $-9x = 9$

$$\boxed{x = \frac{9}{-9} = -1}$$

• نحسب قيمة y :

لدينا $x = -1$ و $3x - 2y = 7$

إذن $3 \times (-1) - 2y = 7$

$-3 - 2y = 7$

$-2y = 7 + 3$

$-2y = 10$

$$\boxed{y = \frac{10}{-2} = -5}$$

ومنه فإن حل النظمة (S₁) هو الزوج $(-1 ; -5)$.

• أحل النظمة التالية: (S₂) $\begin{cases} \frac{-x + y}{2} + x = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$

لدينا:
$$\begin{cases} \dfrac{-x+y}{2} + x = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

يعني:
$$\begin{cases} \dfrac{-x+y}{2} + \dfrac{2x}{2} = \dfrac{4}{2} \\ x - y = 2 \end{cases}$$

يعني:
$$\begin{cases} -x + y + 2x = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

يعني:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

إذن $2x = 6$

$$\boxed{x = \frac{6}{2} = 3}$$

• نحسب قيمة y :

لدينا: $x = 3$ و $x + y = 4$

إذن: $y = 4 - x = 4 - 3 = 1$

ومنه فإن حل النظمة (S_2) هو الزوج $(3\ ;\ 1)$.

• أحل النظمة التالية :

(S_3)
$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y-4}{6} = 0 \\ \dfrac{2x}{3} - \dfrac{3y-1}{2} = -3 \end{cases}$$

يعني أن: (توحيد المقامات)
$$\begin{cases} \dfrac{3(x+1)}{6} + \dfrac{(y-4)}{6} = 0 \\ \dfrac{4x}{6} - \dfrac{3(3y-1)}{6} = \dfrac{-18}{6} \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} 3x + 3 + y - 4 = 0 \\ 4x - 9y + 3 = -18 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 4x - 9y = -18 - 3 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ 4x - 9(-3x + 1) = -21 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ 4x + 27x - 9 = -21 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ 31x = -21 + 9 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ 31x = -12 \end{cases}$$

يعني أن
$$\begin{cases} x = \dfrac{-12}{31} \\ y = -3 \times \left(-\dfrac{12}{31}\right) + 1 \end{cases}$$

يعني أن
$$\begin{cases} x = \dfrac{-12}{31} \\ y = \dfrac{36}{31} + 1 \end{cases}$$

إذن
$$\begin{cases} x = \dfrac{-12}{31} \\ y = \dfrac{36}{31} + \dfrac{31}{31} = \dfrac{67}{31} \end{cases}$$

ومنه فإن حل النظمة (S_3) هو الزوج $\left(\dfrac{-12}{31}; \dfrac{67}{31}\right)$.

• أحل النظمة التالية :

(S_4)
$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \begin{cases} \sqrt{3}\,x - \sqrt{2}\,y = 1 \\ \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 0 \end{cases}$$

← للتخلص من المجهول y نضرب طرفي المعادلة (1) في $-\sqrt{3}$ ونضرب طرفي المعادلة (2) في العدد $\sqrt{2}$ فنحصل على

النظمة :
$$\begin{cases} -\sqrt{3}^{\,2}x + \sqrt{6}\,y = -\sqrt{3} \\ \sqrt{2}^{\,2}x - \sqrt{6}\,y = 0 \end{cases}$$

يعني:
$$\begin{cases} -3x + \sqrt{6}\,y = -\sqrt{3} \\ 2x - \sqrt{6}\,y = 0 \end{cases}$$

ثم نجمع المعادلتين طرفا بطرف

$$-3x + 2x + \cancel{\sqrt{6}y} - \cancel{\sqrt{6}y} = -\sqrt{3} + 0$$

$$-x = -\sqrt{3}$$

$$\boxed{x = \sqrt{3}}$$

← نحسب قيمة y :

لدينا $x = \sqrt{3}$ و $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = 0$

إذن $\sqrt{2} \times \sqrt{3} - \sqrt{3}\,y = 0$

$$\sqrt{6} - \sqrt{3}\,y = 0$$

$$-\sqrt{3}\,y = -\sqrt{6}$$

$$\boxed{y = \frac{-\sqrt{6}}{-\sqrt{3}} = +\sqrt{2}}$$

ومنه فإن حل النظمة (S_4) هو الزوج $(\sqrt{3};\sqrt{2})$.

تمرين 9

♦ اختيار المجاهيل :

ليكن x ثمن القميص الواحد. و y ثمن الحذاء الواحد.

♦ صياغة النظمة :

أدّى منصف مبلغ 500 درهما لشراء قميص وحذاءين.

إذن $x + 2y = 500$

أدّى فيصل مبلغ 400 درهما لشراء قميصين وحذاء واحد.

إذن $2x + y = 400$

ومنه فإن الزوج (x;y) هو

حل النظمة : $\begin{cases} x + 2y = 500 \\ 2x + y = 400 \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} x + 2y = 500 \\ 2x + y = 400 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x + 2y = 500 \\ y = 400 - 2x \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x + 2(400 - 2x) = 500 \\ y = 400 - 2x \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x + 800 - 4x = 500 \\ y = 400 - 2x \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} -3x = 500 - 800 \\ y = 400 - 2x \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} -3x = -300 \\ y = 400 - 2x \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x = \frac{300}{3} = 100 \\ y = 400 - 2 \times 100 = 200 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} x = 100 \\ y = 200 \end{cases}$

♦ الرجوع إلى المسألة المطروحة :

ثمن القميص الواحد هو : 100Dh.

وثمن الحذاء الواحد هو : 200Dh.

♦ التحقق :

$\begin{cases} 100 + 2 \times 200 = 100 + 400 = 500 \\ 2 \times 200 + 200 = 200 + 200 = 400 \end{cases}$

تمرين 10

❖ إذا أضفنا العدد 2 إلى بسط ومقام العدد $\frac{a}{b}$ نحصل على العدد $\frac{1}{3}$

إذن : $\frac{a+2}{b+2} = \frac{1}{3}$

❖ وإذا طرحنا العدد 2 من بسط ومقام العدد $\frac{a}{b}$ نحصل على العدد $\frac{1}{7}$

إذن : $\frac{a-2}{b-2} = \frac{1}{7}$

ومنه فإن الزوج $(a;b)$ هو حل

النظمة $\begin{cases} \frac{a+2}{b+2} = \frac{1}{3} \\ \frac{a-2}{b-2} = \frac{1}{7} \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} 3(a+2) = b + 2 \\ 7(a-2) = b - 2 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} 3a + 6 = b + 2 \\ 7a - 14 = b - 2 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} 3a + 6 - 2 = b \\ 7a - 14 = b - 2 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} 3a + 4 = b \\ 7a - 14 = 3a + 4 - 2 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} b = 3a + 4 \\ 7a - 3a = 14 + 4 - 2 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} b = 3a + 4 \\ 4a = 16 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} b = 3 \times 4 + 4 \\ a = \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases}$

ومنه فإن : العدد المطلوب هو : $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

♦ التحقق : $\frac{4}{16} = \frac{4+2}{16+2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$\frac{4}{16} = \frac{4-2}{16-2} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

تمرين 11

♦ اختيار المجاهيل

← ليكن x هو عدد الأوراق من فئة : 10Dh

و y هو عدد الأوراق فئة . 100Dh

♦ صياغة النظمة :

← يتكون المبلغ المالي من 1850Dh .

إذن $10x + 100y = 1850$

← عدد أوراق المبلغ هو : 95.

إذن $x + y = 95$

ومنه فإن الزوج $(x;y)$ هو حل

النظمة
$$\begin{cases} 10x + 100y = 1850 \\ x + y = 95 \end{cases}$$

♦ حل النظمة :

من :
$$\begin{cases} 10x + 100y = 1850 \\ x + y = 95 \end{cases}$$

نجد أن $x = 85$ و $y = 10$

♦ الرجوع إلى المسألة المطروحة :

عدد الأوراق من فئة 10Dh هو 85.

عدد الأوراق من فئة 100Dh هو 10 .

♦ التحقق :
$$\begin{cases} 85 + 10 = 95 \\ 10 \times 85 + 100 \times 10 = 850 + 1000 = 1850 \end{cases}$$

تمرين 12

♦ اختيار المجاهيل :

ليكن x هو عدد التلاميذ .

و y هو عدد الأساتذة .

♦ صياغة النظمة :

← عدد الأساتذة والتلاميذ المساهمين هو 20 فرداً

إذن : $x + y = 20$

← ساهم كل تلميذ ب 10 درهم وكل أستاذ ب 30 درهم وبلغ مجموع المساهمات 230 درهم .

إذن : $10x + 30y = 320$

← ومنه فإن الزوج $(x;y)$ هو

حل النظمة
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 30y = 320 \end{cases}$$

♦ حل النظمة :

من
$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 30y = 320 \end{cases}$$

نجد أن x = 14 و y = 6

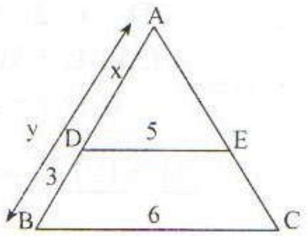
♦ الرجوع إلى المسألة المطروحة :

عدد التلاميذ هو : 14

وعدد الأساتذة هو : 6

♦ التحقق :
$$\begin{cases} 14 + 6 = 20 \\ 10 \times 14 + 30 \times 6 = 140 + 180 = 320 \end{cases}$$

تمرين 13



أحسب x و y :

نعتبر المثلث ABC .

$(DC)//(BC)$

إذن : $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

لدينا : $AB = y$ و $AD = x$ و $BC = 6$ و $DE = 5$

أي أن: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{6}$

$$\boxed{6x = 5y}$$

ولدينا: D تنتمي إلى [AB]

إذن: $AD + DB = AB$

أي: $\boxed{x + 3 = y}$

• ومنه فإن الزوج $(x;y)$

هو حل النظمة
$$\begin{cases} 6x = 5y \\ x + 3 = y \end{cases}$$

يعني أن : $\begin{cases} 6x = 5(x+3) \\ x + 3 = y \end{cases}$

$\begin{cases} 6x = 5x + 15 \\ y = x + 3 \end{cases}$

أي أن : $\begin{cases} 6x - 5x = 15 \\ y = x + 3 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} x = 15 \\ y = 15 + 3 = 18 \end{cases}$

$\boxed{x = 15}$ و $\boxed{y = 18}$

تمارين توليفية

تمرين 14

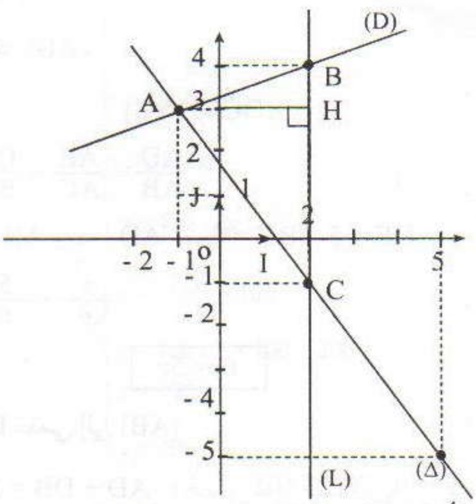
نعتبر المستقيمان :

$(D) : x - 3y + 10 = 0$

و $(\Delta) : 4x + 3y - 5 = 0$

و $(L) : x = 2$

1 - أنشئ المستقيمات (D) و (Δ) و (L) في م.م.م.



2 - أحسب إحداثيات رؤوس المثلث :

• لتكن النقطة A نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ).

إذن زوج إحداثيتي النقطة A هو حل النظمة. $\begin{cases} x - 3y + 10 = 0 \\ 4x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

وباتباعنا لطريقة التعويض أو طريقة التأليفة الخطية

نجد أن $x = -1$ و $y = 3$

وبالتالي فإن زوج إحداثيتي النقطة A هو $(-1 ; 3)$:

• لتكن النقطة B نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (L) إذن : زوج إحداثيتي النقطة B يحقق معادلتي (D) و (L)

ومنه فإن زوج إحداثيتي النقطة B هو حل النظمة

$\begin{cases} x - 3y + 10 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

أي أن : $\begin{cases} 2 - 3y + 10 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

وبالتالي فإن زوج إحداثيتي النقطة B هو : $(2 ; 4)$

• لتكن النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (L) بالمثل نبين أن زوج إحداثيتي النقطة C هو : $(2 ; -1)$

3 - أحسب مساحة المثلث ABC .

لتكن H المسقط العمودي ل A على (BC)

إذن $S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2}$

لدينا $B(2;4)$ و $C(2;-1)$

إذن $BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$

$= \sqrt{(2-2)^2 + (4+1)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 5^2}$

$\boxed{BC = 5}$

لدينا $A(-1;3)$ و $H(2;3)$

إذن $AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2}$

$= \sqrt{(2+1)^2 + (3-3)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 0^2}$

$\boxed{AH = 3}$

ومنه فإن: $\boxed{S_{ABC} = \frac{3 \times 5}{2} = 7{,}5 \text{ cm}^2}$

تمرين 15

♦ اختيار المجهولين :

ليكن x هو عدد الذكور عند تأسيس الجمعية . و y هو عدد الإناث عند تأسيس الجمعية.

♦ صياغة النظمة :

عند التأسيس عدد المنخرطات يزيد على عدد الذكور ب26 فراداً .

إذن : $y = x + 26$

عند انسحاب 15 فرداً من الذكور و15 فردا من الإناث . أصبح عدد الإناث يساوي ثلاث مرات عدد الذكور .

إذن $y - 15 = 3(x - 15)$

ومنه فإن الزوج $(x\,;\,y)$ هو

♦ حل النظمة

$$\begin{cases} y = x + 26 \\ y - 15 = 3(x - 15) \end{cases}$$

لدينا:
$$\begin{cases} y = x + 26 \\ y - 15 = 3(x - 15) \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = x + 26 \\ x + 26 - 15 = 3(x - 15) \end{cases}$$

يعني أن
$$\begin{cases} y = x + 26 \\ x + 11 = 3x - 45 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = x + 26 \\ x - 3x = - 11 - 45 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} y = x + 26 \\ - 2x = - 56 \end{cases}$$

يعني أن:
$$\begin{cases} x = 28 \\ y = 28 + 26 \end{cases}$$

إذن:
$$\begin{cases} x = 28 \\ y = 54 \end{cases}$$

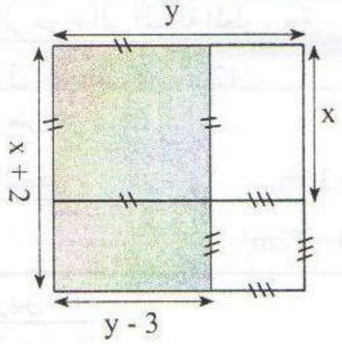
♦ الرجوع إلى المسألة المطروحة :

عدد الذكور عند تأسيس الجمعية هو : 28

عدد الإناث عند تأسيس الجعية هو : 54

♦ التحقق :
$$\begin{cases} 54 = 28 + 26 \\ 54 - 15 = 3(28 - 15) = 39 \end{cases}$$

تمرين 16



♦ اختيار المجهولين :

ليكن x هو عرض المستطيل و y هو طوله .

♦ صياغة النظمة :

نعلم أن محيط المستطيل 36m

إذن : $2(x + y) = 36$

أي : $2x + 2y = 36$

عند إضافة 2m إلى أحد أبعاده وطرح 3m من البعد الآخر فإنه مساحته لا تتغير .

إذن : $xy = (y - 3)\,(x + 2)$

ومنه فإن : الزوج $(x\,;\,y)$ هو حل النظمة :

$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ xy = (y - 3)\,(x + 2) \end{cases}$$

♦ حل النظمة :

لدينا:
$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ xy = xy + 2y - 3x - 6 \end{cases}$$

يعني:
$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ \cancel{xy} - \cancel{xy} - 2y + 3x = - 6 \end{cases}$$

إذن:
$$2x + 3x + \cancel{2y} - \cancel{2y} = 36 - 6$$

$$5x = 30$$

$$\boxed{x = \frac{30}{5} = 6 \text{ m}}$$

♦ نحسب قيمة y :

لدينا : $x + y = 18$

و : $x = 6$

إذن $y = 18 - x = 18 - 6$ أي أن: $\boxed{y = 12\text{m}}$

♦ الرجوع إلى المسألة المطروحة

طول المستطيل هو : 12m

عرض هو : 6m

♦ التحقق : $2(x + y) = 2(6 + 12) = 36m$

$6 \times 12 = (6 + 2)(12 - 3) = 72m^2$

تمرين 17

♦ اختيار المجهولين :

ليكن x هو طول المستطيل الذي يمثل أيضا طول ضلع المربع ①.

و y هو عرض المستطيل الذي يمثل أيضا طول ضلع المربع ②.

♦ صياغة النظمة :

لتكن S مساحة المستطيل $ABCD$ إذن $S = x \times y$

ولدينا : $S = 60cm^2$

ومنه فإن $x \times y = 60$

- لتكن S_1 مساحة المربع ① إذن $S_1 = x^2$

- لتكن S_2 ومساحة المربع ② إذن $S_2 = y^2$

ونعلم أن $S_1 + S_2 = 169$

ومنه فإن $x^2 + y^2 = 169$

ومنه فإن الزوج $(x ; y)$ هو حل النظمة $\begin{cases} xy = 60 \\ x^2 + y^2 = 196 \end{cases}$

ومع x و y عددان موجبان قطعا. و $x > y$

♦ حل النظمة : $\begin{cases} xy = 60 \\ x^2 + y^2 = 196 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} 2xy = 120 \\ x^2 + y^2 = 196 \end{cases}$

أي: $\begin{cases} 2xy = 120 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 120 + 169 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 169 - 120 \end{cases}$

$\begin{cases} xy = 60 \\ (x + y)^2 = 289 \\ (x - y)^2 = 49 \end{cases}$

مع $x + y > 0$ و $x - y > 0$

$\begin{cases} xy = 60 \\ x + y = \sqrt{289} = 17 \quad ② \\ x - y = \sqrt{49} = 7 \quad ③ \end{cases}$

نجمع طرفي المعادلتين ② و ③ طرفا بطرف

$\begin{cases} xy = 60 \\ 2x = 17 + 7 \end{cases}$

$\begin{cases} x \times y = 60 \\ x = \frac{24}{2} = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{60}{12} = 5 \\ x = 12 \end{cases}$

♦ الرجوع إلى المسألة المطروحة :

طول المستطيل هو 12cm

وعرضه هو : 5cm

♦ التحقق :

$S = 5 \times 12 = 60\ cm^2$

$S_1 + S_2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169\ cm^2$

9 الاحصاء

معارف أساسية

1 مصطلحات إحصائية وتعاريف

- الساكنة الإحصائية هي المجموعة التي تخضع للدراسة (مجموعة التلاميذ مثلا) وكل عنصر من هذه المجموعة يسمى فردا أو وحدة إحصائية.

- الميزة هي الظاهرة التي تتم دراستها وتنقسم إلى قسمين: كمية وكيفية.
  * ميزة كمية مثلا: نقط التلاميذ، عدد الأولاد، السن
  * ميزة كيفية مثلا: الجنس، فصيلة الدم...

- الحصيص هو عدد الوحدات التي تأخذها قيمة من قيم الميزة.

- الحصيص المتراكم التصاعدي لقيمة من قيم الميزة هو مجموع حصيصات القيم التي تصغر أو تساوي هذه القيمة.

- التردد: تردد قيمة من قيم الميزة هو خارج حصيصها على الحصيص الإجمالي.

- التردد المتراكم الموافق لقيمة من قيم الميزة هو نسبة الحصيص المتراكم الموافق لهذه القيمة والحصيص الإجمالي.

مثال

الجدول التالي يعطينا كشفا عن نقط 30 تلميذ في مادة الرياضيات:

النقطة	2	6	8	10	11	14	16	18
الحصيص	2	4	8	4	5	3	2	2
حصيص متراكم تصاعدي	2	6	14	18	23	26	28	30

✓ الميزة المدروسة: نقطة الرياضيات

✓ قيم الميزة هي: 18;16;14;11;10;8;6;2

✓ الحصيص: 3 تلاميذ حصلوا على النقطة 14 .

الحصيص المتراكم التصاعدي المرتبط بالميزة 10 هو:

2+4+8+4 أي: 18 .

✓ التردد المرتبط بالقيمة 10 هو: $\frac{4}{30}$ أي 0،13

✓ التردد التصاعدي المرتبط بالقيمة 10 هو: $\frac{18}{30}$

أي 0.60 .

2 وسيطات الوضع

1) المنوال

منوال متسلسلة إحصائية هو كل قيمة أو نوع أو صنف له أكبر حصيص.

2) المعدل الحسابي

* المعدل الحسابي هو خارج قيمة مجموع القيم الملاحظة على عدد القيم.
* المعدل الحسابي هو مجموع جداءات قيم الميزة في الحصيصات المرتبطة بها مقسوم على الحصيص الإجمالي.

ملاحظة

إذا كانت الميزة على شكل أصناف فإننا نحسب معدل مراكز الأصناف.

3) القيمة الوسطية

أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي لمتسلسلة إحصائية هو قيمة وسطية لهذه المتسلسلة.

مثال

✓ نعتبر الجدول الإحصائي التالي:

النقطة/ الميزة	2	5	7	10	12	14	16
عدد التلاميذ/الحصيص	1	3	5	6	7	6	1
الحصيص المتراكم	1	4	9	15	22	28	14,5

✠ منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو: 12

✠ معدلها الحسابي M هو:

$$M = \frac{2\times1 + 5\times3 + 7\times5 + 10\times6 + 12\times7 + 14\times6 + 16\times1}{29}$$

$$M = 10,20$$

✠ القيمة الوسطية هي: 10

مثال

✓ يعطي الجدول التالي توزيع زبناء أحد المحلات التجارية حسب أعمارهم.

الصنف	الحصيص	الحصيص المتراكم
$15 \le a < 20$	2	2
$20 \le a < 25$	15	17
$25 \le a < 30$	16	33
$30 \le a < 35$	19	52
$35 \le a < 40$	4	56

✠ منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو مركز الصنف: $30 \le a < 35$

✠ معدلها الحسابي M هو:

$$M = \frac{2\times17,5 + 15\times22,5 + 16\times27,5 + 19\times32,5 + 4\times37}{56}$$

$$M = 28,21$$

مثال

✠ نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

$\underbrace{6;\ 6;\ 7;\ 10}\ \boxed{11}\ \underbrace{14;\ 14;\ 16}$

11 هي القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة.

✠ نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

$\underbrace{7;\ 9;\ 10}\quad \underbrace{10;\ 12;\ 16}$

10 هي القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة.

✠ نعتبر المتسلسلة الإحصائية التالية:

$\underbrace{7;\ 7;\ 11}\quad \underbrace{12;\ 15;\ 16}$

11.5 هي القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة.

$$\frac{11 + 12}{2} = 11,5$$

نصوص التمارين

تمرين 1

بموقف لسيارات معروضة للبيع قامت جميلة بإحصاء السيارات التي لها الألوان التالية:
أحمر: R ، أخضر: V ، أسود: N

R	N	R	V	R	V	N	V	R	R
N	R	N	R	R	R	N	R	R	N
R	N	R	R	N	R	R	R	N	R
R	N	R	R	R	R	N	R	N	R

① ما هي الساكنة الاحصائية في هذا الاحصاء؟
② ما هي الميزة المدروسة؟ وما هي قيمها؟
③ أتمم الجدول التالي:

الميزة	R	V	N
الحصيص			
الحصيص المتراكم			
التردد			
التردد المتراكم			
قياس الزاوية			

تمرين 2

الكشف أسفله يخص عدد ساعات غياب تلامذة قسم خلال سنة

3	3	5	1	2	0	0	4	7
3	4	0	10	9	0	9	2	2
0	10	8	8	7	2	2	4	3
5	6	6	8	3	4	5	0	0

1) ما هي الميزة المدروسة؟
2) املأ الجدول التالي:

قيم الميزة										
للحصيص										

3) ما هو الحصيص الاجمالي لهذه المتسلسلة الاحصاية؟
4) حدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية
5) أحسب تردد قيمة الميزة 8.
6) حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الاحصاية.
7) مثل الجدول المحصل عليه بمخطط بالقضبان.

تمرين 3

الكشف أسفله يعطينا نقط مجموعة تلاميذة قسم في فرض لمادة الرياضيات.

4	6	10	4	6	10	16	4	6	10
4	14	14	6	14	14	14	16	6	16
					4	6	16	6	14

1) حدد الساكنة الاحصائية، والوحدة الاحصائية والميزة المدروسة لهذه المتسلسلة الاحصائية.
2) أتمم ملأ الجدول التالي:

قيم الميزة					
الحصيص					
الحصيص المتراكم					
التردد					
التردد المتراكم					

3) مثل الجدول الاحصائي المحصل عليه بمبيان عصوي للحصيصات
4) حدد وسيطات الوضع (المنوال-المعدل الحسابي-القيمة الوسطية)

تمرين 4

لاجراء بحث حول سن تلاميذ قسم الثالثة ثانوي إعدادي جمع عارف القسم المعطيات التالية:

13	15	16	15	13	15	15
15	13	15	16	15	16	14
15	16	16	15	15	16	16
16	15	16	15	16	15	15

1) ضع جدولا تنظم فيه المعطيات.
2) أ- كم عدد التلاميذ الذين يبلغ سنهم 15 سنة ؟
ب- ما هو الحصيص الاجمالي لهذه الساكنة ؟
ج- احسب التردد والنسبة المئوية للتلاميذ الذين تبلغ أعمارهم 15 سنة.
3) احسب معدل سن تلاميذ هذا القسم.
4) أ- ضع جدولا للحصيصات.
ب- مثل توزيع تلاميذ هذا القسم حسب السن بمبيان عصوي.
5) أ- حدد منوال المتسلسلة
ب- حدد قيمتها الوسطية

تمرين 5

الكشف التالي يعطينا بالتوالي، عدد الكتب المستعارة في كل يوم من خزانة إحدى المؤسسات التعليمية.

10	19	11	5	7	4	12	10	19	16
19	16	10	15	12	16	7	19	10	11
16	21	4	10	7	19	5	10	19	12
10	15	19	7	12	10	19	11	7	5

1) حدد الساكنة الاحصائية، الميزة المدروسة و الحصيص الاجمالي لهذه المتسلسلة الاحصائية.

2) اعط جدولا للحصيصات، والحصيصات المتراكمة، والترددات، والنسب المئوية.

3) أوجد منوال هذه المتسلسلة، معدلها الحسابي وقيمتها الوسطية.

4) أنشئ مضلعا للحصيصات المتراكمة.

تمرين 6

المخطط أسفله يلخص نتائج دراسة همت لون الشعر بالنسبة لـ 80 دمية.

1) ما هو اسم المخطط أعلاه ؟

2) ما هو منوال هذه المتسلسلة ؟

3) املأ الجدول أسفله؟

لون الشعر	أسود	أشقر	أحمر
الحصيص			
التردد			
قياس الزاوية بالدرجات			

تمرين 7

الكشف أسفله يعطينا معلومات حول قامات أشخاص بالسنتمتر

120	135	156	140	136	151	159
125	145	120	135	144	145	156
159	150	154	156	158	149	150
157	138	125	129	158	137	155
150	127	148	135	148	159	130
145	138	149	126	150	145	120
120	140	157	133	149	158	131
						130

املأ الجدول أسفله (T هي القامة)

الصنف	الحصيص	التردد
$120 \leq T < 130$		
$130 \leq T < 140$		
$140 \leq T < 150$		
$150 \leq T < 160$		

1) ما هو منوال هذه المتسلسلة الاحصائية ؟

2) حدد مركز كل صنف. ثم احسب المعدل الحسابي.

3) مثل الحصيصات بمبيان بالأشرطة.

تمرين 8

الجدول أسفله يهم نتائج استطلاع رأي هم 100 وحدة إحصائية حول اللون المفضل

1) أتمم ملأ الجدول التالي:

اللون	أخضر	أسود	أحمر	أزرق	المجموع
النسبة المئوية			30%		
الحصيص	10	40			
الزاوية بالدرجات				36°	180°

2) مثل الجدول بمخطط قطاعي.

تمرين 9

الجدول التالي يعطي تصنيفا للمواد المدرسة بالسنة الثالثة ثانوي إعدادي حسب معاملاتها.

المعاملات	1	2	3	5
عدد المواد	3	2	2	3

1) اعط منوال هذه المتسلسلة.

2) اعط جدول الحصيصات المتراكمة.
3) احسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.
4) احسب التردد المتراكم المرتبط بالقيمة 3.
5) حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة.
6) مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط عصوي للحصيصات

تمرين 10

بمناسبة أسبوع التضامن ضد الفقر نظم تلاميذ أحد الأقسام اكتتابا لمساعدة زميل لهم ضعيف البصر على شراء نظارات فكان توزيع المساعدات كالتالي:

قيمة المساهمة بالدرهم	20	25	30	40	50
عدد التلاميذ	12	2	7	5	4

1) احسب N عدد تلاميذ القسم.
2) احسب معدل قيمة المساهمة.
3) احسب التردد المرتبط بالميزة 40
4) احسب منوال هذه المتسلسلة وقيمتها الوسطية.
5) مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط عصوي للحصيصات المتراكمة،

تمرين 11

أنجز فلاح جردا سنويا لإنتاج العسل بضيعته وسجل النتائج التالية:

كتلة العسل ب kg	$18 \le p_1 < 20$	$20 \le p_2 < 22$	$22 \le p_3 < 24$	$24 \le p_4 < 26$	$26 \le p_5 < 28$	$28 \le p_6 < 30$
عدد الخلايا	2	8	5	2	1	2

1) حدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية.
2) احسب قيمة مقربة لمعدل إنتاج كل خلية.
3) مثل هذه المتسلسة بمخطط بالأشرطة.

تمرين 12

الكشف التالي يعطي درجة الحرارة خلال شهر أبريل لمدينة معينة

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
درجة الحرارة	7	6	6	5	2	5	7	12	12	15
اليوم	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
درجة الحرارة	17	17	17	15	12	12	12	9	9	12
اليوم	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
درجة الحرارة	12	15	17	20	20	17	17	20	20	20

1) تمم الجدول التالي:

درجة الحرارة										
عدد الأيام										

2) حدد وسيطات الوضع لهذه المتسلسلة (المنوال – المعدل الحسابي – القيمة الوسطية)

تمرين 13

الجدول التالي يعطي عدد الأهداف التي سجلها فريق لكرة القدم خلال 30 مبارة.

عدد الأهداف (x_i)	0	1	2	3	4	5
عددالمباريات(n_i)	4	8	10	3	2	3

1) حدد وسيطات الوضع (المنوال – المعدل الحسابي – القيمة الوسطية)
2) مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط عصوي للحصيصات المتراكمة.

تمرين 14

المعطيات التالية تهم فصيلة دم مجموعة من الأشخاص.

O	A	B	AB	AB	O	O	AB	A	A
A	O	AB	B	A	A	AB	O	O	AB
O	A	O	A	O	AB	O	O	B	A
O	O	O	A	O	A	A	B	A	AB
O	O	AB	B	A	O	AB	O	O	A

1) مثل هذه المعطيات في جدول للحصيصات، ثم حدد النسبة المئوية الممثلة لكل فصيلة دم.
2) أنشئ مخططا قطاعيا ممثلا لهذه المتسلسلة الإحصائية.

تمرين 15

طلب من 25 عضوا من نادي رياضي، المسافة d بين منزلهم والملعب، فكانت نتائج أجوبتهم موزعة على الشكل التالي:

المسافة بـ km	$0 \le d < 2$	$2 \le d < 4$	$4 \le d < 6$	$6 \le d < 8$
الحصيص	2	12	7	4

1) احسب N الحصيص الاجمالي لهذه المتسلسلة.
2) اعط جدولا للحصيصات المتراكمة والترددات المتراكمة الموافقة لها.
3) احسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.
4) اعط منوال هذه المتسلسلة الإحصائية.
5) مثل هذه المتسلسلة الإحصائية بمخطط بالأشرطة.

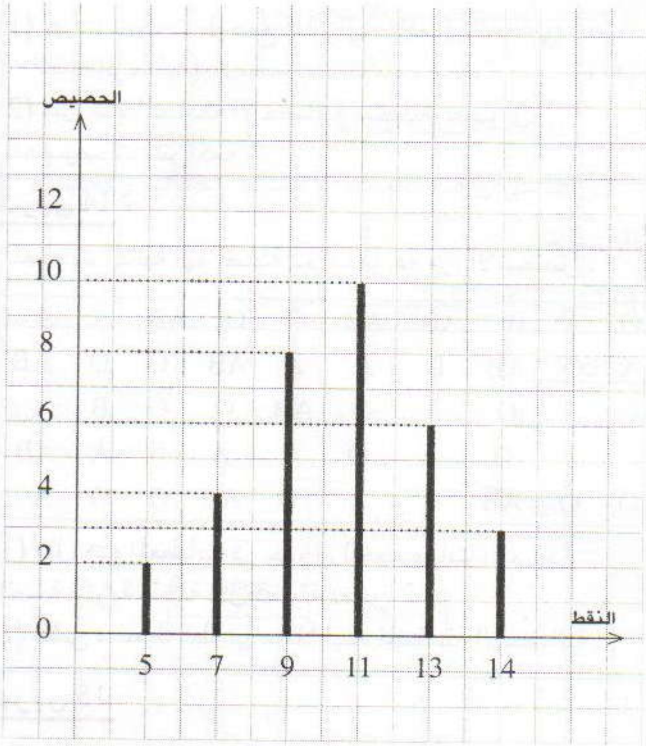
تمرين 16

فيما يلي كشف إحصائي لمقاييس الحرارة المسجلة في منطقة معينة خلال سنة.

صنف الحرارة	$-5 \leq T < 5$	$5 \leq T < 15$	$15 \leq T < 25$	$25 \leq T < 35$	$35 \leq T < 45$
عدد الأيام	3	167	115	60	20

1) حدد منوال هذه المتسلسلة.
2) احسب المعدل الحسابي.
3) احسب النسبة المئوية للعينة $5 \leq T < 35$
4) مثل هذه المتسلسلة بمخطط قطاعي.

تمرين 17



النقط	5	7			18
الحصيص	2				1
الحصيص المتراكم					
التردد					
التردد المتراكم					

1) حدد حدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية.
2) إملأ الجدول الإحصائي أعلاه.
3) احسب المعدل الحسابي لذه المتسلسلة الإحصائية.
4) حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

تمرين 18

حصل خالد على النقط التالية (النقطة على 20) في مادة الرياضيات:

$$10 \ ; 15 \ ; 18 \ ; 0 \ ; 14.5$$

1) احسب المعدل الحسابي لنقط خالد.
2) ما هي النقطة التي يجب أن يحصل عليها خالد في الفرض السادس ليزيد معدله بنقطة واحدة؟
3) هل بإمكان خالد الحصول على معدل يساوي 13 في ستة فروض.

تمرين 19

يصنع معمل أربعة أنواع من القارورات B_1 و B_2 و B_3 و B_4 الجدول أسفله يبين نسبة المبيعات من كل نوع.

النوع	B_1	B_2	B_3	B_4
النسبة	30%	15%	45%	10%

1) احسب عدد القارورات التي بيعت من النوع B_2، ومن النوع B_3
ومن النوع B_4 إذا علمت أن عدد القارورات التي بيعت من النوع B_1 هو 60.000.
2) مثل هذه المتسلسلة بمخطط قطاعي.

تمرين 20

يصنف الجدول التالي توزيع عمال إحدى الشركات حسب أجورهم:

أصناف الأجور بالدرهم	الحصيصات	الترددات	الحصيصات المتراكمة
$2200 \leqslant S_1 \square 3000$		0,15	.
$3000 \leqslant S_2 \square 3800$		0,285	
$3800 \leqslant S_3 \square 4600$			
$4600 \leqslant S_4 \square 5400$		0,27	400

1) كم عدد عمال هذه الشركة؟
2) أتمم الجدول أعلاه.

تمرين 21

يمثل الجدول التالي تصنيفا حسب السن لخمسين منخرطا بأحد الأندية الرياضية.

الصنف	$15 \leqslant A_1 \square 25$	$25 \leqslant A_2 \square 35$	$35 \leqslant A_3 \square 45$	$45 \leqslant A_4 \square 55$	$55 \leqslant A_5 \square 65$
الحصيص	3m	6m		5m	3m
التردد			0,32		

1) أ- احسب حصيص الصنف $35 \leqslant A_3 < 45$

ب- استنتج قيمة m.

2) احسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

3) احسب النسبة المئوية للعينة $15 \leqslant A_1 < 25$

حلول التمارين

تمرين 1

① الساكنة الاحصائية هي مجموع السيارات.

② الميزة المدروسة هي: لون السيارة

وقيمها هي: أحمر: R ; أخضر: V ; أسود: N

③ أتمم الجدول التالي

الميزة	R	V	N
الحصيص	25	3	12
الحصيص المتراكم	25	28	40
التردد	0.62	0.07	0.30
التردد المتراكم	0.62	0.69	$1 \simeq 0,99$
قياس الزاوية	$\simeq 225^\circ$	$\simeq 26^\circ$	$\simeq 109^\circ$

تمرين 2

1) الميزة المدروسة هي ساعات غياب التلاميذ

2) أملأ الجدول التالي:

قيم الميزة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لحصيص	7	1	5	5	4	3	2	2	3	2	2

3) الحصيص الاجمالي N لهذه المتسلسلة هو:

$$N = 7+1+5+5+4+3+2+2+3+2+2$$

$$\boxed{N = 36}$$

4) أحدد منوال المتسلسلة الإحصائية:

قيمة الميزة التي لها أكبر حصيص هي: 0

إذن: منوال المتسلسلة هو: 0.

5) أحسب تردد قيمة الميزة 8:

لتكن f تردد قيمة الميزة 8 إذن: $f = \frac{n}{N} = \frac{3}{36}$

$$\boxed{f = \frac{1}{12} \simeq 0,08}$$

6) أحدد القيمة الوسطية.

الجدول التالي يعطي الحصيصات المتراكمة.

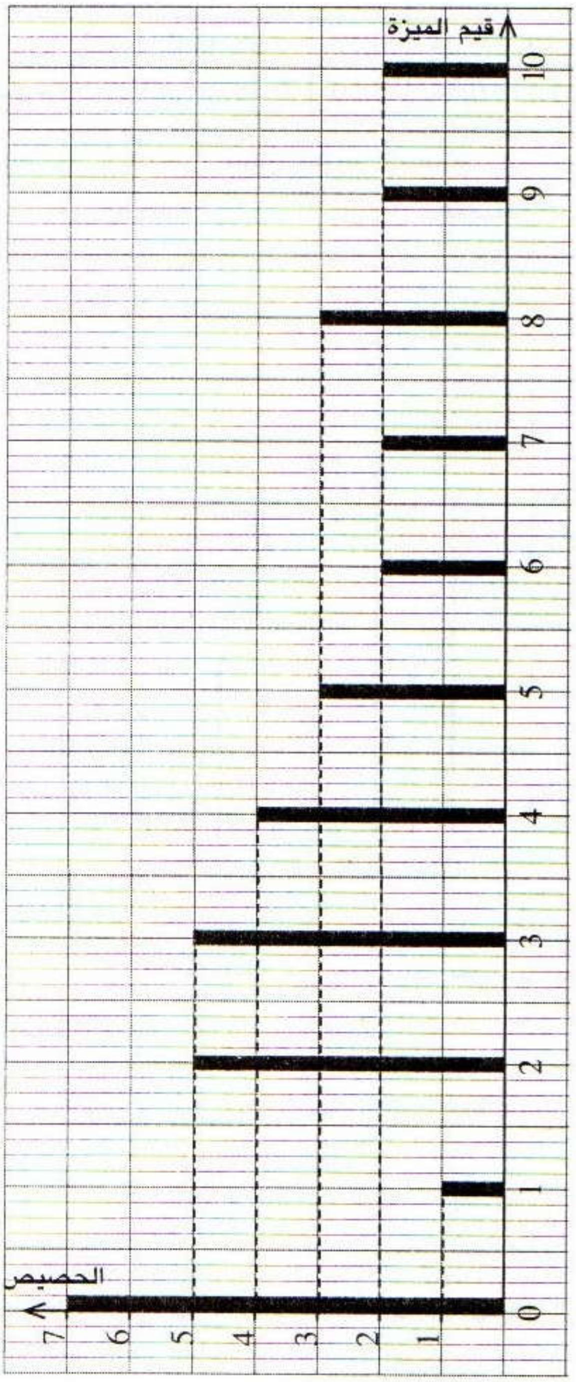
نصف الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة هو : $\frac{36}{2}$ أي 18

وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي 18 هي 3

إذن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي: 3

الميزة	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الحصيص المتراكم	7	8	13	18	22	25	27	29	32	34	36

7) أمثل المتسلسلة بمخطط بالقضبان:



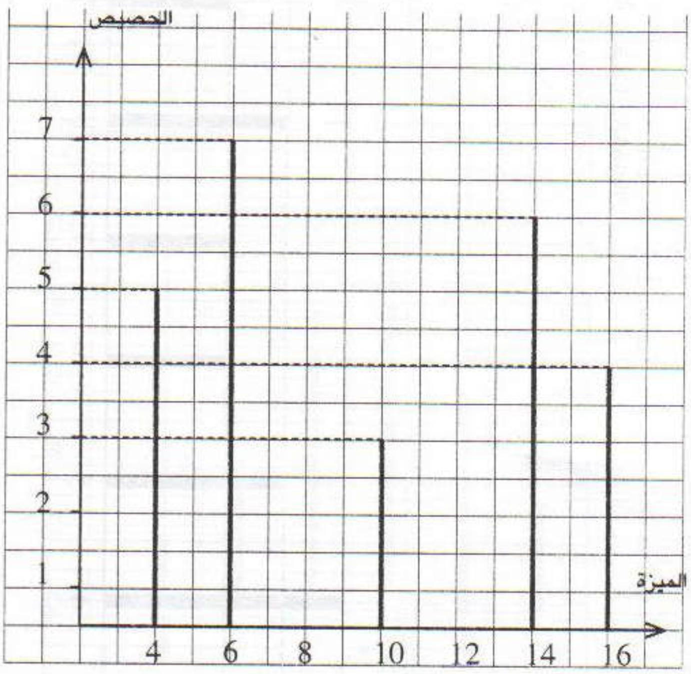
تمرين 3

1) * الساكنة الاحصائية هي مجموع تلاميذ القسم.
* الوحدة الإحصائية: تلميذ
* الميزة المدروسة: نقطة فرض

2) أتمم الجدول التالي:

قيم الميزة	4	6	10	14	16
الحصيص	5	7	3	6	4
الحصيص المتراكم	5	12	15	21	25
التردد	0.2	0.28	0.12	0.24	0.16
التردد المتراكم	0.2	0.48	0.60	0.84	1

3) أمثل الجدول الإحصائي بمبيان عصوي للحصيصات



4) أحدد وسيطات الوضع.

* **المنوال**: منوال هذه المتسلسلة هي الميزة ذات القيمة 6
* **المعدل الحسابي**:

$$m = \frac{4\times5 + 6\times7 + 10\times3 + 14\times6 + 16\times4}{25}$$

$$= \frac{240}{25} = 9{,}6 \qquad \boxed{m = 9{,}6}$$

* **القيمة الوسطية**:

نصف الحصيص الاجمالي لهذه المتسلسلة هو $\frac{25}{2}$ أي 12.5

وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو تساوي 12.5 هو: 10.

