ثانوية آتيس — الامتحان التجريبي لمادة الرياضيات — السنة الدراسية: 12/11

2 ب ع رياضية أ و ب — المدة: 4 ساعات

عدد الصفحات: 3 — المعامل: 9

التمرين الأول: (3,25ن)

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى م م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A و B و C ألحاقها على التوالي هي: $a=2$ و $b=-i$ و $c=1-i$.

1) أحسب $\frac{b-a}{c-a}$ ثم بين أن: $\left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv \arctan 3\ [2\pi]$. 0,75ن

2) لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر التحويل F_n الذي يحول كل نقطة $M(z)$ الى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z'=(1+i)^n z$.

أ- حدد الشكل الأسي للعدد العقدي $(1+i)^n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$. 0.5ن

ب- بين أن F_n هو مركب تبادلي لدوران R_n و تحاك H_n لهما نفس المركز O محددا عناصرهما. 0.75ن

3) لتكن $M_n(z_n)$ و لتكن $M_n'(z_n')$ صورتها بالتحويل F_n.

أ- حدد مجموعة قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي من أجلها تكون النقط O و M_n و M_n' مستقيمية. 0.5ن

ب- تحقق أن: $\frac{z_1'-z_1}{z_1}=i$ واستنتج طبيعة المثلث OM_1M_1'. 0.5ن

4) لتكن (C) الدائرة التي مركزها B وشعاعها $\sqrt{2}$.

حدد صورة الدائرة (C) بالتحويل F_1. 0.25ن

التمرين الثاني (3,25ن)

نذكرك أن $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وأن $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

لكل a و b و c من $\mathbb{R}$ نضع: $\mathrm{M}(a,b,c)=\begin{pmatrix} c & a & b\\ 0 & c & a\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$.

ونعتبر المجموعة التالية: $G=\{\mathrm{M}(a,b,c)\ /\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}$.

1) بين أن G جزء مستقر من $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+)$ و $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\times)$. 0.5ن

2) أ- بين أن $(G,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية. 1ن

ب- هل $(G,+,\times)$ جسم ؟ 0.25ن

3) نعرف في $\mathbb{R}^3$ قانون التركيب الداخلي $*$ التالي:

لكل (a,b,c) و (a',b',c') من $\mathbb{R}^3$ $(a,b,c)*(a',b',c')=(ac'+ca',aa'+bc'+cb',cc')$

أ- بين أن $(G,\times)$ و $(\mathbb{R}^3,*)$ متشاكلتان تقابليا 0.75ن

ب- استنتج أن $(\mathbb{R}^3,+,*)$ حلقة واحدية 0.75ن

الصفحة 3

التمرين الثالث (2,75ن)

نضع $E=\{x\in\mathbb{N}\ /\ x\le 25\}$.

1) نعتبر التطبيق f المعرف من E نحو E والذي يربط كل عنصر x من E بالعدد $f(x)$ باقي القسمة الأقليدية للعدد $11x+8$ على 26.

أ- بين أن f تبايني. 0.5ن

ب- بين أن المعادلة: $11x\equiv 1[26]$ تقبل حلا وحيدا x_0 في E يجب تحديده. 0.5ن

ج- استنتج أن $(\forall(x,y)\in\mathrm{E}^2): y=f(x)\Rightarrow x\equiv 19y+4[26]$. 0.5ن

2) نعتبر التطبيق g المعرف من E نحو E والذي يربط كل عنصر x من E بالعدد $g(x)$ باقي القسمة الأقليدية للعدد x^{13} على 26.

أ- بين أنه لكل x من E، لدينا: $x^{13}\equiv x[13]$ و $x^{13}\equiv x[2]$ واستنتج أن g تبايني. 0.75ن

ب- بين أن g تقابل من E نحو E وحدد تقابله العكسي g^{-1}. 0.5ن

مسألة: (10,50ن)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $f(0)$. 0.25ن

ب- بين أن $(\forall x\in]0;+\infty[): \frac{\pi}{4}e^{-2x}\le f(x)\le\frac{\pi}{4}e^{-x}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5ن

2) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم اعط تأويلا هندسيا لذلك. 0,75ن

3) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $(\forall u\in\mathbb{R}): \int_0^u (u-t)e^t dt=e^u-1-u$. 0,25ن

ب- بين أن: $(\forall u\in\mathbb{R}^+): 0\le\int_0^u (u-t)e^t dt\le\frac{u^2}{2}e^u$. 0,25ن

ج- استنتج أن: $(\forall u\in\mathbb{R}): |e^u-1-u|\le\frac{u^2}{2}e^{|u|}$. 0,5ن

4) ليكن x_0 من $\mathbb{R}$ وليكن h عنصرا من $]-1,0[\cup]0,1[$.

أ- تحقق أن: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt=\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}\left(\frac{e^{-h(1+t^2)}-1+h(1+t^2)}{h(1+t^2)}\right)dt$ 0,25ن

ب- باستعمال السؤال (3-ج)، بين أن: $\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt\right|\le|h|e^2\int_0^1 e^{-x_0(1+t^2)}dt$. 0,5ن

الصفحة 3

ج- استنتج أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad f'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,dt$. — 0.5ن

5) أ- أعط جدول تغيرات الدالة f. — 0.25ن

ب- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي أفصولها 0. — 0,25ن

6) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) . — 0,75ن

الجزء الثاني

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = f(x^2)$.

1) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g'(x) = -2x\, e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt$. — 0,5ن

2) أ- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير ، بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du$. — 0,5ن

ب- استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad g(x) + \left(\int_0^x e^{-u^2}\,du\right)^2 = \frac{\pi}{4}$. — 0,5ن

3) استنتج أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. — 0,25ن

الجزء الثالث :

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in IN)\quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) بين أن : $(\forall x \in [0,1])\ : f(1) \le f(x) \le \frac{\pi}{4}$. — 0.25ن

2) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^+$ وأن $0 < \alpha < 1$. — 0,75ن

3) لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$ و $h = f \circ f$.

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية وأن $(w_n)_n$ تناقصية. — 0,5ن

ب- بين أن h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $(\forall x \in [0,1])\ :\quad |h'(x)| \le e^{-f(1)}$. — 0,5ن

ج- بين أن : $(\forall n \in IN)\quad |v_{n+1} - w_{n+1}| \le e^{-f(1)}|v_n - w_n|$. — 0,5ن

4) أ- تحقق أن $e^{-f(1)} < 1$ و استنتج أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$. — 0,5ن

ب- استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_n$ و $(w_n)_n$ متقاربتان و لهما نفس النهاية α . — 0,5ن

ج- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_n$. — 0,25ن