



الرياضيات

المتتاليات

Hard Equation

• العددية

• الحسابية

• الهندسية

وفق البرنامج الرسمي

Mathématique

BAC



المتاليات العددية

1 - توليد متتالية :

1/1 يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعدها العام.

مثال: (v_n) متتالية معرفة بعدها العام $v_n = 2n - 3$

للحصول على حد معين يكفي تعويض n بالعدد الطبيعي المناسب.

لدينا: $v_{10} = 2 \times 10 - 3 = 17$ ، $v_{16} = 2 \times 16 - 3 = 29$.

1/2 يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$

حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) .

مثال: المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n .

$u_{n+1} = u_n + 5$ هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لدينا: $u_1 = 6$; $u_2 = 11$; $u_3 = 16$; $u_4 = 21$.

ملاحظة 1 : في المتتالية (v_n) ، v_{16} هو أحد حدودها ، 16 هو دليله ، أما رتبته فهي متعلقة بعدد

الحدود التي تسبقه.

رتبة الحد v_k بالنسبة إلى الحد v_b حيث $b < k$ هي $k - b + 1$.

رتبة الحد v_{16} بالنسبة إلى الحد v_0 هي $16 - 0 + 1$ أي 17 .

رتبة الحد v_{16} بالنسبة إلى الحد v_1 هي $16 - 1 + 1$ أي 16 .

رتبة الحد v_{16} بالنسبة إلى الحد v_5 هي $16 - 5 + 1$ أي 12 .

ملاحظة 2 : المتتالية (v_n) المعرفة بعدها العام $v_n = 2n - 3$ هي من الشكل $v_n = f(n)$ حيث f

هي الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) والمعرفة كما يلي $f(x) = 2x - 3$.

المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 5$ هي من

الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة كما يلي: $f(x) = x + 5$.

المتتالية الحسابية

تعريف : نقول أن المتتالية (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 وأساسها r (r عدد حقيقي)

إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n + r$.

عبارة الحد العام :

إذا كانت المتتالية (u_n) متتالية حسابية أساسها r (r عدد حقيقي) فإنه من أجل كل عددين

طبيعيين n و p : $U_n = U_p + (n - p)r$.

حالات خاصة :

$$U_n = U_0 + n \times r$$

$$U_n = U_1 + (n - 1) \times r$$

المجموع :

إذا كانت المتتالية (U_n) متتالية حسابية أساسها Γ (Γ عدد حقيقي) فإن :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$$

أو :

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

خاصية الوسط الحسابي :

تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c .

المتتالية الهندسية

تعريف :

نقول أن المتتالية (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 وأساسها Γ (Γ عدد حقيقي) إذا و فقط

$$U_{n+1} = U_n \times r \quad : n \text{ عدد طبيعي}$$

عبارة الحد العام :

• إذا كانت المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها Γ (Γ عدد حقيقي) فإنه من أجل كل عددين

$$U_n = U_p \times r^{n-p} \quad : p \text{ و } n \text{ طبيعيين}$$

حالات خاصة :

$$U_n = U_0 \times r^n$$

$$U_n = U_1 \times r^{n-1}$$

المجموع :

إذا كانت المتتالية (U_n) متتالية هندسية أساسها Γ (Γ عدد حقيقي) فإن :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S = U_0 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

أو :

$$S = U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

خاصية الوسط الهندسي :

تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c .

خواص المتتاليات

1/2 / اتجاه تغير متتالية عددية :

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} .

- (u_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \geq u_n$.
 - (u_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} \leq u_n$.
 - (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد حقيقي n ، $u_{n+1} = u_n$.
- إذا كانت (u_n) متزايدة أو متناقصة نقول إنها رتيبة.

ملاحظة 1 : ندرس بنفس الطريقة اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا كانت معرفة على جزء من \mathbb{N} .

ملاحظة 2 : نستنتج اتجاه تغير متتالية حسابية (u_n) حسب إشارة أساسها r .

$r = 0$	$r < 0$	$r > 0$
(u_n) ثابتة	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) متزايدة تماما

و نستنتج اتجاه تغير متتالية هندسية (u_n) حسب إشارة حدها الأول u_0 و قيمة أساسها q .

$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	
(u_n) متزايدة تماما	(u_n) ثابتة	(u_n) متناقصة تماما	$u_0 > 0$
(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما	$u_0 < 0$

إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ليست رتيبة.

إذا كان $q = 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ثابتة بدءا من u_1 .

1/2 / المتتاليات المحدودة :

تعريف :

(u_n) متتالية عددية.

- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq M$.
 - المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq m$.
- المتتالية (u_n) محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.