إذن: القيمة الوسطية هي: 10.

تمرين 4

1) نلاحظ أن قيم المتغير الإحصائي أي سن التلاميذ يتراوح بين 13 و 16 سنة. نرتب هذه القيم $13<14<15<16$

السن x_i	13	14	15	16
الحصيص n_i	3	1	14	10

2) أ- عدد التلاميذ الذين يبلغون 15 سنة هو 14.

ب- الحصيص الإجمالي لتلاميذ هذا القسم هو:

$$N=3+1+14+10=28$$

ج-* تردد التلاميذ الذين يبلغون 15 سنة هو: $f_3 = \frac{n_3}{N}$

حيث n_3 حصيص 15 سنه

و N=28 الحصيص الإجمالي إذن: $f_3 = \frac{14}{28} = 0{,}5$

* النسبة المئوية للتلاميذ البالغين 15 سنة هي: $P_3 = 100 \times f_3$

أي: $\boxed{P_3 = 100\text{x}0{,}5 = 50\%}$

3) ليكن $\overline{x}$ هو معدل تلاميذ هذا القسم

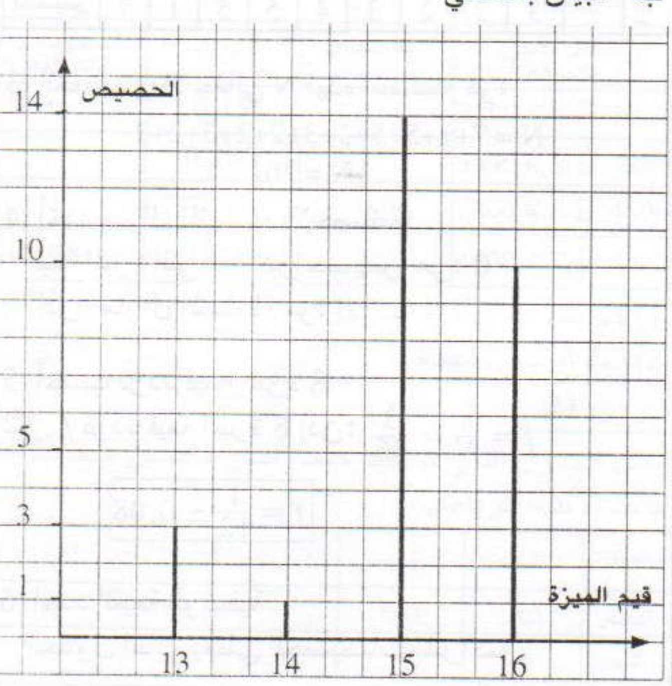
إذن: $\overline{x} = \frac{13\times3 + 14\times1 + 15\times14 + 16\times10}{28}$

$$\boxed{\overline{x} = 15{,}10}$$

3) أ- جدول الحصيصات المتراكمة:

السن x_i	13	14	15	16
الحصيص n_i	3	1	14	10
الحصيص المتراكم	3	4	18	28

ب- مبيان بالعصي



5) أ- <u>أحدد المنوال</u>

* منوال متسلسلة هو قيمة المتغير الذي له أكبر حصيص أي 15 سنة

وهو السن الأكثر ترددا.

ب- <u>أحدد القيمة الوسطية:</u>

* نلاحظ أن أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي $\frac{28}{2}$ أي 14هي القيمة 15.

إذن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي 15.

تمرين 5

1) * الساكنة الاحصائية هي مجموع الأيام.

* الميزة المدروسة هي عدد الكتب المستعارة وهي ميزة كمية متقطعة تأخذ القيم 4;5;7;10;11;12;15;16;19;21.

* الحصيص الإجمالي هو عدد الأيام أي: 40.

قيم الميزة x_i	4	5	7	10	11	12	15	16	19	21
الحصيص n_i	2	3	5	8	3	4	2	4	8	1
الحصيص المتراكم	2	5	10	18	21	25	27	31	39	40
التواتر	0,05	0,075	0,125	0,2	0,075	0,1	0,05	0,1	0,2	0,025
النسبة المئوية	5	7,5	12,5	20	7,5	10	5	10	20	2,5

3) * نلاحظ أن 8 هو أكبر حصيص وأنه يوافق قيمتين للميزة وهما 10 و 19.

إذن منوال هذه المتسلسلة هما 10 و 19

* ليكن $\overline{x}$ هو المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة

$$\overline{x} = \frac{4\times2 + 5\times3 + 7\times5 + 10\times8 + 11\times3 + 12\times4 + 15\times2 + 16\times4 + 19\times8 + 21\times1}{40}$$

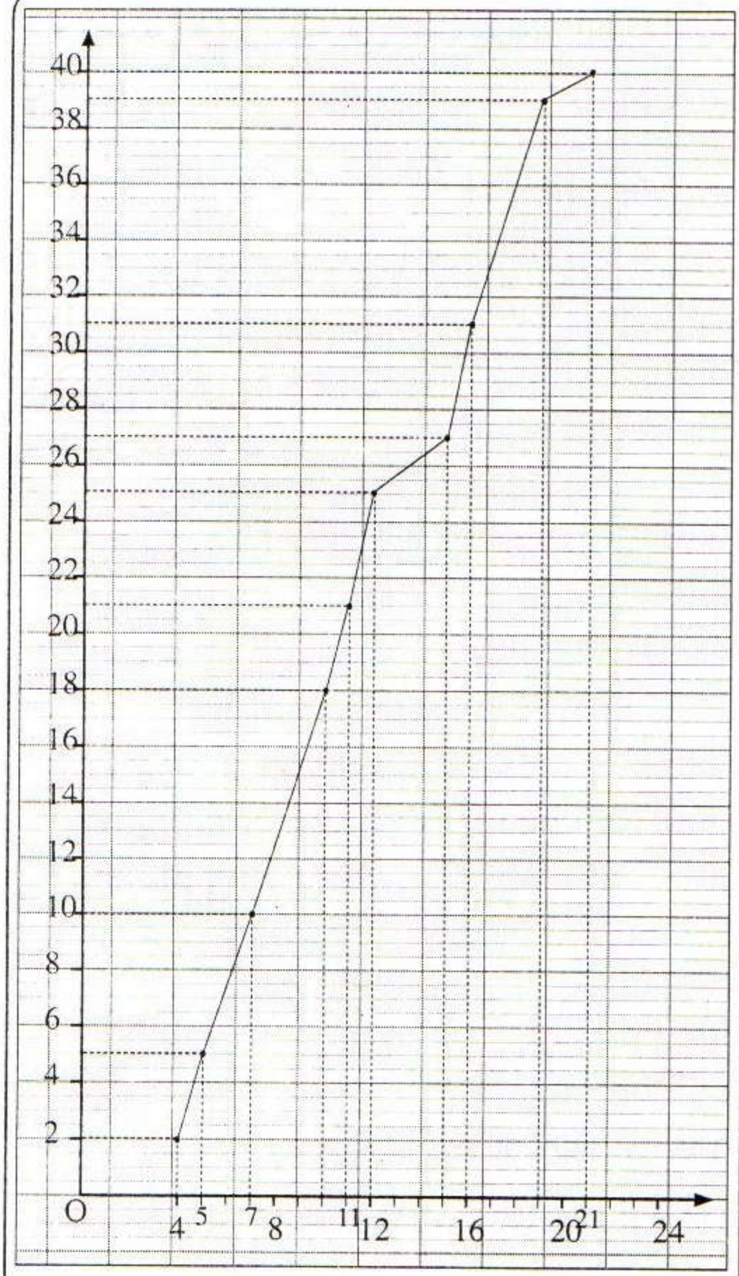
$$\overline{x} = \frac{8 + 15 + 35 + 80 + 33 + 48 + 30 + 64 + 152 + 21}{40}$$

$$\boxed{\overline{x} = 12,15}$$

* نلاحظ أن 50% على الأقل من مجموع الأيام تمت في كل منها استعارة 11 كتابا أو أقل، وأن 50% على الأقل من مجموع عدد الأيام تمت في كل منها استعارة 11 كتابا أو أكثر.

إذن القيمة 11 هي القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة.

4) مضلع الحصيصات المتراكمة:



تمرين 6

1) المخطط يسمى مخطط قطاعي أو دائري.

2) منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو: اللون الأسود لأنه يتوفر على أكبر نسبة مئوية.

<u>**ملاحظة**</u>: النسبة المئوية للشعر الأشقر هي 35%.

3) * الحصيص المرتبط بالقيمة: لون الشعر أسود

هو: $\frac{40x80}{100}$ أي 32.

* الحصيص المرتبط بالقيمة: لون الشعر أحمر

هو: $\frac{25x80}{100}$ أي 20.

* الحصيص المرتبط بالقيمة: لون الشعر أشقر هو: $\frac{35x80}{100}$

أي 28.

أحمر	أشقر	أسود	لون الشعر
20	28	32	الحصيص
0.25	0.35	0.4	التردد
90°	126°	144°	قياس الزاوية بالدرجات

تمرين 7

1) أملأ الجدول التالي:

التردد	الحصيص	الصنف
0,18	9	$120 \le T < 130$
0,22	11	$130 \le T < 140$
0,24	12	$140 \le T < 150$
0,36	18	$150 \le T < 160$

2) أحدد منوال المتسلسلة الإحصائية:

الصنف الذي له أكبر حصيص هو: $150 \le T < 160$

إذن منوال المتسلسلة هو: $150 \le T < 160$

3) أحدد مركز كل صنف

* مركز الصنف $120 \le T < 130$ هو: $\frac{120+130}{2}$ أي: 125

* مركز الصنف $130 \le T < 140$ هو: $\frac{130+140}{2}$ أي: 135

* مركز الصنف $140 \le T < 150$ هو: $\frac{140+150}{2}$ أي: 145

* مركز الصنف $150 \le T < 160$ هو: $\frac{150+160}{2}$ أي: 155

* أحسب المعدل الحسابي m لهذه المتسلسلة.

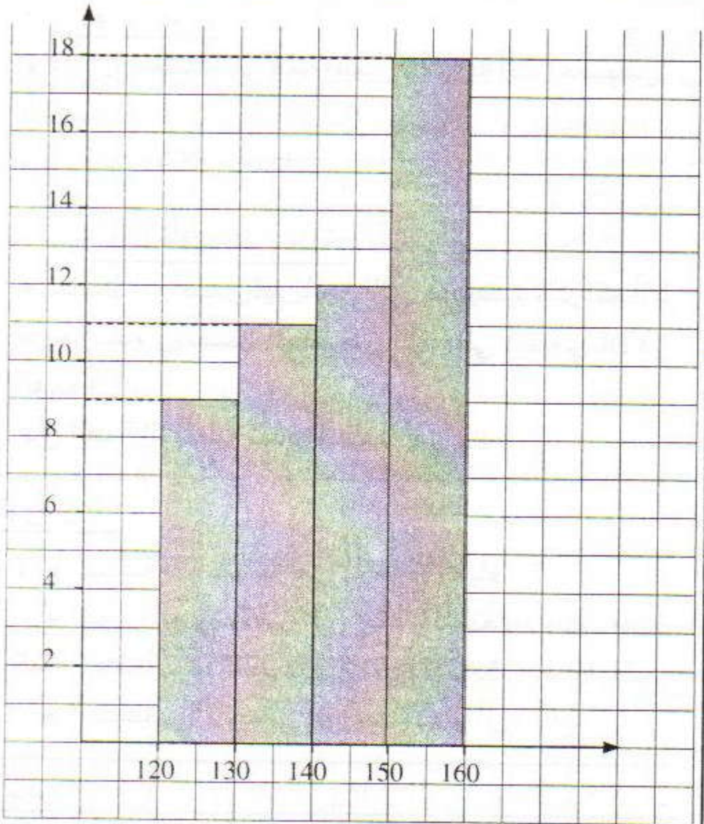
$150 \le T < 160$	$140 \le T < 150$	$130 \le T < 140$	$120 \le T < 130$	الصنف
155	145	135	125	مركز الصنف
18	12	11	9	الحصيص

إذن: $m = \frac{125x9+135x11+145x12+155x18}{50}$

$$m = \frac{1125+1485+1740+2790}{50} = \frac{7140}{50}$$

$$\boxed{m = 142,5}$$

4) أمثل الحصيصات بمبيان بالأشرطة:



تمرين 8

4) أتمم الجدول التالي:

* لتكن α_3 قياس الزاوية الموافقة للميزة " اللون الأحمر".

إذن: $\alpha_3 = P_3 \times \frac{360}{100}$

ولدينا: $P_3 = 30\%$ أي أن: $\alpha_3 = 30 \times \frac{360}{100}$

$$\boxed{\alpha_3 = 108°}$$

* ليكن n_3 الحصيص الموافق للميزة «اللون الأحمر»

إذن: $n_3 = \frac{30 \times N}{100}$ أي: $n_3 = \frac{30 \times \cancel{100}}{\cancel{100}} = 30$

* ليكن P_2 النسبة المئوية الموافقة للميزة «اللون الأسود»

إذن: $P_2 = \frac{n_2}{N} \times 100$ ولدينا: $N = 100 \quad n_2 = 40$

أي: $P_2 = \frac{40}{\cancel{100}} \times \cancel{100}$ $\boxed{P_2 = 40\%}$

* لتكن α_2 قياس الزاوية الموافقة للميزة " اللون الأسود"

إذن: $\alpha_2 = P_2 \times \frac{360}{100}$ أي أن: $\alpha_2 = 40 \times \frac{360}{100}$

$$\boxed{\alpha_2 = 144°}$$

3) أحسب التردد المرتبط بالميزة ذات القيمة 40

نعلم أن: $f = \frac{n}{N}$ حيث:

n الحصيص المرتبط بالميزة ذات القيمة 40 وهو 5

N الحصيص الإجمالي وهو 30

إذن: $f = \frac{5}{30}$ أي أن: $\boxed{f \simeq 0,16}$

4) * أحدد منوال المتسلسلة

قيمة الميزة التي لها أكبر حصيص هي: 20

إذن: منوال هذه المتسلسلة هو: 20

* أحدد القيمة الوسطية:

الجدول التالي يعطي الحصيصات المتراكمة.

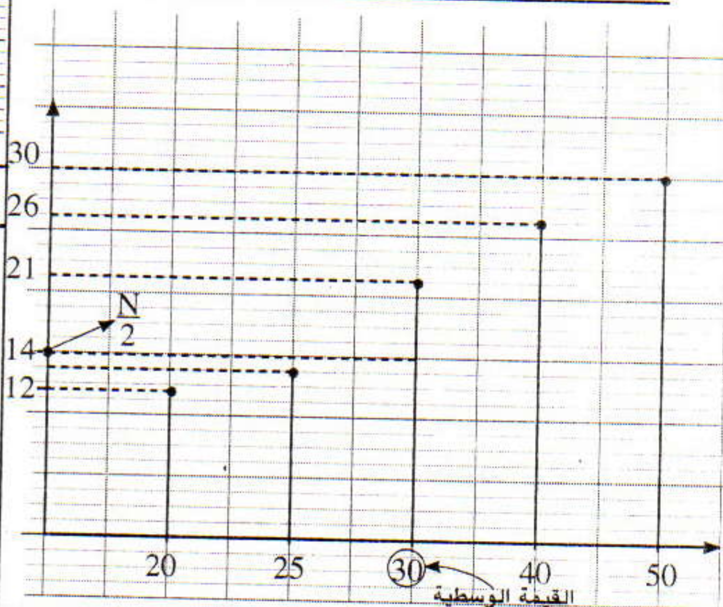
قيمة الميزة	20	25	30	40	50
الحصيص المتراكم	12	14	21	26	30

نصف الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة هو: $\frac{10}{2}$ أي 15

وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي 15 هي: 30

إذن: القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي: 30.

5) أمثل المتسلسلة بمخطط عصوي للحصيصات المتراكمة.



تمرين 11

1) أحدد منوال المتسلسلة الإحصائية:

الصنف الذي له أكبر حصيص هو: $20 \le p_2 < 22$

إذن منوال هذه المتسلسلة هو: $20 \le p_2 < 22$

2) أحسب قيمة مقربة لمعدل إنتاج كل خلية

بما أن المتسلسلة معبر عنها بالأصناف فإنه لحساب المعدل الحسابي نحسب مراكز الأصناف.

كتلة العسل بـ kg	$18 \le p_1 < 20$	$20 \le p_2 < 22$	$22 \le p_3 < 24$	$24 \le p_4 < 26$	$26 \le p_5 < 28$	$28 \le p_6 < 30$
مركز الصنف	19	21	23	25	27	29
عدد الخلايا	2	8	5	2	1	2

إذن: المعدل الحسابي m لهذه المتسلسلة الإحصائية هو:

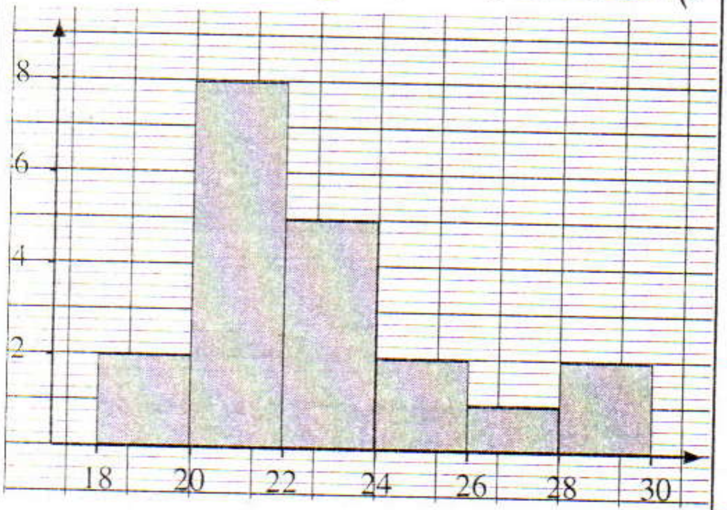
$$m = \frac{19\times2 ++ 21\times8 + 23\times5 + 25\times2 + 27\times1 + 29\times2}{20}$$

$$= \frac{38 + 168 + 115 + 50 + 27 + 58}{20}$$

$$= \frac{456}{20}$$

$$\boxed{m = 22.8}$$

3) أمثل المتسلسلة بمخطط بالأشرطة



تمرين 12

(1

درجة الحرارة	2	5	6	7	9	12	15	17	20
عدد الأيام	1	2	2	2	2	7	3	6	5

* الحصيص الإجمالي N لهذه المتسلسلة الإحصائية هو:

N=1+2+2+2+2+7+3+6+5

$\boxed{N=30}$

* أحدد منوال هذه المتسلسلة

قيمة الميزة التي لها أكبر حصيص هي: 12

إذن منوال هذه المتسلسلة هو: 12

* أحدد القيمة الوسطية

نصف الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة هو: $\frac{30}{2}$ أي 15

وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي 15 هي القيمة الوسطية.

والجدول التالي يعطينا الحصيصات المتراكمة.

درجة الحرارة	2	5	6	7	9	12	15	17	20
عدد الأيام	1	2	2	2	2	7	3	6	5
الحصيص المتراكم	1	3	5	7	9	16	19	25	30

إذن القيمة الوسطية هي: 12

* أحدد المعدل الحسابي m

$$m = \frac{2\times1 + 5\times2 + 6\times2 + 7\times2 + 9\times2 + 12\times7 + 15\times3 + 17\times6 + 20\times5}{30}$$

$$= \frac{2 + 10 + 12 + 14 + 18 + 84 + 45 + 102 + 100}{30}$$

$$m = \frac{387}{30}$$

$$\boxed{m = 12,9}$$

تمرين 13

1) أحدد وسيطات الوضع:

* المنوال:

قيمة الميزة التي لها أكبر حصيص هي:2

إذن منوال هذه المتسلسلة هو 2.

* المعدل الحسابي:

ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية

إذن:

$$m = \frac{0\times4 + 1\times8 + 2\times10 + 3\times3 + 4\times2 + 5\times3}{30}$$

$$m = \frac{0 + 8 + 20 + 9 + 8 + 15}{30} = \frac{60}{30}$$

$$\boxed{m = 2}$$

* القيمة الوسطية:

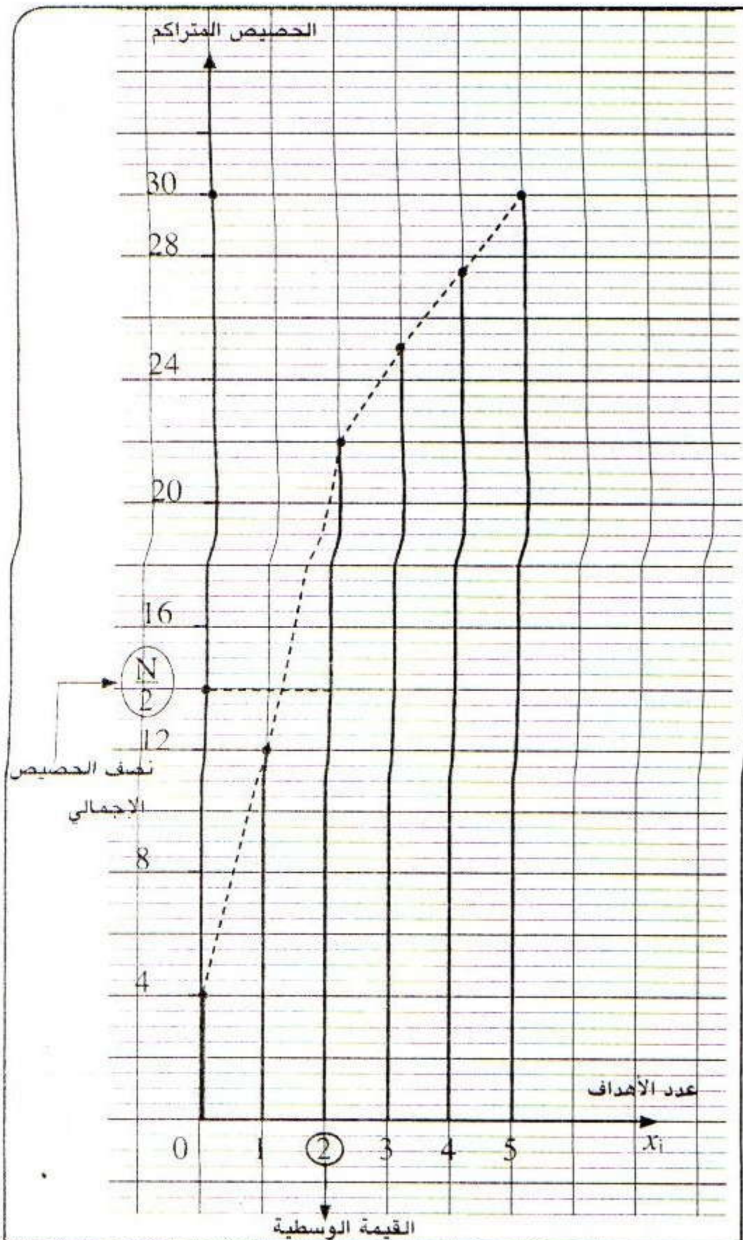
نصف الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة هو $\frac{30}{2}$ أي 15 وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي 15 هي: 2.

إذن: القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي: 2

2) إنشاء مخطط عصوي للحصيصات المتراكمة:

جدول إحصائي للحصيصات المتراكمة.

الميزة	0	1	2	3	4	5
الحصيص	4	8	10	3	2	3
الحصيص المتراكم	4	12	22	25	27	30



تمرين 14

1) جدول الحصيصات والنسب المئوية.

فصيلة الدم (x_i)	A	B	AB	O
الحصيص (n_i)	15	5	10	20
النسب المئوية	30%	10%	20%	10%

النسبة المئوية المرتبطة بكل نوع هي $P_i = \frac{n_i}{N} \times 100$

الحصيص الإجمالي N هو: N=15+5+10+20

N=50

2) لإنشاء مخطط قطاعي دائري ينبغي تحديد قياس للزاوية المرتبطة بكل فصيلة دم، لأجل ذلك نستعمل القاعدة الثلاثية

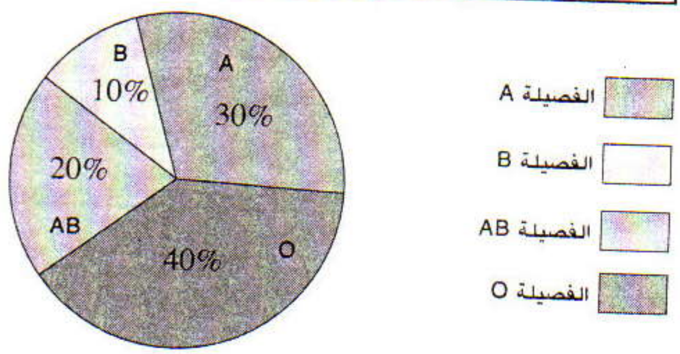
إذن:

$$100\% \longrightarrow 360^\circ$$
$$P_i\% \longrightarrow \alpha_i^\circ$$

$$\alpha_i^\circ = P_i \times \frac{360}{100}$$

نحصل على النتائج الممثلة في الجدول

فصيلة الدم	A	B	AB	O
قياس الزاوية	108°	36°	72°	144°



تمرين 15

1) أحسب N الحصيص الإجمالي

نعلم أن الحصيص الإجمالي يساوي مجموع الحصيصات

إذن: N=2+12+7+4

$\boxed{N=25}$

2) أعطي جدولا للحصيصات المتراكمة والترددات المتراكمة:

المسافة بـ km	$0 \le d < 2$	$2 \le d < 4$	$4 \le d < 6$	$6 \le d < 8$
الحصيص	2	12	7	4
الحصيص المتراكم	2	14	21	25
التردد	0,08	0,48	0,28	0,16
التردد المتراكم	0,08	0,56	0,84	1

3) أحسب المعدل الحسابي m لهذه المتسلسلة الإحصائية

ملاحظة: في متسلسلة إحصائية معرفة بالأصناف يعتبر مركز كل صنف قيمة للميزة.

المسافة بـ km	$0 \le d < 2$	$2 \le d < 4$	$4 \le d < 6$	$6 \le d < 8$
مركز الصنف	1	3	5	7
الحصيص	2	12	7	4

إذن:

$$m = \frac{1\times 2 + 3\times 12 + 5\times 7 + 7\times 4}{25}$$

$$m = \frac{2 + 36 + 35 + 28}{25} = \frac{101}{25}$$

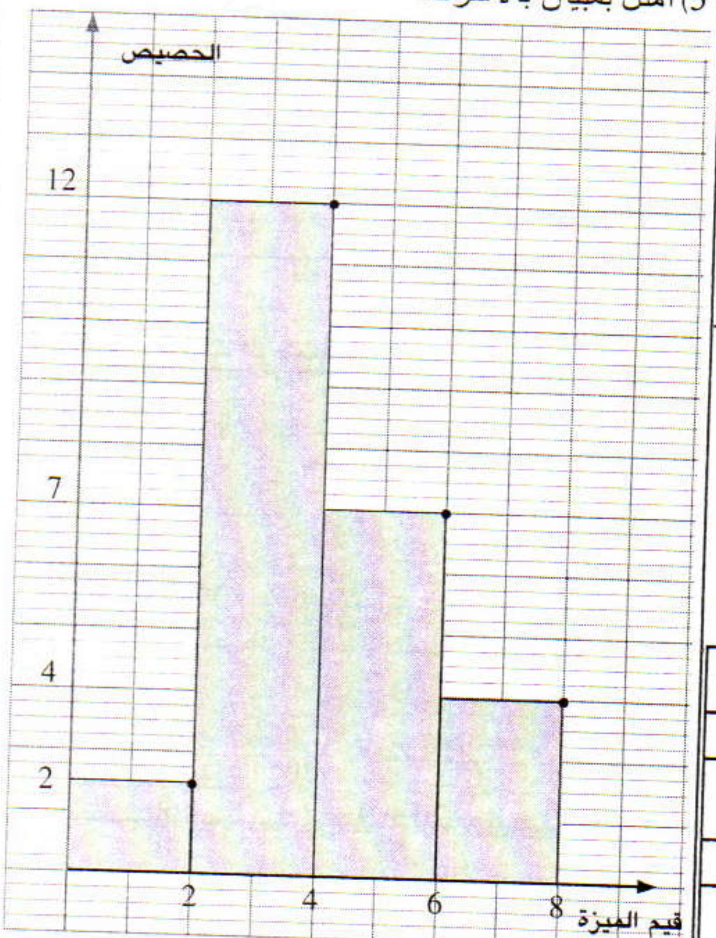
$$\boxed{m = 4,04}$$

4) أحدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية

الصنف الذي له أكبر حصيص هو: $2 \le d < 4$

إذن: منوال هذه المتسلسلة هو: $2 \le d < 4$

5) أمثل بمبيان بالأشرطة



تمرين 16

1) أحدد المنوال :

الصنف الذي له أكبر حصيص هو: $5 \leqslant T < 15$

إذن منوال هذه المتسلسلة هو الصنف: $5 \leqslant T < 15$

2) أحسب المعدل لحسابي:

بما أن المتسلسلة معبر عنها بالأصناف .

صنف الحرارة	$-5 \leqslant T < 5$	$5 \leqslant T < 15$	$15 \leqslant T < 25$	$25 \leqslant T < 35$	$35 \leqslant T < 45$
مركز الصنف	0	10	20	30	40
عدد الأيام	3	167	115	60	20

ليكن N الحصيص الإجمالي:

N=3+167+115+60+20

$\boxed{N=365}$

ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة:

إذن:

$$m=\frac{0\times3+10\times167+20\times115+30\times60+40\times20}{365}$$

$$m=\frac{0+1670+2300+1800+800}{365}=\frac{6570}{365}$$

$$\boxed{m=18}$$

3) أحسب النسبة المئوية للعينة: $5\leqslant T<35$

* تردد العينة $5\leqslant T<35$ هو: $\frac{167+115+60}{365}$

أي: $\frac{342}{365}=0,93$

إذن النسبة المئوية للعينة $5\leqslant T<35$ هي $100\times0,93$

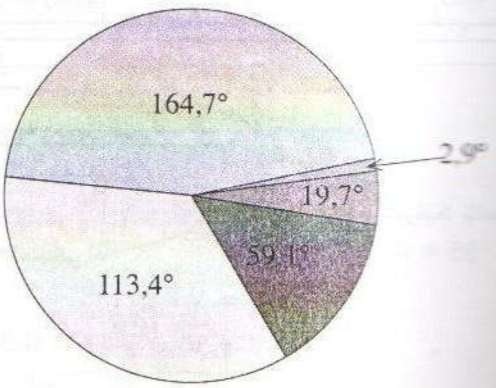
أي: $\boxed{93\%}$

4) أمثل هذه المتسلسلة بمخطط قطاعي.

ملاحظة:

لإنشاء مخطط دائري يوافق حصيصات متسلسلة إحصائية، نربط كل قيمة من قيم الميزة بقطاع من قرص بزاوية مركزية قياسها هو نسبة جداء الحصيص في 360 والحصيص الإجمالي أي: $\alpha=\frac{n\times360}{N}$ حيث (n الحصيص لقيمة من قيم الميزة و N الحصيص الإجمالي)

[illegible]	$-5\leqslant T<5$	$5\leqslant T<15$	$15\leqslant T<25$	$25\leqslant T<35$	$35\leqslant T<45$
[illegible]	3	167	115	60	20
[illegible]	2.9°	164,7°	113,4°	59,1°	19,7°



تمرين 17

1) أحدد منوال المتسلسلة

من خلال المبيان نلاحظ أن الميزة التي لها أكبر حصيص هي 11 إذن منوال هذه المتسلسلة الإحصائية هو: 11.

2) أملأ الجدول الإحصائي.

النقط	5	7	9	11	13	14	18
الحصيص	2	4	8	10	6	3	1
الحصيص المتراكم	2	6	14	24	30	33	34
التردد	0.05	0.11	0.23	0.29	0.17	0.08	0.02
التردد المتراكم	0,05	0,17	0,41	0,70	0.88	0,97	1

3) أحسب المعدل الحسابي:

* ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

إذن:

$$m=\frac{5\times2+7\times4+9\times8+11\times10+13\times6+14\times3+18\times1}{28}$$

$$m=\frac{10+28+72+110+78+42+18}{28}=\frac{358}{28}$$

$$\boxed{m\simeq10,52}$$

4) أحدد القيمة الوسطية:

أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي نصف الحصيص الإجمالي (أي $17=\frac{34}{2}=\frac{N}{2}$) هي القيمة 11.

إذن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي 11.

تمرين 18

1) أحدد المعدل الحسابي لنقط خالد:

ليكن m المعدل الحسابي انقط خالدة

إذن: $m=\frac{14.5+0+18+15+10}{5}=\frac{57,5}{5}$

$$\boxed{m=11,5}$$

2) أحسب النقطة التي يجب أن يحصل عليها خالد في الفرض السادس ليزيد معدله بنقطة واحدة.

لتكن x هذه النقطة.

$$\frac{14,5+0+18+15+10+x}{6}=12,5$$

$$57,5+x=6\times12,5$$

$$57,5+x=75$$

$$x=75-57,5$$

$$\boxed{x=17,5}$$

3) لتكن y النقطة السادسة لكي يكون معدله يساوي 13 .

إذن:
$$\frac{14,5+0+18+15+10+y}{6}=13$$
$$57,5+y=6\times 13$$
$$y=78-57,5$$
$$\boxed{y=20,5}$$

إذن لا يمكن لخالد أن يحصل على 13 كمعدل لستة فروض لكون الفرض السادس منقط على 20.

تمرين 19

1) ليكن x هو العدد الإجمالي للقارورات التي بيعت .

إذن: $60.000=30\%x$

$$x=\frac{60.000}{0,3}=200.000$$

15% بيعت من 200.000 من نوع B_2

إذن: عدد مبيعات القارورات من النوع B_2 هو: $200.0\cancel{00}\times\frac{15}{1\cancel{00}}$ أي: 30000 قارورة.

45% بيعت من 200.000 من النوع B_3

إذن: $200.0\cancel{00}\times\frac{45}{1\cancel{00}}$ أي: 90000 قارورة.

10% بيعت من 200.000 من النوع B_4

إذن: $200.0\cancel{00}\times\frac{10}{1\cancel{00}}$ أي: 20000 قارورة.

(3

لتكن α_1 قياس الزاوية التي تمثل نسبة المبيعات من القارورات B_1

إذن: $\alpha_1=\frac{360\times 30}{100}$ أي: $\boxed{\alpha_1=108^\circ}$

و α_2 قياس الزاوية التي تمثل نسبة المبيعات من القارورات B_2

إذن: $\alpha_2=\frac{360\times 15}{100}$ أي: $\boxed{\alpha_2=54^\circ}$

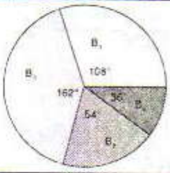
و α_3 قياس الزاوية التي تمثل نسبة المبيعات من القارورات B_3

إذن: $\alpha_3=\frac{360\times 45}{100}$ أي: $\boxed{\alpha_3=162^\circ}$

و α_4 قياس الزاوية التي تمثل نسبة المبيعات من القارورات B_4

إذن: $\alpha_4=\frac{360\times 10}{100}$

أي: $\boxed{\alpha_4=36^\circ}$



تمرين 20

1) عدد عمال الشركة.

الحصيص المتراكم الموافق لآخر صنف $4600\leqslant S_4<5400$ هو 400

إذن: عدد عمال الشركة هو: 400.

2) اتمام الجدول:

ليكن n_1 الحصيص المرتبط بالصنف $2200\leqslant S_1<3000$

لدينا: $\frac{n_1}{400}=0,15$ إذن: $n_1=400x0,15=60$

ليكن n_2 الحصيص المرتبط بالصنف $3000\leqslant S_2<3800$

لدينا: $\frac{n_2}{400}=0,285$ إذن: $n_2=400x0,285=114$

ليكن n_4 الحصيص المرتبط بالصنف $4600\leqslant S_4<5400$

لدينا: $\frac{n_4}{400}=0,27$ إذن: $n_4=400x0,27=108$

ليكن n_3 الحصيص المرتبط بالصنف $3800\leqslant S_3<4600$

إذن: $n_3=400-(60+114+108)=118$

التردد المرتبط بالصنف $3800\leqslant S_3<4600$ هو:

$$f_3=\frac{n_3}{400}=\frac{118}{400}=\boxed{0,295}$$

ومنه اتمام الجدول المقترح:

أصناف الأجور بالدرهم	الحصيصات	الترددات	الحصيصات المتراكمة
$2200\leqslant S_1<3000$	60	0,15	60
$3000\leqslant S_2<3800$	114	0,285	174
$3800\leqslant S_3<4600$	118	0.295	292
$4600\leqslant S_4<5400$	108	0,27	400

تمرين 21

1) أ- أحسب حصيص الصنف $35\leqslant A_3<45$

نعلم أن: الحصيص

$$f_3=\frac{n_3}{N}$$

التردد المرتبط بالصنف $35\leqslant A_3<45$

الحصيص الإجمالي

إذن: $n_3=N\times f_3$

ولدينا: $f_3=0,32$ و $N=50$

أي أن: $\boxed{n_3=50\times 0,32=16}$

ب- استنتج قيمة m

نعلم أن: مجموع الحصيصات يساوي الحصيص الإجمالي

إذن: $3m + 6m + 16 + 5m + 3m = 50$

أي: $17m = 50 - 16$

$$17m = 34$$

$$\boxed{m = \frac{34}{17} = 2}$$

2) أحسب المعدل الحسابي

بما أن المتسلسلة معبر عنها بالأصناف

فإنه: لحساب المعدل الحسابي نحسب مراكز الأصناف

الصنف	$15 \leqslant A_1 < 25$	$25 \leqslant A_2 < 35$	$35 \leqslant A_3 < 45$	$45 \leqslant A_4 < 55$	$55 \leqslant A_5 < 65$
مركز الصنف	20	30	40	50	60
الحصيص	3x2 =6	6x2 =12	16	5x2 =10	3x2 =6

إذن:

$$\bar{x} = \frac{20\times6 + 30\times12 + 40\times16 + 50\times10 + 60\times6}{50}$$

$$\bar{x} = \frac{120 + 360 + 640 + 500 + 360}{50}$$

$$\bar{x} = \frac{1980}{50} = \boxed{39,6}$$

3) أحسب p النسبة المئوية للعينة $15 \leqslant A < 35$

نعلم أن: $p = 100 \times \frac{n}{N}$ حيث n هو حصيص العينة

$15 \leqslant A \,\square\, 35$

وبما أن :

$$n = 3m + 6m = 3\times2 + 6\times2 = 6 + 12 = 18$$

$$p = 100 \times \frac{18}{50} = 36$$

وبالتالي فإن النسبة المئوية لهذه العينة هي: 36%

10 الهندسة الفضائية
حساب الحجوم - التكبير والتصغير

معارف أساسية

1 - تعامد مستقيم ومستوى :

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في نقطة A إذا كان (D) عموديا في النقطة A على مستقيمين من المستوى (P) ومتقاطعين في A.

خاصية:

إذا كان (D) مستقيما عموديا على مستوى فإن المستقيم (D) يكون عموديا على جميع المستقيمات الموجودة ضمن المستوى (P)

2 - تكبير و تصغير :

عند تصغير أو تكبير مجسم بنسبة k فإن :

- الأطوال تضرب في العدد k
- المساحات تضرب في العدد k^2
- الحجوم تضرب في العدد k^3

إذا كان $A'B'C'D'$ هو مقطع هرم $OABCD$ بمستوى يوازي القاعدة $ABCD$ فإن $OA'B'C'D'$ هو تصغير للهرم $OABCD$ و النسبة k حيث $\boxed{k = \frac{OA'}{OA}}$ **تسمى سلم أو نسبة التصغير.**

3 - الهرم المنتظم :

- كل هرم قاعدته مضلع منتظم و أحرفه الجانبية متقايسة يسمى **هرما منتظما**.
- إذا كانت جميع أضلاع رباعي أوجه متقايسة فإنه يسمى **رباعي أوجه منتظم**.

- إذا كان S هو رأس هرم و O هو مركز قاعدته فإن $[SO]$ هي ارتفاع هذا الهرم

نصوص التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم .

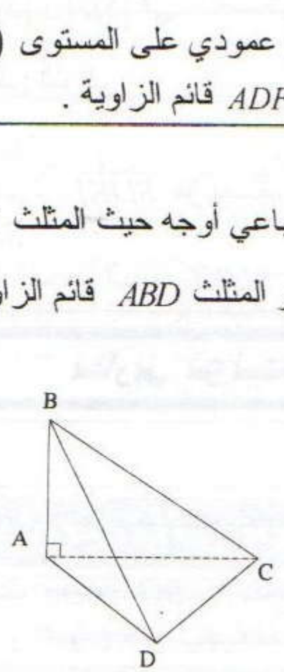
1. بين أن (AD) عمودي على المستوى $(ABFE)$
2. بين أن المثلث ADF قائم الزاوية .

تمرين 2

$ABCD$ رباعي أوجه حيث المثلث ABC

قائم الزاوية في A و المثلث ABD قائم الزاوية في A .

(لاحظ الشكل).



1. بين أن المستقيم (AB) عمودي على المستوى (ACD).
2. لتكن M نقطة من المستقيم (DC) .بين أن المثلث ABM قائم الزاوية في A .

تمرين 3

$SABCD$ هرم منتظم قاعدته المربع $ABCD$

و O مركز المربع $ABCD$ حيث $AB = 4cm$ و $SO = 6cm$

1. بين أن $OA = 2\sqrt{2}$.
2. أحسب V حجم الهرم $SABCD$
3. أحسب SA.

تمرين 4

$SABCD$ هرم رأسه S حيث $ABCD$ مستطيل

و SAB و SAD مثلثان قائمي الزاوية في النقطة A و $SA = AB = 3cm$ و $BC = 2cm$

1. ارسم شكلا مناسبا
2. أحسب SB و AC و SC
3. بين أن المثلث SBC قائم الزاوية
4. أحسب V حجم الهرم $SABCD$

تمرين 5

$OABC$ و $OA'B'C'$ رباعيا أوجه حيث

$OA'B'C'$ هو تصغير ل $OABC$ بنسبة $\frac{1}{3}$

1. أحسب h' ارتفاع رباعي الأوجه $OA'B'C'$، علما أن ارتفاع رباعي الأوجه $OABC$ يساوي $6cm$
2. أحسب S' مساحة المثلث $A'B'C'$، علما أن مساحة المثلث ABC تساوي $27cm^2$
3. أحسب S'_L المساحة الجانبية للهرم $OA'B'C'$، علما أن المساحة الجانبية للهرم $OABC$ تساوي $54cm^2$
4. أحسب V' حجم الهرم $OA'B'C'$، علما أن حجم الهرم $OABC$ يساوي $54cm^3$
5. استنتج حجم المجسم $A'B'C'ABC$

تمرين6

$ABCD$ رباعي أوجه حيث ABC مثلث

قائم الزاوية فيA و $AC = 8cm$ و $AB = 6cm$

لتكن E نقطة من $[DA]$ بحيث $DE = \frac{1}{3}DA$

و EFG هو مقطع الهرم $ABCD$ بمستوى يوازي القاعدة ABC .

