Inisse Groupe Scolaire

مادة الرياضيات
الإمتحان التجريبي الثاني
دورة أبريل 2014

مدة الإنجاز: 4 ساعات
الثانية باك ع رياضية

مسألة .... 9,5 نقطة

الجزء الأول:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1-e^{-x}} \; ; \; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

1 -أ- بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $\mathbb{R}$ 0,50

ب- احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ 0,50

ج- ادرس اتصال الدالة f في الصفر 0,25

2 -أ- بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{x}{2}\int_1^0 (1-u)^2 e^{-ux}du$ 0,50

يمكنك استعمال المكاملة بالأجزاء مرتين.

ب- بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left|\int_1^0 (1-u)^2 e^{-ux}du\right| \leq \frac{1-e^{-x}}{x}$ 0,50

ج- استنتج قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر 0,50

3 -أ- أدرس رتابة الدالة t المعرفة بما يلي: $t(x) = 1-(x+1)e^{-x}$ 0,25

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f 0,25

ج- بين أن تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يجب تحديده. 0,25

4 -ليكن f^{-1} التقابل العكسي للتقابل f

أ - تحقق من أن : $\forall x \in]0,1[\quad f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$ 0,5

ب استنتج أن المعادلة $f^{-1}(x) = f(x)$ تقبل حلا وحيدا β حيث أن: $e^{-1} \leq \beta \leq 1$ و 0,25

5 -نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{-u_n} \end{cases}$

أ - تحقق من أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-1} \leq u_n \leq 1$ 0,25

ب بين أن: $(\exists k \in]0;1[)(\forall x;y \in [e^{-1};1]) \quad |e^{-x}-e^{-y}| \leq k|x-y|$ 0,50

ج- استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \beta| \leq k^n|1-\beta|$ 0,50

د- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا قيمة مقربة لنهايتها بالدقة 10^{-3} 0,50

الجزء الثاني:

لتكن F الدالة العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}dt \; ; \; x > 0 \\ F(0) = \frac{\ln(2)}{2} \end{cases}$

1 -تحقق من أن مجموعة تعريف الدالة F هي $\mathbb{R}$ 0,50

2 -أ- بين أن: $\forall x \in]0;+\infty[\quad \frac{x}{x+1} \leq f(x) \leq 1$ 0,50

ب- استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$ 0,25

3 -بين أن الدالة قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ وحدد دالتها المشتقة 0,50

4 -نقبل أن: $\exists \alpha \in]0;+\infty[\; ; \; \forall t \in]0;\alpha[\quad \left|f(t) - \frac{1}{2} - \frac{t}{2}\right| \leq t\sqrt{t}$

أ- بين أن: $\forall x \in]0;\alpha[\quad \left|F(x) - \frac{\ln 2}{2} - \frac{x}{2}\right| \leq (4-\sqrt{2})x\sqrt{x}$ 0,50

ب- استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر وقابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر. 0,50

ج- ضع جدول تغيرات الدالة F

5 -أنشئ منحنى f - منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم

التمرين الأول : (3,5 ن)

	تذكير: $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.
	1) نزود المجموعة $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:
	$(\forall(a;b)\in G)(\forall(c;d)\in G)\quad (a;b)\mathrm{T}(c;d)=(ac;ad+bc)$
0.5	أ- بين أن القانون T تبادلي وتجميعي
0.25	ب- تحقق من أن $(1;0)$ هو العنصر المحايد للقانون T
0.25	ج- بين أن (G,T) زمرة تبادلية
0.5	د- ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$، بين أن: $\underbrace{(-1;1)\mathrm{T}\ .\ .\ .\ \mathrm{T}(-1;1)}_{n}=\left((-1)^n;n(-1)^{n+1}\right)$
	2) لكل $(a;b)$ من $\mathbb{R}^2$، نضع : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة $E=\left\{M_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in G\right\}$
0.25	أ- بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$
0.5	ب- بين أن التطبيق : $\begin{array}{l} f:G\longrightarrow E\\ (a;b)\longrightarrow M_{(a;b)}\end{array}$ تشاكل تقابلي من (G,T) نحو $(E,\times)$
0.5	ج- استنتج بنية $(E;\times)$ ثم حدد مقلوب كل مصفوفة $M_{(a;b)}$ من E
0.25	د- نضع: $A=M_{(-1;1)}$ ، احسب A^n لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$
	3) نعتبر المجموعة $F=\left\{M_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$
0.25	أ- بين أن $(F;+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي
0.25	ب- حدد $\dim F$

3 التمرين 2 — 3,5 ن

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$
لكل z من $\mathbb{C}-\{-i\}$ نضع $\varphi(z)=i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$ و نعتبر النقطتين A و B التي لحقيهما $z_A=2i$ و $z_B=i$ و لتكن النقطة M ذات اللحق z .

I (1) بين أن : $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}) : |\varphi(z)|=\frac{AM}{BM}$ — 0,50
و أن : $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i,2i\}) : arg(\varphi(z))\equiv(\overline{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}})+\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

(2) حدد طبيعة كل من المجموعتين $E=\{M(z)/\ |\varphi(z)|=1\}$ ، و $F=\{M(z)/\varphi(z)\in i\mathbb{R}\}$ ، — 0,50

II (1) بين أن : — 0,50
$(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}) : |\varphi(z)-i|=\frac{1}{|z-i|}$; $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}) : arg(\varphi(z)-i)\equiv-arg(z-i)\quad[2\pi]$

(2) بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$ فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى دائرة يتم تحديدها . — 0,50

(3) أنشيء النقطة M' انطلاقا من النقطة M — 0,25

III (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\varphi(z)=z$ نرمز ب u و v حلي هذه المعادلة بحيث $\mathcal{R}_e(u)=1$. — 0,25

(2) ليكن : $z\in\mathbb{C}-\{i,u,v\}$ و $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$.

(a) بين أن : $\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v}=-\frac{z-u}{z-v}$ — 0,25

(b) استنتج أن : $(\overline{\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C}})\equiv\pi+(\overline{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC}})\quad[2\pi]$ — 0,25

(c) بين أنه إذا كانت النقط M و C و D مستقيمية فان النقط M' و M و C و D مستقيمية و إذا كانت M و C و D غير مستقيمية فإن النقط M' و M و C و D تكون متداورة . — 0,50

التمرين 3 — 3,5 ن

1) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $35x-192y=1$ — 0,25

ب) بين ان المعادلة: $\overline{35}x=\overline{1}$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}/192\mathbb{Z}$ ثم استنتج حلها — 0,50

2) أ) بين انه يوجد عددين أولين مختلفين p و q يحققان: — 0,50

$(p-1)(q-1)=192$ و $PGCD((p-1),(q-1))=4$

3) ليكن a من $\mathbb{N}^*$

أ) بين ان : $a^{385}\equiv a\quad[13]$ — 0,50

ب) استنتج ان : $a^{385}\equiv a\quad[221]$ — 0,50

4) أ) تحقق من : $2008\equiv19\quad[221]$ — 0,25

ب) استنتج مما سبق باقي القسمة الاقليدية للعدد $2008^{385^{2009}}$ على 221 — 0,50

5) ليكن b مجموع ارقام العدد $2008^{385^{2009}}$ في نظمة العد العشري — 0,50
حدد باقي القسمة الأقليدية لـ b على 9