1/2 /3 نهاية متتالية عددية :

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

تعريف :

العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل مجال $[\alpha; \beta]$ يوجد عدد طبيعي p بحيث مهما يكن العدد الطبيعي n يحقق $n \geq p$ ينتمي إلى

المجال $[\alpha; \beta]$ ، نكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

ملاحظات :

إذا كانت نهاية المتتالية (u_n) عندما يوئل n إلى $+\infty$ عددا حقيقيا l نقول إن (u_n) متقاربة.
إذا كانت نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$ أو غير موجودة فإن (u_n) غير متقاربة و نقول عنها إنها متباعدة.

مبرهنة :

إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

2 / 4 مبرهنات حول نهايات متتاليات :

مبرهنة :

(u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[\alpha; +\infty[$.
 α عدد حقيقي، l هو عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

مبرهنة :

f دالة معرفة على مجال \mathbb{N} و $l \in \mathbb{N}$ متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$
و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \in \mathbb{R}$.
إذا كانت (u_n) متقاربة نحو l و f مستمرة عند l فإن $l = f(l)$.

المبرهنات المتعلقة بحساب نهايات متتاليات :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان، l و l' عددان حقيقيان.

نهاية مجموع متتاليتين :

$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l	l	l	إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ هي
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l'	و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ هي
حالة عدم التعيين	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l + l'$	فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ هي

نهاية جداء متتاليتين :

0	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$l < 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l > 0$	l
∞	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l'
حالة عدم التعيين	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ll'

نهاية حاصل قسمة متنايلتين :

∞	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	l	l
∞	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	∞	$l' \neq 0$
حالة عدم التعيين	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	$\frac{l}{l'}$

0	$l' < 0$ أو $-\infty$	$l' < 0$ أو $-\infty$	$l' > 0$ أو $+\infty$	$l' > 0$ أو $+\infty$
0	0 بقيم سالبة	0 بقيم سالبة	0 بقيم موجبة	0 بقيم موجبة
حالة عدم التعيين	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ملاحظة : توجد حالات ، لا يمكن النص فيها عن النتيجة بتطبيق المبرهنات المتعلقة بمجموع متنايلتين ، أو جداء متنايلتين أو حاصل قسمة متنايلتين ، تسمى حالات عدم التعيين و هي من الشكل

$$\frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0} ; 0 \times \infty ; +\infty - \infty$$

2/5 النتائج المتعلقة بالحصص و المقارنة :

مبرهنة 1 :

إذا كانت متنايلية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.
إذا كانت متنايلية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

مبرهنة 2 :

إذا كانت متنايلية متقاربة فإنها محدودة.
ملاحظة : العكس غير صحيح.

مبرهنة 3 :

متنايلات عددية l ، عدد حقيقي. (u_n) ، (v_n) ، (w_n)

فإن	و كان	إذا كان (بدءا من مرتبة معينة)
$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$u_n \leq w_n$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	$v_n \leq u_n$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$ v_n - l \leq u_n$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$	$v_n \leq u_n \leq w_n$

2/6 / نهاية متتالية هندسية :

مبرهنة :

- (u_n) متتالية هندسية حدما الأول u_0 وأساسها q .
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- إذا كان $q \leq -1$ فإن نهاية (u_n) غير موجودة.

ملاحظات :

- إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و غير محدودة من الأعلى فإنها متباعدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و غير محدودة من الأسفل فإنها متباعدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

III - المتتاليتان المتجاورتان :

تعريف :

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان.

نقول عن المتتاليتان (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

- إحدى المتتاليتين متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

مبرهنة 1 :

إذا كانت متتاليتان متجاورتين فكل منهما متقاربة و لهما نفس النهاية.

مبرهنة 2 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان و نهايتهما l .

إذا كانت (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq l \leq v_n$.

إذا كانت (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n \leq l \leq u_n$.

مثال : بكالوريا دورة جوان 2009

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $u_1 = 2$ و $u_0 = 1$

المتتالية (v_n) معرفة على N كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب v_0 و v_1 .

(2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

(3) أ/ أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$
ج/ بين أن (u_n) متقاربة .

الحل النموذجي :

(1) حساب الحدود : $v_0 = u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

$$v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1$$

$$u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 1 = \frac{7}{3} \quad \text{حيث :}$$

$$v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3} \quad \text{ومنه :}$$

(2) (v_n) متتالية هندسية إذا تحقق مايلي : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_{n+1} = v_n \times q$ (q عدد حقيقي ثابت) ، لدينا : من أجل كل عدد طبيعي

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

$$\text{ومنه } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{3} \quad = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

(3) أ/ حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

ب/

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

$$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0$$

$$\text{أي : } S_n = u_n - u_0 \quad \text{ومنه : } u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1$$

$$\text{ج/ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad \text{ومنه } (u_n) \text{ متقاربة نحو العدد } \frac{5}{2}$$

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

www.9alami.com

Hard_equation