1. حدد طبيعة المقطع EFG
2. أحسب مساحة المقطع EFG

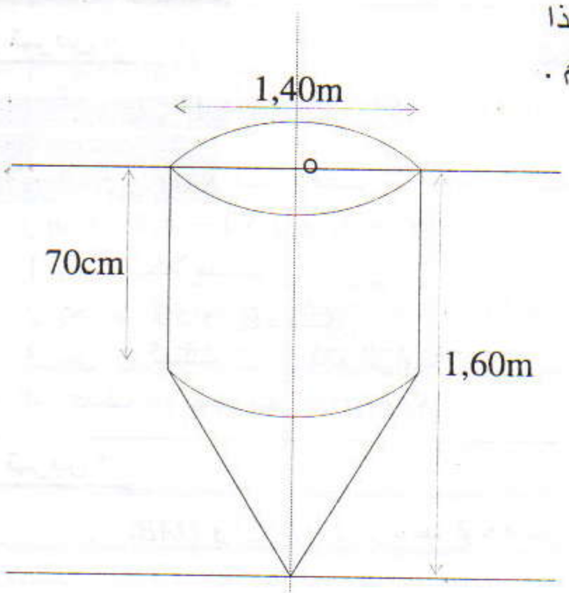
تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 7

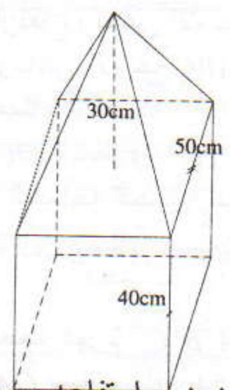
في الشكل أسفله خزان مكون من مخروط

وأسطوانة قائمة (لاحظ الأبعاد على الشكل)

- احسب حجم هذا المجسم .



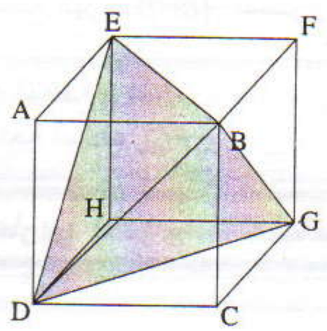
تمرين 8



يتكون المجسم أعلاه من هرم ارتفاعه $30cm$ وقاعدته مربع طول ضلعه $50cm$.
ومن متوازي مستطيلات ارتفاعه $40cm$
أحسب V حجم هذا المجسم ب dm^3

تمرين 9

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه $\sqrt{8}$



1. أحسب BD .
2. حدد طبيعة رباعي الأوجه $BGDE$.

تمرين 10

$SABCD$ هرم منتظم قاعدته المربع $ABCD$ و O مركز المربع $ABCD$ حيث $AB = 9cm$ و $SO = 6cm$
(P_1) مستوى يوازي القاعدة $ABCD$ و يقطع $[SA]$ و $[SB]$ و $[SC]$ و $[SD]$ في منتصفاتها I و J و K و L على التوالي.

3. أحسب IJ
4. بين أن الهرم $SIJKL$ هو تصغير للهرم $SABCD$
5. أحسب V' حجم الهرم $SIJKL$

تمارين توليفية

تمرين 11

$SABCD$ هرم منتظم قاعدته المربع $ABCD$ بحيث $BC = 6cm$ وارتفاع الهرم $4cm$
لتكن I و J و K و L هي منتصفات $[SA]$ و $[SB]$ و $[SC]$ و $[SD]$ على التوالي.

1. أحسب IJ
2. علما أن الهرم $SIJKL$ هو تصغير للهرم $SABCD$:
   أ. أحسب نسبة التصغير
   ب. أحسب V_1 حجم الهرم $SIJKL$
   ج. أحسب V_2 حجم المجسم $IJKLABCD$

تمرين 12

$ABCDE$ هرم قاعدته المعين $BCDE$ و M من [AB] حيث $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}$. المستوى الموازي للقاعدة $BCDE$ و المار من M يقطع $[AE]$ و $[AD]$ و [C
في النقط N و F و G على التوالي.

1. أرسم شكلا مناسبا.
2. حدد طبيعة الرباعي $MNFG$
3. أحسب V' حجم الهرم $AMNFG$ إذا علمت أن الهرم $ABCDE$ يساوي $54cm^3$
4. أحسب V_2 حجم المجسم $MNFGBEDC$

تمرين 13

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم

بحيث $ABCD$ مربع و $AB=4cm$ و $AE=8cm$

1. أحسب المسافات BD و DE و EB
2. حدد طبيعة المثلث EBD
3. أحسب S مساحة المثلث EBD

تمرين 14

$SABCD$ هرم رأسه S و مساحته الجانبية

$123cm^2$. نقطع هذا الهرم من منتصف حرف جانبي بمستوى (P) يوازي قاعدته و نحصل على هرم

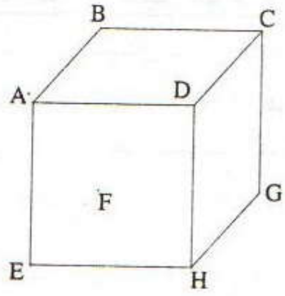
$SA'B'C'D'$ و مجسم $A'B'C'D'ABCD$

1. ما هي المساحة الجانبية للهرم $SA'B'C'D'$ ؟
2. إذا علمت أن مساحة القاعدة $ABCD$ تساوي $82cm^2$. فما هي المساحة الكلية للمجسم $A'B'C'D'ABCD$

حلول التمارين

تمارين تطبيقية

تمرين 1



1. **أبين أن** $(AD)\perp(ABFE)$:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم إذن جميع أوجهه مستطيلات ومنه $ABCD$ و $ADHE$ مستطيلات وهذا يعني أن $(AD)\perp(AB)$ و $(AD)\perp(AE)$.

إذن المستقيم (AD) عمودي على المستقيمين (AB) و (AE) المتقاطعين في النقطة A والواقعين في المستوى $(ABFE)$

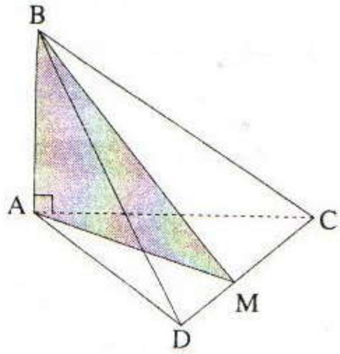
ومنه المستقيم (AD) عمودي على المستوى $(ABFE)$ في النقطة A .

2. **أبين أن المثلث** ADF **قائم الزاوية:**

لدينا $(AD)\perp(ABFE)$ والمستقيم (AF) يقع في المستوى $(ABFE)$ إذن (AD) عمودي على (AF) في النقطة A .

وبالتالي فإن المثلث ADF قائم الزاوية في A

تمرين 2



1. **أبين أن** $(AB)\perp(ACD)$:

ABC و ABD مثلثان قائما الزاوية في A

إذن $(AB)\perp(AC)$ و $(AB)\perp(AD)$ أي (AB) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (AC) و (AD)

وبما أن (AC) و (AD) يقعان في المستوى (ACD) فإن $(AB)\perp(ACD)$

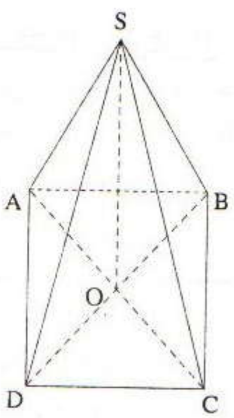
2. **أبين أن المثلث** ABM **قائم الزاوية**

لدينا M نقطة من $[DC]$ و $[DC]$ تقع في المستوى (ADC) إذن $M\in(ADC)$ وبما أن $A\in(ADC)$ فإن المستقيم (AM) يقع في المستوى (ACD)

ولدينا $(AB)\perp(ACD)$ إذن $(AB)\perp(AM)$

ومنه المثلث ABM قائم الزاوية في A

تمرين 3



1. **أحسب** OA:

$ABCD$ مربع إذن ABC مثلث قائم الزاوية في B

وحسب مبرهنة فيتاغورس

لدينا $AC^2=AB^2+BC^2$

يعني أن $AC^2=4^2+4^2=32$

يعني $AC=\sqrt{32}$ أي

$AC=4\sqrt{2}$

وبما أن O مركز المربع فإن O

منتصف $[AC]$ يعني أن $OA=\frac{AC}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}$ ومنه

$\boxed{OA=2\sqrt{2}cm}$

2. **أحسب V حجم الهرم $SABCD$:**

لدينا $V=\frac{1}{3}\times h\times \mathcal{A}_{ABCD}$ حيث h ارتفاع الهرم و $\mathcal{A}_{ABCD}$ مساحة القاعدة $ABCD$

بما أن الهرم $SABCD$ منتظم رأسه S و O مركز قاعدته فإن $h=SO=6cm$ وبما أن $ABCD$ مربع فإن

$\mathcal{A}_{ABCD}=AB^2=4^2=16cm^2$ ومنه $V=\frac{1}{3}\times 6\times 16=2\times 16$

ومنه فإن $\boxed{V=32cm^3}$

3. **أحسب SA:**

لدينا (SO) ارتفاع الهرم $SABCD$ و O تنتمي إلى القاعدة $ABCD$

إذن (SO) عمودي على $ABCD$ في النقطة O

وبما أن (OA) يقع في المستوى $(ABCD)$

فإن $(SO)\perp(OA)$

ومنه المثلث SAO قائم الزاوية في O

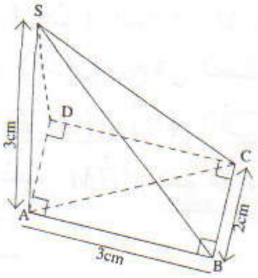
وحسب مبرهنة فيتاغورس لدينا : $SA^2=SO^2+OA^2$

يعني أن $SA^2=6^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2=36+8=44$

يعني أن $SA=\sqrt{44}$ ومنه فإن $\boxed{SA=2\sqrt{11}}$

تمرين 4

1. **الشكل :**



2. **أحسب SB و AC و SC:**

• في المثلث SAB القائم الزاوية في A

لدينا $SB^2=AB^2+SA^2$ (مبرهنة فيتاغورس)

يعني أن $SB^2=3^2+3^2=18$ يعني أن $SB=\sqrt{18}$

ومنه فإن $\boxed{SB=3\sqrt{2}}$

• لدينا $ABCD$ مستطيل إذن ABC مثلث قائم الزاوية في B

ومنه $AC^2=AB^2+BC^2$ (مبرهنة فيتاغورس)

يعني أن $AC^2=3^2+2^2=13$ يعني أن $\boxed{AC=\sqrt{13}}$

• لدينا SAD القائم الزاوية في A

إذن $(SA)\perp(AD)$ ولدينا SAB القائم الزاوية في A إذن $(SA)\perp(AB)$

وهذا يعني أن المستقيم (SA) عمودي على المستقيمين (AD) و (AB) المتقاطعين في A والواقعين ضمن المستوى $(ABCD)$

إذن (SA) عمودي على المستوى $(ABCD)$ في A

وبما أن المستقيم (AC) يقع ضمن المستوى $(ABCD)$

فإن (SA) عمودي على (AC) في A

ومنه المثلث SAC قائم الزاوية في A

وحسب مبرهنة فيتاغورس لدينا $SC^2=SA^2+AC^2$

يعني أن $SC^2=3^2+\left(\sqrt{13}\right)^2=9+13=22$

ومنه $\boxed{SC=\sqrt{22}}$

3. **أبين أن المثلث SBC قائم الزاوية:**

لدينا $SB^2+BC^2=\left(\sqrt{18}\right)^2+2^2=22$

و $SC^2=\left(\sqrt{22}\right)^2=22$ إذن $SB^2+BC^2=SC^2$

وحسب مبرهنة فيتاغورس العكسية المثلث SBC قائم الزاوية في B

4. **أحسب V حجم الهرم $SABCD$:**

في السؤال السابق بينا أن (SA) عمودي على القاعدة $ABCD$ في A إذن SA هو ارتفاع الهرم

لتكن $\mathcal{A}_{ABCD}$ هي مساحة القاعدة $ABCD$

إذن $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\times BC=3\times 2=6cm^2$

ونعلم أن $V=\frac{1}{3}\times SA\times \mathcal{A}_{ABCD}$

إذن $V=\frac{1}{3}\times 3\times 6$ وبالتالي فإن $\boxed{V=6cm^3}$

تمرين 5

1. **أحسب h' ارتفاع رباعي الأوجه $OA'B'C'$:**

نعلم أنه في تصغير تضرب الأطوال في نسبة التص

ليكن h هو ارتفاع رباعي الأوجه $OABC$

إذن $h'=\frac{1}{3}\times h$ ولدينا $h=6cm$ إذن $h'=\frac{1}{3}\times 6$

ومنه $\boxed{h'=2cm}$

2. أحسب S' مساحة المثلث $A'B'C'$:

في تصغير نضرب المساحات في مربع نسبة التصغير

لتكن S هي مساحة المثلث ABC

وبما أن الهرم $OA'B'C'$ هو تصغير للهرم $OABC$

بالنسبة $\frac{1}{3}$ فإن القاعدة $A'B'C'$ هي تصغير للقاعدة

ABC بالنسبة $\frac{1}{3}$ ومنه $S'=\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times S$

ولدينا $S=27cm^2$

إذن $S'=\frac{1}{9}\times 27$ ومنه فإن $\boxed{S'=3cm^2}$

3. أحسب S'_L المساحة الجانبية للهرم $OA'B'C'$:

لتكن S_L هي المساحة الجانبية للهرم $OABC$

إذن $S'_L=\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times S_L$ ولدينا $S_L=54cm^2$

ومنه $S'_L=\frac{1}{9}\times 54$ يعني أن $\boxed{S'_L=6cm^2}$

4. أحسب V' حجم الهرم $OA'B'C'$:

في تصغير نضرب الحجوم في مكعب نسبة التصغير

ليكن V هو حجم الهرم $OABC$

إذن $V'=\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V$ ولدينا $V=54cm^3$

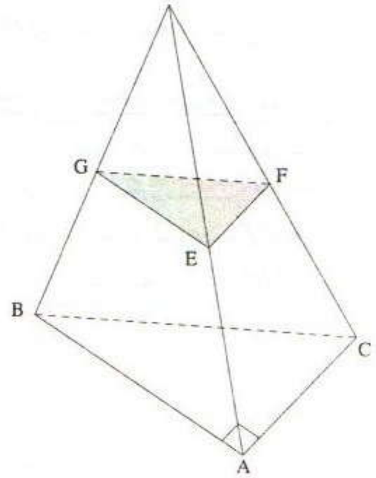
إذن $V'=\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 54$ يعني أن $\boxed{V'=2cm^3}$

5. استنتج حجم للمجسم $A'B'C'ABC$

نعتبر V'' حجم الجدع إذن $V''=V-V'=54-2$

ومنه $\boxed{V''=52cm^3}$

تمرين 6



1. أحدد طبيعة المقطع EFG :

نعلم أن مقطع هرم بمستوى يوازي قاعدة الهرم هو مضلع له نفس طبيعة القاعدة

وبما أن المثلث ABC قائم الزاوية فيA هو قاعدة الهرم $ABCD$ فإن المقطع EFG هو مثلث قائم الزاوية في E

2. أحسب مساحة المقطع EFG :

لتكن S هي مساحة المثلث ABC و S' هي مساحة المثلث EFG

إذن $S'=k^2\times S$ (بحيث k هو معامل تصغير الهرم $ABCD$)

لدينا $k=\frac{DE}{DA}$ وبما أن $DE=\frac{1}{3}DA$

فإن $k=\frac{\frac{1}{3}\cancel{DA}}{\cancel{DA}}=\frac{1}{3}$

ومنه $S'=\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times S=\frac{1}{9}S$

ولدينا ABC قائم الزاوية فيA

إذن $S=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{6\times 8}{2}=\frac{48}{2}$ يعني أن $S=24cm^2$

ومنه $S'=\frac{1}{9}\times 24$ أي $\boxed{S'=\frac{8}{3}cm^2 \quad S'\simeq 2,66cm^2}$

تمارين لتقوية التعلمات

تمرين 7

• V_1 حجم الأسطوانة القائمة :

$V_1=h\times r^2\times\pi$

ولدينا $h=70cm=0,7m$ و $r=\frac{1,40}{2}=0,7m$

إذن $V_1=0,7\times 0,7^2\times\pi$

ومنه $\boxed{V_1=0,343\pi cm^3}$

• V_2 حجم المخروط :

$V_2=\frac{1}{3}\times h'\times r^2\times\pi$

ولدينا $h'=1,60-0,7m=0,9m$ و $r=0,7m$

إذن $V_2=\frac{1}{3}\times 0,9\times 0,7^2\times\pi$ ومنه $\boxed{V_2=0,147\pi cm^3}$

• V **حجم المجسم :**

$V = V_1 + V_2 = 0,343\pi + 0,147\pi$

يعني أن $V = V_1 + V_2 = 0,49\pi cm^3$

إذا اعتبرنا $\pi \simeq 3,14$ فإن $\boxed{V = 1,53cm^3}$

تمرين 8

• V_1- **حجم الهرم :**

$V_1 = \frac{1}{3}\times h \times S_B$ (h ارتفاع الهرم و S_B مساحة قاعدة الهرم)

ولدينا $h = 30cm$ و $S_B = 50\times 50$

إذن $V_1 = \frac{1}{3}\times 30\times 50\times 50$

ومنه $\boxed{V_1 = 25000cm^3}$

• V_2 **حجم متوازي المستطيلات القائم :**

$V_2 = 50\times 50\times 40$ (جداء الأبعاد)

يعني $\boxed{V_2 = 100000cm^3}$

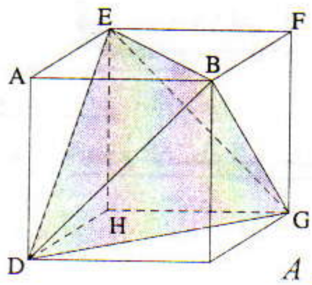
• V **حجم المجسم :**

$V = V_1 + V_2$

يعني أن $V = 25000 + 100000$

يعني أن $V = 125000cm^3$ ومنه $\boxed{V = 125dm^3}$

تمرين 9



1. أحسب BD.

$ABCDEFGH$ مكعب

إذن جميع أوجهه مربعات

ومنه $ABCD$ مربع

يعني أن ABD مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A

إذن $AB = AD = \sqrt{8}$

وحسب مبرهنة فيتاغورس لدينا :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2 = 8 + 8 = 16$

يعني أن $BD = \sqrt{16}$ ومنه $\boxed{BD = 4cm}$

2. أحدد طبيعة رباعي الأوجه $BGDE$:

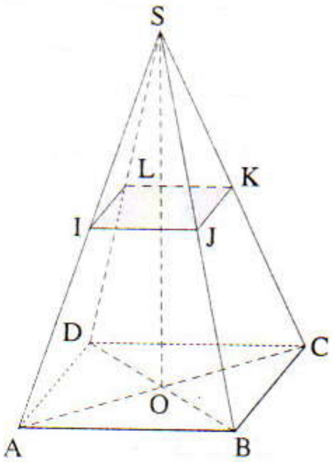
بنفس طريقة السؤال السابق نبين أن :

$BD = DG = BG = EB = EG = ED = 4cm$

ومنه جميع أضلاع رباعي الأوجه $BGDE$ متقايسة

وبالتالي فإن $BGDE$ رباعي أوجه منتظم

تمرين 10



1. أحسب IJ :

في المثلث SAB لدينا I و J هما منتصفا $[SA]$ و $[SB]$ على التوالي

إذن $IJ = \frac{1}{2}AB$ و $(IJ)//(AB)$

ومنه $IJ = \frac{1}{2}\times 9$ أي $\boxed{IJ = 4,5cm}$

2. أبين أن $SIJKL$ هو تصغير للهرم $SABCD$:

في المثلث SAB لدينا $I \in (SA)$ و $J \in (SB)$

و $(IJ)//(AB)$

إذن حسب خاصية طاليس لدينا :

$\frac{SI}{SA} = \frac{IJ}{AB} = \frac{4,5}{9} = \frac{1}{2}$

وبطريقة مماثلة نبين أن $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SB} = \frac{SK}{SC} = \frac{SL}{SD} = \frac{1}{2}$

وبما أن الهرم $SIJKL$ هو نتيجة تقاطع $SABCD$ بالمستوى (P_1) الموازي للقاعدة $ABCD$

فإن $SIJKL$ هو تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة $\frac{1}{2}$

3. أحسب V' حجم الهرم $SIJKL$:

بما أن $SABCD$ هرم منتظم قاعدته المربع $ABCD$ ومركزه O

فإن SO هو ارتفاع الهرم $SABCD$

ليكن V هو حجم الهرم $SABCD$

$V = \frac{1}{3}\times SO \times \mathcal{A}_{ABCD}$

$\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9^2 = 81cm^2$ (مساحة المربع $ABCD$)

إذن $V = \frac{1}{3}\times 6\times 81 = 2\times 81$ ومنه $V = 162cm^3$

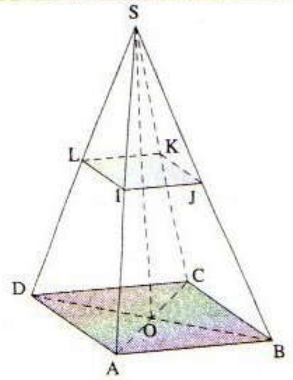
ولدينا $V'=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times V$ يعني أن $V'=\frac{1}{8}\times 162$

يعني أن $\boxed{V'=20,25cm^3}$

تمارين توليفية

تمرين 11

الشكل:



1. أحسب IJ :

في المثلث SAB لدينا I و J هما منتصفا $[SA]$ و $[SB]$ على التوالي

إذن $IJ=\frac{1}{2}AB$

وبما أن $ABCD$ مربع فإن: $AB=BC=6cm$

إذن $IJ=\frac{1}{2}\times 6$ ومنه فإن $\boxed{IJ=3cm}$

2.

أ. أحسب نسبة تصغير الهرم $SABCD$ إلى $SIJKL$:

في المثلث SAB لدينا I و J هما منتصفا $[SA]$ و $[SB]$ على التوالي إذن $(IJ)//(AB)$

حسب خاصية طاليس المباشرة لدينا :

$$\frac{SI}{SA}=\frac{IJ}{AB}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ومنه فإن نسبة تصغير الهرم $SABCD$ إلى الهرم $SIJKL$ هي $\boxed{\frac{1}{2}}$

ب. أحسب V_1 حجم الهرم $SIJKL$:

نعلم أن $V_1=k^3\times V$ يعني أن $V_1=\frac{1}{8}\times V$

وبالتالي $V=\frac{1}{3}\times SO\times A_{ABCD}$ (حيث A_{ABCD} مساحة المربع $ABCD$)

إذن $V=\frac{1}{3}\times SO\times AB\times BC$ يعني أن $V=\frac{1}{3}\times 4\times 6\times 6$

يعني أن $\boxed{V=48cm^3}$

ومنه $V_1=\frac{1}{8}\times 48$ وبالتالي فإن $\boxed{V_1=6cm^3}$

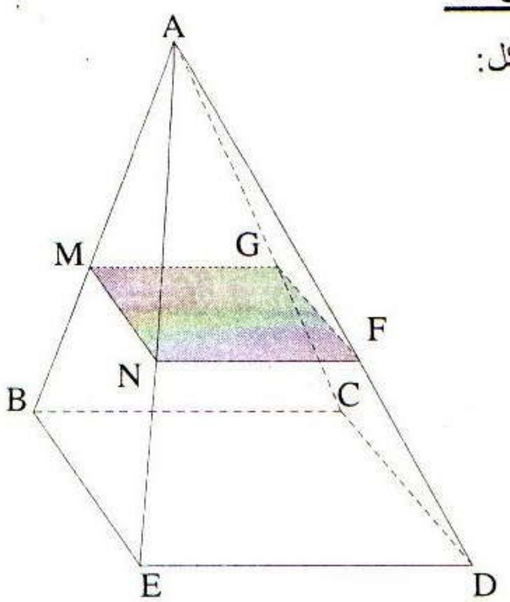
ج. أحسب V_2 حجم المجسم $IJKLABCD$:

لدينا $V_2=V-V_1$ يعني أن $V_2=48-6$

ومنه فإن $\boxed{V_2=42cm^3}$

تمرين 12

الشكل:



2. أحدد طبيعة الرباعي $MNFG$:

المضلع $MNFG$ هو مقطع الهرم $ABCDE$ بالمستوى الموازي للقاعدة $BCDE$

إذن المضلعين $MNFG$ و $BCDE$ لهما نفس الطبيعة

وبما أن $BCDE$ معين فإن $MNFG$ معين .

3. أحسب V_1 حجم الهرم $AMNFG$

لتكن k نسبة تصغير الهرم $ABCDE$ إلى $AMNFG$

إذن $k=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}$

ونعلم أن $V_1=k^3\times V$ مع V هو حجم الهرم $ABCDE$

إذن $V_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3\times 54$ يعني أن $V_1=\frac{8}{27}\times 54$

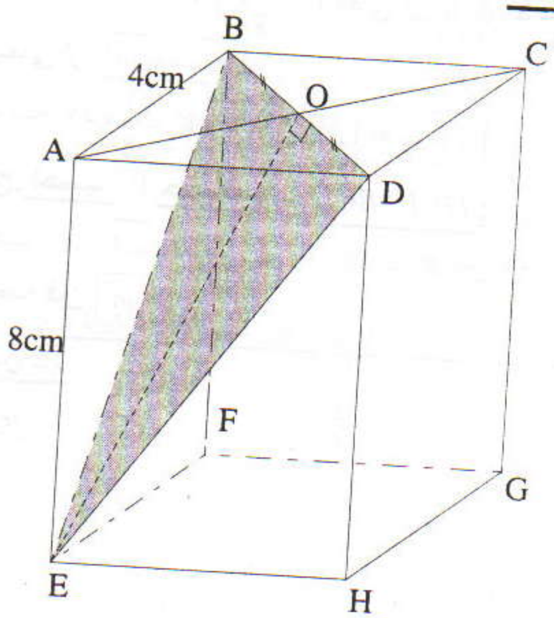
يعني أن $\boxed{V_1=16cm^3}$

4. أحسب V_2 حجم المجسم $MNFGBEDC$

لدينا $V_2=V-V_1$ يعني أن $V_2=54-16$

ومنه فإن $\boxed{V_2=38cm^3}$

تمرين 13



1. أحسب المسافات BD و DE و EB

• أحسب BD:

$ABCD$ مربع إذن ABD مثلث قائم الزاوية في A وحسب مبرهنة فيتاغورس لدينا :

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

وبما أن $AB = AD = 4cm$

فإن $BD^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$

يعني أن $BD = \sqrt{32}$ أي $\boxed{BD = 4\sqrt{2}}$

• أحسب EB:

لدينا $ABFE$ مستطيل إذن ABE مثلث قائم الزاوية في A وحسب مبرهنة فيتاغورس لدينا :

$EB^2 = AB^2 + AE^2$

وبما أن $AB = AD = 4cm$ و $AE = 8cm$

فإن $EB^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$

يعني أن $EB = \sqrt{80}$ أي $\boxed{EB = 4\sqrt{5}}$

• أحسب DE:

لدينا ADE مثلث قائم الزاوية في A وحسب مبرهنة فيتاغورس لدينا : $DE^2 = AD^2 + AE^2$

فإن $DE^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$

يعني أن $DE = \sqrt{80}$ أي $\boxed{DE = 4\sqrt{5}}$

2. أحدد طبيعة المثلث EBD:

لدينا $DE = BE = 4\sqrt{2}$

إذن DEB مثلث متساوي الساقين رأسه E

3. أحسب S مساحة المثلث EBD :

لدينا EBD مثلث متساوي الساقين و O منتصف $[BD]$

إذن $EB = ED$ و $OB = OD$

يعني أن E ينتمي إلى واسط $[BD]$

و O ينتمي إلى واسط $[BD]$

ومنه (EO) واسط $[BD]$ يعني أن $(OE) \perp (BD)$

يعني أن (OE) هو أيضا ارتفاع للمثلث EBD

ومنه $S = \frac{1}{2} EO \times BD$

لنحسب أولا EO:

في المثلث EOB القائم الزاوية في O

لدينا $EB^2 = EO^2 + OB^2$

ولدينا $OB = \frac{BD}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ لأن O منتصف $[BD]$ومنه $\left(4\sqrt{2}\right)^2 = EO^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$

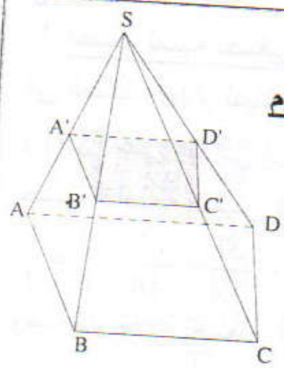
يعني أن $80 = EO^2 + 8$ يعني أن $EO^2 = 80 - 8 = 72$

يعني $EO = \sqrt{72}$ ومنه فإن $EO = 6\sqrt{2}$

إذن $S = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$

يعني أن $S = 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12 \times 2$ ومنه $\boxed{S = 24cm^2}$

تمرين 14



1. أحسب المساحة الجانبية للهرم

: $SA'B'C'D'$

بما أن الهرم $SA'B'C'D'$ هو نتيجة تقاطع الهرم $SABCD$ بالمستوى (P) الموازي للقاعدة $ABCD$ والمار من A' منتصف $[SA]$

فإن $SA'B'C'D'$ هو تصغير للهرم $SABCD$

لتكن k نسبة التصغير إذن $k = \frac{SA'}{SA}$

ولدينا A' منتصف $[SA]$ إذن $SA' = \frac{1}{2} SA$

ومنه $k=\dfrac{\frac{1}{2}SA}{SA}=\dfrac{1}{2}$

لتكن S'_L هي المساحة الجانبية للهرم $SA'B'C'D'$

و S_L هي المساحة الجانبية للهرم $SABCD$

نعلم أن $S'_L=k^2\times S_L$

إذن $S'_L=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times 123$ يعني أن $S'_L=\dfrac{1}{4}\times 123$

ومنه فإن $\boxed{S'_L=30,75cm^2}$

2. **أحسب المساحة الكلية للمجسم** $A'B'C'D'ABCD$

لتكن S'_T هي المساحة الكلية للهرم $SA'B'C'D'$

و S_T هي المساحة الكلية للهرم $SABCD$

لدينا $S'_T=k^2\times S_T$ يعني أن $S'_T=\dfrac{1}{4}\times S_T$

ولدينا $S_T=S_L+S_{ABCD}$ إذن $\boxed{S_T=123+82=205cm^2}$

ومنه $S'_T=\dfrac{1}{4}\times 205$ يعني أن $\boxed{S'_T=51,25cm^2}$

لتكن S هي المساحة الكلية للمجسم $A'B'C'D'ABCD$

$S=\left(S_T-S'_T\right)+S_{A'B'C'D'}$

ولدينا $S_{A'B'C'D'}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}=\dfrac{1}{4}\times 82=20,50cm^2$

إذن $S=\left(205-51,25\right)+20,50$

ومنه $\boxed{S=174,25cm^2}$

مراقبة مستمرة رقم 3

تمرين 1

الجدول أسفله هو نتيجة استطلاع رأي قام به تلميذ. والميزة المدروسة هي الوقت الذي يقضيه 150 تلميذ أمام جهاز التلفزة بعد الرجوع من المدرسة مساءا.

الوقت t بالدقائق	$0 \leqslant t < 30$	$30 \leqslant t < 60$	$60 \leqslant t < 90$	$90 \leqslant t < 120$
الحصيص	60	45	30	
التردد				
النسبة المئوية				

1- أحسب الحصيص الموافق للميزة $90 \leqslant t < 120$ ثم أتمم ملأ الجدول.

2- ما هي النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يقضون على الأقل ساعة أمام التلفزة؟

3- ما هو منوال هذه المتسلسلة الإحصائية؟

أحسب القيمة الوسطية والمعدل الحسابي لهده المتسلسلة.

تمرين 2

1) حل النظمة: $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x-2y+6=0 \end{cases}$

2) إذا نقصنا خمس إناث من عدد تلاميذة قسم فإن عدد الإناث سيساوي عدد الذكور أما إذا أضفنا ستة إناث فإن عدد الإناث سيساوي ضعف عدد الذكور.

★ احسب عدد تلاميذ القسم

تمرين 3

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) نعتبر المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 2x - 4$ والنقط $E(0;-4)$ و $F(2;-2)$ و $A(-3;3)$

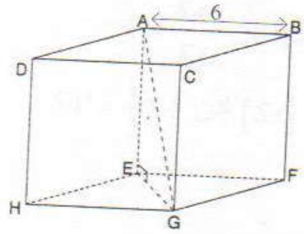
1) أنشئ المستقيم (D).

2) حدد المعامل الموجه للمستقيم (EF) ثم حدد معادلة (EF).

3) حدد إحداثيتا H نقطة تقاطع المستقيم (D) مع محور الأفاصيل.

4) حدد معادلة المستقيم (Δ) العمودي على (D) والمار من النقطة A.

تمرين 4



ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 6.

1) أ)- بين أن المثلث AEG قائم الزاوية.

ب)- احسب EG و AG

2) V حجم الهرم AEFH

* بين أن: V=36

3) ليكن V' هو حجم هرم AIJK علما أن AIJK هو تصغير للهرم AEFH نسبته k وأن: $V' = 4,5$

* احسب العدد k:

حلول المراقبة المستمرة رقم 3

تمرين 1

1) أحسب الحصيص الموافق للميزة $90 \leqslant t < 120$

عدد التلاميذ الذين همهم الاستطلاع هو 150 تلميذا.

إذن الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو 150.

ومنه فإن الحصيص الموافق للميزة $90 \leqslant t < 120$ هو الفرق بين الحصيص الإجمالي ومجموع الحصيصات الأخرى.

$$150-(60+45+30)=150-135=15$$

إذن 15 هو الحصيص الموافق للميزة $90 \leqslant t < 120$

أتمم ملأ الجدول:

الوقت t بالدقائق	$0 \leqslant t < 30$	$30 \leqslant t < 60$	$60 \leqslant t < 90$	$90 \leqslant t < 120$
الحصيص	60	45	30	15
التردد	0,4	0,3	0,2	0,1
النسبة المئوية	40%	30%	20%	10%

✦ التردد هو خارج الحصيص على الحصيص الإجمالي.

✦ النسبة المئوية يساوي التردد في 100.

2) أحسب النسبة المئوية للتلاميذ الذين يقضون على الأقل ساعة أمام التلفزة:

التلاميذ الذين يقضون على الأقل ساعة أمام التلفزة.

يعني التلاميذ الذين يقضون أمام التلفزة فترة تتراوح بين ساعة وما فوق.

أي مجموع النسبتين المئويتين الموافقتين لقيم الميزة $60 \leqslant t < 90$ و $90 \leqslant t < 120$.

أي: $20\% + 10\% = 30\%$

إذن 30% هي النسبة المئوية للتلاميذ الذين يقضون على الأقل ساعة أمام التلفزة.

3) أحدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية:

قيمة الميزة التي لها أكبر حصيص هي: $0 \leqslant t < 30$ إذن الصنف $0 \leqslant t < 30$ الذي مركزه 15 هي منوال هذه المتسلسلة الإحصائية.

4) أحدد القيمة الوسطية والمعدل الحسابي:

▲ لدينا نصف الحصيص الإجمالي هو: $\frac{150}{2} = 75$

الوقت t بالدقائق	$0 \leqslant t < 30$	$30 \leqslant t < 60$	$60 \leqslant t < 90$	$90 \leqslant t < 120$
الحصيص المتراكم	60	105	135	150

الميزة التي حصيصها المتراكم التزايدي أكبر من أو يساوي 75 (نصف الحصيص الإجمالي) هي الصنف $30 \leqslant t < 60$

إذن الصنف $30 \leqslant t < 60$ الذي مركزه 45 هو القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

▲ ليكن m هو المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة لحساب m يجب تحديد مراكز الأصناف.

الصنف	$0 \leqslant t < 30$	$30 \leqslant t < 60$	$60 \leqslant t < 90$	$90 \leqslant t < 120$
المركز	15	45	75	105
الحصيص	60	45	30	15

$$m = \frac{60 \times 15 + 45 \times 45 + 30 \times 75 + 15 \times 105}{150}$$

$$= \frac{900 + 2025 + 2250 + 1575}{150} = \frac{6750}{150}$$

$$\boxed{m = 45}$$

المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية هو: 45.

تمرين 2

1- أحل النظمة: $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x-2y+6=0 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} -x+y+5=0 \\ x-2y+6=0 \end{cases}$

وبعد جمع طرفي المعادلتين طرف بطرف نحصل على المعادلة $-y+11=0$

يعني: $\boxed{y = 11}$

ولدينا $x-y-5=0$ يعني: $x-11-5=0$

يعني: $\boxed{x = 16}$

الزوج (16;11) هو حل النظمة.

2- أحل المسألة:

ليكن x هو عدد الإناث بالقسم و y عدد الذكور بالقسم.

إذا نقصنا 5 إناث من عدد التلاميذ فإن عدد الإناث سيساوي عدد الذكور.

أي: $x - 5 = y$.

إذا أضفنا 6 إناث إلى القسم فإن عدد الإناث سيساوي ضعف عدد الذكور.

أي: $x + 6 = 2y$.

وبالتالي نحصل على النظمة: $\begin{cases} x-y=5 \\ x+6=2y \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} x-y-5=0 \\ x-2y+6=0 \end{cases}$

ومن نظمة السؤال السابق لدينا $x=16$ و $y=11$.

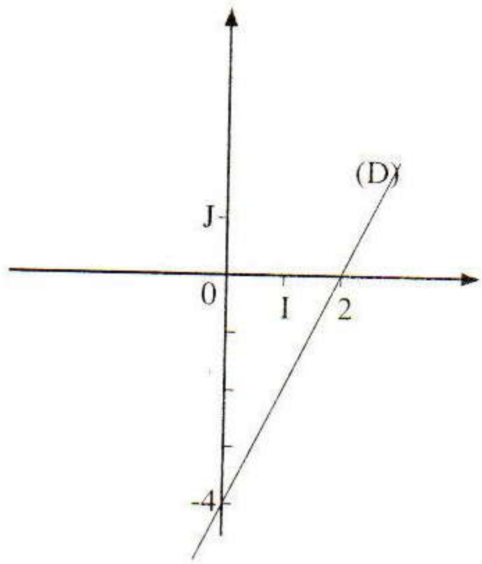
وبعد التحقق من ملائمة النتائج لمعطيات المسألة نستنتج أن عدد الإناث هو 16 وعدد الذكور هو 11

وبالتالي فإن عدد تلاميذ القسم هو: 27=16+11.

تمرين 3

1) أنشئ المستقيم (D)

x	0	2
y	-4	0



2) أحدد المعامل الموجه ومعادلة المستقيم (EF)

لدينا $F(2;-2)$ و $E(0;-4)$

إذن: $x_A \neq x_B$ و $y_A \neq y_B$

ومنه فإن معادلة (EF) تكتب $y = ax + b$ (a المعامل الموجه للمستقيم (EF).

ونعلم أن: $a = \dfrac{y_E - y_F}{x_E - x_F}$

$a = \dfrac{-4-(-2)}{0-2} = \dfrac{-4+2}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

إذن: $\boxed{a = 1}$

1 هو المعامل الموجه للمستقيم (EF)

ومنه فإن معادلة (EF) تكتب $y = x + b$

ولدينا: $E \in (EF)$ إذن: $y_E = x_E + b$

يعني: $-4 = 0 + b$

يعني: $\boxed{b = -4}$

إذن معادلة المستقيم (EF) هي $y = x - 4$

3) أحدد إحداثيتي النقطة H:

لدينا $(D): y = 2x - 4$.

ولدينا H نقطة تقاطع (D) مع محور الأفاصيل.

إذن H تنتمي إلى (D) يعني: $y_H = 2x_H - 4$

و H تنتمي إلى محور الأفاصيل يعني: $y_H = 0$

ومنه $0 = 2x_H - 4$

أي: $2x_H = 4$ أي: $x_H = \dfrac{4}{2} = 2$

وبالتالي فإن: $H(2;0)$

4) أحدد معادلة المستقيم (Δ):

لتكن $y = mx + p$ هي معادلة (Δ)

ولدينا $y = 2x - 4$ هي معادلة (D)

بما أن $(\Delta) \perp (D)$ فإن $2 \times m = -1$ يعني: $\boxed{m = -\dfrac{1}{2}}$

إذن: $(\Delta): y = -\dfrac{1}{2}x + p$

ولدينا (Δ) يمر من النقطة $A(-3;3)$

إذن: $y_A = -\dfrac{1}{2}x_A + p$

يعني: $3 = -\dfrac{1}{2} \times (-3) + p$

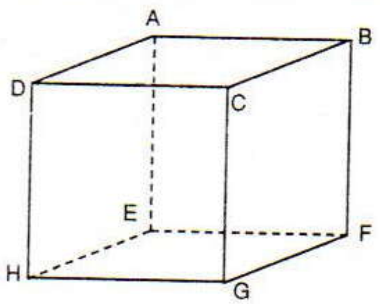
يعني: $3 = \dfrac{3}{2} + p$

يعني: $p = 3 - \dfrac{3}{2}$

يعني: $p = \dfrac{6-3}{2} = \dfrac{3}{2}$

إذن: معادلة (Δ) هي: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

تمرين 4



1) أ)- أبين أن المثلث AEG قائم الزاوية:

ABCDEFGH مكعب.

إذن: AEHD و AEFB مربعان.

ومنه فإن: $(AE) \perp (EH)$ و $(AE) \perp (EF)$

إذن: المستقيم (AE) عمودي على المستقيمين (EF) و (EH) المتقاطعين في E.

وبما أن: (EF) و (EH) يقعان في المستوى (EFGH).

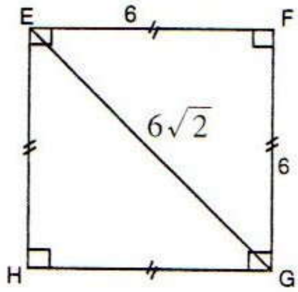
فإن: (AE) عمودي على المستوى (EFGH).

ولدينا: (EG) يقع في المستوى (EFGH).

إذن: $(AE) \perp (EG)$

ومنه فإن: المثلث AEG قائم الزاوية في E.

ب) أحسب EG و AG:



* EFGH مربع.

إذن: EFG مثلث قائم الزاوية في F. وحسب مبرهنة فيتاغورس

لدينا: $EG^2 = EF^2 + FG^2$

ولدينا: $EF = FG = 6$

أي أن: $EG^2 = 6^2 + 6^2$

$EG^2 = 36 + 36$

$EG^2 = 72$

$EG = \sqrt{72}$

إذن: $\boxed{EG = 6\sqrt{2}}$

* لدينا AEG قائم الزاوية في E.

إذن: حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة لدينا:

لدينا: $AG^2 = AE^2 + EG^2$

يعني أن: $AG^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2$

$AG^2 = 36 + 72$

$AG^2 = 108$

يعني أن: $AG = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3}$

ومنه فإن: $\boxed{AG = 6\sqrt{3}}$

2) أبين أن: $V_{AEFH} = 36$

◄ لدينا: $(AE) \perp (EFGH)$

إذن: $(AE) \perp (EFH)$

ومنه فإن: $[AE]$ هو ارتفاع الهرم $AEFH$.

