

العلوم الرياضية

الشعبة

www.9alami.com

المملكة المغربية

الامتحان التجريبي للسنة  
الثانية من سلك البكالوريا  
السنة الدراسية  
2010/2009

وزارة التربية الوطنية  
والتعليم العالي  
وتكوين الأطر  
والبحث العلمي



أكاديمية جهة الدار البيضاء  
الكبرى

نيابة عين السبع الحبي المحمدي

الموضوع

العلوم الرياضية أ  
العلوم الرياضية ب

المسلك

الرياضيات  
10المادة  
المعامل

4 ساعات

مدة الانجاز

1/3

الصفحة

لا يسمح باستخدام الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

### التمرين الأول (3.5ن)

نذكر أن  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة و  $(M_3(\mathbb{R}), +, \bullet)$  فضاء متجهي حقيقي. نضع:

$$E = \left\{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & x+y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1. بين أن  $(E, +, \bullet)$  فضاء متجهي حقيقي

0.5

ب. اكتب  $M(x, y)$  بدلالة  $I$  و  $J$  و استنتج بعد الفضاء المتجهي  $E$

0.25

ج. احسب  $J^2$  و استنتج أن المصفوفة  $J$  قابلة للقلب وحدد مقلوبها  $J^{-1}$

0.5

1.2. بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0.5

ب. بين أن  $(E, +, \times)$  حلقة تبادلية واحدة.

0.75

ج. احسب الجداء  $M(1,1) \times M(1,-1)$

د. هل  $(E, +, \times)$  جسم؟

0.25

3. نضع  $O = M(0,0)$  و  $A = M(2,-1)$

0.25

أ. بين أن  $A^2 - 4A + 3I = O$  (المصفوفة المنعدمة)

0.25

ب. استنتج أن المصفوفة  $A$  قابلة للقلب و اكتب مقلوبها  $A^{-1}$  بدلالة  $I$  و  $J$

0.25

### التمرين الثاني (3.5ن)

$$f: P - \{0\} \rightarrow P - \{0\}$$

$$M(z) \rightarrow M(\varphi(z))$$

لكل  $z \in C^*$  نضع  $\varphi(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  نعتبر التطبيق:

$$1. \text{ أ. بين أن } (E)\varphi(z) + i\bar{z} + (1+2i) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (2+i)z + i = 0$$

0.5

ب. حدد حل المعادلة  $(E)$  ( $\text{Re}(z_1) > \text{Re}(z_2)$ )

1/3

0.5

$$2. \text{ أ. بين أن } z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}} \text{ و } z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

ب. استنتج الشكل المثلثي لكل من  $z_1$  و  $z_2$

$$3. \text{ نعتبر المعادلة } (E_n): z^{n-1}\varphi(z) = 1 \text{ حيث } n \in \mathbb{N} \text{ و } n \geq 3$$

أ. حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E_n)$

ب. بين أن مجموع حلول المعادلة  $(E_n)$  منعدم وأن صورها تكون مضلعا منتظما محاطا بدائرة يجب تحديدها

$$ج. نضع  $z = e^{i\alpha} + i$  بحيث  $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \alpha \in \mathbb{R}$$$

حدد الشكل المثلثي للعدد  $u = z\varphi(z)$

### التمرين الثالث (3 ن)

$$(E): 5357x - 11688y = 487 \text{ نعتبر في المجموعة } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة:}$$

1. أ. بين أن العدد 487 أولي

ب. ليكن الزوج  $(x, y)$  حلا للمعادلة  $(E)$  ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين  $x$  و  $y$ ؟

ج. أحسب  $PGCD(11688; 5357)$

$$2. \text{ أ. تحقق أن المعادلة } (E) \text{ تكافئ المعادلة: } (E'): 11x - 24y = 1$$

ب. باستعمال خوارزمية أقليدس حدد حلا خاصا للمعادلة  $(E')$

ج. حل المعادلة  $(E)$

$$3. \text{ أ. حدد الأعداد الصحيحة النسبية } k \text{ بحيث: } [5] \quad 24k + 11 \equiv 0$$

ب. استنتج أنه إذا كان الزوج  $(x, y)$  حلا للمعادلة  $(E)$  بحيث 5 يقسم  $x$  فإن 5 يقسم  $y - 1$ .

### مسألة (10 ن)

نعتبر المستوى  $P$  المنسوب للمعلم المنظم المتعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### الجزء الأول

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $[1; +\infty[$  بما يلي  $g(x) = x \ln(x) - x + 1$

1. أ. أدرس تغيرات الدالة  $g$

ب. استنتج إشارة  $g(x)$  لكل  $x \in [1; +\infty[$

$$2. \text{ لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } [1; +\infty[ \text{ بما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} & x > 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

بين أن  $f$  دالة متصلة في 1

$$3. \text{ أ. بين أن لكل } t \in [1; +\infty[ \text{ لدينا: } t - 1 - (t-1)^2 \leq 1 - \frac{1}{t} \leq t - 1$$

$$\text{ب. استنتج أن: } \forall x \geq 1: \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x - 1 - \ln(x) \leq \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$\text{ج. أحسب } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2}$$

د. استنتج أن  $f$  قابلة للإشتقاق في 1 وأن  $f'(1) = \frac{1}{2}$

## الجزء الثاني

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt : x > 1 \\ F(1) = \ln(2) \end{array} \right.$$

نعتبر الدالة المعرفة على  $[1, +\infty[$  بما يلي :

1. أ. بين أن  $\forall x > 1 : \frac{x^2 - x}{\ln(x^2)} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$  0.75

ب. استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  0.5

2. أ. بين أنه لكل  $x$  من  $]1, +\infty[$  و لكل  $t$  من  $[x; x^2]$  لدينا 0.5

$$\frac{x}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{x^2}{t \ln(t)}$$
 0.75

ب. استنتج أنه لكل  $x$  من  $]1, +\infty[$  لدينا :  $x \ln(2) \leq F(x) \leq x^2 \ln(2)$  0.5

ج. بين أن  $f$  متصلة في 1 0.5

3. أ. بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على  $]1, +\infty[$  وأن  $\forall x > 1 : F'(x) = f(x)$  0.75

ب. ليكن  $x$  من  $]1, +\infty[$  بين أنه يوجد  $c$  من  $]1, x[$  بحيث  $F(x) - F(1) = (x-1)F'(c)$  0.5

ج. استنتج أن  $F$  قابلة للاشتقاق على يمين 1 وأن  $F'(1) = 1$  0.5

4. اعط جدول تغيرات  $F$  وأنشئ منحنى  $F$  0.5