فرض محروس في مادة الرياضيات
ماي 2013

المستوى : 2 علوم رياضية — مدة الإنجاز : 4 ساعات

التمرين الأول (3,5 ن)

المستوى P منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر التطبيق φ الذي يربط كل نقطة M من P لحقها z بالنقطة M' ذات اللحق z' بحيث : $z'=-i\overline{z}+2i$

فيما يلي نعتبر النقط : A و B و C التي ألحاقها على التوالي $z_A=2i$ و $z_B=2$ و $z_C=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ والنقط M و N و M' و M'' التي ألحاقها على التوالي z و $\overline{z}$ و z' و $\overline{z'}$ بحيث M' هي صورة M بالتطبيق φ و $z\in\mathbb{C}^*-\{-2\}$.

0,50 — 1- حدد النقطة C' صورة C بالتطبيق φ .

0,50 — 2- أ) بين أن المستقيمين (ON) و (AM') متعامدان .

ب) لتكن $(\mathscr{C})$ الدائرة التي مركزها O وشعاعها 2 و $(\mathscr{C}')$ الدائرة التي مركزها A وشعاعها 2 .

0,50 — أحسب $|z'-2i|$ بدلالة $|z|$ واستنتج أن : $M\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow M'\in(\mathscr{C}')$

0,50 — ج) تحقق أن $C\in(\mathscr{C})$ واكتب z_C على الشكل المثلثي ثم أنشئ $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ و C و C' .

0,50 — 3- لتكن M نقطة من $(\mathscr{C})$ تخالف B . بين أن : $z=2e^{i\theta}$ $\exists\theta\in]0;2\pi[$ ثم حدد معيار وعمدة z' بدلالة θ.

0,50 — 4- أ) بين أن M'' هي صورة M بالدوران r الذي مركزه $\Omega(1-i)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

0,50 — ب) ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$ ونعتبر النقطة M_n ذات اللحق z^n . حدد z إذا علمت أن $r(M_n)=B$.

التمرين الثاني (3,5 ن)

0,25 — 1) بين أن 163 عدد أولي

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E):\ 13x-162y=1$

0,25 — أ- حدد حلا خاصا للمعادلة (E)

0,25 — ب- حل المعادلة (E)

3) نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases} x\equiv a\ [13] \\ x\equiv b\ [162]\end{cases}$ حيث a و b عددان من $\mathbb{Z}$

0,25 — أ- تحقق من أن العدد $x_0=325b-324a$ هو حل للنظمة (S)

0,50 — ب- بين أن: $(S)\Longleftrightarrow x\equiv x_0\ [2106]$

0,50 — ج- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) في الحالة $a=2$ و $b=3$

4) ليكن x عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث : $x^{25}\equiv 3\ [163]$

0,75 — أ- بين أن: $x\wedge 163=1$ ثم أن: $x\equiv 3^{13}\ [163]$

0,75 — ب- استنتج أن: $x^{25}\equiv 3\ [163] \Longleftrightarrow x\equiv 3^{13}\ [163]$

مسألة (9 ن)

A - 1 – نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)$

أ) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0,+\infty[$

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

2 – نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$

أ) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

ج) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $f'(x)=e^{-x}(\frac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln(1+e^{x}))$

د) ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

3 – ارسم المنحنى الممثل للدالة f في م. م. م (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

4 – أ) بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتم تحديده

ب) حدد تغيرات التقابل العكسي f^{-1} على المجال J

ج) ارسم في نفس المعلم المنحنى (C') الممثل للدالة f^{-1}

B - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ $(\forall n\geq0)$

1 – أ) بين أنه إذا كان x من المجال $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$ فإن $f(x)\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

ب) بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α و أن : $\frac{1}{2}\leq\alpha\leq\frac{3}{5}$

2 – أ) ادرس إشارة : $f(x)-x$

3- لكل عدد صحيح طبيعي n نضع : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$

أ) بين أن المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متحاديتين (لاحظ أن $u_0\leq\alpha$)

ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و أن $\lim_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

C - 1 – أ) بين أن : $f'(x)+f(x)=\frac{1}{1+e^{x}}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

ب) استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $\mathbb{R}$ التي تنعدم في 0

2 – أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq2$ يوجد عدد حقيقي وحيد x_n من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث : $f(x_n)=\frac{1}{n}$

ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq2}$ تزايدية

ج) بين أن $(x_n)_{n\geq2}$ غير مكبورة ثم استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

3 – نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq2}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\int_0^{x_n} f(x)dx$

أ) بين أن $(v_n)_{n\geq2}$ تزايدية و أن : $(\forall n\geq2);0\leq v_n\leq2\ln(2)$

ب) بين أن $(v_n)_{n\geq2}$ متقاربة و أن $\lim_{n\to+\infty} v_n=2\ln(2)$

التمرين الثالث: (3,5 ن)

تذكير: $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

1) نزود المجموعة $G=\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:

$$(\forall(a;b)\in G)(\forall(c;d)\in G)\quad (a;b)\mathrm{T}(c;d)=(ac;ad+bc)$$

أ- بين أن القانون T تبادلي وتجميعي 0,50

ب- تحقق من أن $(1;0)$ هو العنصر المحايد للقانون T 0,25

ج- بين أن (G,T) زمرة تبادلية 0,25

د- ليكن n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$، بين أن: $\underbrace{(-1;1)\mathrm{T}\ .\ .\ .\ \mathrm{T}(-1;1)}_{n}=\left((-1)^n;n(-1)^{n+1}\right)$

2) لكل $(a;b)$ من $\mathbb{R}^2$، نضع : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة $E=\{M_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in G\}$

أ- بين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ 0,25

ب- بين أن التطبيق : $\begin{array}{l} f:G\longrightarrow E\\ (a;b)\longrightarrow M_{(a;b)}\end{array}$ تشاكل تقابلي من (G,T) نحو $(E,\times)$ 0,50

ج- استنتج بنية $(E;\times)$ ثم حدد مقلوب كل مصفوفة $M_{(a;b)}$ من E 0,25

د- نضع: $A=M_{(-1;1)}$ ، احسب A^n لكل n من $\mathbb{N}^*-\{1\}$

3) نعتبر المجموعة $F=\{M_{(a;b)}\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2\}$

أ- بين أن $(F;+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي 0,25

ب- حدد $\dim F$ 0,50