◄ لتكن S هي مساحة المثلث EFH

بما أن EFH مثلث قائم الزاوية في E

فإن: $S = \frac{1}{2} \times EF \times EH$

يعني أن: $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$

وبالتالي: $V_{AEFH} = \frac{1}{3} \times 6 \times S$

يعني أن: $V_{AEFH} = \frac{1}{3} \times 6 \times 18$

$\boxed{V_{AEFH} = 36}$

3) أحسب V' حجم الهرم AIJK

AIJK تصغير للهرم AEFH نسبته k

يعني أن: $V' = k^3 \times V_{AEFH}$

يعني أن: $4,5 = k^3 \times 36$

أي: $k^3 = \frac{4,5}{36} = \frac{1}{8}$

ومنه فإن: $k^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ أي: $\boxed{k = \frac{1}{2}}$

تمارين الأولمبياد مع حلولها

تمارين أولمبياد الرياضيات

تمرين 1

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا بحيث:

$a>b$ و $2(a^2+b^2)=5ab$

• حدد قيمة العدد $\dfrac{a+b}{a-b}$

تمرين 2

ABC مثلث . ليكن p محيطه و r شعاع دائرته المحاطة به و S مساحته.

• أثبت أن: $S=\frac{1}{2}p\times r$

تمرين 3

أوجد جميع الأعداد الصحيحة النسبية التي تحقق:

$$x^2+y^2+2(x+2y)+4<0$$

تمرين 4

ABC مثلث قائم الزاوية في A.

• بين أن: $AB+AC\leqslant\sqrt{2}.BC$

تمرين 5

ليكن: $A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\dots\dots\times\frac{99}{100}$

و : $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\dots\dots\times\frac{98}{99}$

1) بين أن: $A<B$

2) استنتج أن: $\frac{1}{10\sqrt{2}}<A<\frac{1}{10}$

تمرين 6

بين أن: $x^2+y^2\geqslant\frac{1}{20}$ إذا علمت أن $2x+4y=1$

مع x و y عددان حقيقيان .

تمرين 7

حل المعادلة التالية:

$$x^2+2x+2x\sqrt{3}+3+2\sqrt{3}=0$$

تمرين 8

أوجد جميع الأعداد الحقيقية x و y التي تحقق مل يلي:

$$2x^2+y^2+1=2xy-2x$$

تمرين 9

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين .

بين أن: $(a(b+a))^2+(b(a+b))^2\geqslant 8a^2b^2$

تمرين 10

f دالة تآلفية معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b$

a و b عددان حقيقيان .

أحسب $f(5)-f(2)$ إذا علمت أن: $f(4)-f(3)=4$

تمرين 11

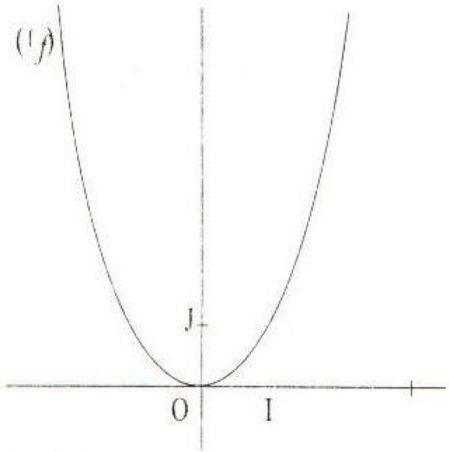
x و y عددان حقيقيان و f دالة حيث :

$$f(xy)=f(x)\times f(y)-x-y$$

1 – أثبت أن : $f(1)\neq 1$

2 – بين أن f دالة تآلفية وحدد معاملها .

تمرين 12



f و g دالتان حيث : f معرفة بالمبيان ($\mathcal{C}_f$) أعلاه و

$g(x) = 2x + 3$

1 – هل الدالة f تآلفية ؟ علل جوابك.

2 – في نفس المبيان أعلاه ارسم ($\mathcal{C}_g$) التمثيل المبياني للدالة g

3 – حدد مبيانيا أحداثيات نقط تقاطع ($\mathcal{C}_f$) و($\mathcal{C}_g$)

4 – أ : علما أن : $f(x) = x^2$ حدد مبيانيا حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

ب – انشر وبسط $(x + 1)(x - 2)$

ج – تحقق جبريا من حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

تمرين 13

- يصب أنبوبان في مسبح أحدهما يملأه في 10 ساعات و الآخر في 14 ساعة.

في أية مدة يمتلأ المسبح إذا اشتغلا الأنبوبين معا؟

تمرين 14

يقترح أحد سائقي سيارة الأجرة التعريفة التالية:
$2DH$ بالإضافة إلى $0,90DH$ عن كل كيلومتر
ويقترح سائق ثان $1DH$ بالإضافة إلى $1,10DH$ عن كل كيلومتر.

ليكن x عدد الكيلومترات التي يريد زبون قطعها.

✦ نضع $P_1(x)$ المبلغ الذي سيؤديه زبون حسب التعريفة الأولى.
و $P_2(x)$ المبلغ الذي سيؤديه زبون حسب التعريفة الثانية

1) اكتب $P_1(x)$ و $P_2(x)$ بدلالة x.

2) حدد أي التعريفتين أفضل للزبون.

تمرين 15

حدد عددا جذريا $\frac{x}{y}$ بحيث إذا أضفنا 2 إلى كل من حديه صار مساويا للعدد $\frac{44}{121}$ وإذا طرحنا 1 من كل من حديه صار مساويا للعدد $\frac{101}{808}$

تمرين 16

x و y و z ثلاثة أعداد حقيقية حيث : $xyz = 1$

بسط ما يلي:

$$\frac{x}{xy + x + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{z}{zx + z + 1}$$

تمرين 17

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين.

بين أن: $\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$

تمرين 18

EFG مثلث و $[EI]$ متوسطه و $[EH]$ ارتفاعه.

M و N هما المسقطان العموديان، على التوالي، للنقطتين F و G على (EI).

برهن أن: $FM = GN$

تمرين 19

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A و $[BB']$ أحد ارتفاعه. M نقطة من $[BC]$ و H و K مسقطاها العموديان على التوالي، على المستقيمين (AB) و (AC).

بين أن: $BB' = MH + MK$

تمرين 20

ABC مثلث و M منتصف ضلعه $[BC]$.

1) أثبت أن:

$$AB + AC - BC < 2AM < AB + AC$$

2) استنتج أن: $\frac{P}{2} < S < P$

حيث S هو مجموع أطوال متوسطات مثلث و P محيطه.

حلول تمارين الأولمبياد

تمرين 1

لدينا: $2(a^2 + b^2) = 5ab$

ومنه: $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}ab$

إذن: $a^2 + b^2 + 2ab = \frac{9}{2}ab$

و: $a^2 + b^2 - 2ab = \frac{1}{2}ab$

أي أن: $(a+b)^2 = \frac{9}{2}ab$

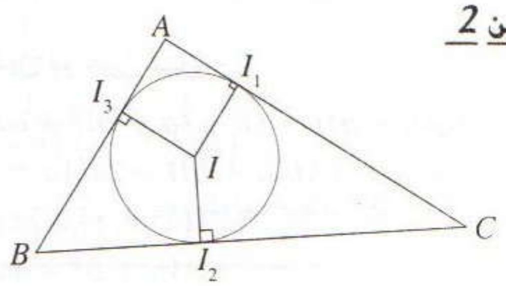
و: $(a-b)^2 = \frac{1}{2}ab$

ومنه فإن: $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{\frac{9}{2}ab}{\frac{1}{2}ab}$

أي أن: $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 9$

وبما أن: $\frac{a+b}{a-b} > 0$ فإن: $\boxed{\frac{a+b}{a-b} = 3}$

تمرين 2



• I هي مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC.

I_1 و I_2 و I_3 هي مساقط I على $[AC]$ و $[BC]$ و $[AB]$ على التوالي.

• لدينا: $S_{ABC} = S_{AIC} + S_{AIB} + S_{BIC}$

وبما أن: $S_{AIB} = \frac{II_3 \times AB}{2}$ و $S_{AIC} = \frac{II_1 \times AC}{2}$

و $S_{BIC} = \frac{II_2 \times BC}{2}$

ولدينا: $II_1 = II_2 = II_3 = r$

إذن: $S_{BIC} = \frac{r \times BC}{2}$ و $S_{AIB} = \frac{r \times AB}{2}$

و $S_{AIC} = \frac{r \times AC}{2}$

ومنه فإن: $S_{ABC} = \frac{1}{2}r(AB + AC + BC)$

$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2}r \times p}$

تمرين 3

لدينا: $x^2 + y^2 + 2(x + 2y) + 4 < 0$

يعني: $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 < 0$

ومنه: $(x+1)^2 + (y+2)^2 < 1$

وبما أن $(x+1)^2 + (y+2)^2$ عدد صحيح طبيعي.

فإن: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 0$

ومنه: $x + 1 = 0$ و $y + 2 = 0$

وبالتالي فإن: $\boxed{x = -1}$ و $\boxed{y = -2}$

تمرين 4

• لكي نبين أن: $AB + AC \leqslant \sqrt{2}BC$ يكفي أن نبين أن: $(AB + AC)^2 \leqslant 2BC^2$

لدينا:

$2BC^2 - (AB + AC)^2 = 2BC^2 - AB^2 - AC^2 - 2AB \times AC$

وبما أن: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإن:

$$\begin{aligned} 2BC^2 - (AB + AC)^2 &= 2(AB^2 + AC^2) - AB^2 - AC^2 - 2AB \times AC \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \\ &= (AB - AC)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

ومنه: $2BC^2 \geqslant (AB + AC)^2$

وبالتالي فإن: $\boxed{AB + AC \leqslant \sqrt{2}BC}$

تمرين 5

1) لدينا:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\frac{97}{98} < \frac{98}{99}$$
$$\frac{99}{100} < 1$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times.....\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times....\times\frac{98}{99}\times 1$$

ومنه: $A<B$

2) لدينا حسب السؤال السابق $A<B$ ومنه $A^2<AB$

أي: $A<\sqrt{AB}$

بما أن:

$$AB=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times.....\frac{98}{99}\times\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$$

إذن: $\boxed{A<\frac{1}{10}}$ (1)

لدينا: $2A=\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times.....\times\frac{99}{100}$

و $B=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times.....\times\frac{98}{99}$

وبما أن: $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$

و $\frac{5}{6}>\frac{4}{5}$

$\frac{99}{100}>\frac{98}{99}$

فإن $2A>B$

ومنه : $A^2>\frac{AB}{2}=\frac{1}{2\times 100}$

إذن: $\boxed{A>\frac{1}{10\sqrt{2}}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن: $\frac{1}{10\sqrt{2}}<A<\frac{1}{10}$

تمرين 6

بما أن: $2x+4y=1$

فإن: $(2x+4y)^2=1^2$

بما أن: $4x^2+16y^2+16xy=1$

فإن: $4x^2+16y^2+16xy\geqslant 1$ (1)

مهما يكن x و y عددان حقيقيان فإن: $(4x-2y)^2\geqslant 0$

$16x^2+4y^2-16xy\geqslant 0$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$4x^2+16y^2+16xy+16x^2+4y^2-16xy\geqslant 1$$

$$20x^2+20y^2\geqslant 1$$

$$20(x^2+y^2)\geqslant 1$$

$$\boxed{x^2+y^2\geqslant\frac{1}{20}}$$

تمرين 7

لدينا: $x^2+2x+2x\sqrt{3}+3+2\sqrt{3}=0$

أي $[(x^2+2x+1)+2\sqrt{3}(x+1)+3]-1=0$

يعني: $((x-1)+\sqrt{3})^2-1^2=0$

أي: $x+1+\sqrt{3}=0$

أو : $x+1+\sqrt{3}+1=0$

ومنه: $x=-2-\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

وبالتالي فإن حل هذه المعادلة هو $-\sqrt{3}$ أو $-2-\sqrt{3}$

تمرين 8

$$2x^2+y^2+1=2xy-2x$$

$$2x^2+y^2+1-2xy+2x=0$$

$$(x^2+y^2-2xy)+(x^2+1+2x)=0$$

$$(x-y)^2+(x+1)^2=0$$

$x+1=0$ و $x-y=0$

$x=-1$ و $x=y$

$$\boxed{x=y=-1}$$

تمرين 9

a و b عددين موجبين لنبين أن:

$$(a(b+a))^2+(b+(a+b))^2\geqslant 8a^2b^2$$

لدينا: $(a(b+a))^2+(b(a+b))^2\geqslant 2ab(a+b)^2$

(تطبيق $x^2+y^2\geqslant 2xy$).

ولدينا: $(a+b)^2\geqslant 4ab$

إذن: $(a(b+a))^2+(b(a+b))^2\geqslant 2ab\times 4ab$

أي: $(a(b+a))^2+(b(a+b))^2\geqslant 8a^2b^2$

وبالتالي $(a(b+a))^2+(b(a+b))^2\geqslant 8a^2b^2$

تمرين 10

$f(4)-f(3)=4$

يعني أن: $(4a+b)-(3a+b)=4$

$4a+b-3a-b=4$

$a=4$

في هذه الحالة $f(x)=4x+b$

$f(5)-f(2)=(20+b)-(8+b)$

$20+b-8-b$

$$\boxed{f(5)-f(2)=12}$$

تمرين 11

x و y عددان حقيقيان و f دالة حيث :

$$f(xy) = f(x) \times f(y) - x - y$$

1 - أثبت أن : $f(1) \neq 1$

أضع : $x = y = 1$

إذن : $f(1 \times 1) = f(1) \times f(1) - 1 - 1$

يعني : $f(1) = f(1) \times f(1) - 2$

إذن : إذا كان $f(1) = 1$ فإننا نحصل على :

$$1 = 1 \times 1 - 2$$
$$1 = 1 - 2$$

$1 = -1$ (غير ممكن)

ومنه فإن الافتراض $f(1) = 1$ خاطئ

وبالتالي فإن : $f(1) \neq 1$

2 - أبين أن f دالة تآلفية وأحدد معاملها.

إذا وضعنا : $y = 1$

فإن : $f(x \times 1) = f(x) \times f(1) - x - 1$

$$f(x) - f(x) \times f(1) = -x - 1$$
$$f(x)\,[1 - f(1)] = -x - 1$$
$$f(x) = \frac{-x - 1}{1 - f(1)}$$
$$f(x) = -\frac{1}{1 - f(1)}\, x - \frac{1}{1 - f(1)}$$

ومنه فإن الدالة f تآلفية معاملها هو $-\dfrac{1}{1 - f(1)}$

تمرين 12

1 - هل الدالة f تآلفية ؟ علل جوابك

نعلم أن : التمثيل المبياني لدالة تآلفية هو مستقيم ومن خلال المبيان يتبين أن (C_f) ليس مستقيما

ومنه فإن الدالة f غير تآلفية.

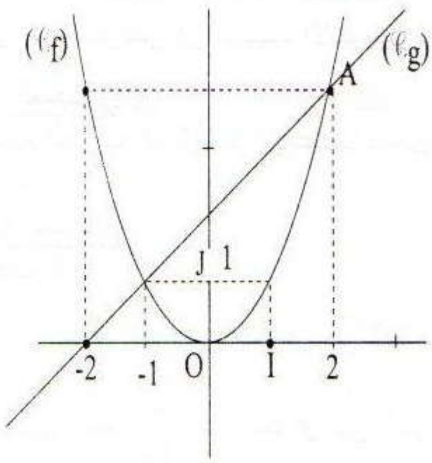
2- أرسم (C_g) التمثيل المبياني للدالة g حيث :

$$g(x) = x + 2$$

g دالة تآلفية إذن (C_g) مستقيم.

x	0	-2
$g(x)$	2	0

(C_g) هو المستقيم المار من النقطتين : $(2 ; 0)$ و $(-2 ; 2)$



3 - أحدد مبيانيا إحداثيات نقط تقاطع (C_g) و (C_f)

(C_g) و (C_f) يتقاطعان في النقطتين :

$A(2 ; 4)$ و $B(-1 ; 1)$

4 - أ – علما أن : $f(x) = x^2$

أحدد مبيانيا حلول المعادلة: $f(x) = g(x)$

بما أن (C_g) و (C_f) يتقاطعان في النقطتين $A(2 ; 4)$ و $B(-1 ; 1)$

فإن حلى المعادلة $f(x) = g(x)$ هما x_A و x_B

إذن : العددان 2 و 1- هما حلي المعادلة $f(x) = g(x)$

ب – انشر وأبسط $(x + 1)(x - 2)$

$$(x + 1)(x - 2) = x^2 - 2x + x - 2$$
$$= x^2 - x - 2$$

ج – تحقق جبريا من حلول المعادلة : $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ يعني أن :

$$x^2 = x + 2$$

يعني أن : $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

يعني أن : $x + 1 = 0$ أو $x - 2 = 0$

إذن: $\boxed{x = 2}$ أو $\boxed{x = -1}$

ومنه فإن العددين 2 و 1- هما حلي المعادلة $f(x) = g(x)$

تمرين 13 - نفترض أن صبيب الأنبوبين ثابت.

- **اختيار المجهول :**

لتكن t المدة اللازمة لملأ الخزان عندما نشغل الأنبوبين معا.

- **صياغة المعادلة :**

ليكن v حجم الخزان.

الأنبوب الأول يملأ $\frac{v}{10}$ من الخزان في الساعة

الأنبوب الثاني يملأ $\frac{v}{14}$ من الخزان في الساعة.

إذن يجب حل المعادلة : $\left(t\times\frac{v}{10}\right)+\left(t\times\frac{v}{14}\right)=v$

- **حل المعادلة :**

المعادلة تكتب : $v\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{14}\right)t=V$

أي $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{14}\right)t=1$ أي $\frac{24}{140}t=1$ ومنه $t=\frac{35}{6}h$

- **الرجوع إلى المسألة المطروحة :**

ليكن v حجم الخزان

في 10 ساعات يملأ الأنبوب الأول v.

إذن في $\frac{35}{6}$ ساعة يملأ الأنبوب الأول v_1 بحيث :

$\frac{v_1}{v}=\frac{\frac{35}{6}}{10}$ أي : $v_1=\frac{7}{12}V$

في 14 ساعة يملأ الأنبوب الثاني v_2 بحيث : $\frac{v_2}{v}=\frac{\frac{36}{5}}{14}$

أي : $v_2=\frac{5}{12}v$

إذن: $v_1+v_2=\frac{7}{12}v+\frac{5}{12}v=v$

وبالتالي فإن المدة المطلوبة هي $\frac{35}{6}$ أي: $5h50mn$

تمرين 14

1) أكتب $P_1(x)$ و $P_2(x)$ بدلالة x.

ليكن $P_1(x)$ المبلغ (بالدرهم) الذي سيؤديه الزبون حسب التعريفة الأولى لقطع المسافة x (بـ km).

إذن: $P_1(x)=0,90x+2$

وليكن $P_2(x)$ المبلغ (بالدرهم) الذي سيؤديه الزبون حسب التعريفة الثانية لقطع المسافة x (بـ km).

إذن: $P_2(x)=1,10x+1$

2) أحدد أي التعريفتين أفضل للزبون:

لمعرفة أي التعريفتين أفضل يجب مقارنة المبلغين P_1 و P_2.

لدينا: $P_2(x)-P_1(x)=(1,10x+1)-(0,9x+2)$

$$=1,10x+1-0,9x-2$$

$$\boxed{P_2(x)-P_1(x)=0,20x-1}$$

✱ $P_2(x)=P_1(x)$ يعني أن: $P_2(x)-P_1(x)=0$

$0,20x+1=0$

$$\boxed{x=\frac{1}{0,20}=\frac{10}{2}=5}$$

إذن: إذا كانت المسافة التي سيقطعها الزبون هي $5km$. فإن التعريفتين متساويتين

✱ $P_2(x)<P_1(x)$ يعني أن: $0,20x-1<0$

$x<5km$

إذا كانت المسافة التي سيقطعها الزبون أصغر قطعا من 5km فإن التعريفة الثانية أفضل من التعريفة الأولى.

✱ $P_2(x)>P_1(x)$ يعني: $x>5km$

إذا كانت المسافة التي سيقطعها الزبون أكبر قطعا من 5km فإن التعريفة الأولى أفضل من التعريفة الثانية.

تمرين 15

$$\frac{x-2}{y+2}=\frac{44}{121}=\frac{4}{11}$$

$$11(x+2)=4(y+2)$$

$$11x+22=4y+8$$

$$11x-4y=-14$$

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{101}{808}=\frac{1}{8}$$

$$8x-8=y-1$$

$$y=8x-7$$

$$11x-4y=-14$$

$$11x-32x+28=-14$$

$$-21x=-42$$

$$x=2$$

$$y=8x-7=16-7=9$$

إذن العدد الجذري المطلوب هو: $\boxed{\frac{2}{9}}$

تمرين 16

$$\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}$$
$$=\frac{xz}{(xy+x+1)z}+\frac{yxz}{(yz+y+1)xz}+\frac{z}{zx+z+1}$$
$$=\frac{xz}{xyz+xz+z}+\frac{1}{z+xyz+xz}+\frac{z}{xz+z+1}$$
$$=\frac{xz}{1+xz+z}+\frac{1}{z+1+xz}+\frac{z}{xz+z+1}$$
$$=\frac{xz+1+z}{xz+1+z}=$$
$$=\boxed{1}$$

تمرين 17

مهما يكن العددين a و b موجبين فإن:

$1+a+b \geqslant 1+b$ و $1+a+b \geqslant 1+a$

$\frac{1}{1+a+b} \leqslant \frac{1}{1+b}$ و $\frac{1}{1+a+b} \leqslant \frac{1}{1+a}$

$\frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{b}{1+b}$ و $\frac{a}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a}$

إذن: $\frac{a}{1+a+b}+\frac{b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$

$$\boxed{\frac{a+b}{1+a+b} \leqslant \frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}}$$

تمرين 18

بما أن I منتصف $[FG]$ فإن: $FI = GI$

مساحة المثلث EFI هي: $S=\frac{EH\times FI}{2}$

مساحة المثلث EGI هي: $S'=\frac{EH\times GI}{2}$

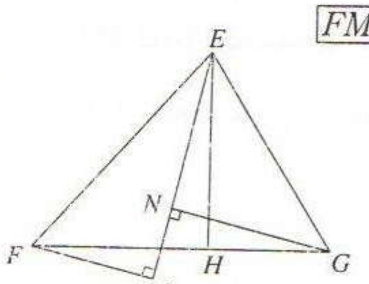
نستنتج أن: $S = S'$

لدينا كذلك $S=\frac{EI\times FM}{2}$ و $S'=\frac{EI\times GN}{2}$

وبما أن: $S = S'$ فإن: $\frac{EI\times FM}{2}=\frac{EI\times GN}{2}$

إذن: $EI\times FM = EI\times GN$

وبالتالي فإن: $\boxed{FM = GN}$



تمرين 19

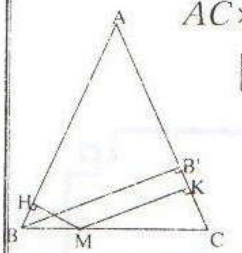
بما أن ABC مثلث متساوي الساقين في A.

فإن: $AB = AC$. نرمز إلى مساحة المثلث ABC بـ S_{ABC}

$$S_{ABC} = S_{ACM} + S_{ABM}$$
$$\frac{AC\times BB'}{2}=\frac{MK\times AC}{2}+\frac{MH\times AB}{2}$$
$$=\frac{MK\times AC}{2}+\frac{MH\times HC}{2}$$
$$=\frac{(MK\times AC)+(MH\times AC)}{2}$$
$$=\frac{AC(MK+MH)}{2}$$

إذن: $AC\times BB' = AC(MK+MH)$

وبالتالي فإن: $\boxed{BB' = MK + MH}$



تمرين 20

ABC مثلث و M و J و K هي منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي.

1) لتكن A' مماثلة A بالنسبة لـ M

لدينا: $AA' < AB + BA'$

وبما أن $BA' = AC$ فإن $\boxed{AA' < AB + AC}$ (1)

لدينا: $AC < AM + MC$ و $AB < AM + MB$

وبجمع المتفاوتتين طرفا بطرف نحصل على:

$$AC + AB < 2AM + MB + MC$$

ومنه: $AC + AB < 2AM + BC$

(2) $\boxed{AC + AB - BC < 2AM}$

من (1) و (2) نحصل على:

(a) $\boxed{AB + AC - BC < 2AM < AB + AC}$

2) بالمثل نبين أن:

(b) $\boxed{CA + CB - AB < 2CK < AC + BC}$

(c) $\boxed{BA + BC - AC < 2BJ < BA + BC}$

بجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على:

$$AB + AC + BC < 2(AM + CK + BJ) < 2(AC + AB + BC)$$

إذن: $\frac{P}{2} < S < P$

نماذج لامتحانات جهوية موحدة
مع حلولها

الموضوع رقم 1

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الرباط سلا زمور زعير

دورة يونيو 2006

تمرين 1

حل النظمة: $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$

تمرين 2

الجدول التالي يعطي المساهمات المالية لتلاميذ أحد الأقسام من أجل عمل تضامني.

قيمة المساهمة (بالدهم)	10	20	25	30	50
عدد التلاميذ	5	7	4	6	3

1) كون جدولا إحصائيا للحصيصات المتراكمة.

2) حدد منوال هذه المتسلسلة الاحصائية وقيمتها الوسطية.

3) حدد المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

تمرين 3

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

نعتبر النقطتين: $A(0;-1)$ و $B(4;1)$.

1) أ- بين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على الشكل: $y = \frac{1}{2}x - 1$

ب- أنشئ المستقيم (AB).

2) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته: $y = -2x + 4$.

أ- أحسب إحداثيتا النقطة K منتصف القطعة $[AB]$.

ب- أثبت أن المستقيم (Δ) هو واسط القطعة $[AB]$.

تمرين 4

نعتبر الدالة التآلفية f حيث: $f(x) = -2x + 3$

1) أحسب: $f(-1)$ و $f(2)$.

2) مثل مبيانيا الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

3) أ- بين أن لكل عدد حقيقي x لدينا:

$$x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4}(f(x))^2 - 1$$

ب- استنتج مبيانيا حلول المعادلة:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

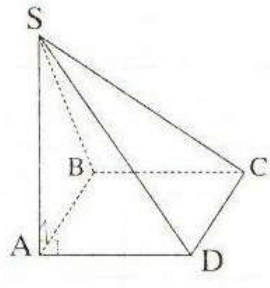
تمرين 5

ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A والنقطة I منتصف $[BC]$ و t الإزاحة التي تحول A إلى I.

1) أنشئ النقطتين B' و C' صورتي B و C بالإزاحة t.

2) بين أن المثلث $IB'C'$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين في I.

تمرين 6



SABCD هرم قاعدته المربع ABCD. بحيث المستقيم (SA) عمودي على المستوى (ABC).

نفترض أن: SA=4cm و AB=3cm.

1) احسب المسافتين AC و SC.

2) احسب V حجم الهرم.

3) لتكن $\frac{3}{4}$ نسبة تصغير الهرم SABCD.

- احسب V' حجم الهرم المحصل عليه.

الموضوع رقم 2

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة مراكش تانسيفت الحوز - دورة يونيو 2006

تمرين 1

المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) حيث: OI=OJ=1cm. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي:

$f(x) = 2x - 3$

1) احسب $f(2)$:

2) مثل مبيانيا الدالة f.

3) لتكن النقطة $A(4;2)$ والدالة g التي تمثيلها المبياني هو المستقيم (OA).

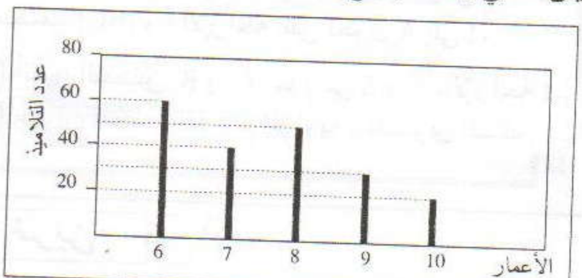
a) ما هي طبيعة الدالة g؟

b) من خلال التمثيل المبياني للدالة g، حدد العدد k بحيث: $g(k) = 1$

c) عبر عن $g(x)$ بدلالة x.

تمرين 2

المبيان التالي يمثل توزيع أعمار تلاميذ مدرسة ابتدائية.



1) ما هو منوال المتسلسلة الإحصائية الممثلة بالمبيان أعلاه؟

2) انقل وأتمم الجدول التالي:

القيمة (العمر)	6	7	8	9	10
الحصيص (عدد التلاميذ)			50	30	
الحصيص المتراكم			150		

3) حدد عدد تلاميذ هذه المدرسة الذين يتجاوز عمرهم سبع سنوات ونصف.

4) ما هو متوسط عمر تلاميذ هذه المدرسة؟

تمرين 3

يقترح نادي للأنترنيت على زبنائه التسعيرتين التاليتين: 5DH للساعة بالنهار و 3DH للساعة بالليل.

خلال أسبوع معين، استفاد تلميذ من خدمات الأنترنيت التي يقدمها هذا النادي لمدة 14 ساعة، وأدى مبلغ 54DH.

☒ حدد عدد الساعات التي استعمل خلالها الأنترنيت نهارا وعدد الساعات التي استعمل خلالها الأنترنيت ليلا.

تمرين 4

ABC مثلث قائم الزاوية في A. I نقطة من [BC] بحيث: $I \neq B$ و $I \neq C$.

1) أنشئ النقطة B′ صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$.

2) لتكن النقطة C′ بحيث: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$.

a) بين أن C′ هي صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$

b) حدد قياس الزاوية $B'\hat{I}C'$

تمرين 5

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) حيث OI=OJ=1cm، النقطتين $A(2;1)$ و $B(-2;2)$ والمستقيم (D) الذي معادلته: $y = -x + 3$

1- a) تحقق أن النقطة A تنتمي للمستقيم (D).

b) أنشئ النقطتين A و B.

c) أنشئ المستقيم (D).

2- a) حدد ميل المستقيم (D).

b) حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) المار من B والعمودي على المستقيم (D).

3- a) حل النظمة $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-4 \end{cases}$ حيث x و y عددان حقيقيان.

b) حدد زوج إحداثيتي E نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ).

4- لتكن (Γ) الدائرة التي قطرها [AB].

a) حدد زوج إحداثيتي k مركز الدائرة (Γ).

b) أحسب شعاع الدائرة (Γ).

تمرين 6

ABCDE هرم قاعدته المستطيل BCDE وارتفاعه AB بحيث: BC=8cm و BE=6cm و AB=4cm.

1- a) بين أن المثلث ABD قائم الزاوية في B.

b) احسب المسافة BD.

2- احسب حجم الهرم ABCDE.

3- نقطع هذا الهرم بمستوى مواز للقاعدة BCDE، هذا المستوى يقطع [AB] في I و [AC] في J و [AD] في k و [AE] في L بحيث AI=1cm.

☒ احسب حجم الهرم AIJKL.

الموضوع رقم 3

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الشاوية ورديغة

دورة يونيو 2006

تمرين 1

$(O;I;J)$ معلم متعامد ممنظم.

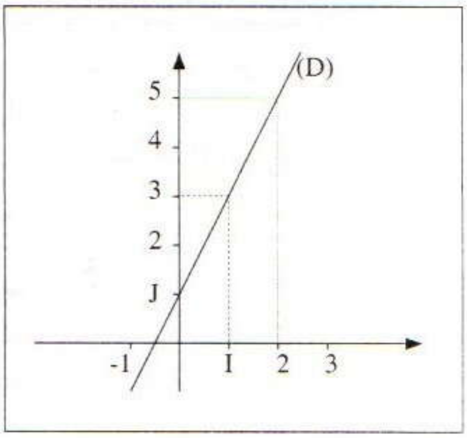
1) انشئ النقط $A(2;2)$ و $B(5;3)$ و $C(2;4)$

2) حدد إحداثيتي $\overrightarrow{AB}$ ثم احسب المسافة AB.

3) بين أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B.

تمرين 2

المستقيم (D) هو التمثيل المبياني للدالة التآلفية f (انظر الشكل)



1) أ- حدد مبيانيا صورة العدد 2 بالدالة f.

ب- حدد مبيانيا العدد الذي صورته بالدالة f هي 3

2) بين أن: $f(x) = 2x + 1$.

3) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته المختصرة هي: $y = -\frac{1}{2}x$.

☒ بين أن المستقيمين (D) و (Δ) متعامدان.

4) أ- حل النظمة: $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

ب- استنتج إحداثيتي k نقطة تقاطع (D) و (Δ).

تمرين 3

الجدول التالي يعطي توزيعا لمعدلات 50 طالبا نجحوا في مباراة لولوج أحد المعاهد العليا.

المعدل	12	13	14	15	16
عدد الطلبة	10	20	5	10	5

1) حدد عدد الطلبة الذين نجحوا بمعدل يفوق أو يساوي 14.

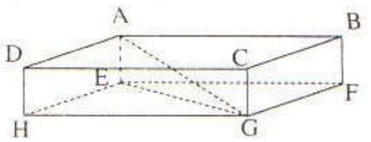
2) حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

3) احسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

تمرين 4

نعتبر متوازي المستطيلات ABCDEFGH.

بحيث: AB=3 و BC=2 و AE=1 (وحدة القياس هي السنتيمتر).



1) حدد طبيعة المثلث AEG ثم احسب AG.

2) احسب بـ(cm^3) حجم الهرم DHGE.

تمرين 5

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A.

نعتبر الإزاحة T التي تحول النقطة B إلى النقطة C.

1) أنشئ النقطة E صورة النقطة A بالإزاحة T.

2) بين أن المستقيمين (EC) و (AC) متعامدان.

مسألة:

للإستفادة من كتب بأحد المراكز الثقافية خلال موسم دراسي واحد يُمكِنُ للتلاميذ والطلبة اختيار إحدى الصيغتين المقترحتين:

الصيغة A: دفع 44 درهما مسبقا وأداء 3 دراهم عن كراء كل كتاب.

الصيغة B: أداء 5 دراهم عن كراء كل كتاب.

1) ما هي الصيغة الأنسب لتلميذ يريد كراء 12 كتابا؟ علل جوابك.

2) حدد عدد الكتب الذي يكون من أجله المبلغ المؤدى هو نفسه سواء تم اختيار الصيغة A أو الصيغة B واحسب هذا المبلغ.

الموضوع رقم 4

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الدارالبيضاء الكبرى

دورة يونيو 2006

تمرين 1

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x-1$

أ) احسب $f(2)$ و $f(-1)$.

ب) أنسئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

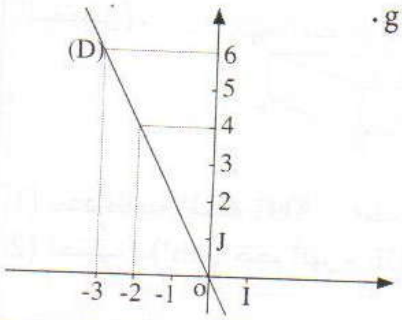
ج) حدد العدد الذي صورته 2 بالدالة f.

2) يمثل المستقيم (D) أسفله التمثيل المبياني لدالة خطية g في معلم متعامد ممنظم (O;I;J). (انظر الشكل أسفله)

أ) حدد $g(0)$ و $g(-1)$

ب) حدد العدد الذي صورته 4 بالدالة g.

ج) حدد معامل ادالة g.



تمرين 2

يعطي الجدول التالي عدد المبيعات اليومية من السيارات لإحدى الشركات لمدة 31 يوما.

المبيعات	0	4	5	7	10
الأيام(الحصيص)	4	6	8	10	3

1) حدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية.

2) احسب معدل مبيعات هذه الشركة في اليوم.

3) كون جدول الحصيصات المتراكمة.

4) حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

تمرين 3

1) حُل جبريا النظمة التالية: $\begin{cases} x+y=14 \\ 5x+3y=50 \end{cases}$

2) ملأ شخص أربعة عشرة قنينة بخمس لترات من عصير الفواكه.

إذا علمت أن القنينات نوعان: قنينات سعة كل واحدة منها 0,5 لترا وقنينات سعة كل واحدة منها 0,3 لترا.

✦ حدد عدد القنينات من كل نوع.

تمرين 4

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O;I;J) نعتبر النقط $A(1;4)$ و $B(5;6)$ و $C(3;0)$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته المختصرة $y=-2x+11$.

1) مثل النقط A و B و C.

2) أ- حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ ثم بين أن: $AB=2\sqrt{5}$

ب- حدد إحداثيتي النقطة E منتصف القطعة [AB].

3) أ- بين أن: $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ هي المعادلة المختصرة للمستقيم (AB).

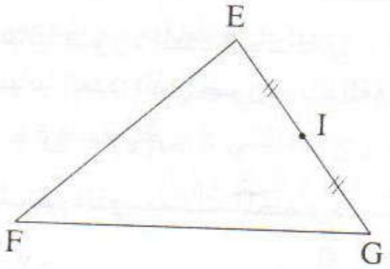
ب- أثبت أن (Δ) و (AB) متعامدان.

ج) اكتب المعادلة المختصرة للمستقيم (d) المار من A والموازي للمستقيم (Δ) ثم تحقق أن النقطة C تنتمي للمستقيم (d).

4) بدون حساب المسافة BC بين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A.

تمرين 5

EFG مثلث و I منتصف القطعة [EG] و H مماثلة F بالنسبة للنقطة I. لتكن t الإزاحة التي تحول E إلى F.



1) أ- أنشئ النقطة k صورة G بالإزاحة t.

ب- بين أن G صورة H بالإزاحة t.

ج- استنتج أن G هي منتصف القطعة [HK].

2) لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها [HK].

حدد صورة الدائرة (Γ) بالإزاحة t.

تمرين 6

SABCD هرم قاعدته مربع طول ضلعه 6cm وارتفاعه [SA] بحيث: SA=6cm (SA عمودي على المستوى (ABC))

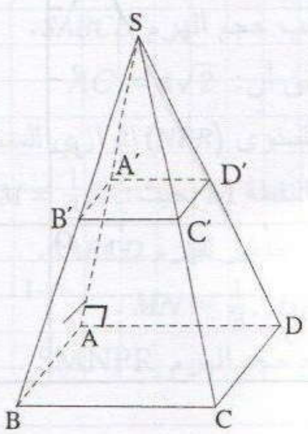
1) أ- بين أن المستقيم (SA) عمودي على المستقيم (AC).

ب- علما أن: $AC = 6\sqrt{2}$. احسب SC.

2) احسب حجم الهرم SABCD.

3) نعتبر النقط 'A و 'B و 'C و 'D منتصفات القطع [SA] و [SB] و [SC] و [SD] على التوالي.

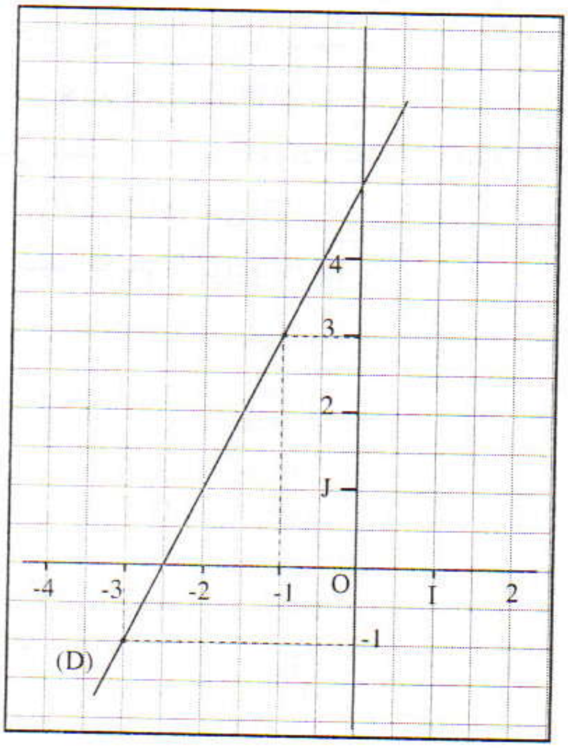
احسب حجم المجسم $ABCDA'B'C'D'$.



الامتحان الجهوي الموحد

الأكاديمية الجهوية للجهة الشرقية - وجدة - دورة يونيو 2007

التمرين الأول 5 نقط



الجزء الأول:

لتكن (S) النظمة: $\begin{cases} -x + y = 3 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$

1) هل الزوج $(1;1)$ حل النظمة (S)؟ (علل جوابك)

2) حل النظمة (S)

الجزء الثاني:

1) نعتبر الدالة الخطية f حيث: $f(x) = \frac{1}{3}x$

أ- حدد صورة العدد 6 بالدالة f.

ب- حدد العدد الذي صورته بالدالة f هي 1.

ج- ما هو معامل الدالة f؟

2) يمثل المستقيم (D) جانبه مبيان دالة تآلفية g في معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$

أ- حدد مبيانيا $g(-3)$ و $g(-1)$.

ب- بين أن: $g(x) = 2x + 5$

التمرين الثاني 4 نقط

في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$، نعتبر النقطتين $A(2,0)$ و $B(0;3)$.

1)-أ- أنشئ النقطتين A و B.

ب- أحسب المسافة AB.

2) نعتبر النقطة $O'(3;3)$ والنقطتين A' و B' صورتي A و B على التوالي بالإزاحة التي تحول O إلى O'.

أ- حدد بدون أي حساب المسافة $A'B'$. (علل جوابك).

ب- ما هو قياس الزاوية $\widehat{A'O'B'}$؟ (علل جوابك).

ج- حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{A'B'}$.

التمرين الثالث 3,5 نقط

نعتبر المستوى منسوبا لمعلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

يرصد الجدول التالي المعادلات المختصرة لخمس مستقيمات:

المستقيمات	(D_1)	(D_2)	(D_3)	(D_4)	(D_5)
المعادلات	$y = 2x - 4$	$y = 3x + 1$	$y = -\frac{1}{3}x + 2$	$y = -2x + 4$	$y = -3x - 1$

1) أ- هل النقطة $E(2;0)$ تنتمي للمستقيم (D_1)؟

ب- أنشئ المستقيم (D_1)

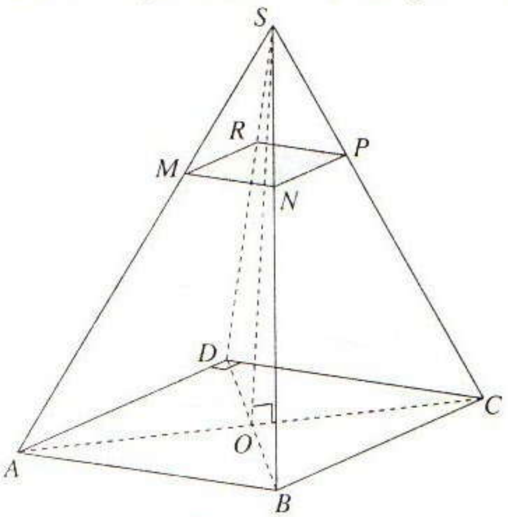
2) أ- بين أن المستقيم (D_2) و (D_3) متعامدان.

ب- هل المستقيمان (D_1) و (D_4) متوازيان؟ (علل جوابك).

3) ماذا يمثل هندسيا حل النظمة $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$؟ (حل النظمة غير مطلوب)

التمرين الرابع 3 نقط

في الشكل جانبه $SABCD$ هرم منتظم، رأسه S، وقاعدته المربع $ABCD$ الذي مركزه النقطة O؛ حيث $BC = 4$ والارتفاع SO يساوي 6.



1) أ- أحسب حجم الهرم $SABCD$.

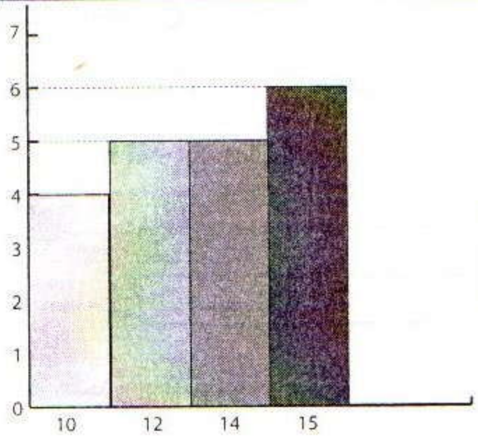
ب- تحقق أن: $AC = 4\sqrt{2}$

2) نعتبر المستوى (NPR) الموازي للمستوى (BCD) والمار من النقطة M بحيث: $SM = \frac{1}{3}SA$؛ فنحصل على الهرم $SMNPR$ كتصغير للهرم $SABCD$.

أ- بين أن: $MN = \frac{1}{3}AB$.

ب- استنتج حجم الهرم SMNPR.

التمرين الخامس 3 نقط



يمثل المخطط جانبه متسلسلة إحصائية ترصد عدد المنخرطين بأحد نوادي السباحة حسب أعمارهم.

1) أتمم الجدول التالي:

الأعمار	10	12	14	15
عدد المنخرطين	....	5	....	....

2) ما هو العدد الإجمالي للمنخرطين في هذا النادي؟

3) تحقق أن متوسط العمر (أي المعدل الحسابي للمتسلسلة) هو 13.

4) تم تسجيل 4 منخرطين جدد، لهم نفس السن (نرمز له بـ x)، فازداد متوسط العمر بنصف سنة بالضبط.

أ- بين أن: $4x + 260 = 324$.

ب- حدد سن المنخرطين الجدد.

الامتحان الجهوي الموحد

الأكاديمية الجهوية لجهة تازة - الحسيمة - تاونات - دورة يونيو 2007

الموضوع رقم 6

التمرين الأول 5 نقط

1) حل المعادلتين:

أ- $4x + 16 = 0$

ب- $7x^2 - 21x = 0$

2) حل المتراجحة التالية، ثم مثل الحلول على مستقيم مدرج: $4x + 9 \leqslant 2x + 15$

3) حل جبريا النظمتين التاليتين:

أ- $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ب- $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

التمرين الثاني 4 نقط

1) f دالة خطية بحيث: $f(3) = \frac{3}{2}$

• حدد معامل الدالة الخطية f.

2) g دالة تآلفية بحيث: $g(x) = 3x + 5$

• أحسب : $g(0)$; $g(-2)$

3) أنشئ التمثيل المبياني للدالتين f و g في نفس المعلم المتعامد $(O;I;J)$

التمرين الثالث 2 نقط

حصل تلاميذ أحد الأقسام في فرض لمادة اللغة العربية على النقط التالية:

15 - 7 - 5 - 15 - 2 - 10 - 10 - 7 - 10 - 10 - 7 - 2 - 10 - 10 - 15 - 5 - 10 - 2 - 7 - 15 -
2 - 2 - 20 - 5 - 7.

قيم الميزة	2	5	7	10	15	20
الحصيصات	....	....	....	....	....	....

1) انقل الجدول وأتممه.

2) حدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية.

3) أ- احسب الحصيص الإجمالي.

ب- احسب المعدل الحسابي.

التمرين الرابع 4 نقط

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

نعتبر النقط التالية: $A(0;3)$ و $B(3;2)$ و $C(-1;0)$

1) مثل النقط A و B و C.

2) حدد إحداثيتي كل من المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ ثم $\overrightarrow{AC}$

3) بين أن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A.

4) بين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (BC) هي: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

5) حدد معادلة المستقيم (Δ) المار من A والعمودي على المستقيم (BC).

التمرين الخامس 2 نقط

ABC مثلث.

1) أنشئ النقطتين E و F بحيث: $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

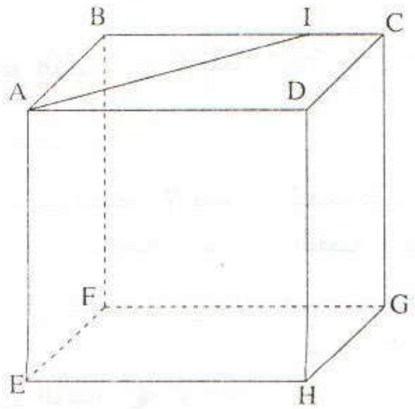
2) بين أن النقط F و C و E مستقيمية.

التمرين السادس 3 نقط

ABCDEFGH متوازي مستطيلات قائم.

بحيث: AB = 2cm و BC = 4cm و AE = 3cm.

لتكن I نقطة من [BC] بحيث: BI = 3cm.



1) بين أن $AI = \sqrt{13}\,cm$.

2) بين أن: $(AE)\perp(AI)$

3) احسب V حجم المتوازي المستطيلات القائم ABCDEFGH.

4) ليكن $A'B'C'D'E'F'G'H'$ تكبيرا لمتوازي المستطيلات القائم ABCDEFGH بنسبة k = 2.

- أحسب V' حجم $A'B'C'D'E'F'G'H'$

الموضوع رقم 7

الامتحان الجهوي الموحد

الأكاديمية الجهوية لجهة الشاوية ورديغة - دورة يونيو 2007

التمرين الأول 2 نقط

1) حل المعادلة التالية: $(x+2)(x-1)=0$

2) حل المتراجحة التالية: $3x-7 \geqslant x+1$

التمرين الثاني 7 نقط

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

1) أ- مثل النقطتين $A(1;2)$ و $B(5;0)$

ب- حدد زوج إحداثيتي $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ثم أحسب المسافة AB.

2) أ- بين أن المعامل الموجه للمستقيم (AB) هو: $-\frac{1}{2}$.

ب- حدد زوج إحاثيتي النقطة K منتصف القطعة $[AB]$.

ج- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة المختصرة $y=2x-5$ هو واسط القطعة [AB].

3) لتكن f الدالة الخطية بحيث $f(2)=4$ و (L) تمثيلها المبياني.

أ- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) ثم بين أن المستقيمين (Δ) و (L) متوازيان.

ب- أنشئ في نفس المعلم المستقيمين (Δ) و (L).

التمرين الثالث 2 نقط

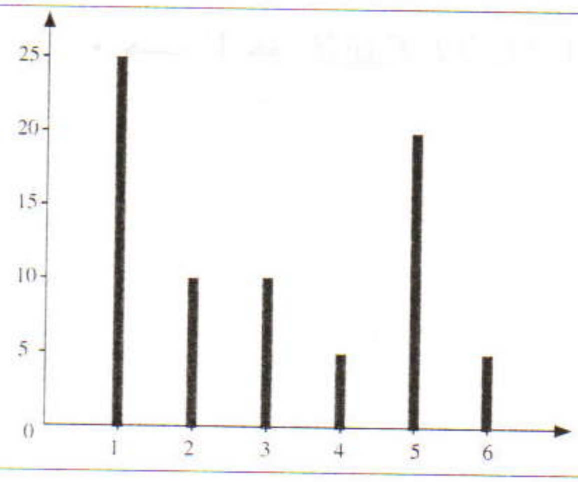
ABC مثلث.

1) أ- أنشئ النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة التي تحول C إلى A.

ب- أنشئ النقطة C' صورة النقطة C بالإزاحة التي تحول B إلى A

2) بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[B'C']$

التمرين الرابع 2 نقط



المبيان جانبه يمثل عدد حوادث السير اليومية المسجلة داخل المدار الحضري لإحدى المدن خلال 75 يوما.

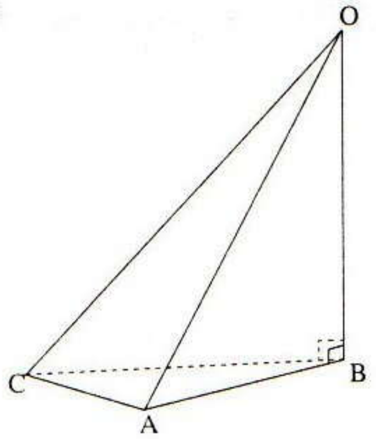
1) ما هو منوال المتسلسلة الإحصائية الممثلة بهذا المبيان؟

2) انقل وأتمم الجدول التالي:

القيمة(عدد الحوادث)	1	2	3	4	5	6
الحصيص(عدد الأيام)	25	10	10	....	....	5

3) أحسب معدل الحوادث اليومية خلال هذه الفترة.

التمرين الخامس 2 نقط



نعتبر الهرم $OABC$ الذي ارتفاعه $[OB]$ وقاعدته المثلث ABC القائم الزاوية في A حيث:

$OB = 6$ و $AB = 4$ و $AC = 3$ (وحدة القياس هي السنتيمتر).

1) بين أن: $OA = 2\sqrt{13}$.

2) نعتبر المستوى (IJK) الذي يقطع الهرم $OABC$ بشكل يوازي المستوى (ABC) بحيث $OIJK$ هو تصغير للهرم: $OABC$. $I \in [OA]$ و $J \in [OB]$ و $K \in [OC]$.

أ- حدد نسبة هذا التصغير علما أن: $OJ = 2$.

ب- أحسب حجم الهرم $OIJK$.

التمرين السادس 4 نقط

I) نعتبر الدالتين التآلفيتين G و H بحيث: $g(x) = -\frac{3}{4}x + 250$ و $h(x) = -x + 280$

1) حدد قيمة العدد x التي يكون من أجلها $h(x) = g(x)$.

2) أحسب: $g(120)$.

II) ثمن سروال وقميص معا هو 280Dh.

بعد إجراء تخفيض على ثمن السروال قدره 20% وتخفيض على ثمن القميص قدره 40%، أصبح ثمن السروال والقميص معا هو: 200Dh.

- حدد ثمن السروال وثمن القميص قبل إجراء التخفيض.

الموضوع رقم 8

الامتحان الجهوي الموحد

الأكاديمية الجهوية لجهة الدار البيضاء الكبرى - دورة يونيو 2008

التمرين الأول 2,5 نقط

يعطي الجدول التالي توزيعا للنقط التي حصل عليها تلاميذ قسم من أقسام الثالثة إعدادي في أحد فروض مادة الرياضيات.

النقطة (قيمة الميزة)	6	7	9	10	11	12	14	17	20
عدد التلاميذ (الحصيص)	1	2	5	4	3	2	4	3	1

1) كون جدولا إحصائيا للحصيصات المتراكمة.

2) حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية.

3) بين أن معدل القسم هو $m = 11,56$. (معدل القسم هو المعدل الحسابي للمتسلسلة الإحصائية).

4) حدد عدد التلاميذ الذين حصلوا على نقطة تفوق المعدل m.

التمرين الثاني 4 نقط

1) نعتبر الدالة التآلفية f المعرفة بما يلي: $f(x) = 3x - 2$

أ- أحسب $f(0)$ و $f(2)$

ب- أنشئ (D) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ حيث: $OI = OJ = 1cm$

2) نعتبر الدالة الخطية g بحيث: $g(1) = 5$.

أ- أنشئ (D') التمثيل المبياني للدالة g في نفس المعلم الذي أنشأت فيه (D).

ب- أعط تعبير $g(x)$ بدلالة x.

3) حل جبريا المعادلة $f(x) = 5x$ ثم استنتج زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (D) و (D').

التمرين الثالث 4,5 نقط

1) حل المعادلة: $(x-2)(2x+6) = 0$

2) حل المتراجحة: $5x - 3 \geqslant -2x + 4$

3) أ- حل النظمة: $\begin{cases} x + y = 28 \\ x + 2y = 34 \end{cases}$

ب- وفَّر شخص 28 قطعة نقدية، بعضها من فئة 5 دراهم والبعض الآخر من فئة 10 دراهم. إذا علمت أن القيمة الإجمالية الموفرة تبلغ 170 درهما فحدد عدد القطع من كل فئة.

التمرين الرابع 4 نقط

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$

حيث: $OI = OJ = 1cm$ ، النقط $A(2;-2)$ و $B(6;2)$ و $C(4;4)$.

1) مثل النقط A و B و C.

2) أ- بين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي: $y = x - 4$.

ب- أكتب المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ) المار من النقطة B والعمودي على المستقيم (AB) ثم تحقق أن النقطة C تنتمي للمستقيم (Δ).

3) أ- تحقق أن $(3;1)$ هو زوج إحداثيتي النقطة K منتصف القطعة [AC].

ب- أحسب المسافتين KA و KO.

4) بين أن النقط Aو B و C و O تنتمي لدائرة يتم تحديد مركزها وشعاعها.

التمرين الخامس 2 نقط

ليكن PQR مثلثا و E منتصف القطعة $[PQ]$.

1) أنشئ النقطة F بحيث $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PE}$.

2) لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{PR}$.

أ- أنشئ النقطة S صورة النقطة R بالإزاحة t.

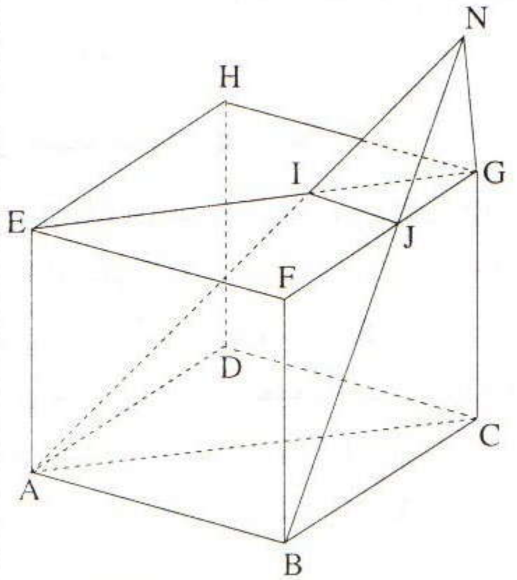
ب- بين أن صورة النقطة E بالإزاحة t هي النقطة F.

3) بين أن النقط Fو Q و S مستقيمية.

التمرين السادس 3 نقط

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم بحيث: $AB = BC = 9cm$ و $GC = 4cm$.

لتكن N نقطة من المستقيم (CG) بحيث: $GN = 2cm$ (انظر الشكل).



1) أ- بين أن المستقيم (CN) عمودي على المستوى (ABC).

ب- بين أن حجم الهرم $NABC$ هو $81cm^3$.

2) لتكن I نقطة تقاطع المستقيمين (AN) و (EG).

و J نقطة تقاطع المستقيمين (NB) و (FG).

أ- الهرم $NIJG$ تصغير للهرم $NABC$.

تحقق أن نسبة هذا التصغير هي : $\frac{1}{3}$

ب- أحسب حجم الهرم $NIJG$

الموضوع رقم 9

الامتحان الجهوي الموحد

الأكاديمية الجهوية لجهة الغرب الشراردة بني احسن - دورة يونيو 2008

التمرين الأول 2 نقط

يمثل الجدول الإحصائي التالي توزيع 24 منخرطا بإحدى الأندية، حسب أعمارهم.

الميزة (العمر)	12	13	14	15	16
الحصيص	5	6		8	4
الحصيص المتراكم		11	12		24

1) انقل الجدول أعلاه على ورقة تحريرك وأتمم ملأه.

2) حدد لهذه المتسلسلة الإحصائية كلا من:

أ- المنوال

ب- القيمة الوسطية

ج- المعدل الحسابي

التمرين الثاني 5 نقط

1) أ- حل المعادلتين: $(E): 3x - 6 = 0$

$(E'): 2x - 1 = 0$

ب- استنتج حلي المعادلة: $(E''): (3x-6)^2 - (3x-6)(x-5) = 0$

2) حل المتراجحة: $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x-7}{2} > \dfrac{x+1}{6}$

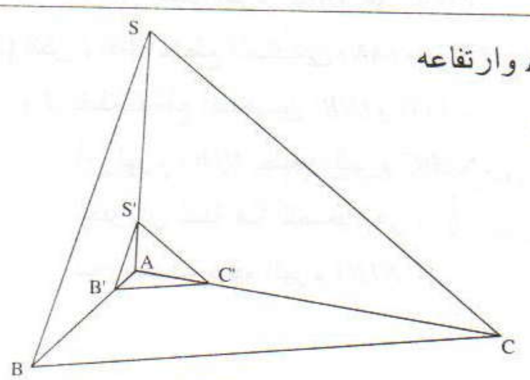
3) أ- حدد الزوج $(a;b)$ الذي هو حل النظمة S: $(S)\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

ب- لتكن I هي النقطة التي زوج إحداثيتيها $(a;b)$ (حل النظمة (S)).

بين أن النقطة I هي نقطة تقاطع مستقيمين من بين المستقيمات الثلاث التالية، معللا جوابك:

$(d_1): y = 2x - 3$ و $(d_2): y = -\dfrac{3}{2}x + 4$ و $(d_3): y = -5x + 2$

التمرين الثالث 3 نقط



ليكن SABC هرما قاعدته هي المثلث ABC القائم الزاوية في A وارتفاعه SA (انظر الشكل) بحيث: $AS = AC = AB = 2\sqrt{3}\,cm$

1) بين أن حجم الهرم SABC هو $V_1 = 4\sqrt{3}\,cm^3$.

2) ليكن $S'AB'C'$ تصغيرا للهرم SABC بنسبة $\dfrac{1}{3}$.

أ- أحسب V_2 حجم الهرم $S'AB'C'$.

ب- أحسب مساحة المثلث $AB'C'$

التمرين الرابع 4 نقط

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$، نعتبر المستقيمين (D) و (Δ) بحيث:

(D) هو التمثيل المبياني للدالة الخطية f المعرفة بـ: $f(x) = 2x$.

(Δ) هو المستقيم الموازي لـ (D) والمار من النقطة $B(2;3)$.

1) بين أن: $y = 2x - 1$ هي المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ).

2) لتكن g هي الدالة التآلفية التي تمثيلها المبياني هو المستقيم (Δ).

أنقل وإملأ الجدولين التاليين على ورقة تحريرك.

x	0	2	
$f(x)$			-6

x	0	1	
$g(x)$			-4

3) أ- أنشئ المستقيمين (D) و (Δ) في المعلم $(O;I;J)$.

ب- هل المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا، (علل جوابك).

التمرين الخامس 6 نقط

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم، نعتبر النقط: $A(2;0)$ و $B(2;5)$ و $C(5;9)$ و $D(5;4)$.

1) أنشئ الرباعي $ABCD$.

2) أ- حدد زوج إحداثيتي كل من المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$.

ب- استنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

3) أحسب AB و BC ثم استنتج أن $ABCD$ معين .

4) أ- أحسب ميلي المستقيمين (AC) و (BD).

ب- تحقق أن قطري $ABCD$ متعامدان .

ج- استنتج من جديد أن $ABCD$ معين .

5) نعتبر النقطة $F(8;13)$.

أ- بين أن F هي صورة D بالإزاحة التي تحول A إلى C.

ب- استنتج أن المستقيمين (BD) و (DF) متعامدان .

الامتحان الجهوي الموحد

الأكاديمية الجهوية لجهة تطوان - دورة يونيو 2008

الموضوع رقم 10

التمرين الأول 5 نقط

1) أ- حل المعادلة: $2x = \frac{3}{2}$

ب- حل المعادلة: $2x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

ج- مثل على مستقيم مدرج وحدته 4cm حلول المتراجحة: $2x - \frac{3}{2} \geqslant 0$

2) أ- حل النظمة: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x + 4y = 170 \end{cases}$

ب- يبيع خضار صنفين من البطاطس، ثمن الصنف الأول 3دراهم للكيلوغرام وثمن الصنف الثاني 4 دراهم للكيلوغرام. إذا علمت أن الخضار قد باع 50 كيلو من الصنفين معا بمبلغ 170 درهم، فما هي كمية البطاطس التي بيعت من كل صنف؟

التمرين الثاني 4 نقط

1) نعتبر الدالة الخطية: $f(x) = \frac{3}{2}x$ و (Δ) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.

أ- أحسب $f(3)$ و $f(-3)$

ب- أحسب العدد الذي صورته 4 بالدالة f.

ج- أنشئ (Δ).

2) لتكن g دالة تآلفية بحيث: $g(6) = 0$ و $g(3) - g(2) = -\frac{2}{3}$

أ- بين أن لكل عدد حقيقي x: $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

ب- بين أن النقطة $B(-3;6)$ تنتمي إلى التمثيل المبياني للدالة g.

ج- أنشئ التمثيل المبياني للدالة g.

التمرين الثالث 4 نقط

في معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$ نعتبر النقط $A(-2;-2)$ و $B(2;4)$ و $C(8;-4)$.

1) أ- أنشئ النقط A و B و C.

ب- تحقق أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي: $y = \frac{3}{2}x + 1$

2) حدد إحداثيتين المتجهة $\overrightarrow{AC}$ ثم أحسب المسافة AC.

3) أ- بين أن النقطة $E(3;-3)$ منتصف القطعة [AC].

ب- حدد ميل المستقيم (EB).

ج- هل المستقيمان (EB) و (AB) متعامدين؟

التمرين الرابع 4 نقط

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O

1) أنشئ النقطتين M و P بحيث: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BC}$.

2) نعتبر الإزاحة T التي تحول النقطة O إلى النقطة C.

أ- حدد صورة النقطة B بالإزاحة T

ب- بين أن صورة النقطة D بالإزاحة T هي النقطة P.

3) بين أن النقط P و C و M مستقيمية.

التمرين الخامس 2 نقط

يعطي الجدول التالي توزيعا للنقط التي حصل عليها 150 تلميذا في الإمتحان الموحد على صعيد الموسسة في مادة الرياضيات خلال الأسدس الأول من السنة الدراسية الحالية:

النقطة n	$0 \leqslant n < 4$	$4 \leqslant n < 8$	$8 \leqslant n < 12$	$12 \leqslant n < 16$	$16 \leqslant n < 20$
عدد التلاميذ	14	N	55	20	9

1) بين أن: $N = 52$

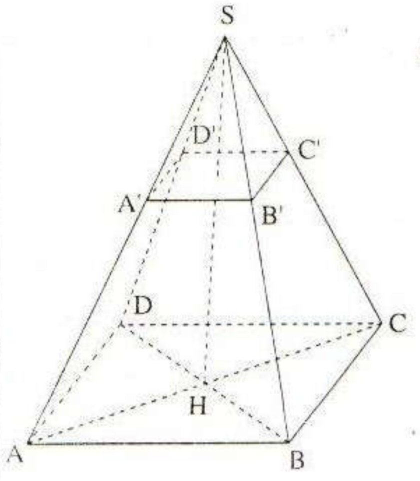
2) حدد نسبة التلاميذ الذين حصلوا على نقطة تقل عن 8.

3) ما هو الصنف الذي يحتوي على القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة؟

4) أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة.

التمرين السادس 3 نقط

لدينا رشاشة عطر على شكل هرم منتظم $SABCD$ رأسه S وقاعدته مربع $ABCD$.



حيث: $SA = SB = SC = SD = 14,7cm$ و $AB = BC = 12cm$. و H هي نقطة تقاطع قطري القاعدة.

1) احسب SH علما أن $DB = 12\sqrt{2}$.

2) فيما يلي من الأسئلة، نأخذ $12cm$ قيمة مقربة لـ SH .

أ- احسب حجم الهرم $SABCD$.

ب- الجزء العلوي $SA'B'C'D'$ عبارة عن غطاء وهو تصغير نسبته $\frac{1}{4}$ للهرم $SABCD$.

احسب حجم هذا الغطاء.

ج- استنتج حجم الوعاء $ABCDA'B'C'D'$ الذي يحتوي على العطر.

الموضوع رقم 11

الامتحان الجهوي الموحد

الأكاديمية الجهوية لجهة سلا زمور زعير - دورة يونيو 2008

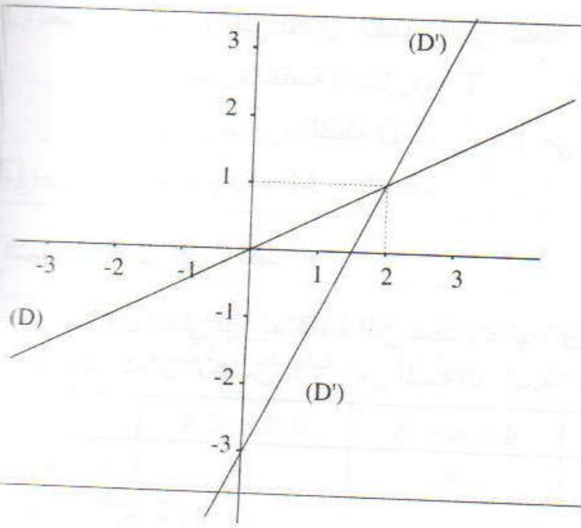
التمرين الأول 5 نقط

1) أ- حل المتراجحة: $2x+7 \leqslant -x+12$

2) حل جبريا النظمة التالية: $\begin{cases} 3x+2y+4=0 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

3) في الشكل التالي (D) و (D') يمثلان مستقيمين معادلتهما

على التوالي: $y=\frac{1}{2}x$ و $y=2x-3$.



أ- حدد مبيانيا إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (D').

ب- حل مبيانيا النظمة التالية: $\begin{cases} 2y-x=0 \\ y-2x+3=0 \end{cases}$

التمرين الثاني 2 نقط

قام صاحب مكتبة بتخفيض ثمن جميع الكتب بنسبة 15%.

1) أحسب ثمن كتاب معين بعد التخفيض إذا كان ثمنه قبل التخفيض هو 400 درهم.

2) نعتبر الدالة f التي تربط الثمن x للكتاب قبل التخفيض بالثمن $f(x)$ بعد التخفيض.

أ- بين أن: $f(x)=\frac{17}{20}x$

ب- أحسب ثمن كتاب معين قبل التخفيض إذا كان ثمنه بعد التخفيض هو 170 درهم.

التمرين الثالث 2 نقط

نعتبر الدالة التآلفية f المعرفة كما يلي: $f(x)=2x+4$

1) أحسب $f(1)$

2) حدد جبريا العدد a حيث $f(a)=0$

3) أنشئ في معلم متعامد ممنظم التمثيل المبياني للدالة f.

التمرين الرابع 4 نقط

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$

1) نعتبر النقطتين: $A(2;-2)$ و $B(3;0)$

أ- حدد زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

ب- أحسب المسافة AB.

ج- حدد زوج إحداثيتي النقطة K منتصف القطعة $[AB]$. X

د- بين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي: $y=2x-6$

2) نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته المختصرة هي: $y = -\frac{1}{2}x + 5$

أ- أرسم المستقيم (Δ).

ب- بين أن النقطة $C(4;3)$ تنتمي إلى (Δ).

ج- بين أن المستقيمان (AB) و (Δ) متعامدان.

د- حدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) المار من النقطة A والموازي للمستقيم (Δ):

التمرين الخامس 2 نقط

تشغل إحدى الشركات 20 مستخدما يتوزع أجرهم الشهري وفق الجدول التالي:

الأجر بالدرهم	2500	2700	3000	5000	15000
عدد المستخدمين	1	8	7	3	1

1) ما هو منوال هذه المتسلسلة الإحصائية؟

2) أحسب معدل الأجور لهذه الفئة من المستخدمين.

3) ما هي نسبة المستخدمين الذين يقل أجرهم عن معدل الأجور؟

4) حدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة.

التمرين السادس 2 نقط

ABC مثلث و E نقطة من الضلع $[AB]$. ونعتبر الإزاحة t التي تحول النقطة B إلى C.

1) أنشئ النقطة F صورة E بالإزاحة t.

2) لتكن (T) الدائرة التي مركزها E والمارة من النقطة B والدائرة (T') صورتها بالإزاحة t.

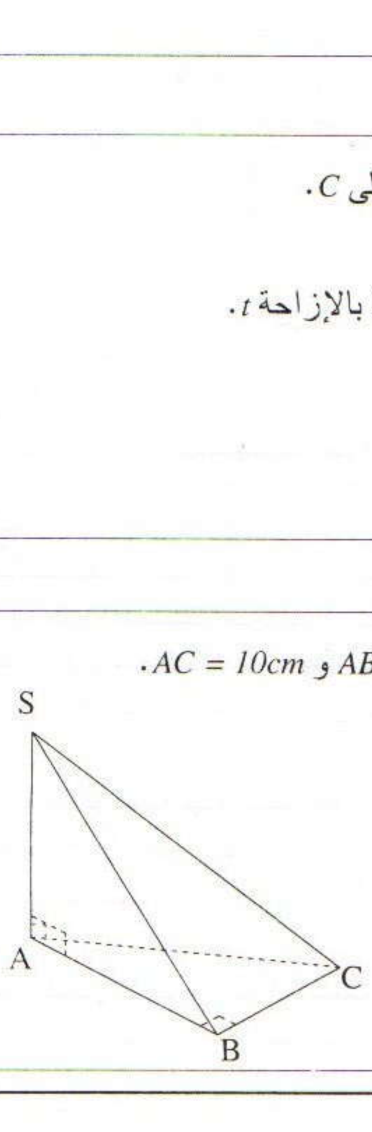
أ- حدد مركز الدائرة (T').

ب- بين أن النقطة C تنتمي إلى (T').

3) أحسب شعاع الدائرة (T') إذا علمت أن: $AE = \frac{2}{3}AB$ و $AB = 2$.

التمرين السابع 3 نقط

$SABC$ هرم ارتفاعه SA وقاعدته مثلث ABC. قائم الزاوية في B حيث: $AB = 8cm$ و $AC = 10cm$.



1) بين أن: $BC = 6cm$.

2) نضع: $SA = 12cm$.

أ- بين أن حجم الهرم $SABC$ هو $96cm^3$.

ب- أحسب حجم الهرم المحصل عليه بعد تصغير $SABC$ بنسبة $\frac{3}{4}$

حل الموضوع رقم 1

تمرين 1

✱1) أحل النظمة: $\begin{cases}3x+2y=-5\\2x+5y=4\end{cases}$

✦ لإزالة المجهول x أضرب طرفي المعادلة $3x+2y=-5$ في العدد 2- . وأضرب طرفي المعادلة $2x+5y=4$ في العدد 3

فأحصل على النظمة: $\begin{cases}-6x-4y=10\\6x+15y=12\end{cases}$

✦ **أجمع المعادلتين المحصل عليهما طرفا بطرف:**

$$\cancel{-6x}+\cancel{6x}-4y+15y=10+12$$

أي أن: $11y=22$

إذن: $\boxed{y=\frac{22}{11}=2}$

✦ **أحسب قيمة x :**

لدينا: $3x+2y=-5$ و $y=2$

يعني أن: $3x+2\times2=-5$

$3x+4=-5$

يعني: $3x=-5-4$

يعني: $3x=-9$

$x=-\frac{9}{3}$

إذن: $\boxed{x=-3}$

وبالتالي فإن الزوج $(-3;2)$ هو حل هذه النظمة.

تمرين 2

1) **أكون جدولا إحصائيا للحصيصات المتراكمة.**

قيمة المساهمة بـDH	10	20	25	30	50
عدد التلاميذ	5	7	4	6	3
الحصيص المتراكم	5	12	16	22	25

2) ✱ **أحدد منوال هذه المتسلسلة الإحصائية**

الميزة التي لها أكبر حصيص هي 20. إذن منوال هذه المتسلسلة هي الميزة 20.

✱ **أحدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة:**

نصف الحصيص الاجمالي لهذه المتسلسلة هو: $\frac{25}{2}$ أي 12,5 وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو تساوي 12,5 هي 25

إذن: القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي: 25.

3) ✱ **أحدد المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة:**

ليكن m هو المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الاحصائية.

$m=\frac{10\times5+20\times7+25\times4+30\times6++50\times3}{25}$

$m=\frac{50+140+100+180+150}{25}$

$m=\frac{620}{25}$

$\boxed{m=24.8}$

ومنه فإن المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة هو 24,8 .

تمرين 3

1) أ) **أبين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) تكتب على الشكل التالي:** $y=\frac{1}{2}x-1$

أضع: $(AB)\colon y=mx+p$

✦ **أحدد العدد m :**

m هو ميل المستقيم (AB)

إذن: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ $(x_B\neq x_A)$

أي أن: $m=\frac{1+1}{4-0}=\frac{2}{4}$

$\boxed{m=\frac{1}{2}}$

ومنه فإن: $(AB)\colon y=\frac{1}{2}x+p$

✦ **أحدد العدد p :**

زوج أحداثيتي النقطة A تحقق معادلة المستقيم (AB).

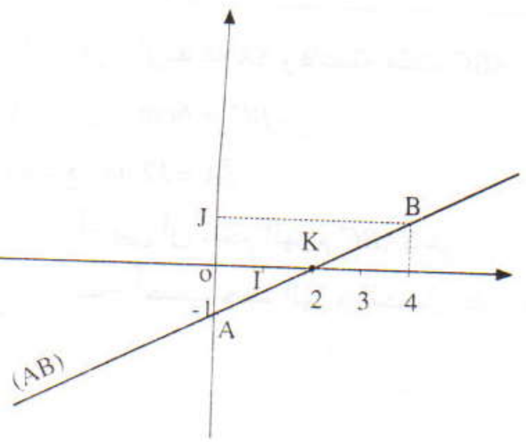
أي أن: $y_A=\frac{1}{2}x_A+p$

$-1=\frac{1}{2}\times0+p$

إذن: $\boxed{p=-1}$

وبالتالي فإن: المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي: $y=\frac{1}{2}x-1$

ب) **أنشئ المستقيم (AB):**



2) أ) **أحسب إحداثيتي k منتصف** [AB]:

لدينا: k منتصف [AB].

إذن: $x_k = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ و $y_k = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

أي أن: $x_k = \dfrac{0 + 4}{2}$ و $y_k = \dfrac{1 + (-1)}{2}$.

أي أن: $x_k = 2$ و $y_k = 0$.

ومنه فإن زوج إحداثيتي k هو: $(2;0)$

ب) **أثبت أن المستقيم (Δ) هو واسط** [AB]:

◆ **أبين أن:** $(\Delta) \perp (AB)$

$(\Delta): y = -2x + 4$ و $(AB): y = \dfrac{1}{2}x - 1$

ميل المستقيم (Δ) هو 2-.

وميل المستقيم (AB) هو $\dfrac{1}{2}$

ولدينا: $-2 \times \dfrac{1}{2} = -1$

إذن: $\boxed{(AB) \perp (\Delta)}$

◆ **أبين أن k منتصف [AB] ينتمي إلى (Δ):**

لدينا: $y_k = 0$

و: $-2x_k + 4 = -2 \times 2 + 4 = 0$

إذن: $y_k = -2x_k + 4$

أي أن زوج إحداثيتي k يحقق معادلة (Δ).

ومنه فإن النقطة k تنتمي إلى (Δ).

◆ المستقيم(Δ) يمر من k منتصف [AB] وعمودي على (AB).

إذن (Δ) هو واسط [AB].

التمرين 4

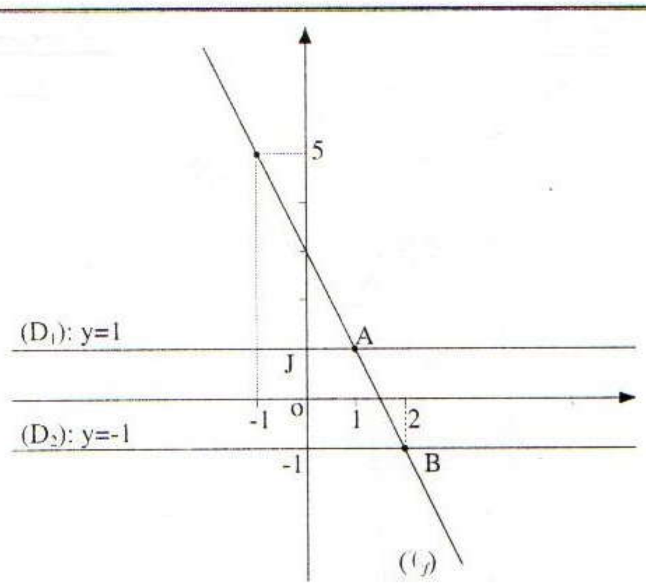
الدالة تآلفية حيث: $f(x) = -2x + 3$

أحسب $f(-1)$ و $f(2)$

$$f(-1) = -2 \times (-1) + 3$$
$$= 2 + 3$$
$$\boxed{f(-1) = 5}$$

$$f(2) = -2 \times 2 + 3$$
$$= -4 + 3$$
$$\boxed{f(2) = -1}$$

x	-1	2
$f(x)$	5	-1



3) أ) **أبين أن لكل عدد حقيقي** x **لدينا:** $x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4}((f(x))^2 - 1)$

$$\frac{1}{4}((f(x))^2 - 1) = \frac{1}{4}((-2x + 3)^2 - 1)$$
$$= \frac{1}{4}(4x^2 - 12x + 9 - 1)$$
$$= \frac{1}{4}(4x^2 - 12x + 8)$$
$$= \frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{4}x^2 - \frac{1}{4} \times 12x + \frac{1}{4} \times 8$$

$$\boxed{\frac{1}{4}((f(x))^2 - 1) = x^2 - 3x + 2}$$

ب) **أستنتج مبيانيا حلول المعادلة:** $x^2 - 3x + 2 = 0$

ملاحظة:

لتكن f دالة تآلفية و a عدد حقيقي.

الحل المبياني للمعادلة $f(x) = a$. يعني تحديد أفاصيل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y=a$.

• نعلم أن: $x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{4}((f(x))^2 - 1)$

ومنه فإن: $\frac{1}{4}((f(x))^2 - 1) = 0$

يعني أن: $(f(x) - 1)(f(x) + 1) = 0$

يعني أن: $f(x) = -1$ أو $f(x) = 1$

وبالتالي فإن حل المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ هما أفصول نقطتي تقاطع (C_f) مع كل من المستقيم (D_1) و (D_2).

حيث: $(D_1): y = 1$

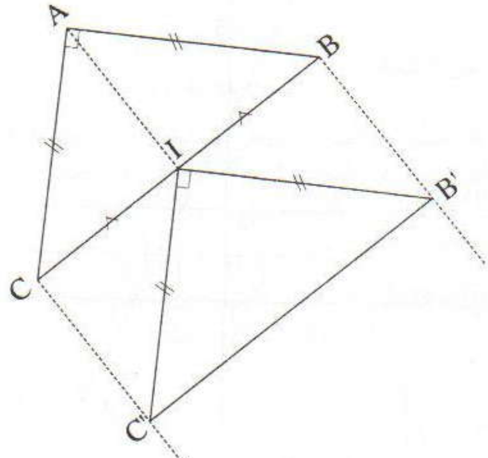
و: $(D_2): y = -1$

ومن خلال التمثيل المبياني. النقطتان هما A و B

حيث: $A(1;1)$ و $B(2;-1)$.

تمرين 5

1) الشكل:



2) أبين أن المثلث $IB'C'$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين في I

✦ لدينا: B' صورة B بالإزاحة t.

إذن: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AI}$

أي أن: $ABB'I$ متوازي الأضلاع.

ومنه فإن: $\boxed{AB = IB'}$ ①

ولدينا: C' صورة C بالإزاحة t.

إذن: $\boxed{\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AI}}$

أي أن: $ACC'I$ متوازي الأضلاع. ومنه: $\boxed{AC = IC'}$ ②

وبما أن ABC متساوي الساقين رأسه A. فإن: $\boxed{AB = AC}$ ③

من العلاقات ① و ② و ③ أستنتج أن: $IB' = IC'$

ومنه فإن المثلث $IB'C'$ متساوي الساقين رأسه I.

✦ صورة الزاوية $B\hat{A}C$ بالإزاحة t هي الزاوية $B'\hat{I}C'$.

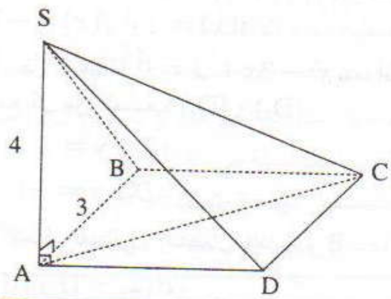
إذن: $B\hat{A}C = B'\hat{I}C'$

وبما أن: $B\hat{A}C$ زاوية قائمة.

فإن: $B'\hat{I}C'$ زاوية قائمة.

وبالتالي فإن المثلث $B'\hat{I}C'$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين في I.

تمرين 6



1) أحسب المسافتين AC و SC:

✦ بما أن ABCD مربع.

فإن: ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في B.

وحسب مبرهنة فيتاغورس لدينا: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

أي: $AC^2 = 3^2 + 3^2$

$AC^2 = 18$

أي: $\boxed{AC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,cm}$

✦ بما أن (SA) عمودي على المستوى (ABC) و (AC) يوجد ضمن (ABC). فإن: $(AC) \perp (SA)$ في النقطة A.

ومنه فإن المثلث SAC قائم الزاوية في A.

وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة لدينا: $SC^2 = SA^2 + AC^2$

ونعلم أن: $AC = 3\sqrt{2}\,cm$ و SA=4cm.

أي أن: $SC^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2$

$SC^2 = 16 + 18$

$SC^2 = 34$

إذن: $\boxed{SC = \sqrt{34}\,cm}$

2) أحسب V حجم الهرم.

نعلم أن: $\underset{\text{حجم الهرم}}{V} = \frac{1}{3} \times \underset{\text{القاعدة}}{S} \times \underset{\text{الارتفاع}}{h}$

أي أن: $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times S_{ABCD} \times h$

ونعلم أن: $S_{ABCD} = AB^2 = 3^2 = 9cm^2$

و: $h = SA = 4cm$

إذن: $\boxed{V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 9 \times 4 = 12cm^3}$

3) أحسب V':

في تصغير تضرب الحجوم في مكعب ، نسبة التصغير.

إذن: $V' = k^3 \times V$

إذن: $V' = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 12$

$\boxed{V' = \frac{27}{64} \times 12 = \frac{81}{16} = 5{,}0625cm^3}$

حل الموضوع رقم 2

تمرين 1

f دالة معرفة بما يلي: $f(x) = 2x - 3$

1) أحسب $f(2)$

$$f(2) = 2 \times 2 - 3$$
$$= 4 - 3$$
$$\boxed{f(2) = 1}$$

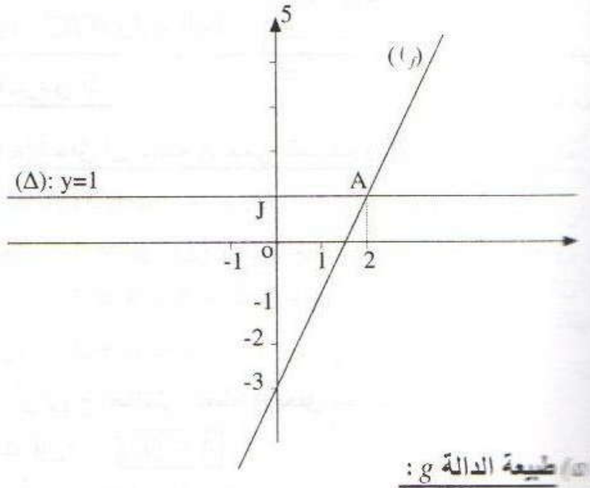
2) أمثل مبيانيا الدالة f:

• f دالة تآلفية

إذن تمثيلها المبياني مستقيم.

• جدول القيم

x	2	0
$f(x)$	1	-3



3) طبيعة الدالة g:

بما أن التمثيل المبياني للدالة g هو مستقيم يمر من أصل المعلم O.

فإن الدالة g هي دالة خطية.

4) أحدد مبيانيا العدد k حيث: $g(k) = 1$

تحديد k حيث: $g(k) = 1$ اعتمادا على المبيان.

يعني تحديد أفصول نقطة تقاطع (C_g) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: y=1

من خلال التمثيل المبياني فإن نقطة تقاطع (C_g) و (Δ) هي: $A(2;1)$

إذن: $\boxed{k = 2}$

5) أعبر عن $g(x)$ بدلالة x:

نضع: $g(x) = ax$

بما أن $A(4;2)$ تنتمي إلى (C_g).

فإن: $g(4) = 2$.

ومنه: $a = \frac{g(4)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

إذن: $\boxed{g(x) = \frac{1}{2}x}$

تمرين 2

1) أحدد منوال المتسلسلة:

✱ نعلم أن منوال متسلسلة إحصائية هو الميزة أو الصنف الذي له أكبر حصيص.

✱ من خلال المبيان الذي يمثل توزيع أعمار تلاميذ مدرسة ابتدائية يتضح أن الميزة ذات القيمة 6 هي التي تتوفر على أكبر حصيص أي 60 تلميذا.

إذن منوال هذه المتسلسلة هي الميزة ذات القيمة 6.

2) أتمم الجدول:

القيمة (العمر)	6	7	8	9	10
الحصيص (عدد التلاميذ)	60	40	50	30	20
الحصيص المتراكم	60	100	150	180	200

3) أحدد عدد تلاميذ المدرسة الذين يتجاوز عمرهم سبع سنوات ونصف

✱ عدد تلاميذ المدرسة الذين يتجاوز عمرهم سبع سنوات ونصف هو: 20+30+50.

أي: 100

4) أحدد متوسط عمر تلاميذ هذه المدرسة:

✱ ليكن m متوسط عمر تلاميذ هذه المدرسة والذي يمثل المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة.

إذن:

$$m = \frac{6 \times 60 + 7 \times 40 + 8 \times 50 + 9 \times 30 + 10 \times 20}{200}$$

$$m = \frac{360 + 280 + 400 + 270 + 200}{200}$$

$$m = \frac{151\cancel{0}}{20\cancel{0}}$$

$$\boxed{m = 7,55}$$

تمرين 3

★ اختيار المجهولين:

ليكن x عدد الساعات التي استعمل خلالها التلاميذ الأنترنيت نهارا و y عدد الساعات التي استعمل خلالها الأنترنيت ليلا.

★ صياغة النظمة:

نعلم أن: التلميذ استفاد من خدمات الأنترنيت التي يقدمها هذا النادي لمدة 14 ساعة وأدى مبلغ 54DH.

إذن: $x + y = 14$

و: $5x + 3y = 54$

ومنه فإن الزوج $(x;y)$ هو حل النظمة: $\begin{cases} x + y = 14 \\ 5x + 3y = 54 \end{cases}$

★ <u>حل النظمة:</u>

لدينا: $\begin{cases} x+y=14 \\ 5x+3y=54 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} y=14-x \\ 5x+3(14-x)=54 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} y=14-x \\ 5x+42-3x=54 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} y=14-x \\ 2x=54-42 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} y=14-x \\ 2x=12 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} y=14-x \\ x=\frac{12}{2} \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} y=14-6 \\ x=6 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} x=6 \\ y=8 \end{cases}$

★ <u>الرجوع إلى المسألة المطروحة:</u>

– عدد الساعات التي استعمل فيها التلميذ الأنترنيت نهارا هو: 6.

– عدد الساعات التي استعمل فيها التلميذ الأنترنيت ليلا هو: 8.

★ <u>التحقق:</u>

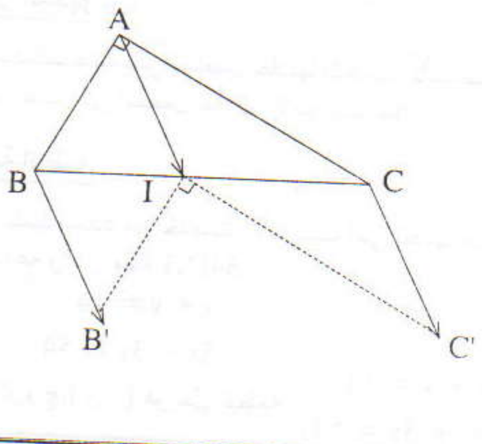
$\begin{cases} x+y=6+8=14 \\ 5x+3y=5\times6+3\times4=30+12=42 \end{cases}$

تمرين 4

1) <u>إنشاء النقطة B'</u>

• B' صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$.

يعني أن: $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BB'}$.



2) a) <u>أبين أن C' صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$</u>

• لدينا حسب المعطيات $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$

ولدينا B' صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$.

إذن: $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AI}$

ومنه فإن: $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AI}$

وبالتالي فإن: C' هي صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$.

b) <u>أحدد قياس الزاوية $B'\hat{I}C'$</u>

• صور النقط A و B و C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$ هي على التوالي النقط I و B' و C'.

إذن صورة الزاوية $B\hat{A}C$ هي الزاوية $B'\hat{I}C'$ بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$.

ومنه فإن $B\hat{A}C=B'\hat{I}C'$.

وبما أن $B\hat{A}C$ زاوية قائمة.

فإن: $B'\hat{I}C'$ زاوية قائمة.

تمرين 5

2) a) <u>أتحقق أن النقطة A تنتمي للمستقيم (D):</u>

$(D): y=-x+3\ ; A(2;1)$

لدينا: $y_A=1$

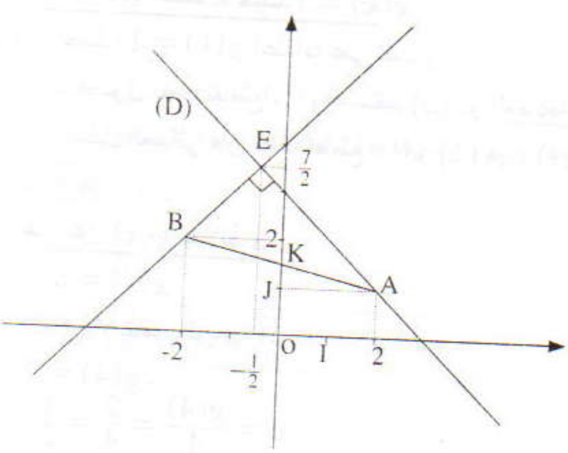
و: $-x_A+3=-2+3=1$

إذن: $y_A=-x_A+3$

أي أن زوج إحداثيتي النقطة A يحقق معادلة (D).

ومنه فإن: $\boxed{A\in(D)}$

b) <u>أنشئ النقطتين A و B:</u>



c) أنشئ المستقيم (D):

x	0	2
y	3	1

(انظر الشكل)

2) a) أحدد ميل (D):

لدينا: $(D): y = -x + 3$

إذن ميل المستقيم (D) هو -1

b) أحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ)

أضع: $(\Delta): y = mx + p$

★ أحدد العدد m:

بما أن: $(D) \perp (\Delta)$

فإن جداء ميلي (D) و (Δ) يساوي -1.

أي أن: $-1 \times m = -1$

إذن: $\boxed{m = 1}$

ومنه فإن: $(\Delta): y = x + p$

★ أحدد العدد p:

بما أن: $B \in (\Delta)$

فإن زوج إحداثيتي B تحقق معادلة المستقيم (Δ).

أي أن: $y_B = x_B + p$

ولدينا: $B(-2;2)$

إذن: $2 = -2 + p$

$p = 2 + 2$

$\boxed{p = 4}$

وبالتالي فإن: $\boxed{\Delta: y = x + 4}$

3) a) أحل النظمة: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$

★ بجمع المعادلتين طرفا بطرف أحصل على المعادلة:

$x + \cancel{y} + x - \cancel{y} = 3 - 4$

أي أن: $2x = -1$

إذن: $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$

★ أحسب قيمة y:

لدينا: $x + y = 3$ و $x = -\frac{1}{2}$

إذن: $-\frac{1}{2} + y = 3$

أي أن: $y = 3 + \frac{1}{2}$

$\boxed{y = \frac{7}{2}}$

ومنه فإن الزوج $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ هو حل هذه النظمة.

b) أحدد زوج إحداثيتي E:

E نقطة تقاطع (D) و (Δ).

إذن زوج إحداثيتي E يحقق معادلتي (D) و (Δ).

أي أن زوج إحداثيتي E يحقق نظمة المعادلتين $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x + 4 \end{cases}$

يعني: أن زوج إحداثيتي E يحقق النظمة: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$

وحسب السؤال السابق فإن حل هذه النظمة هو الزوج $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$

وبالتالي فإن زوج إحداثيتي E هو: $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$.

4) a) أحدد زوج إحداثيتي k:

k مركز الدائرة (ↄ) التي قطرها [AB]. إذن k منتصف [AB].

أي أن: $x_k = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_k = \frac{y_A + y_B}{2}$

أي أن: $x_k = \frac{2 + (-1)}{2}$ و $y_k = \frac{1 + 2}{2}$

إذن: $\boxed{x_k = 0}$ و $\boxed{y_k = \frac{3}{2}}$

وبالتالي فإن زوج إحداثيتي النقطة k هو: $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

b) أحسب شعاع الدائرة (ↄ):

• (ↄ) دائرة قطرها [AB].

إذن شعاعها r يساوي $\frac{AB}{2}$.

ولدينا: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(-2-2)^2 + (2-1)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (1)^2}$

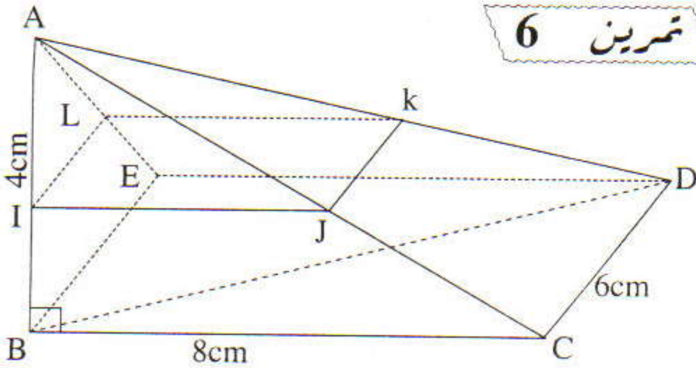
$= \sqrt{16 + 1}$

$= \sqrt{17}$

$\boxed{AB = \sqrt{17}}$

وبالتالي فإن: $\boxed{r = \frac{\sqrt{17}}{2}}$

تمرين 6



1) a) أبين أن ABD قائم الزاوية في B:

بما أن AB ارتفاع للهرم $ABCDE$.

فإن: (AB) عمودي جميع المستقيمات المارة من B والتي توجد ضمن المستوى $(BCDE)$.

ولدينا: (BD) ضمن المستوى $(BCDE)$.

إذن: $(BD) \perp (AB)$

ومنه فإن المثلث ABD قائم الزاوية في B.

b) أحسب المسافة BD:

بما أن $BCDE$ مستطيل.

فإن: BCD قائم الزاوية في C.

وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة.

لدينا: $BD^2 = BC^2 + CD^2$

ونعلم أن: $BE=CD=6cm$ و $BC=8cm$.

إذن: $BD^2 = 8^2 + 6^2$

$BD^2 = 64 + 36$

$BD^2 = 100$

$BD = \sqrt{100}$

ومنه فإن: $\boxed{BD = 10}$

2) أحسب حجم الهرم $ABCDE$:

نعلم أن: $\underset{\text{حجم الهرم}}{V} = \frac{1}{3} \times \underset{\text{الارتفاع}}{h} \times \underset{\text{مساحة القاعدة}}{B}$

أي أن: $V_{ABCDE} = \frac{1}{3} AB \times S_{BCDE}$

بما أن: $BCDE$ مستطيل.

فإن: $S_{BCDE} = BE \times BC$

أي أن: $S_{BCDE} = 6 \times 8 = 48cm^2$

ونعلم أن: $AB = 4cm$

ومنه فإن: $V_{ABCDE} = \frac{1}{3} \times 4 \times 48$

$\boxed{V_{ABCDE} = 64cm^3}$

3) أحسب حجم الهرم AIJKL:

• الهرم AIJKL هو نتيجة قطع الهرم ABCDE بمستوى يوازي القاعدة BCDE.

إذن: AIJKL هو تصغير للهرم ABCDE ونسبة تصغيره هي: $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{4}$

• $V_{AIJKL} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times V_{ABCDE}$

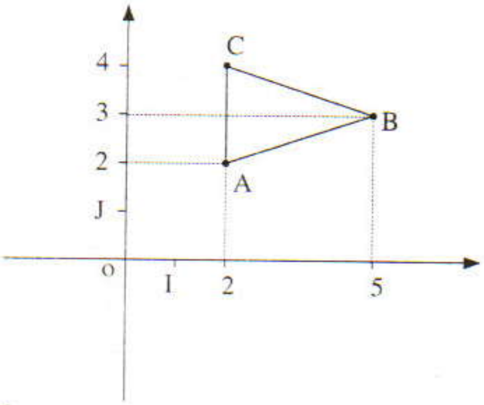
$V_{AIJKL} = \frac{1}{64} \times 64$

$\boxed{V_{AIJKL} = 1cm^3}$

حل الموضوع رقم 3

تمرين 1

2) أنشئ النقط A و B و C



2) أحدد إداثتي $\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

أي أن: $\overrightarrow{AB}(5-2; 3-2)$

إذن: $\overrightarrow{AB}(3; 1)$

• أحسب المسافة AB:

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(5-2)^2 + (3-2)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 1^2}$

$\boxed{AB = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}}$

3) أبين أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B:

• أحسب المسافة AB:

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$
$$BC=\sqrt{(2-5)^2+(4-3)^2}$$
$$BC=\sqrt{(-3)^2+1^2}$$
$$BC=\sqrt{9+1}$$
$$\boxed{BC=\sqrt{10}}$$

بما أن: $AB=\sqrt{10}$ و $BC=\sqrt{10}$

فإن: $AB=BC$

ومنه فإن ABC مثلث متساوي الساقين في B.

تمرين 2

1) أ) أحدد مبيانيا صورة العدد 2 بالدالة f:

• مسقط نقطة (D) التي أفصولها 2 على محور الأراتيب هي النقطة التي أرتوبها 5.

إذن: $f(2)=5$

ب) أحدد مبيانيا العدد الذي صورته بالدالة f هي 3

• مسقط نقطة (D) التي أرتوبها 3 على محور الأفاصيل هي النقطة I

إذن: $f(1)=3$

2) أبين أن: $f(x)=2x+1$

لدينا: $f(x)=ax+b$

لدينا حسب السؤال 1) أ): $f(2)=5$

وحسب السؤال 1) ب): $f(1)=3$.

★ أحدد العدد a:

$$a=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$
$$a=\frac{5-3}{1}$$
$$\boxed{a=2}$$

وبالتالي: $f(x)=2x+b$

★ أحدد العدد b:

لدينا: $f(2)=2\times 2+b$ و $f(2)=5$

$$2\times 2+b=5$$
$$4+b=5$$
$$b=5-4$$
$$\boxed{b=1}$$

ومنه فإن: $f(x)=2x+1$

3) أبين أن: $(\Delta)\perp(D)$

• بما أن (D) هو التمثيل المبياني للدالة التآلفية f حيث:

$$f(x)=2x+1$$

فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (D) هي: $y=2x+1$

• ميل المستقيم (D) هو 2 ، ميل المستقيم (Δ) هو: $-\frac{1}{2}$.

ولدينا: $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{2}=-1$

إذن: $\boxed{(\Delta)\perp(D)}$

4) أ) أحل النظمة: $\begin{cases}2x-y=-1\\x+2y=0\end{cases}$

أتبع طريقة التأليفة الخطية

• لإزالة المجهول y أضرب طرفي المعادلة ① في العدد 2 وأضرب طرفي المعادلة② في العدد 1. فأحصل على النظمة التالية:

$$\begin{cases}4x-2y=-2\\x+2y=0\end{cases}$$

ثم أجمع المعادلتين المحصل عليهما طرفا بطرف:

$$4x-\cancel{2y}+x+\cancel{2y}=-2+0$$

أي أن: $5x=-2$

$$\boxed{x=-\frac{2}{5}}$$

★ أحسب قيمة y:

لدينا: $x+2y==0$ و $x=-\frac{2}{5}$

إذن: $-\frac{2}{5}+2y=0$

إذن: $2y=\frac{2}{5}$

أي أن: $y=\frac{\cancel{2}}{5}\times\frac{1}{\cancel{2}}$

$$\boxed{y=\frac{1}{5}}$$

ومنه فإن الزوج $\left(-\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$ هو حل هذه النظمة.

ب) أستنتج إحداثيتي k نقطة تقاطع (D) و (Δ):

k نقطة تقاطع (D) و (Δ).
إذن زوج إحداثيتي k يحقق معادلتي المستقيمين (D) و (Δ).
أي أن زوج إحداثيتي k هو حل نظمة المعادلتين (E):

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

وبما أن النظمة (E) تكافئ النظمة:

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

وحسب السؤال السابق أستنتج أن زوج إحداثيتي النقطة k هو $\left(-\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$

تمرين 3

1) أحدد عدد الطلبة الذين نجحوا بمعدل يفوق أو يساوي 14:

ليكن N_1 هو عدد الطلبة الذين نجحوا بمعدل يفوق أو يساوي 14:

إذن العدد N_1 هو مجموع الحصيصات الموافقة للقيم 14 و 15 و 16.

أي أن: $N_1 = 5 + 10 + 5$

$\boxed{N_1 = 20}$

2) أحدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الاحصائية:

المعدل	12	13	14	15	16
عدد الطلبة	10	20	5	10	5
الحصيص المتراكم	10	30	35	45	50

• الحصيص الإجمالي N لهذه المتسلسلة الاحصائية هو: N=50

• أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من أو يساوي $\frac{N}{2}$ أي 25 هي 13.

إذن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي 13.

3) أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة:

إذن:

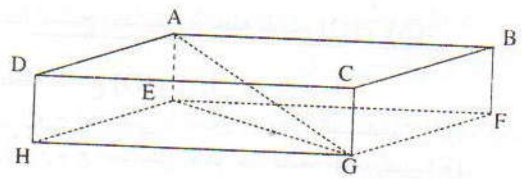
$$m = \frac{12\times 10 + 13\times 20 + 14\times 5 + 15\times 10 + 16\times 5}{50}$$

$$m = \frac{120 + 260 + 70 + 150 + 80}{50}$$

$$m = \frac{680}{50}$$

$$\boxed{m = 13,6}$$

تمرين 4



1) ● أحدد طبيعة المثلث AEG:

لدينا: $(AE)\perp(EH)$ (لأن $ADHE$ مستطيل).

و: $(AE)\perp(EF)$ (لأن $ABFE$ مستطيل).

إذن: (AE) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (EH) و (EF) والموجودين ضمن المستوى $(EFGH)$.

ومنه فإن: $(AE)\perp(EFGH)$

وبما أن (EG) يقع ضمن المستوى $(EFGH)$

فإن: $(AE)\perp(EG)$

وبالتالي فإن المثلث AEG قائم الزاوية في النقطة E.

● أحسب AG:

● بتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة على المثلث EFG القائم الزاوية في F.

لدينا: $EG^2 = EF^2 + FG^2$

ونعلم أن: $FG=BC=2cm$ و $EF=AB=3cm$.

$EG^2 = 3^2 + 2^2$

$EG^2 = 9 + 4$

$\boxed{EG^2 = 13}$

● بتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة على المثلث AEG.

لدينا: $AG^2 = AE^2 + EG^2$

ونعلم أن: $EG^2 = 13$ و AE=1cm.

إذن: $AG^2 = 1^2 + 13$

$AG^2 = 1 + 13$

$AG^2 = 14$

$\boxed{AG = \sqrt{14}\,cm}$

2) أحسب (بـ cm^3) حجم الهرم $DHGE$:

نعلم أن: $\underset{\text{حجم الهرم}}{V} = \frac{1}{3} \times \underset{\text{الارتفاع}}{h} \times \underset{\text{مساحة القاعدة}}{S}$

أي أن: $V_{DHGE} = \frac{1}{3}\times DH \times S_{EHG}$

ولدينا: $DH=AE=1cm$.

$S_{EHG} = \frac{1}{2}\times EH \times HG$

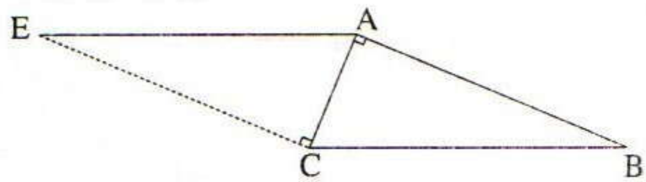
$$\boxed{S_{EHG} = \frac{1}{\cancel{2}}\times \cancel{2}\times 3 = 3cm^2}$$

$V_{DHGE} = \frac{1}{\cancel{3}}\times 1\times \cancel{3}$

$\boxed{V_{DHGE} = 1cm^3}$

تمرين 5

1) أنشئ النقطة E:



2) أبين أن: (EC) و (AC) متعامدان:

• لدينا: E صورة النقطة A بالإزاحة T التي تحول B إلى C.

إذن: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$

يعني أن الرباعي $AECB$ متوازي الأضلاع.

ومنه فإن: $\boxed{(AB)//(EC)}$ ①

• بما أن ABC قائم الزاوية في A.

فإن: $\boxed{(AB)\perp(AC)}$ ②

• من العلاقتين ① و ② أستنتج أن: $\boxed{(AC)\perp(EC)}$

مسألة

* أحدد الصيغة الأنسب لتلميذ يريد كراء 12 كتابا

- المبلغ حسب الصيغة Ⓐ هو: $12 \times 3 + 44$ أي 80DH.
- المبلغ حسب الصيغة Ⓑ هو: 12×5 أي: 60DH.

ومنه فإن الصيغة الأنسب لتلميذ يريد كراء 12 كتابا هي الصيغة Ⓑ.

* ليكن x هو عدد الكتب الذي يكون من أجله المبلغ المؤدى هو نفسه سواء تم اختيار الصيغة Ⓐ أو الصيغة Ⓑ.

إذن: $5x = 3x + 44$

يعني أن: $5x + 3x = 44$

يعني أن: $2x = 44$

يعني أن: $x = \frac{44}{2}$

ومنه فإن: $\boxed{x = 22}$

المبلغ المؤدى هو: 22×5 أي 110DH.

حل الموضوع رقم 4

تمرين 1

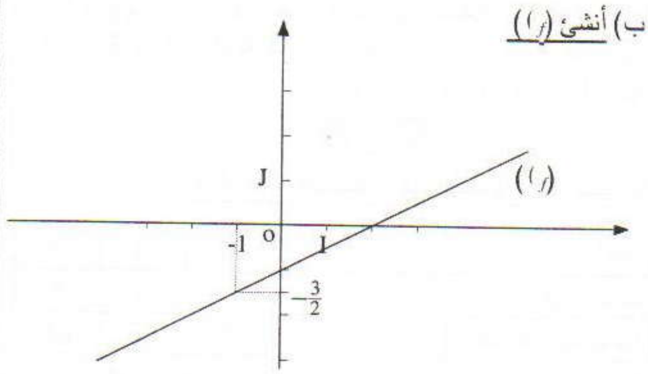
f دالة تآلفية معرفة كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

أ- أحسب $f(2)$ و $f(-1)$

• $f(2) = \frac{1}{2} \times 2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(-1) = \frac{1}{2} \times (-1) - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

ب) أنشئ (C_f)



ج) أجد العدد الذي صورته 2 بالدالة f:

ليكن a العدد الذي صورته 2 بالدالة f

إذن: $f(a) = 2$

يعني أن: $\frac{1}{2}a - 1 = 2$

يعني أن: $\frac{1}{2}a = 2 + 1$

يعني أن: $\frac{1}{2}a = 3$

يعني أن: $a = 3 \times 2$

إذن: $\boxed{a = 6}$

2)-أ) أجد $g(0)$ و $g(-1)$

• بما أن التمثيل المبياني للدالة g هو مستقيم يمر من أصل المعلم O فإن الدالة g دالة خطية.

إذن: $\boxed{g(0) = 0}$

• مسقط نقطة (D) التي أفصولها 1- على محور الأراتيب هي النقطة التي أرتوبها 2.

إذن: $\boxed{g(-1) = 2}$

ب) أجد العدد الذي صورته 4 بالدالة g:

مسقط نقطة (D) التي أرتوبها 4 على محور الأفاصيل هي النقطة التي أفصولها 2-.

إذن: $\boxed{g(-2) = 4}$

ج) أجد معامل الدالة g:

نعلم أن: ليكن a معامل الدالة الخطية g.

إذن: $a = \frac{g(x)}{x}$ و $x \neq 0$.

ولدينا: $g(-1) = 2$

إذن: $a = \frac{g(-1)}{-1} = \frac{2}{-1}$

$\boxed{a = -2}$

تمرين 2

1) أحدد منوال هذه المتسلسلة الاحصائية

• الميزة التي تتوفر على أكبر حصيص هي الميزة ذات القيمة 7.
إذن منوال هذه المتسلسلة هي الميزة 7.

2) أحسب معدل مبيعات هذه الشركة في اليوم:

ليكن m معدل مبيعات هذه الشركة في اليوم والذي يمثل المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الاحصائية.

إذن: $m = \frac{0 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 8 + 7 \times 10 + 10 \times 3}{3 + 10 + 8 + 6 + 4}$

$m = \frac{0 + 24 + 40 + 70 + 30}{31}$

$m = \frac{164}{31} = \boxed{5,29}$

3) أكون جدول الحصيصات المتراكمة:

الميزة (المبيعات)	0	4	5	7	10
الأيام (الحصيص)	4	6	8	10	3
الحصيص المتراكم	4	10	18	28	31

3) أحدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الاحصائية:

أصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر أو يساوي $\frac{31}{2}$ أي 15,5 هي 5.

إذن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي الميزة ذات القيمة 5.

تمرين 3

1) أحل جبريا النظمة: $\begin{cases} x + y = 14 \\ 5x + 3y = 50 \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} x + y = 14 \\ 5x + 3y = 50 \end{cases}$ يعني: $\begin{cases} x = 14 - y \\ 5(14 - y) + 3y = 50 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} x = 14 - y \\ 70 - 5y + 3y = 50 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} x = 14 - y \\ -2y = -20 \end{cases}$ يعني: $\begin{cases} x = 14 - y \\ y = 10 \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} x = 14 - 10 = 4 \\ y = 10 \end{cases}$

ومنه فإن الزوج $(4;10)$ هو حل هذه النظمة.

2) أختار المجهولين:

ليكن x عدد قنينات ذات السعة $0,5\ell$ للواحدة.

و: y عدد قنينات ذات السعة $0,3\ell$ للواحدة.

★ أصوغ النظمة:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 0,5x + 0,3y = 5 \end{cases}$$

★ أحل النظمة:

النظمة $\begin{cases} x + y = 14 \\ 0,5x + 0,3y = 5 \end{cases}$ تكافئ: $\begin{cases} x + y = 14 \\ 5x + 3y = 50 \end{cases}$

وحسب السؤال السابق فإن حل هذه النظمة هو الزوج $(4;10)$

إذن: $x = 4$ و $y=10$.

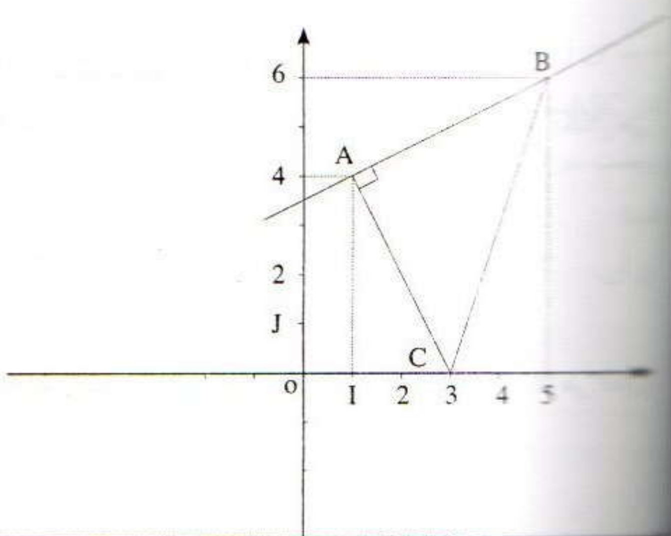
★ الرجوع إلى المسألة المطروحة:

- عدد القنينات من الصنف الأول هو: 4
- وعدد القنينات من الصنف الثاني هو: 10

والتحقق: $\begin{cases} 4 + 10 = 14 \\ 4 \times 0,5 + 0,3 \times 10 = 3 + 2 = 5 \end{cases}$

تمرين 4

1) أمثل النقط A و B و C:



2) أ) ✱ أحدد إحداثيتي $\overrightarrow{AB}$

نعلم أن: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

أي أن: $\overrightarrow{AB}(5 - 1; 6 - 4)$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{AB}(4;2)}$

✱ أبين أن: $AB = 2\sqrt{5}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(4;2)$ إذن: $AB = \sqrt{4^2 + 2^2}$

$AB = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5}$

ومنه: $\boxed{AB = 2\sqrt{5}}$

ب) أحدد إحداثيتي E منتصف $[AB]$

E منتصف $[AB]$.

يعني أن: $x_E = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ و $y_E = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

أي أن: $x_E = \dfrac{1 + 5}{2}$ و $y_E = \dfrac{4 + 6}{2}$

إذن: $x_E = 3$ و $y_E = 5$

ومنه فإن زوج إحداثيتي E هو: $(3;5)$.

3) أ) أبين أن $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$ هي المعادلة المختصرة للمستقيم (AB):

ليكي تكون المعادلة $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$ هي المعادلة المختصرة لـ(AB)

يكفي أن يحقق زوج إحداثيتي كل من النقطتين هذه المعادلة.

لدينا: $\dfrac{1}{2}x_A + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 = y_A$

و: $\dfrac{1}{2}x_B + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2} \times 5 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 = y_B$

إذن: زوج إحداثيتي كل من النقطتين يحقق المعادلة: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

وبما أن: $A \neq B$ فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي:

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

ب) أثبت: $(AB) \perp (\Delta)$

لدينا: $(\Delta): y = -2x + 11$

و: $(AB): y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$

- ميل المستقيم (Δ) هو -2.
- ميل المستقيم (D) هو: $\dfrac{1}{2}$

ولدينا: $-2 \times \dfrac{1}{2} = -1$

إذن: $\boxed{(\Delta) \perp (AB)}$

ج) أكتب المعادلة المختصرة لـ (d) :

أضع: $(d): y = ax + b$

★ أحدد العدد a:

بما أن: $(\Delta)//(d)$

فإن: (d) و (Δ) لهما نفس الميل.

أي أن: $\boxed{a = -2}$.

ومنه فإن $(d): y = -2x + b$

★ أحدد العدد b:

النقطة A تنتمي إلى (d)

إذن: زوج إحداثيتي A يحقق معادلة (d). أي: $y_A = -2x_A + b$

يعني: $4 = -2 \times 1 + b$

يعني: $4 = -2 + b$

يعني: $b = 2 + 4$

$\boxed{b = 6}$

ومنه فإن: $\boxed{(d): y = -2x + 6}$

3) أ) أبين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A.

• أبين أن النقطة C تنتمي إلى (d).

لدينا: $-2x_C + 6 = -2 \times 3 + 6 = 0$

و: $y_C = 0$

إذن: $y_C = -2x_C + 6$

أي أن: زوج إحداثيتي النقطة C يحقق معادلة (d).

ومنه فإن C تنتمي إلى (d).

• لدينا حسب السؤال السابق: $(AB) \perp (\Delta)$

و: $(d) \parallel (\Delta)$

إذن: $(d) \perp (AB)$

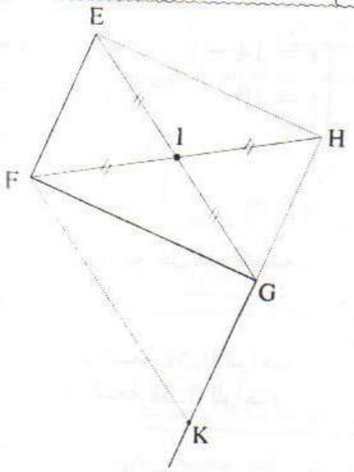
وبما أن النقطتين A و C تنتميان إلى (d).

فإن: $(AC) \perp (AB)$

وبالتالي فإن ABC مثلث قائم الزاوية في A.

تمرين 5

1) أ) الشكل:



ب) أبين أن G هي صورة H بالإزاحة t:

✱ لدينا: H مماثلة F بالنسبة للنقطة I.

إذن: I منتصف $[FH]$.

✱ في الرباعي $EFGH$ لدينا: القطران $[FH]$ و $[EG]$ لهما نفس المنتصف I.

إذن: $EFGH$ متوازي الأضلاع ومنه فإن: $\boxed{\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}}$ ①

وبالتالي فإن G هي صورة H بالإزاحة t التي تحول E إلى F.

ج) أستنتج أن G هي منتصف $[HK]$:

• لدينا: k هي صورة G بالإزاحة t

إذن: $\boxed{\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{EF}}$ ②

• من العلاقتين ① و ② أستنتج أن: $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$

وبالتالي فإن G منتصف [HK].

2) أحدد صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ بالإزاحة t:

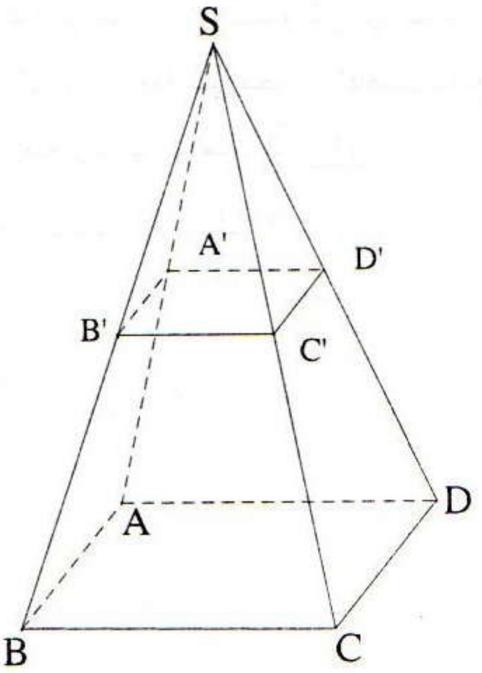
✱ بما أن G منتصف [HK]. فإن الدائرة $(\mathcal{C})$ التي قطرها [HK] هي الدائرة التي مركزها G وشعاعها HG.

✱ نعلم أن: صورة النقطة G بالإزاحة t هي النقطة K.

وصورة النقطة H بالإزاحة t هي النقطة G.

ومنه فإن صورة الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها G وشعاعها HG هي الدائرة التي مركزها K وشعاعها GK بالإزاحة t.

تمرين 6

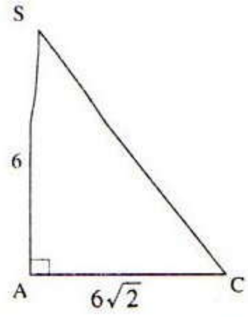


أ) بيّن أن المستقيم $(AC)\perp(SA)$

لدينا حسب المعطيات: $(SA)\perp(ABC)$

بما أن: (AC) يوجد ضمن المستوى (ABC)، فإن: $(AC)\perp(SA)$

ب) أحسب SC:



• بما أن $(AC)\perp(SA)$.

فإن ASC مثلث قائم الزاوية في A.

وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة.

لدينا: $SC^2 = SA^2 + AC^2$

أي أن: $SC^2 = 6^2 + (6\sqrt{2})^2$

$SC^2 = 36 + 72$

$SC^2 = 108$

$SC = \sqrt{108}$

$\boxed{SC = 6\sqrt{3}}$

2) أحسب حجم الهرم SABCD

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times SA \times S_{ABCD}$$

ولدينا : SA=6cm

و: $S_{ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36cm^2$

إذن: $V_{SABCD} = \frac{1}{3} \times 6 \times 36$

$$\boxed{V_{SABCD} = 72cm^3}$$

3) أحسب حجم المجسم $ABCDA'B'C'D'$

• الهرم $S'A'B'C'D'$ هو تصغير للهرم SABCD ، نسبة تصغيره هي $\frac{1}{2}$

إذن: $V_{SA'B'C'D'} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 V_{SABCD}$

أي أن: $V_{SA'B'C'D'} = \frac{1}{8} \times 72 = 9cm^3$

• ومنه فإن: $V_{ABCDA'B'C'D'} = V_{SABCD} - V_{SA'B'C'D'}$

$V_{ABCDA'B'C'D'} = 72 - 9$

إذن: $\boxed{V_{ABCDA'B'C'D'} = 63cm^3}$

الموضوع رقم 5

للجهة الشرقية - وجدة - دورة يونيو 2007

التمرين الأول

الجزء الأول:

1) لكي يكون زوجا حلا لنظمة يجب أن يحقق هذا الزوج جميع معادلات النظمة ولدينا: $-1+1=0\neq 3$
إذن الزوج (1;1) لا يحقق المعادلة $-x+y=3$
(المعادلة الأولى للنظمة (S)).
ومنه الزوج (1;1) ليس حلا للنظمة (S).

2) أحل النظمة (S):

$\begin{cases}-x+y=3\\-3x+y=-1\end{cases}$ يعني $\begin{cases}x-y=-3\\-3x+y=-1\end{cases}$

بعد جمع طرفي المعادلتين طرف بطرف أحصل على:

$-2x=-4$ ومنه $x=\frac{-4}{-2}$ أي : $\boxed{x=2}$

أعوض x بالعدد 2 في المعادلة $-x+y=3$ فأحصل على المعادلة $-2+y=3$ ومنه: $y=3+2$ أي $\boxed{y=5}$

بعد التحقق أستنتج أن الزوج (2;5) هو حل النظمة (S).

الجزء الثاني:

$f(x)=\frac{1}{3}x$ (1

أ- أحدد صورة العدد 6 بالدالة f

صورة 6 بالدالة f يعني حساب $f(6)$

$f(6)=\frac{1}{3}\times 6$ يعني: $f(6)=2$

إذن 2 هو صورة 6 بالدالة f.

ب- أحدد العدد الذي صورته بالدالة f هي 1.

تحديد العدد الذي صورته بالدالة f هي 1 يعني تحديد قيمة x حيث $f(x)=1$

$f(x)=1$ يعني $\frac{1}{3}x=1$ ومنه $x=3$

إذن العدد الذي صورته بالدالة f هي 1 هو العدد 3.

ج) أحدد معامل الدالة f

$f(x)=\frac{1}{3}x$ إذن: معامل الدالة f هو العدد $\frac{1}{3}$:

2) أ- أحدد مبيانيا $g(-3)$ و $g(-1)$.

المستقيم الموازي لمحور الأراتيب والمار من النقطة التي أفصولها (3-) والواقعة على محور الأفاصيل يقطع المستقيم (D) في نقطة أرتوبها (1-) ومنه $\boxed{g(-3)=-1}$

المستقيم الموازي لمحور الإراتيب والمار من النقطة التي أفصولها (1-) والواقعة على محور الأفاصيل يقطع المستقيم (D) في نقطة أرتوبها 3 ومنه: $\boxed{g(-1)=3}$.

ب- أبين أن: $g(x)=2x+5$

نضع: $g(x)=ax+b$

•

$a=\frac{g(-3)-g(-1)}{(-3)-(-1)}=\frac{-1-3}{-3+1}=\frac{-4}{-2}=\boxed{2}$

إذن: $g(x)=2x+b$

• $g(-3)=-1$ و $g(-3)=2\times(-3)+b$

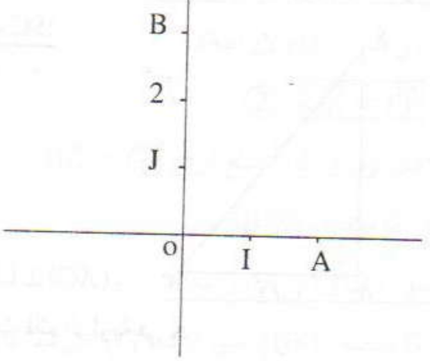
إذن: $=-6+b=-1$

أي أن: $b=-1+6=\boxed{5}$

ومنه: $\boxed{g(x)=2x+5}$

التمرين الثاني

1) أ- أنشئ النقطتين $A(0;2)$ و $B(0;3)$ في معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.



ب- أحسب المسافة AB

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$AB=\sqrt{(0-2)^2+(3-0)^2}$

$AB=\sqrt{4+9}$

$\boxed{AB=\sqrt{13}}$

2) أ- أحدد بدون أي حساب المسافة $A'B'$ معللا جوابي

لدينا: $O'(3;3)$

ولدينا: A′ و B′ هما صورتي A و B على التوالي بالإزاحة التي تحول O إلى O′ ونعلم أن الإزاحة تحافظ على المسافة.

ومنه: $A'B' = AB = \sqrt{13}$

ب- أحدد قياس الزاوية $A'\hat{O}'B'$ معللا جوابي

لدينا: $(O;I;J)$ معلم متعامد.

إن $(OI)\perp(OJ)$ وبما أن $y_A = 0$ فإن A تنتمي إلى (OI)

وبما أن $x_B = 0$ فإن B تنتمي إلى (OJ).

وبالتالي فإن $A\hat{O}B = 90°$.

ولدينا: O′ و A′ و B′ هي صور O و A و Bعلى التوالي بالإزاحة التي تحول O إلى O′.

إذن: $O'\hat{A}'B$ هي صورة $A\hat{O}B$ بنفس الإزاحة.

ومنه: $\widehat{O'A'B'} = \widehat{OAB} = 90°$ (الإزاحة تحافظ على قياس الزوايا).

ج) أحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{A'B'}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A;y_B - y_A)$

يعني: $\overrightarrow{AB}(2-0;3-0)$ يعني: $\overrightarrow{AB}(-2;3)$

ولدينا: A′ و B′ هما صورتي A و B بالإزاحة التي تحول O إلى O′. إذن: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

وبالتالي: $\overrightarrow{A'B'}(-2;3)$.

التمرين الثالث

1) أتحقق هل النقطة $E(2;0)$ تنتمي إلى (D_1)؟

لكي تنتمي E إلى المستقيم (D_1) يجب أن تحقق إحداثيات E معادلة (D_1).

لدينا: $y = 2x - 4$ هي معادلة (D_1).

و: $2x_E - 4 = 2\times 2 - 4 = 4 - 4 = 0 = y_E$

إذن: النقطة E تنتمي إلى المستقيم (D_1).

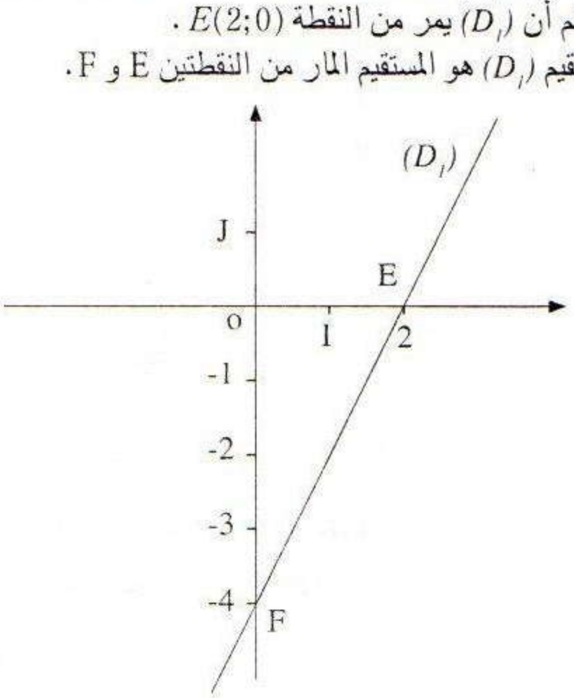
ب- أنشئ المستقيم (D_1) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$:

إذا عوضنا العدد x بالعدد o في معادلة (D_1) فإننا نحصل على $y = -4$.

إذن المستقيم (D_1) يمر من النقطة $F(0;-4)$

ونعلم أن (D_1) يمر من النقطة $E(2;0)$.

المستقيم (D_1) هو المستقيم المار من النقطتين E و F.



2) أ- أبين أن المستقيمين (D_2) و (D_3) متعامدان:

لدينا: $y = 3x + 1$ هي معادلة (D_2) إذن 3 هو ميل المستقيم (D_2).

ولدينا: $y = -\frac{1}{3}x + 2$ هي معادلة (D_3) إذن $-\frac{1}{3}$ هو ميل المستقيم.

وبما أن $3\times\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$ فإن (D_2) و (D_3) متعامدان.

ب- أتحقق هل المستقيمان (D_1) و (D_4) متوازيان معللا جوابي؟

لدينا: $(D_1): y = 2x - 4$ إذن 2 هو ميل (D_1)

و: $(D_4): y = -2x + 4$ إذن 2- هو ميل (D_4).

بما أن $2\neq-2$ فإن (D_1) و (D_4) غير متوازيين.

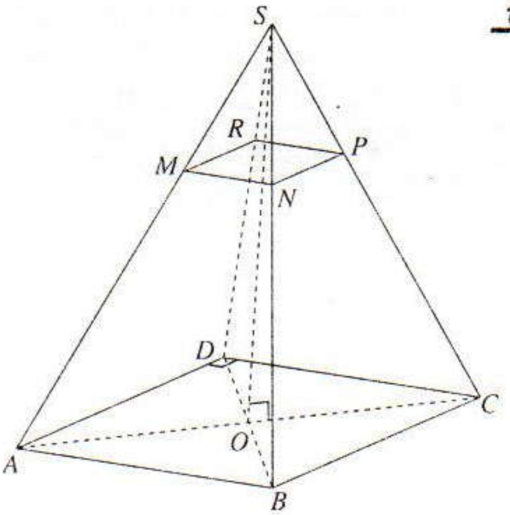
3) أحدد ماذا يمثل هندسيا حل النظمة $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$؟

بما أن $y = -2x + 4$ هي معادلة المستقيم (D_4).

و: $y = -3x - 1$ هي معادلة المستقيم (D_3).

إذن حل النظمة $\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = -3x - 1 \end{cases}$ هو زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (D_3) و (D_4)

التمرين الرابع



1) أ- أحسب حجم الهرم $SABCD$:

ليكن V هو حجم الهرم $SABCD$.

إذن: $V = \frac{1}{3}.\ \ell_{ABCD} \times h$

حسب ℓ_{ABCD} . مساحة القاعدة $ABCD$ و h ارتفاع الهرم.

بما أن ABCD مربع فإن $\ell_{ABCD} = BC^2 = 4^2 = 16$.

ولدينا: $h = SO = 6$

إذن: $V = \frac{1}{3} \times 6 \times 16$ ومنه: $\boxed{V = 32}$.

ب- أتحقق من أن $AC = 4\sqrt{2}$

ABCD مربع إذن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في B.

وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

ولدينا: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ و $AB = BC = 4$.

إذن: $AC^2 = 4^2 + 4^2$ يعني: $AC^2 = 32$

ومنه: $AC = \sqrt{32}$ أي: $AC = \sqrt{16 \times 2}$

وبالتالي فإن: $\boxed{AC = 4\sqrt{2}}$

2) أ- أبين أن $MN = \frac{1}{3}AB$

لدينا المستوى (NPR) مواز للمستوى (BCD) ومار من النقطة M.

إذن في المثلث SAB لدينا:

$M \in (AB)$ و $N \in (AC)$ و $(MN)//(AB)$

إذن حسب خاصية طاليس المباشرة $\boxed{\frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB}}$ (1)

وبما أن $SM = \frac{1}{3}.SA$ فإن $\boxed{\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}}$ (2)

ومن العلاقتين (1) و (2) أستنتج أن: $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$

وبالتالي فإن: $\boxed{MN = \frac{1}{3}.AB}$

ب- أستنتج حجم الهرم $SMNPR$

بما أن الهرم $SMNPR$ هو نتيجة قطع الهرم $SABCD$ لمستوى يوازي القاعدة.

فإن الهرم $SMNPR$ هو تصغير للهرم $SABCD$.

والضلع $[MN]$ هو تصغير للضلع $[AB]$.

وبما أن: $MN = \frac{1}{3}.AB$

فإن نسبة التصغير $\frac{1}{3}$.

ليكن 'V هو حجم الهرم $SMNPR$

إذن: $V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V$

يعني: $V' = \frac{1}{27} \times 32$

وبالتالي: $\boxed{V' = \frac{32}{27}}$

التمرين الخامس

1) أتمم الجدول:

بعد قراءة المبيان أحصل على الجدول التالي:

الأعمار	10	12	14	15
عدد المنخرطين	4	5	5	6

2) أحسب العدد الإجمالي للمنخرطين في هذا النادي:

الحصيص الإجمالي للمنخرطين في النادي هو:

$$N = 6 + 5 + 5 + 4 = 20$$

إذن العدد الإجمالي للمنخرطين هو: $N = 20$

3) أتحقق أن متوسط العمر هو 13 (المعدل الحسابي)

لتكن m هو المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة:

$$m = \frac{4 \times 10 + 5 \times 12 + 5 \times 14 + 6 \times 15}{20} = \frac{260}{20} = 13$$

4) أ- أبين أن $4x + 260 = 324$

بعد تسجيل 4 منخرطين جدد سن كل واحد منهم x ازداد متوسط العمر بنصف وسيصبح الحصيص الإجمالي هو:

$20 + 4 = 24$ إذن: $\frac{260 + 4x}{24} = 13{,}5$

ومنه: $260 + 4x = 24 \times 13.5$

أي: $4x + 260 = 324$

ب- أحدد سن المنخرطين الجدد

لدينا: $4x + 260 = 324$ حيث x هو سن كل منخرط جديد.

إذن: $4x + 260 = 324$

يعني: $4x = 324 - 260$

يعني: $x = \frac{64}{4}$ أي: $\boxed{x = 16}$

وبالتالي فإن سن كل من المنخرطين الجدد هو: 16 سنة.

الموضوع رقم 6

جهة تازة-الحسيمة-تاونات - دورة يونيو 2007

التمرين الأول

1) أحل المعادلتين:

أ- $4x + 16 = 0$ يعني: $4x = -16$

يعني: $x = -\frac{16}{4}$ ومنه: $\boxed{x = -4}$

إذن العدد 4- هو حل المعادلة $4x + 16 = 0$

ب- $7x^2 - 21x = 0$ يعني: $x(7x - 21) = 0$

يعني: $x = 0$ أو $7x - 21 = 0$

يعني: $x = 0$ أو $7x = 21$

يعني: $x = 0$ أو $x = \frac{21}{7}$

يعني: $x = 0$ أو $x = 3$

العددان 0 و 3 هما حلي المعادلة $7x^2 - 21x = 0$

2) أحل المتراجحة ثم أمثل الحلول على مستقيم مدرج

$4x + 9 \leqslant 2x + 15$ يعني: $4x - 2x \leqslant 15 - 9$

يعني: $2x \leqslant 6$ يعني: $x \leqslant \frac{6}{2}$ ومنه: $\boxed{x \leqslant 3}$

إذن جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي 3 هي حلول لهذه المتراجحة.

التمثيل على مستقيم مدرج

الجزء المخشش هو التمثيل المبياني لحلول المتراجحة.

3) أحل جبريا النظمتين

أ- $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

أستعمل طريقة التأليفة الخطية فأحصل على:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$$

وبعد جمع طرفي المعادلتين طرف بطرف أحصل على:

$10x = 10$ يعني: $x = \frac{10}{10}$ ومنه: $\boxed{x = 1}$

أعوض x بالعدد 1 في المعادلة $2x + y = 4$ فأحصل على:

$2 + y = 4$ ومنه $y = 4 - 2$ أي: $\boxed{y = 2}$

بعد التحقق أستنتج أن: الزوج (1;2) هو حل النظمة.

ب- $\begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

لدينا: $x = 2y + 1$ و $2x + 3y = 2$

أستعمل طريقة التعويض فأحصل على:

$2(2y + 1) + 3y = 2$

يعني: $4y + 2 + 3y = 2$

يعني: $7y = 2 - 2$

يعني: $7y = 0$ ومنه: $\boxed{y = 0}$

أعوض y بالعدد 0 في المتساوية $x = 2y + 1$

فأحصل على: $\boxed{x = 1}$

بعد التحقق أستنتج أن الزوج (1;0) هو حل هذه النظمة.

التمرين الثاني

1) أحدد معامل الدالة الخطية f:

f دالة خطية إذن: $f(x) = ax$

وليكن a هو معامل الدالة f.

إذن: $a = \frac{f(x)}{x}$ مع $(x \neq 0)$

وبما أن: $f(3) = \frac{3}{2}$

فإن: $a = \frac{f(3)}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{1}{\cancel{3}}$ ومنه: $a = \frac{1}{2}$

إذن: $f(x) = \frac{1}{2}x$

وبالتالي $\frac{1}{2}$ هو معامل الدالة الخطية f.

2) أحسب $g(0)$; $g(-2)$

$g(x) = 3x + 5$

$g(0) = 3 \times 0 + 5 = 0 + 5 = 5$ إذن: $\boxed{g(0) = 5}$

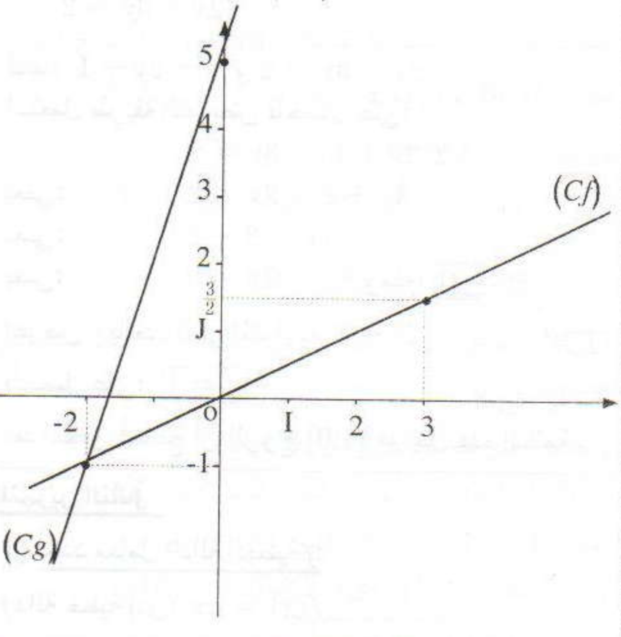
$g(-2) = 3 \times (-2) + 5 = -6 + 5 = -1$

إذن: $\boxed{g(-2) = -1}$

3) أرسم التمثيلين المبيانيين للدالتين f و g في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O;I;J)$.

• التمثل المبياني للدالة الخطية f هو المستقيم المار من أصل المعلم o ومن النقطة ذات الإحداثيات $\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

• التمثيل المبياني للدالة التآلفية g هو المستقيم المار من النقطتين ذات الإحداثيات (0;5) و (1-;2-).



التمرين الثالث

1) أنقل الجدول وأتممه:

قيم الميزة	2	5	7	10	15	20
الحصيصات	5	3	5	7	4	1

2) أحدد منوال المتسلسلة الإحصائية

قيم الميزة المرتبطة بأكبر حصيص هي 10

إذن 10 هو منوال هذه المتسلسة الإحصائية

3) أ- أحسب الحصيص الإجمالي

الحصيص الإجمالي هو مجموع جميع الحصيصات.

$N = 5 + 3 + 5 + 7 + 4 + 1 = 25$

إذن: 25 هو الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة الإحصائية

ب- أحسب المعدل الحسابي:

$$m = \frac{5\times 2 + 3\times 5 + 5\times 7 + 7\times 10 + 4\times 15 + 1\times 20}{25}$$

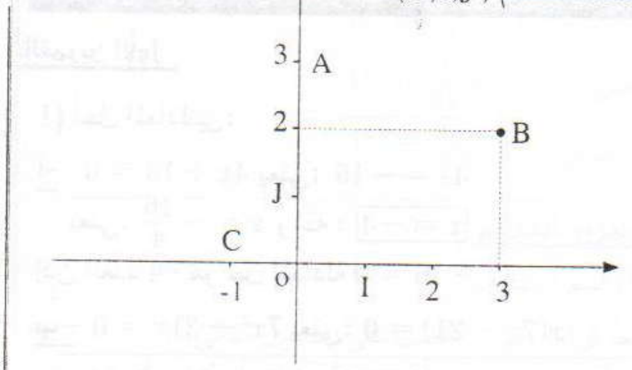
يعني: $m = \frac{210}{25}$ ومنه: $m = 8{,}4$

إذن: 8,4 هو المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

التمرين الرابع

$A(0;3)$ و $B(3;2)$ و $C(-1;0)$

1) أمثل النقط A و B و C في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.



2) أحدد إحداثيتي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

يعني $\overrightarrow{AB}(3-0; 2-3)$ إذن: $\boxed{\overrightarrow{AB}(3;-1)}$

و $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A)$

يعني: $\overrightarrow{AC}(-1-0; 0-3)$ إذن: $\boxed{\overrightarrow{AC}(-1;-3)}$

3) أبين أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-3;-1)$ إذن: $AB = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$

يعني: $AB = \sqrt{9+1}$ ومنه: $\boxed{AB = \sqrt{10}}$

ولدينا: $\overrightarrow{AC}(-1;-3)$

إذن: $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$

يعني: $AC = \sqrt{1+9}$ ومنه: $\boxed{AC = \sqrt{10}}$

إذن: $AB = AC$.

وبالتالي: المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A.

4) أبين أن $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ هي الصيغة المختصرة لمعادلة المستقيم (BC):

لدينا: $y_B = 2$ و $\frac{1}{2}x_B + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times 3 + \frac{1}{2} = 2$

إذن: $y_B = \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{2}$ ومنه فإن B تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ولدينا: $y_C = 0$ و $\frac{1}{2}x_C + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\times(-1) + \frac{1}{2} = 0$

إذن: $y_C = \frac{1}{2}x_C + \frac{1}{2}$ ومنه فإن C تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. وبما أن $B \neq C$

فإن المعادلة المختصرة لـ (BC) هي: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

5) أحدد معادلة المستقيم (Δ)

لدينا معادلة (BC) هي: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ونعلم أنه إذا كان $(\Delta) \perp (BC)$ فإن جداء ميليهما يساوي -1

إذن: $\frac{1}{2}\times m = -1$ ومنه: $\boxed{m = -2}$

إذن معادلة (Δ) تكتب: $y = -2x + p$

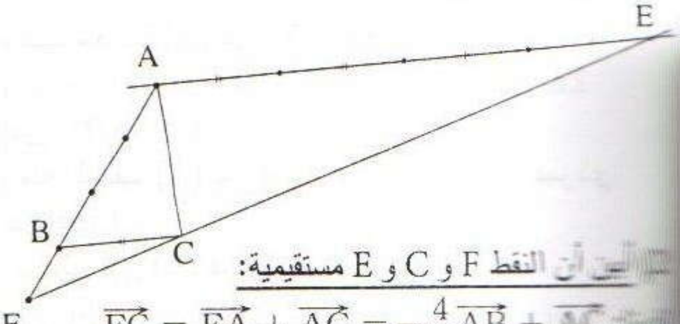
وبما أن (Δ) يمر من A فإن: $y_A = -2x_A + p$

ومنه: $3 = (-2)\times 0 + p$ وبالتالي: $p = 3$

إذن: $y = -2x + 3$ هي معادلة المستقيم (Δ).

التمرين الخامس

1) أنشئ النقطتين E و F بحيث: $\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.



أبين أن النقط F و C و E مستقيمية:

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 4(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$$

$$(1)\quad \boxed{\overrightarrow{FE} = -\frac{16}{3}\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}$$

وبما أن $\overrightarrow{FC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

فإن: $\boxed{4\overrightarrow{FC} = -\frac{16}{3}\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}\quad(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\overrightarrow{FE} = 4\overrightarrow{FC}$

إذن النقط F و E و C مستقيمية.

التمرين السادس

1) أبين أن: $AI = \sqrt{13}\,cm$:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات. إذن $ABCD$ مستطيل ومنه $(AB)\perp(BC)$.

ولدينا I تنتمي إلى (BC) فإن $(AB)\perp(BI)$.

وبالتالي فإن المثلث ABI قائم الزاوية في B.

وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة.

يعني: $AI^2 = AB^2 + BI^2$ يعني: $AI^2 = 2^2 + 3^2$

يعني: $AI^2 = 4 + 9 = 13$ ومنه: $\boxed{AI = \sqrt{13}\,cm}$

2) أبين أن: $(AE)\perp(AI)$

لدينا $ADHE$ و $ABFE$ مستطيلان ومنه: $(AE)\perp(AD)$ و $(AE)\perp(AB)$.

إذن المستقيم (AE) عمودي على المستقيمين (AB) و (AD) المتقاطعين في A. وبما أن: (AB) و (AD) يقعان في المستوى $(ABCD)$ فإن (AE) عمودي على المستوى $(ABCD)$ في النقطة A.

وبما أن المستقيم (AI) يقع ضمن المستوى $(ABCD)$.

فإن: $(AE)\perp(AI)$.

3) أحسب V حجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$

حجم متوازي مستطيلات قائم يساوي جداء أبعاده.

يعني: $V = AB\times BC\times AE$ يعني: $V = 2\times 4\times 3$

ومنه: $\boxed{V = 24cm^3}$

4) أحسب V' حجم $A'B'C'D'E'F'G'H'$ تكبير متوازي المستطيلات القائم $ABCDEFGH$

V' حجم تكبير متوازي المستطيلات الذي حجمه V بنسبة 2.

إذن:

$$V' = 2^3\times V$$

$$V' = 8\times 24$$

$$\boxed{V' = 192cm^3}$$

الموضوع رقم 7

جهة الشاوية ورديغة – دورة يونيو 2007

رين الأول

أحل المعادلة : $(x+2)(x-1)=0$

$(x+2)(x-1)=$

ني: $x+2=0$ أو $x-1=0$

ني: $x=-2$ أو $x=1$

ددان 2- و 1 هما حلي هذه المعادلة $(x+2)(x-1)=0$

) أحل المتراجحة $3x-7\geqslant x+1$

$3x-7\geqslant x+$ يعني: $3x-x\geqslant 1+7$

يعني: $2x\geqslant 8$

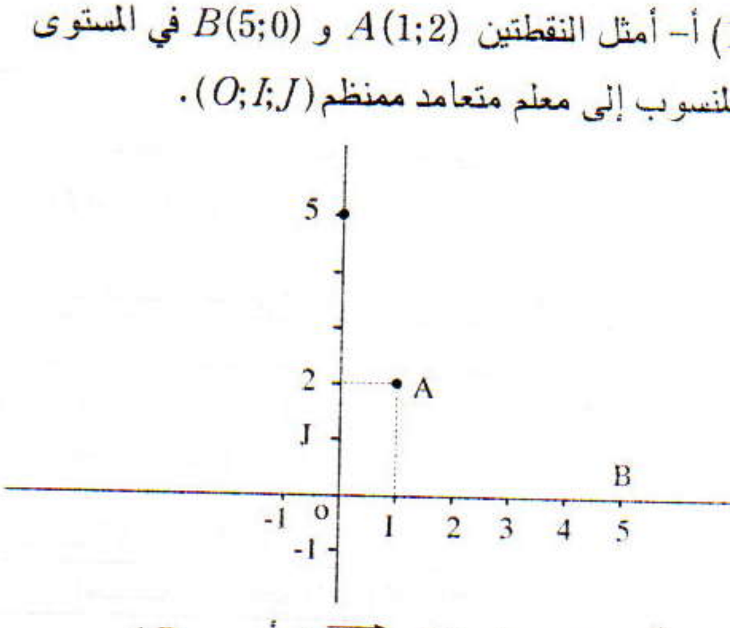
يعني: $x\geqslant \frac{8}{2}$

يعني: $x\geqslant 4$

ميع الأعداد الأكبر أو يساوي 4 هي حلول المتراجحة.

مرين الثاني :

) أ- أمثل النقطتين $A(1;2)$ و $B(5;0)$ في المستوى لمنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;I;J)$.



ب- أحدد زوج إحداثيتي $\overrightarrow{AB}$ ثم أحسب AB

• $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

يعني: $\overrightarrow{AB}(5-1;0-2)$ إذن: $\boxed{\overrightarrow{AB}(4;-2)}$

(4;-2) هو زوج إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

• لدينا: $\overrightarrow{AB}(4;-2)$ إذن: $AB=\sqrt{4^2+(-2)^2}$

يعني: $AB=\sqrt{20}$ ومنه: $\boxed{AB=2\sqrt{5}}$

2) ب- أبين أن المعامل الموجه للمستقيم (AB) هو $-\frac{1}{2}$

لتكن a هو المعامل الموجه للمستقيم (AB).

إذن: $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-2}{5-1}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

إذن: $-\frac{1}{2}$ هو المعامل الموجه للمستقيم (AB).

ب- أحدد زوج إحداثيتي النقطة k منتصف القطعة [AB]

k منتصف [AB].

يعني: $x_k=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$

و: $y_k=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+0}{2}=1$

إذن $\boxed{K(3;1)}$.

ج) أبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-5$ هو واسط القطعة [AB].

المعامل الموجه لـ (Δ) هو 2

والمعامل الموجه لـ (AB) هو $-\frac{1}{2}$

وبما أن: $2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

فإن (Δ) عمودي على (AB).

ولدينا معادلة (Δ) هي : $y=2x-5$

و $2x_k-5=2\times 3-5=6-5=1=y_k$

إذن: $k\in(AB)$

ومنه المستقيم (Δ) يمر من k منتصف $[AB]$ وعمودي على (AB).

وبالتالي فإن (Δ) هو واسط $[AB]$.

3) f دالة خطية حيث $f(2)=4$ و (L) تمثيلها المبياني.

أ- أحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) ثم أبين أن المستقيمين (Δ) و (L) متوازيان.

f دالة خطية إذن $f(x)$ تكتب على شكل $f(x)=mx$

وبما أن $f(2)=4$ فإن $2m=4$ يعني: $m=\frac{4}{2}$

ومنه $\boxed{m=2}$.

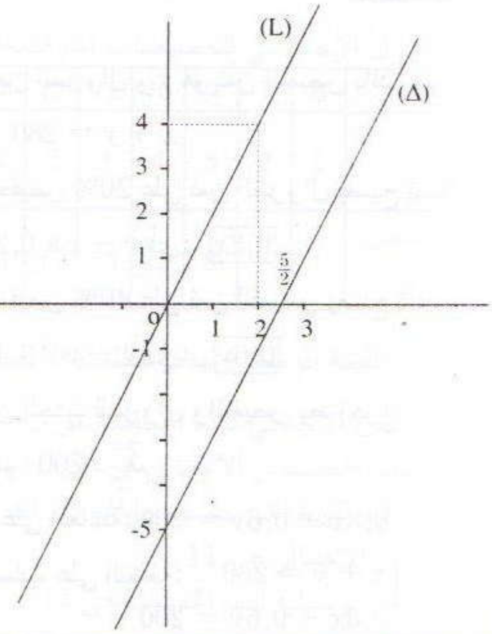
(L) التمثيل المبياني للدالة f هو المستقيم المار من أصل المعلم ومعادلته $y=2x$.

ولدينا: $y = 2x - 5$ هي معادلة (Δ).

إذن: (L) و (Δ) لهما نفس المعامل الموجه (الميل) 2

ومنه (L) و (Δ) متوازيان.

ب- أنشئ في نفس المعلم المستقيمين (L) و (Δ).

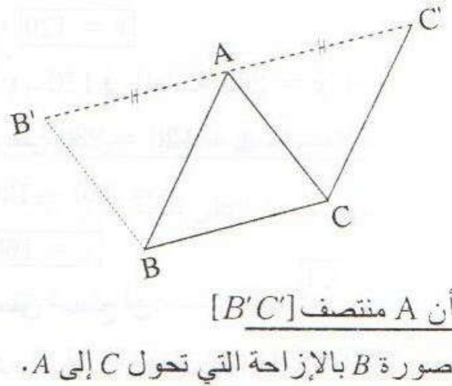


التمرين الثالث :

ABC مثلث

أ- أنشئ النقطة B' صورة B بالإزاحة التي تحول C إلى A

ب- أنشئ النقطة C' صورة C بالإزاحة التي تحول B إلى A.



2) أبين أن A منتصف $[B'C']$

لدينا: B' صورة B بالإزاحة التي تحول C إلى A.

إذن $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CA}$ يعني $ACBB'$ متوازي أضلاع

ومنه: $\boxed{\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{BC}}$ (1)

ولدينا C' صورة C بالإزاحة التي تحول B إلى A.

إذن: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BA}$ يعني: $CC'AB$ متوازي الأضلاع.

ومنه: $\boxed{\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC}}$ (2).

من العلاقتين (1) و(2) أستنتج أن: $\overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{AC'}$

وبالتالي فإن A منتصف $[B'C']$.

التمرين الرابع :

1) أحدد منوال المتسلسلة الإحصائية

أطول عمود في المبيان هو المرتبط بقيمة الميزة 1 (حادثة واحدة) والذي حصيصها هو 25 (وهو أكبر حصيص).

إذن: 1 هو منوال هذه المتسلسلة الإحصائية.

2) أتمم الجدول:

القيمة(عدد الحوادث)	1	2	3	4	5	6
الحصيص(عدد الأيام)	25	10	10	5	20	5

3) أحسُبُ معدل الحوادث اليومية خلال هذه الفترة (المعدل الحسابي)

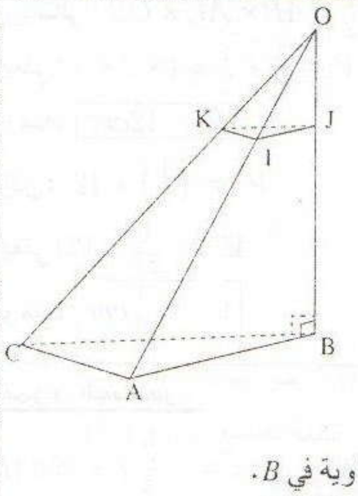
ليكن m هو معدل الحوادث اليومية خلال هذه الفترة (المعدل الحسابي).

$$m = \frac{25 \times 1 + 10 \times 2 + 10 \times 3 + 5 \times 4 + 20 \times 5 + 5 \times 6}{75}$$

إذن: $\boxed{m = \frac{225}{75} = 3}$

المعدل اليومي للحوادث خلال هذه الفترة هو 3.

التمرين الخامس :



1) أبين أن:

$OA = 2\sqrt{13}$

$[OB]$ ارتفاع الهرم

$OABC$ الذي رأسه O.

إذن: (OB) عمودي على

القاعدة (ABC) في B.

وبما أن (AB) ضمن (ABC)

فإن (OB) عمودي على

(AB) في B.

ومنه المثلث OAB قائم الزاوية في B.

وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة:

$OA^2 = OB^2 + AB^2$

ولدينا $OB = 6$ و $AB = 4$ إذن:

$OA^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52$

يعني: $OA = \sqrt{52}$ أي: $OA = \sqrt{4 \times 13}$

ومنه: $\boxed{OA = 2\sqrt{13}}$

2) أحدد نسبة تصغير الهرم OABC علما أن OJ = 2

بما أن $OIJK$ تصغير للهرم $OABC$ بنسبة k.

فإن الحرف $[OJ]$ هو تصغير للحرف $[OB]$ بنسبة k.

إذن: $OJ = k.OB$ ومنه: $k = \frac{OJ}{OB}$

ولدينا: $OJ = 2$ و $OB = 6$ إذن: $\boxed{k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

وبالتالي فإن نسبة التصغير هي: $\frac{1}{3}$

3) أحسب حجم الهرم $OIJK$

ليكن V حجم الهرم $OABC$ و V' حجم الهرم $OIJK$

بما أن $OIJK$ تصغير للهرم $OABC$ نسبة $\frac{1}{3}$

فإن: $\boxed{V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V}$

لنحسب V حجم الهرم $OABC$.

ولدينا: $V = \frac{1}{3} \; l_{ABC} \times h$

حيث $OB = h$ ارتفاع الهرم و l_{ABC} مساحة المثلث ABC

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في A.

فإن: $l_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC$

وبالتالي: $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times OB$

يعني: $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times 6$

ومنه: $\boxed{V = 12cm^3}$

إذن: $V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 12$

يعني: $V' = \frac{1}{27} \times 12$

ومنه: $\boxed{V' = \frac{4}{9} cm^3}$

التمرين السادس:

I) $h(x) = -x + 280$ و $g(x) = -\frac{3}{4}x + 250$

1) أحدد قيمة العدد x التي يكون من أجلها $h(x) = g(x)$

$h(x) = g(x)$ يعني: $-x + 280 = -\frac{3}{4}x + 250$

يعني: $-x + \frac{3}{4}x = 250 - 280$

يعني: $-\frac{1}{4}x = -30$ يعني: $x = (-30) \times (-4)$

ومنه: $\boxed{x = 120}$

2) أحسب $g(120)$

$$g(120) = -\frac{3}{4} \times 120 + 250$$
$$= -90 + 250$$
$$\boxed{g(120) = 160}$$

II) المسألة:

ليكن x هو ثمن السروال و y هو ثمن القميص بالدرهم

إذن: $x + y = 280$

بعد إجراء تخفيض 20% على ثمن السروال يصبح ثمنه الجديد هو: $x - x \times 0,2$ أي: $\boxed{0,8x}$

بعد إجراء تخفيض 40% على ثمن القميص يصبح ثمنه الجديد هو: $y - y \times 0,4$ أي: $\boxed{0,6y}$

وبما أن الثمن الجديد للسروال والقميص بعد إجراء التخفيضين هو: 200 درهم.

فإننا نحصل على المعادلة: $0,8x + 0,6y = 200$

وبالتالي نحصلب على النظمة: $\begin{cases} x + y = 280 \\ 0,8x + 0,6y = 200 \end{cases}$

وهذا يعني أن: $\begin{cases} -8x - 8y = -2240 \\ 8x + 6y = 2000 \end{cases}$

وبعد جمع طرفي المعادلتين طرف بطرف أحصل على المعادلة: $-2y = -240$ ومنه: $y = \frac{-200}{-2}$

وبالتالي: $\boxed{y = 120}$

أعوض y بـ 120 في المعادلة $x + y = 280$

فأحصل على $x + 120 = 280$

يعني: $x = 280 - 120$

يعني: $\boxed{x = 160}$

وبعد التحقق استنتج أن:

ثمن السروال قبل التخفيض هو: 160DH

وثمن القميص قبل التخفيض هو: 120DH

الموضوع رقم 8

جهة الدار البيضاء الكبرى – دورة يونيو 2008

التمرين الأول

1) الجدول الإحصائي للحصيصات المتراكمة

النقطة	6	7	9	10	11	12	14	17	20
عدد التلاميذ	1	2	5	4	3	2	4	3	1
الحصيص المتراكم	1	3	8	12	15	17	21	24	25

2) أحدد القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية

• الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة هو 25

إذن نصف الحصيص الإجمالي $\frac{15}{2}$ أي $12,5$.

وأصغر قيم الميزة التي حصيصها المتراكم أكبر من نصف الحصيص الإجمالي هي 11.

إذن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي 11

3) أبين أن معدل القسم هو: $m = 11,56$

$$m = \frac{6\times1+7\times2+9\times5+10\times4+11\times3+12\times2+14\times4+17\times3+20\times1}{25}$$

$$= \frac{6+14+45+40+33+24+56+51+20}{25}$$

$$= \frac{289}{25}$$

$$\boxed{m = 11,56}$$

4) أحدد عدد التلاميذ الذين حصلوا على نقطة تفوق m

عدد التلاميذ الذين حصلوا على نقطة تفوق $11,56$ هو:

$1+3+4+2$ أي: $\boxed{10}$

التمرين الثاني:

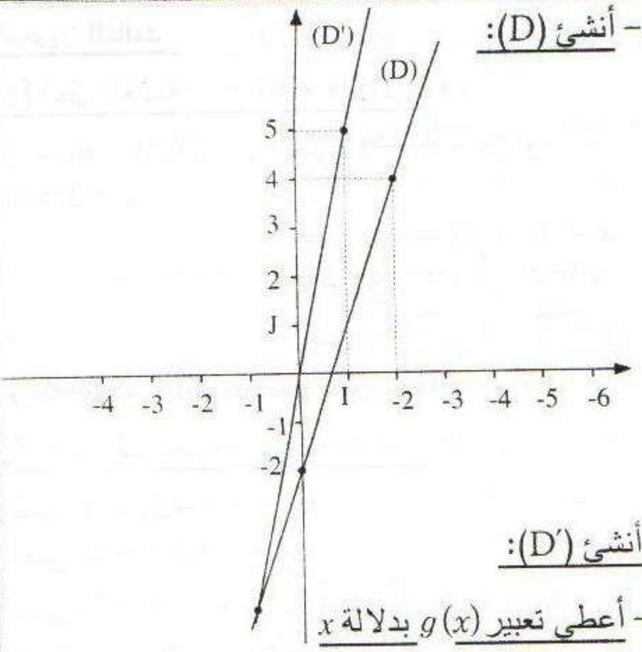
$$f(x) = 3x - 2$$

1) أحسب $f(0)$ و $f(2)$

$$f(0) = 3\times0-2 = 0-2 = -2$$

$$f(2) = 3\times2-2 = 6-2 = 4$$

ب- أنشئ (D):



2) أنشئ (D'):

ب- أعطي تعبير $g(x)$ بدلالة x

g دالة خطية إذن: $g(x) = ax$

$x \neq 0$ و $a = \frac{g(x)}{x}$

$$a = \frac{g(1)}{1} = \frac{5}{1} = 5$$

ومنه فإن: $\boxed{g(x) = 5x}$

3) حل المعادلة $f(x) = 5x$

يعني: $f(x) = 5x$ $3x-2 = 5x$

يعني: $3x - 5x = 2$

يعني: $-2x = 2$

يعني: $x = -\frac{2}{2}$

إذن: $\boxed{x = -1}$

إذن حل المعادلة $f(x) = 5x$ هو العدد 1-.

• استنتج زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (D) و (D')

لتكن K نقطة تقاطع (D) و (D')

إذن: $f(x_K) = y_K$ و $g(x_K) = y_K$

أي: $3x_K - 2 = y_K$ و $5x_K = y_K$

أي: $5x_K = 3x_K - 2$

$x_K = -1$

ومنه فإن: $y_K = 5\times(-1) = -5$

وبالتالي فإن: $\boxed{K(-1;-5)}$

التمرين الثالث

1) أحل المعادلة: $(x-2)(2x+6)=0$

$(x-2)(2x+6)=0$ يعني: $2x+6=0$ أو $x-2=0$

يعني: $2x=-6$ أو $x=2$

يعني: $x=-\frac{6}{2}$ أو $x=2$

يعني: $\boxed{x=-3}$ أو $\boxed{x=2}$

ومنه فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما: 3− و 2.

2) أحل المتراجحة $5x-3\geqslant -2x+4$

لدينا: $5x-3\geqslant -2x+4$

يعني: $5x+2x\geqslant 3+4$

يعني: $7x\geqslant 7$ يعني: $x\geqslant \frac{7}{7}$ إذن: $\boxed{x\geqslant 1}$

ومنه فإن الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 1 هي حلول هذه المتراجحة.

3) أ- أحل النظمة $\begin{cases} x+y=28 & (1) \\ x+2y=31 & (2) \end{cases}$

• أطبق طريقة التأليفة الخطية لإزالة المجهول x أضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 1 وأضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 1−

فأحصل على النظمة: $\begin{cases} x+y=28 \\ -x-2y=-34 \end{cases}$

ثم أجمع المعادلتين طرفا بطرف

$\cancel{x}+y-\cancel{x}-2y=28-34$

$-y=-6$

إذن: $\boxed{y=6}$

• أحسب قيمة x

لدينا: $x+y=28$ و $y=28$

إذن: $x+6=28$

$x=28-6$

$\boxed{x=22}$

وبالتالي فإن الزوج (22;6) هو حل هذه النظمة.

ب- أحل المسألة:

• اختيار المجهولين:

ليكن x عدد القطعة النقدية من فئة 5 دراهم

و y عدد القطعة النقدية من فئة 10 دراهم

• صياغة النظمة:

لدينا عدد القطع النقدية هو 28 . إذن: $x+y=28$

ونعلم أن القيمة الإجمالية الموفرة هي 170 درهما.

إذن: $5x+10y=170$

ومنه فإن الزوج $(x;y)$ هو حل النظمة $\begin{cases} x+y=28 \\ 5x+10y=170 \end{cases}$

• حل النظمة

لدينا: $\begin{cases} x+y=28 \\ 5x+10y=170 \end{cases}$

يعني أن: $\begin{cases} x+y=28 \\ 5(x+2y)=5\times 34 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} x+y=28 \\ x+2y=34 \end{cases}$

وحسب السؤال السابق فإن $x=22$ و $y=6$.

• الرجوع إلى المسألة المطروحة

– عدد القطع النقدية من فئة 5 دراهم هو 22

– عدد القطع النقدية من فئة 10 دراهم هو 6

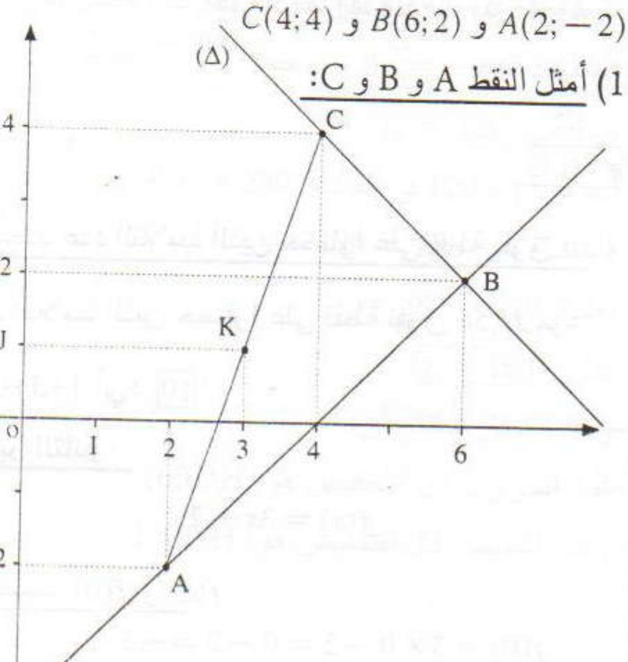
• التحقق:

$\begin{cases} 22+6=28 \\ 22+2\times 6=22+12=34 \end{cases}$

التمرين الرابع:

$A(2;-2)$ و $B(6;2)$ و $C(4;4)$

1) أمثل النقط A و B و C:



أ- أبين أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي: $y = x - 4$

أضع: $(AB): y = ax + b$

• بما أن $x_A \neq x_B$ فإن: $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$a = \dfrac{2+2}{6-2}$

$a = \dfrac{4}{4} = \boxed{1}$

إذن $(AB): y = 1x + b$

• ولدينا $A \in (AB)$ إذن: $y_A = x_A + b$

أي أن: $-2 = 2 + b$

$b = -2 - 2$

$\boxed{b = -4}$

وبالتالي فإن: $\boxed{(AB): y = x - 4}$

ب- • أكتب المعادلة المختصرة للمستقيم (Δ):

أضع: $(\Delta): y = mx + p$

• أحدد العدد m:

بما أن $(\Delta) \perp (AB)$ فإن جداء ميلي (Δ) و (AB) هو -1.

أي أن: $1 \times m = -1$

إذن: $\boxed{m = -1}$

ومنه فإن: $(\Delta): y = -x + p$

• أحدد العدد p:

$B \in (\Delta)$ و $B(6;2)$

إذن: زوج إحداثيتي B يحقق معادلة (Δ).

أي أن: $y_B = -x_B + p$

$2 = -6 + p$

$p = 2 + 6$

$\boxed{p = 8}$

وبالتالي فإن: $\boxed{(\Delta): y = -x + 8}$

• أتحقق أن C تنتمي إلى (Δ)

لدينا: $y_C = 4$ و $-x_C + 8 = -4 + 8 = 4$

إذن: $y_C = -x_C + 8$

ومنه فإن زوج إحداثيتي C يحقق معادلة (Δ).

إذن C تنتمي إلى (Δ).

3) أ- أتحقق أن (3;1) هو زوج إحداثيتي K منتصف $[AC]$.

K منتصف [AC]

إذن: $x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2}$ و $y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2}$

أي: $x_K = \dfrac{2+4}{2}$ و $y_K = \dfrac{-2+4}{2}$

أي: $x_K = \dfrac{6}{2} = 3$ و $y_K = \dfrac{2}{2} = 1$

ومنه فإن زوج إحداثيتي K منتصف $[AC]$ هو (3;1).

ب- أحسب المسافتين KA و KO

$$KA = \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2}$$
$$= \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{1+9}$$
$$\boxed{KA = \sqrt{10}}$$

$$KO = \sqrt{(x_O - x_K)^2 + (y_O - y_K)^2}$$
$$= \sqrt{(0-3)^2 + (0-1)^2}$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{9+1}$$
$$\boxed{KO = \sqrt{10}}$$

4) أبين أن النقط A و B و C و O تنتمي إلى نفس الدائرة

• لدينا حسب السؤال (2) ب- أن: (AB) عمودي على (Δ) في B و C ينتمي إلى (Δ).

إذن: $(AB) \perp (BC)$:

ومنه فإن المثلث ABC قائم الزاوية في B وبما أن K منتصف [AC].

فإن K متساوي المسافة عن رؤوسه.

أي أن: $\boxed{KA = KC = KB}$ (1)

• ولدينا: $KA = \sqrt{10}$ و $KO = \sqrt{10}$

إذن: $\boxed{KO = KA}$ (2)

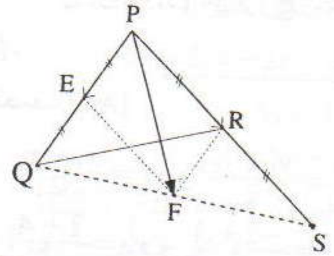
من (1) و (2) أستنتج:

$\boxed{KA = KO = KB = KC = \sqrt{10}}$

وبالتالي فإن النقط A و B و O و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها K وشعاعها $\sqrt{10}$.

التمرين الخامس:

1) الشكل:



$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PE}$ يعني: $EPRF$ متوازي الأضلاع .

2) أ- أنشئ S صورة R بالإزاحة t

S صورة R بالإزاحة t.

إذن: $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PR}$ (أنظر الشكل).

ب- أبين أن F صورة E بالإزاحة t

لدينا: $\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PE}$

إذن الرباعي PEFR متوازي الأضلاع .

أي أن: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{PR}$

ومنه فإن F صورة E بالإزاحة t ذات المتجهة $\overrightarrow{PR}$

3) أبين أن النقط F و Q و S مستقيمية:

• لدينا E منتصف $[PQ]$

إذن: $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{EQ}$

وبما أن: $PEFR$ متوازي الأضلاع ، فإن: $\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{RF}$

ومنه فإن $\overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{RF}$.

أي أن $EQFK$ متوازي الأضلاع .

وبالتالي: $(ER)//(QF)$ (a)

• لدينا: S صورة R بالإزاحة t

و F صورة E بالإزاحة t

إذن صورة المستقيم (ER) بالإزاحة t هو المستقيم (SF)

ومنه فإن $\boxed{(ER)//(SF)}$ (b)

من النتيجتين (a) و (b) أستنتج أن: $(QF)//(SF)$

إذن: $(QF) = (SF)$

وبالتالي فإن النقط S و F و Q نقط مستقيمية .

التمرين السادس:

1) أ- أبين المستقيم (CN) عمودي على المستوى (ABC)

$BCGF$ و $DCGH$ مستطيلان .

إذن: $(BC)\perp(CG)$ و $(DC)\perp(CG)$

أي أن: (CG) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (BC) و (DC) والموجودين ضمن (ABC).

ومنه فإن: $(CG)\perp(ABC)$

وبما أن: N تنتمي إلى (CG).

فإن: $\boxed{(NC)\perp(ABC)}$

ب- أبين أن حجم الهرم $NABC$ هو $81cm^3$

$$V_{NABC} = \frac{1}{3}h \times S_{ABC}$$

ولدينا: $h = NC = NG + GC = 2 + 4 = 6cm$

و: $S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{9 \times 9}{2} = 81cm^2$

$$V_{NABC} = \frac{1}{3} \times 6 \times \frac{81}{2} = \boxed{81cm^3}$$

2) أ- أتحقق أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$:

لتكن k نسبة تصغير الهرم $NABC$ إلى الهرم $NIJG$

إذن: $k = \frac{NG}{NC} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

ب- أحسب خحم الهرم $NIJG$

في تصغير تضرب الحجوم في مكعب نسبة التصغير.

أي أن: $V_{NIJG} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V_{NABC}$

$$V_{NIJG} = \frac{1}{81} \times 81 = \boxed{1cm^3}$$

الموضوع رقم 9

جهة الغرب الشراردة بني احسن - دورة يونيو 2008

التمرين الأول

أتمم الجدول الإحصائي:

الميزة (العمر)	12	13	14	15	16
الحصيص	5	6	1	8	4
الحصيص المتراكم	5	11	12	20	24

$\boxed{20 = 12 + 8}$ $\boxed{1 = 12 - 11}$

2) أحدد لهذه المتسلسلة الإحصائية:

أ- **المنوال:**

منوال متسلسلة هو الميزة التي تتوفر على أكبر حصيص
إذن الميزة التي تتوفر عى أكبر حصيص بالنسبة لهذه المتسلسلة هي الميزة ذات القيمة 15 (حصيصها 8).
ومنه فإن منوال هذه المتسلسلة هي: 15

ب- **القيمة الوسطية:**

نصف الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة هو: $\frac{24}{2}$ أي: 12
وأصغر قيم الميزة التي حصيصها أكبر من أو يساوي 12 هي الميزة ذات القيمة 14.
إذن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة هي الميزة ذات القيمة 14.

ج- **المعدل الحسابي:**

ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة الإحصائية.

إذن:

$$m = \frac{12 \times 5 + 13 \times 6 + 14 \times 1 + 15 \times 8 + 16 \times 4}{24}$$

$$m = \frac{336}{24}$$

$$\boxed{m = 14}$$

التمرين الثاني:

1) أ- أحل المعادلتين (E) و (E′)

• لدينا: $3x - 6 = 0$ يعني: $3x = 6$

أي: $x = \frac{6}{3} = \boxed{2}$

ومنه فإن العدد 2 هو الحل الوحيد للمعادلة (E).

• لدينا: $2x - 1 = 0$ يعني: $2x = 1$ إذن: $\boxed{x = \frac{1}{2}}$

ومنه فإن العدد $\frac{1}{2}$ هو الحل الوحيد للمعادلة (E').

ب- أستنتج حلول المعادلة (E'').

لدينا: $(3x - 6)^2 - (3x - 6)(x - 5) = 0$

يعني: $(3x - 6)[((3x - 6)) - (x - 5)] = 0$

يعني: $(3x - 6)(3x - 6 - x + 5) = 0$

يعني: $(3x - 6)(2x - 1) = 0$

إذن: $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ أو $\boxed{x = 2}$

ومنه فإن المعادلة (E″) تقبل حلين هما 2 و $\frac{1}{2}$.

2) أحل المتراجحة:

لدينا: $\frac{2x - 1}{3} + \frac{x - 7}{2} > \frac{x + 1}{6}$

يعني: $\frac{2(2x - 1)}{6} + \frac{3(x - 7)}{6} > \frac{x + 1}{6}$

يعني: $2(2x - 1) + 3(x - 7) > x + 1$

يعني: $4x - 2 + 3x - 21 > x + 1$

يعني: $4x + 3x - x > 1 + 2 + 21$

يعني: $6x > 24$

يعني: $x > \frac{24}{6}$

إذن: $\boxed{x > 4}$

ومنه فإن الأعداد الحقيقية الأكبر قطعا من 4 هي حلول هذه المتراجحة.

3) أ- أحدد الزوج $(a;b)$ الذي هو حل النظمة S

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 & (1) \\ 2x - y = 3 & (2) \end{cases}$$

• لإزالة المجهول y أضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 1 وأضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 2.

فأحصل على النظمة: $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

ثم أجمع المعادلتين المحصل عليها طرفا بطرف:

$$3x + \cancel{2y} + 4x - \cancel{2y} = 8 + 6$$

$$7x = 14$$

$$x = \frac{14}{7}$$

إذن: $\boxed{x = 2}$

• **أحسب قيمة** y:

لدينا: $3x + 2y = 8$ و $x = 2$

إذن: $3 \times 2 + 2y = 8$

$6 + 2y = 8$

$2y = 8 - 6$

$2y = 2$

إذن: $\boxed{y = 1}$

ومنه فإن الزوج $(2;1)$ هو الحل الوحيد للنظمة S.

ب- أبين أن $I(2;1)$ نقطة تقاطع (d_2) و (d_1).

• لدينا: $-5x_I + 2 = -5 \times 2 + 2 = -8$

و: $y_I = 1$ إذن: $y_I \neq -5x_I + 2$

ومنه فإن: $I \notin (d_3)$

• بما أن: $2 \times x_I - 3 = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$

و: $y_I = 1$ فإن: $y_I = 2x_I + 3$

إذن: $I \in (d_1)$

بما أن:

$-\frac{3}{2}x_I + 4 = -\frac{3}{2} \times 2 + 4 = -3 + 4 = 1$

و: $y_I = 1$

إذن: $I \in (d_2)$

• المستقيمان (d_1) و (d_2) ليس لهما نفس الميل $(2 \neq -\frac{3}{2})$

إذن (d_1) و (d_2) متقاطعان في I.

التمرين الثالث:

1) أبين أن حجم الهرم $SABC$ هو $V_1 = 4\sqrt{3}\,cm^3$

$V_1 = \frac{1}{3} \times h \times S_{ABC}$

ولدينا: $h = SA = 2\sqrt{3}\,cm$

و: $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{2} = 6cm^2$

إذن: $V_1 = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 6$

$V_1 = \frac{12}{3}\sqrt{3} = \boxed{4\sqrt{3}\,cm^3}$

2) أ- أحسب V_2 حجم الهرم $S'A'B'C'$

نعلم أنه في تصغير تضرب الحجوم في مكعب نسبة التصغير.

إذن: $V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times V_1$

أي: $V_2 = \frac{1}{27} \times 4\sqrt{3}$

$\boxed{V_2 = \frac{4}{27}\sqrt{3}\,cm^3}$

ب- أحسب مساحة المثلث $AB'C'$

المثلث $AB'C'$ هو تصغير للمثلث ABC نسبته $\frac{1}{3}$

ونعلم أنه في تصغير تضرب المساحات في مربع نسبة التصغير.

إذن: $S_{AB'C'} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 . S_{ABC}$

أي أن: $S_{AB'C'} = \frac{1}{9} \times 6 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}cm^2$

التمرين الرابع:

1) أبين أن: $y = 2x - 1$ هي المعادلة المختصرة لـ (Δ)

• وبما أن f دالة خطية حيث: $f(x) = 2x$ و (D) تمثيلها المبياني.

فإن المعادلة المختصرة لـ (D) هي: $y = 2x$

• نضع: $(\Delta): y = mx + p$

◆ **أحدد الميل** m

بما أن: $(D)//(\Delta)$

فإن (Δ) و (D) لهما نفس الميل

أي: $\boxed{m = 2}$

ومنه فإن: $(\Delta): y = 2x + p$

◆ **أحدد العدد** p

(Δ) يمر من النقطة $B(2;3)$

إذن زوج إحداثيتي B تحقق معادلة (Δ).

أي أن: $y_B = 2x_B + p$

$3 = 2 \times 2 + p$

$3 - 4 = p$

$\boxed{p = -1}$

وبالتالي فإن المعادلة المختصرة لـ (Δ) هي: $y = 2x - 1$

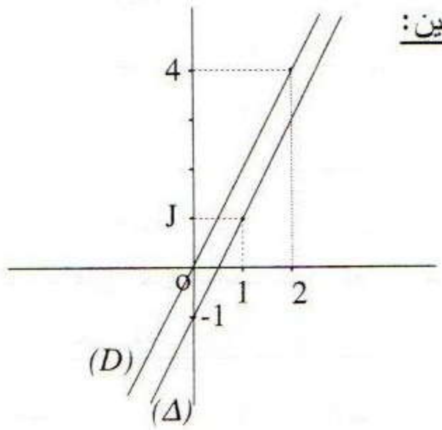
2) أتمم الجدولين:

$g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = 2x$

x	0	2	-3
$f(x)$	0	4	-6

x	0	1	$-\frac{3}{2}$
$g(x)$	-1	1	-4

3) أ– أنشئ المستقيمين:



ب– هل المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل حلا؟

(D) و (Δ) التمثيلين المبيانيين لـ f و g على التوالي لهما نفس الميل 2 وليس لهما نفس الأرتوب عند الأصل $(0 \neq -1)$

إذن (D) و (Δ) متوازيان منفصلان أي أنهما لا يشتركان في أية نقطة.

إذن المعادلة $f(x) = g(x)$ لا تقبل أي حل.

طريقة أخرى:

$f(x) = g(x)$ يعني: $2x = 2x - 1$

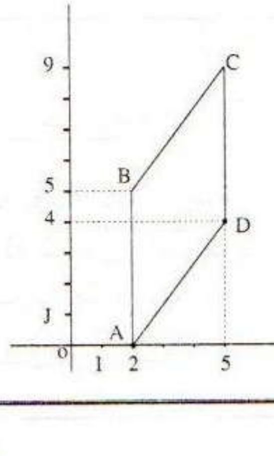
$2x - 2x = -1$

$0 = -1$ غير ممكن

إذن المعادلة $f(x) = g(x)$ لا تقبل أي حل.

التمرين الخامس:

1) أنشئ الرباعي $ABCD$:



2) أ– أحدد زوج إحداثيتي كل من المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

ولدينا: $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D; y_C - y_D)$

أي: $\overrightarrow{AB}(2-2; 5-0)$

أي أن: $\overrightarrow{DC}(5-5; 9-4)$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{AB}(0;5)}$ إذن: $\boxed{\overrightarrow{DC}(0;5)}$

ب– أستنتج أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;5)$ و $\overrightarrow{DC}(0;5)$

إذن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

ومنه فإن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

3) أحسب AB و DC

• لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;5)$

إذن: $AB = \sqrt{0^2 + 5^2}$

$AB = \sqrt{0 + 25} = \sqrt{25}$

$\boxed{AB = 5}$

• ولدينا: $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

$= \sqrt{(5-2)^2 + (9-5)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25}$

$\boxed{BC = 5}$

أستنتج أن $ABCD$ معين

لدينا: $ABCD$ متوازي الأضلاع.

و: $AB = BC$ إذن: $ABCD$ معين.

4) أ– أحسب ميلي المستقيمين (AC) و (BD)

• ليكن m ميل المستقيم (AC).

بما أن: $x_A \neq x_C$

فإن: $m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{9-0}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$

$\boxed{m = 3}$

• ليكن m' ميل المستقيم (BD)

بما أن: $x_D \neq x_B$

فإن: $m' = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{4-5}{5-2} = -\frac{1}{3}$

$\boxed{m' = -\frac{1}{3}}$

ب- أتحقق أن قطري ABCD متعامدان:

لدينا: $m \times m' = 3 \times \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-3}{3} = -1$

أي أن جداء ميلي (AC) و (BD) يساوي -1

إذن: $(AC) \perp (BD)$.

ج- أستنتج من جديد أن $ABCD$ معين

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وأن قطري (AC) و (BD) متعامدان.

فإن $ABCD$ معين.

5) أ- أبين F صورة D بالإزاحة التي تحول A إلى C

لدينا: $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A)$ أي أن: $\overrightarrow{AC}(3;9)$

و: $\overrightarrow{DF}(x_F - x_D; y_F - y_D)$ أي أن: $\overrightarrow{DF}(3;9)$

إذن: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$

ومنه فإن F هي صورة D بالإزاحة التي تحول A إلى C

ب- أتنتج أن المستقيمين (BD) و (DF) متعامدان

لدينا: F هي صورة D بالإزاحة التي تحول A إلى C.

إذن: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$

ومنه فإن $ACFD$ متوازي الأضلاع.

أي أن: $(AC)//(DF)$

وبما أن: $(AC) \perp (BD)$

فإن: $\boxed{(BD) \perp (DF)}$

الموضوع رقم 10

لجهة طنجة - تطوان - دورة يونيو 2008

التمرين الأول

1) أ- أحل المعادلة: $2x = \frac{3}{2}$

لدينا: $2x = \frac{3}{2}$

أي أن: $x = \frac{3}{2} \div 2$

$x = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$

إذن: $\boxed{x = \frac{3}{4}}$

ومنه فإن الحل الوحيد لهذه المعادلة هو: $\frac{3}{4}$

ب- أحل المعادلة: $2x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

لدينا: $2x^2 - \frac{3}{2}x = 0$

يعني: $x\left(2x - \frac{3}{2}\right) = 0$

يعني: $2x - \frac{3}{2} = 0$ أو $x = 0$

إذن: $x = \frac{3}{4}$ أو $x = 0$

ومنه فإن العددين $\frac{3}{4}$ و 0 هما حلي هذه المعادلة.

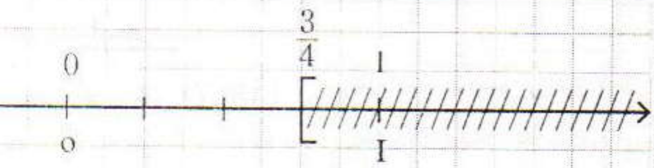
ج- أمثل على مستقيم مدرج حلول المتراجحة $2x - \frac{3}{2} \geqslant 0$

لدينا: $2x - \frac{3}{2} \geqslant 0$

يعني: $2x \geqslant \frac{3}{2}$

يعني: $x \geqslant \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}$

إذن: $\boxed{x \geqslant \frac{3}{4}}$



2) أ- أحل النظمة: $\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x + 4y = 170 \end{cases}$

• طريقة التأليفة الخطية

لإزالة المجهول y أضرب طرفي المعادلة $x + y = 50$ في

وأضرب طرفي المعادلة $3x + 4y = 170$ في العدد

فأحصل على النظمة: $\begin{cases} 4x + 4y = 200 \\ -3x - 4y = -170 \end{cases}$

ثم أجمع المعادلتين طرفا بطرف

$$4x + \cancel{4y} - 3x - \cancel{4y} = 200 - 170$$

$$\boxed{x = 30}$$

• أحسب قيمة y:

لدينا: $x + y = 50$ و $x = 30$

إذن: $30 + y = 50$

$y = 50 - 30$

$\boxed{y = 20}$

وبالتالي فإن الزوج $(30;20)$ هو الحل الوحيد لهذه النظمة.

ب- أحل المسألة:

• أختار المجهولين

ليكن x كمية البطاطس التي بيعت من الصنف I

و y كمية البطاطس التي بيعت من الصنف II

• أصوغ النظمة

• نعلم أن الخضار باع 50 كيلو من الصنفين

إذن: $x + y = 50$

• المدخول الإجمالي بالدرهم للخضار عند بيعه لـ 50 كيلو من صنفي البطاطس هو: 170

إذن: $3x + 4y = 170$

ومنه فإن الزوج $(x;y)$ هو حل النظمة $\begin{cases} x + y = 50 \\ 3x + 4y = 170 \end{cases}$

• أحل النظمة:

حسب السؤال 2) أ- حل النظمة هو: الزوج $(30;20)$

الرجوع إلى المسأل المطروحة والتحقق

• كمية البطاطس التي بيعت من الصنف الأول هو: 30 كيلو

• كمية البطاطس التي بيعت من الصنف الثاني هو: 20 كيلو

• ولدينا: $\begin{cases} 30 + 20 = 50 \\ 3 \times 30 + 4 \times 20 = 90 + 80 = 170 \end{cases}$

التمرين الثاني:

$$f(x) = \frac{2}{3}x$$

1) أ- أحسب $f(3)$ و $f(-3)$

$$f(3) = \frac{2}{\cancel{3}} \times \cancel{3} = 2$$

$$f(-3) = \frac{2}{\cancel{3}} \times (-\cancel{3}) = -2$$

ب- أحسب العدد الذي صورة 4 بالدالة f

ليكن a العدد الذي صورته 4 بالدالة f.

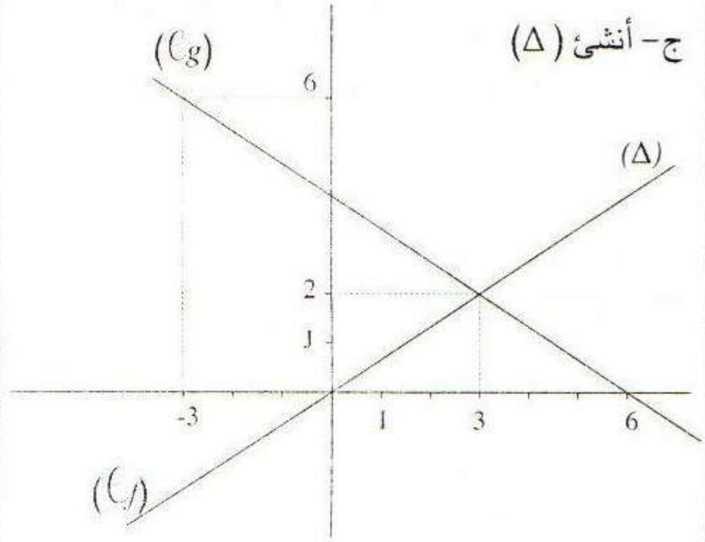
إذن: $f(a) = 4$

أي أن: $\frac{2}{3} \times a = 4$

$a = 4 \times \frac{3}{2}$

إذن: $\boxed{a = 6}$

ج- أنشئ (Δ)



2) أ- أبين لكل عدد حقيقي x: $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

g دالة تآلفية.

نضع: $g(x) = ax + b$

$$\bullet\, a = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{-2}{3}}{1} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

إذن: $g(x) = -\frac{2}{3}x + b$

نعلم أن: $g(6) = 0$

و: $g(6) = -\frac{2}{3} \times 6 + b$

$-4 + b = 0$

$\boxed{b = 4}$

وبالتالي فإن: $\boxed{g(x) = -\frac{2}{3}x + 4}$

ب- أبين أن النقطة $B(-3;6)$ تنتمي إلى $(\mathcal{C}_f)$

لدينا:

$$g(x_B) = g(-3) = -\frac{2}{3} \times (-3) + 4 = 2 + 4 = 6$$

و: $y_B = 6$ إذن: $g(x_B) = y_B$

ومنه فإن: $B \in (\mathcal{C}f)$

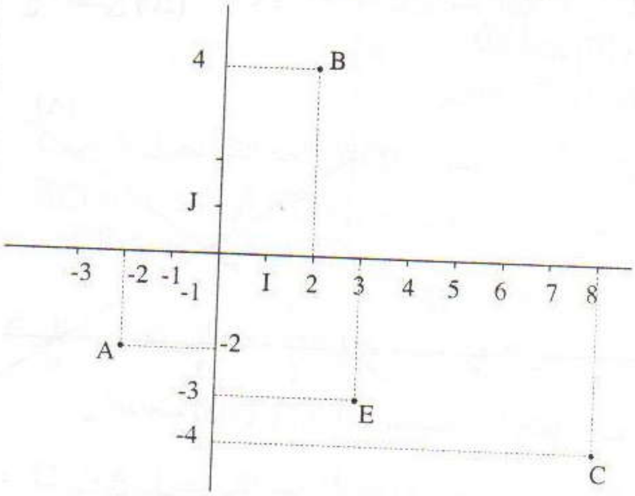
ج– أنشئ التمثيل المبياني للدالة g

x	6	-3
$g(x)$	0	6

(انظر الشكل)

التمرين الثالث :

1) أ– أنشئ النقط A و B و C



ب– أتحقق أن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB)

هي: $y=\frac{3}{2}x+1$

• لدينا: $\frac{3}{2}x_A+1=\frac{3}{2}\times(-2)+1=-3+1=2$

و: $y_A=-2$

إذن: $y_A=\frac{3}{2}x_A+1$

ومنه فإن A تنتمي إلى المستقيم الذي معادلاته $y=\frac{3}{2}x+1$

• لدينا: $\frac{3}{2}x_B+1=\frac{3}{\cancel{2}}\times\cancel{2}+1=3+1=4$

و: $y_B=4$

إذن: $y_B=\frac{3}{2}x_B+1$

أي أن زوج إحداثيتي B يحقق المعادلة $y=\frac{3}{2}x+1$

• وبما أن $A\neq B$

فإن المعادلة المختصرة لـ (AB) هي: $y=\frac{3}{2}x+1$

2) أحدد إحداثيتي $\overrightarrow{AC}$ واحسب AC

• لدينا: $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A)$

أي: $\overrightarrow{AC}(8+2;-4+2)$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{AC}(10;-2)}$

• $AC=\sqrt{10^2+(-2)^2}$

$AC=\sqrt{100+4}$

$AC=\sqrt{104}$

$\boxed{AC=2\sqrt{26}}$

3) أ– أبين أن E منتصف $[AC]$

• لدينا: $\overrightarrow{AE}(x_E-x_A;y_E-y_A)$

أي: $\overrightarrow{AE}(3+2;-3+2)$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{AE}(5;-1)}$

• ولدينا: $\overrightarrow{EC}(x_C-x_E;y_C-y_E)$

أي: $\overrightarrow{EC}(8-3;-4+3)$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{EC}(5;-1)}$

ومنه فإن: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}$

وبالتالي فإن E منتصف $[AC]$.

ب– أحدد ميل المستقيم (EB)

ليكن m ميل المستقيم (EB)

بما أن: $x_E\neq x_B$

فإن: $m=\frac{y_E-y_B}{x_E-e_B}=\frac{-3-4}{3-2}=\frac{-7}{1}$

$\boxed{m=-7}$

ج– هل (EB) و (AB) متعامدان؟

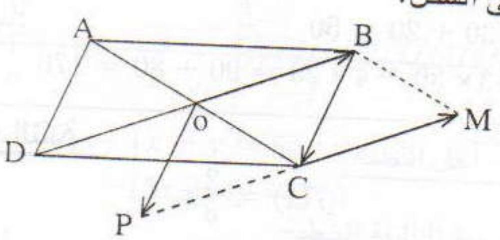
• ميل (AB) هو: $-\frac{2}{3}$ وميل (EB) هو: -7

ولدينا: $-\frac{2}{3}\times(-7)=\frac{14}{3}\neq-1$

إذن: (EB) و (AB) غير متعامدين.

التمرين الرابع :

1) أنشئ الشكل:



2) أ– أحدد صورة B بالإزاحة T

• $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CM}$

إذن الرباعي OBMC متوازي الأضلاع.

ومنه فإن: $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OC}$

إذن: M صورة B بالإزاحة T التي تحول O إلى C.

ب- أبين أن صورة النقطة D بالإزاحة T هي النقطة P

لدينا: $ABCD$ متوازي الأضلاع.

إذن: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

ونعلم أن: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BC}$

أي أن: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OP}$

ومنه فإن الرباعي ADPO متوازي الأضلاع.

إذن: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{DP}$

بما أن: O منتصف $[AC]$ (o مركز $ABCD$)

فإن: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

ومنه فإن: $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OC}$

وبالتالي فإن P هي صورة D بالإزاحة T.

3) أبين أن النقط P و C و M مستقيمية.

بالإزاحة T صور النقط B و O و D هي على التوالي: M و C و P.

وبما أن B و O و D نقط مستقيمية ونعلم أن الإزاحة تحافظ على استقامية النقط.

فإن: M و C و P نقط مستقيمية.

التمرين الخامس:

1) أبين أن: $N = 52$

نعلم أن الحصيص الإجمالي لهذه المتسلسلة هو: 150

$$98 + N = 150$$

$$N = 150 - 98$$

$$\boxed{N = 52}$$

2) أحدد نسبة التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أقل من 8

• عدد التلاميذ الذين حصلوا على نقطة أقل من 8 هو:

$14 + 52$ أي: 66

• نسبة هذه الفئة هي: $\frac{66}{150} \times 100$ أي: $\boxed{44\%}$

3) أحدد الصنف الذي يحتوي على القيمة الوسطية

جدول الحصيصات المتراكمة:

النقطة n	$0 \leqslant n < 4$	$4 \leqslant n < 8$	$8 \leqslant n < 12$	$12 \leqslant n < 16$	$16 \leqslant n < 20$
عدد التلاميذ	14	52	55	20	9
الحصيص المتراكم	14	66	121	141	150

نصف الحصيص الإجمالي هو: $\frac{150}{2}$ أي 75.

أصغر حصيص متراكم أكبر من أو يساوي 75 هو 121.

الصنف المرتبط بالحصيص المتراكم 121 هو $8 \leqslant n < 12$

إذن: القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية توجد في الصنف $8 \leqslant n < 12$

4) أحسب المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة

ملحوظة: $4 \leqslant n < 8$

> بما أن المتسلسلة معبر عنها بأصناف.
> فإننا نحدد أولا مراكز الأصناف.

النقطة n	$0 \leqslant n < 4$	$4 \leqslant n < 8$	$8 \leqslant n < 12$	$12 \leqslant n < 16$	$16 \leqslant n < 20$
عدد التلاميذ	14	52	55	20	9
مركز الصنف	2	6	10	14	16

ليكن m المعدل الحسابي لهذه المتسلسلة

إذن:

$$m = \frac{14 \times 2 + 52 \times 6 + 55 \times 10 + 20 \times 14 + 9 \times 16}{150}$$

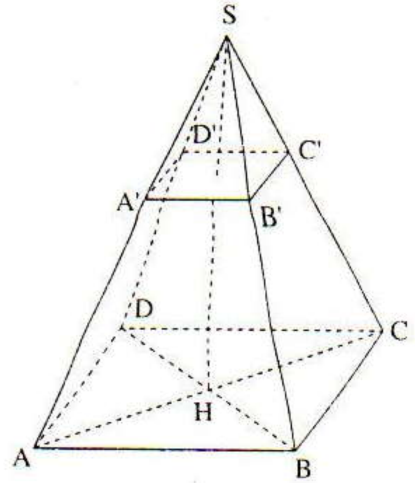
$$m = \frac{28 + 312 + 550 + 280 + 144}{150}$$

$$m = \frac{1314}{150}$$

$$\boxed{m = 8.76}$$

التمرين السادس:

الشكل:



1) أحسب SH

بما أن SABCD هرم منتظم رأسه S وقاعدته المربع ABCD الذي مركزه H.

فإن: $(SH)\perp(ABCD)$

ولدينا: (DB) يوجد ضمن (ABCD).

إذن: $(SH)\perp(DB)$ في H.

أي المثلث SHB قائم الزاوية في H.

وحسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن:

$$SH^2+HB^2=SB^2$$

لدينا: $HB=\frac{DB}{2}=\frac{12}{2}\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

(H منتصف [DB])

و: $SB=14.7$

أي أن:

$$SH^2+(6\sqrt{2})^2=(14,7)^2$$
$$SH^2+72=216,09$$
$$SH^2=216,09-72$$
$$SH^2=144,09$$
$$\boxed{SH=\sqrt{144,09}=12,003cm}$$

2) أ- أحسب حجم الهرم SABCD

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times h\times S_{ABCD}$$

ولدينا: $h=SH=12cm$

و: $S_{ABCD}=AB\times AB=AB^2=12^2=144cm^2$

إذن:

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}\times 12\times 144$$
$$V_{SABCD}=\frac{1728}{3}cm^3=\boxed{576cm^3}$$

ب- أحشب حجم الغطاء

الهرم $SA'B'C'D'$ هو تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة $\frac{1}{4}$

ونعلم أن في تصغير تضرب الحجوم في مكعب بنسبة التصغير.

إذن:

$$V_{SA'B'C'D'}=\left(\frac{1}{4}\right)^3\times V_{SABCD}$$

أي أن:

$$V_{SA'B'C'D'}=\frac{1}{64}\times 576$$
$$\boxed{V_{SA'B'C'D'}=9cm^3}$$

ج- استنتج حجم الوعاء $ABCDA'B'C'D'$ الذي يحتوي على العطر.

$$V_{ABCDA'B'C'D'}=V_{SABCD}-V_{SA'B'C'D'}$$
$$=576-9$$
$$\boxed{V_{ABCDA'B'C'D'}=567cm^3}$$

الموضوع رقم 11

جهة الرباط سلا - زمور - زعير - دورة يونيو 2008

التمرين الأول

1) أحل المتراجحة:

لدينا: $2x + 7 \leqslant -x + 12$

يعني: $2x + x \leqslant 12 - 7$

$3x \leqslant 5$

يعني: $x \leqslant \frac{5}{2}$

إذن:

ومنه فإن جميع الأعداد الأصغر من أو تساوي $\frac{5}{2}$ هي حلول هذه المتراجحة.

2) أحل جبريا النظمة: $\begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$ يعني: $\begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ y = 5 + 2x \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} 3x + 2(5 + 2x) + 4 = 0 \\ y = 5 + 2x \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} 3x + 10 + 4x + 4 = 0 \\ y = 5 + 2x \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} 7x + 14 = 0 \\ y = 5 + 2x \end{cases}$ يعني: $\begin{cases} 7x = -14 \\ y = 5 + 2x \end{cases}$

يعني: $\begin{cases} x = -\frac{14}{7} = -2 \\ y = 5 + 2 \times (-2) \end{cases}$ يعني: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 - 4 \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

ومنه فإن الزوج (2;1-) هو الحل الوحيد لهذه النظمة.

3) أحدد إحداثيتي نقطة تقاطع (D) و (D')

زوج إحداثيتي نقطة تقاطع (D) و (D') هو: $(2;1)$.

ب- أحل مبيانيا النظمة: $\begin{cases} 2y - x = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$

لدينا: $\begin{cases} 2y - x = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$ إذن: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

حل هذه النظمة هو تقاطع المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $y = \frac{1}{2}x$ و $y = 2x - 3$ أي تقاطع (D) و (D')

مبيانيا تقاطع (D) و (D') هو النقطة التي زوج إحداثيتها هو: $(2;1)$.

إذن حل النظمة هو الزوج $(2;1)$.

التمرين الثاني:

1) نسبة التخفيض هي: 15%

قيمة التخفيض هي: $\frac{400 \times 15}{100}$ أي: 60 درهم.

إذن: ثمن الكتاب بعد التخفيض 60 − 400 أي: 340درهم

2) أ- أبين أن $f(x) = \frac{17}{20}x$

• قيمة التخفيض بالنسبة لكتاب كان ثمنه x درهم هي: $\frac{15x}{100}$.

إذن ثمن الكتاب بعد التخفيض هو:

$$f(x) = x - \frac{15}{100}x$$
$$f(x) = \left(1 - \frac{15}{100}\right)x$$
$$f(x) = \left(\frac{100 - 15}{100}\right)x$$
$$f(x) = \frac{85}{100}x$$

ب- أحسب ثمن كتاب إذا كان ثمنه بعد التخفيض هو: 170 درهم:

ليكن a هو ثمن الكتاب قبل التخفيض.

إذن: $f(a) = 170$

أي: $\frac{17}{20}a = 170$

$a = 170 \times \frac{20}{17}$

$\boxed{a = 200}$

التمرين الثالث

$f(x) = 2x + 4$

1) أحسب $f(1)$:

$f(1) = 2 \times 1 + 4 = 2 + 4 = 6$

2) أحدد العدد a حيث $f(a) = 0$

يعني: $f(a) = 0$ $\quad 2a + 4 = 0$

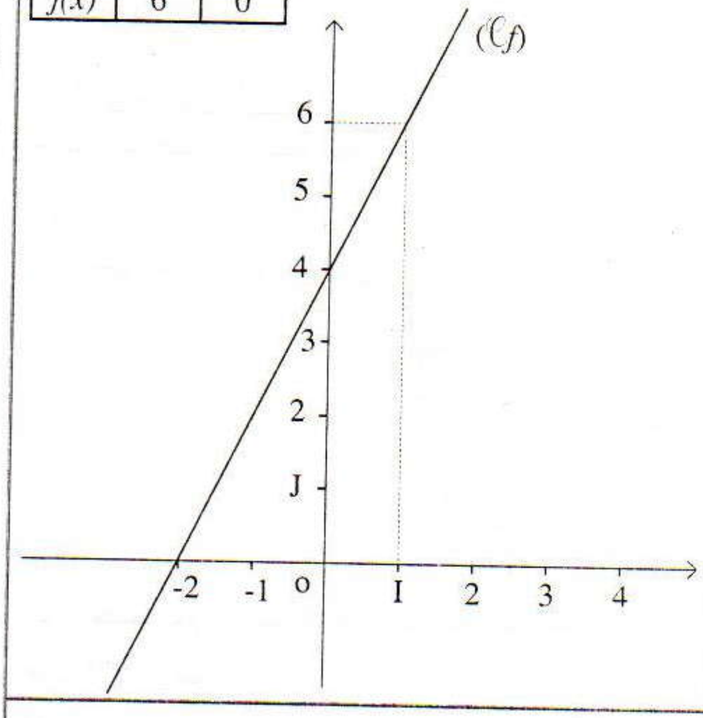
يعني: $2a = -4$

يعني: $a = -\frac{4}{2}$

إذن: $\boxed{a = -2}$

3) إنشاء $(\mathcal{C}_f)$

x	1	-2
$f(x)$	6	0



التمرين الرابع

1) $A(2; -2)$ و $B(3;0)$

أ- أحدد زوج إحداثيتي $\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

أي: $\overrightarrow{AB}(3 - 2; 0 + 2)$

إذن: $\boxed{\overrightarrow{AB}(1;2)}$

ب- أحسب المسافة AB:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1;2)$

إذن: $AB = \sqrt{1^2 + 2^2}$

$AB = \sqrt{1 + 4}$

$\boxed{AB = \sqrt{5}}$

ج- أحدد زوج إحداثيتي K منتصف $[AB]$.

K منتصف $[AB]$

إذن: $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$ و $y_K = \frac{y_A + y_B}{2}$

أي: $x_K = \frac{2 + 3}{2}$ و $y_K = \frac{-2 + 0}{2}$

أي: $x_K = \frac{5}{2}$ و $y_K = -1$

إذن زوج إحداثيتي K هو: $\left(\frac{5}{2}; -1\right)$

د- أبين أن المعادلة المختصرة لـ (AB) هي $y = 2x - 6$

• لدينا: $y_A = -2$

و: $2x_A - 6 = 2 \times 2 - 6 = -2$

إذن: $y_A = 2x_A - 6$

أي أن زوج إحداثيتي A يحقق المعادلة $y = 2x - 6$

• لدينا: $y_B = 0$

و: $2x_B - 6 = 2 \times 3 - 6 = 6 - 6 = 0$

إذن: $y_B = 2x_B - 6$

أي أن زوج إحداثيتي B يحقق المعادلة $y = 2x - 6$

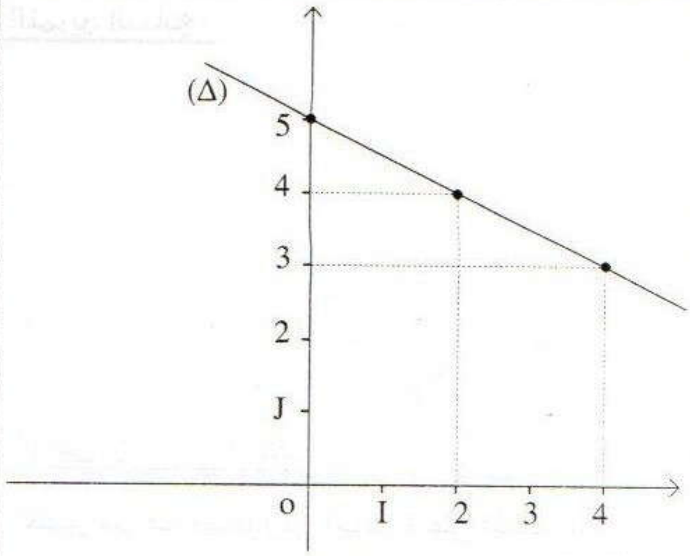
• بما أن النقطتين A و B مختلفتان.

فإن المعادلة المختصرة للمستقيم (AB) هي: $y = 2x - 6$

2) $(\Delta): y = -\frac{1}{2}x + 5$

أ- أرسم المستقيم (Δ)

x	0	2	4
y	5	4	3



ب- أبين أن C تنتمي إلى (Δ)

لدينا: $y_C = 3$ و $-\frac{1}{2}x_C + 5 = -\frac{1}{2} \times 4 + 5 = 3$

إذن: $y_C = -\frac{1}{2}x_C + 5$

أي أن زوج إحداثيتي النقطة C تحقق معادلة (Δ).

وبالتالي فإن: C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

ج- أبين أن (AB) و (Δ) متعامدان:

$$(\Delta): y = -\frac{1}{2}x + 5$$
$$(AB): y = 2x - 6$$

ميل (Δ) هو $-\frac{1}{2}$ وميل (AB) هو: 2

ولدينا: $-\frac{1}{2} \times 2 = \frac{-2}{2} = -1$

إذن: $\boxed{(\Delta) \perp (AB)}$

د- أحدد المعادلة المختصرة للمستقيم (L) المار من A والموازي للمستقيم (Δ):

$$(L): y = ax + b$$

• أحدد الميل a

بما أن (Δ) و (AB) متعامدان

فإن جداء ميلي (Δ) و (AB) يساوي -1

أي أن: $-\frac{1}{2} \times a = -1$

إذن: $\boxed{a = 2}$

ومنه فإن: $(L): y = 2x + b$

• أحدد العدد b:

المستقيم (L) يمر من

إذن: $y_A = 2x_A + b$

أي: $-2 = 2 \times 2 + b$

أي: $-2 = 4 + b$

$b = -2 - 4$

$\boxed{b = -6}$

وبالتالي فإن: $(L): y = 2x - 6$

التمرين الخامس:

1) أحدد منوال المتسلسلة:

في هذه المتسلسلة الإحصائية، أكبر حصيص هو: 8 وهو حصيص قيمة الميزة 2700.

إذن: 2700 هو منوال هذه المتسلسلة.

2) أحسب معدل الأجور:

ليكن m معدل الأجور لهذه الفئة من المستخدمين.

$$m = \frac{2500 \times 1 + 2700 \times 8 + 3000 \times 7 + 5000 \times 3 + 15000 \times 1}{20}$$
$$m = \frac{2500 + 21600 + 21000 + 15000 + 15000}{20}$$
$$m = \frac{75100}{20}$$
$$\boxed{m = 3755}$$

3) أحسب نسبة المستخدمين الذين يقل أجرهم عن معدل الأجور:

• عدد المستخدمين الذين يقل أجرهم عن معدل الأجور هو: $1+8+7$ أي: 16.

• نسبة هذه الفئة هي: $\frac{16 \times 100}{20}$ أي: 80%

4) أحدد القيمة الوسطية:

جدول الحصيصات المتراكمة هو:

الأجر بالدرهم	2500	2700	3000	5000	15000
عدد المستخدمين	1	8	7	3	1
الحصيص المتراكم	1	9	16	19	20

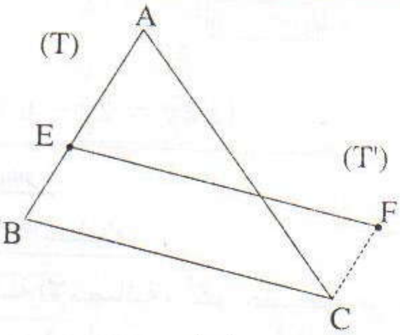
نصف الحصيص الإجمالي هو: $10 = \frac{20}{2}$.

أصغر حصيص متراكم يفوق نصف الحصيص الإجمالي هو: 16

القيمة المرتبطة بهذا الحصيص هي: 3000 وبالتالي فإن القيمة الوسطية لهذه المتسلسلة الإحصائية هو: 3000

التمرين السادس

1) أنشئ النقطة F صورة E بالإزاحة t



أ- أحدد مركز الدائرة (T')

لدينا F صورة E بالإزاحة

بما أن E مركز الدائرة (T)

فإن F مركز الدائرة (T') صورة (T) بالإزاحة t

ب- أبين أن C تنتمي إلى (T')

• لدينا F صورة E بالإزاحة t.

إذن: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$

أي أن: الرباعي $EFCB$ متوازي الأضلاع.

ومنه فإن: $EB = FC$

• وبما أن (T') هي صورة (T) بالإزاحة t

فإن (T') و (T) لهما نفس الشعاع EB.

ولدينا: $EB = FC$

إذن FC هو شعاع الدائرة (T') التي مركزها F.

ومنه فإن: C تنتمي إلى الدائرة (T')

3) أحسب شعاع (T') علما أن: $AE = \frac{2}{3}AB$

بما أن E تنتمي إلى $[AB]$.

فإن: $AE + EB = AB$

أي أن: $EB = AB - AE$

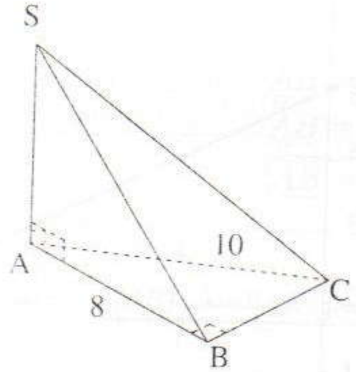
$$EB = AB - \frac{2}{3}AB$$

$$EB = \frac{1}{3}AB$$

ونعلم أن: $AB = 2$

إذن: $\boxed{EB = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}}$

التمرين السابع:



1) أبين أن: $BC = 6cm$

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس المباشرة على المثلث ABC القائم الزاوية في B.

لدينا: $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$8^2 + BC^2 = 10^2$$
$$BC^2 = 100 - 64$$
$$BC^2 = 36$$
$$BC = \sqrt{36}$$
$$\boxed{BC = 6cm}$$

2) أ- أبين أن حجم الهرم $SABC$ هو $96cm^3$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \times SA \times \frac{AB \times BC}{2}$$
$$= \frac{1}{3} \times 12 \times \frac{8 \times 6}{2}$$
$$\boxed{V_{SABC} = 96cm^3}$$

ب- أحسب حجم الهرم المحصل عليه بعد تصغير $SABC$

عند تصغير أو تكبير تضرب الحجوم في مكعب نسبة التصغير أو التكبير.

إذن: $V' = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times V_{SABC}$

$$V' = \frac{27}{64} \times 96$$
$$V' = \frac{81}{2}$$
$$\boxed{V' = 40,5cm^3}$$