نيابة عين السبع ثانوية أنيس	الامتحان التجريبي 2 مادة: الرياضيات السنة الدراسية 2010/2011	 المدة: 4 ساعات الصفحة : 1/3

9 ت

التمرين 1

الجزء الأول

(1) بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) : \ln(t) \leq t-1$.

(2) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x-\ln(x)} & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

(a) بين أن f متصلة في 0 على اليمين.

(b) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

c احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(3) ادرس تغيرات الدالة f .

(4) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(a) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 1 .

(b) ارسم في نفس المعلم (T) و (C_f) .

(5) ليكن x عددا حقيقيا بحيث $x \geq 1$ ، نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $v_n = 1 + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln^2(x)}{x^2} + \ldots + \frac{\ln^n(x)}{x^n}$.

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة و حدد نهايتها .

الجزء الثاني

لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي $F(x) = \int_1^x \frac{t}{t-\ln(t)}dt$

(1) ادرس منحى تغيرات F

(2) حدد إشارة $F(x)$ تبعا لقيم x .

(3) (a) بين أن $\forall x \in]0,1] : 0 \leq \frac{x}{x-\ln(x)} \leq x$.

(b) استنتج أن : $(\forall x \in]0,1]) : \frac{x^2-1}{2} \leq F(x) \leq 0$ ثم استنتج أن : $-\frac{1}{2} \leq \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) \leq 0$.

(4) بين أن $(\forall x \in [1,+\infty[) : f(x) \geq 1$ ثم استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

(5) (a) ليكن $x \in \mathbb{R}_+^*$ ، احسب التكاملين : $\int_1^x (1+\ln(t))dt$ و $\int_1^x (1+\frac{\ln(t)}{t})dt$.

(b) بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) : t \geq 1 \Rightarrow \frac{t}{t-\ln(t)} \leq 1 + \ln(t)$.

(c) استنتج أن : $(\forall x \in [1,+\infty[) : F(x) \leq x\ln(x)$.

(d) اثبت أن : $(\forall x \in [1,+\infty[) : x + \frac{\ln^2(x)}{2} - 1 \leq F(x)$.

ص $\frac{2}{3}$

التمرين 2 — 4 ن

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$
لكل z من $\mathbb{C}-\{-i\}$ نضع $\varphi(z)=i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$ و نعتبر النقطتين A و B التي لحقيهما $z_A=2i$ و $z_B=i$ و لتكن النقطة M ذات اللحق z.

I (1) بين أن : $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}) : |\varphi(z)|=\frac{AM}{BM}$
و أن : $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i,2i\}) : arg(\varphi(z))\equiv(\overline{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}})+\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

(2) حدد طبيعة كل من المجموعتين $E=\{M(z)/|\varphi(z)|=1\}$ ، و $F=\{M(z)/\varphi(z)\in i\mathbb{R}\}$ ،

II (1) بين أن :
$(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}) : arg(\varphi(z)-i)\equiv-arg(z-i)\quad[2\pi]$; $(\forall z\in\mathbb{C}-\{i\}) : |\varphi(z)-i|=\frac{1}{|z-i|}$

(2) بين أنه إذا كانت النقطة $M(z)$ تنتمي إلى الدائرة $(\mathcal{C})$ التي مركزها B و شعاعها $\frac{1}{2}$ فإن النقطة $M'(\varphi(z))$ تنتمي إلى دائرة يتم تحديدها .

(3) أنشيء النقطة M' انطلاقا من النقطة M

III (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\varphi(z)=z$ نرمز ب u و v حلي هذه المعادلة بحيث $\mathcal{R}_e(u)=1$.

(2) ليكن : $z\in\mathbb{C}-\{i,u,v\}$ و $M(z)$ و $M'(\varphi(z))$ و $C(u)$ و $D(v)$.

(a) بين أن : $\frac{\varphi(z)-u}{\varphi(z)-v}=-\frac{z-u}{z-v}$

(b) استنتج أن : $(\overline{\overrightarrow{M'D},\overrightarrow{M'C}})\equiv\pi+(\overline{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC}})\quad[2\pi]$

(c) بين أنه إذا كانت النقط M و C و D مستقيمية فان النقط M' و M و C و D مستقيمية و إذا كانت M و C و D غير مستقيمية فإن النقط M' و M و C و D تكون متداورة .

التمرين 3 — 3 ن

1أ)حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $35x-192y=1$

ب) بين ان المعادلة: $\overline{35}x=\overline{1}$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{Z}/192\mathbb{Z}$ ثم استنتج حلها

2)أ) بين انه يوجد عددين أولين مختلفين p و q يحققان:

$$(p-1)(q-1)=192 \quad \text{و} \quad PGCD((p-1),(q-1))=4$$

3) ليكن a من $\mathbb{N}^*$

أ) بين ان : $a^{385}\equiv a\quad[13]$

ب) استنتج ان : $a^{385}\equiv a\quad[221]$

4) أ) تحقق من : $2008\equiv 19\quad[221]$

ب) استنتج مما سبق باقي القسمة الاقليدية العدد $2008^{385^{2009}}$ على 221

5) ليكن b مجموع ارقام العدد $2008^{385^{2009}}$ في نظمة العد العشري

حدد باقي القسمة الاقليدية للعدد b على 9

4 ن

التمرين :

ليكن α حلا للمعادلة $z^2+z+1=0$ في $\mathbb{C}$

نضع : $\mathbb{Z}[\alpha]=\{a+b\alpha \,/\, (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$

1 - بين أن $(\mathbb{Z}[\alpha],+)$ زمرة تبادلية . 0,5

2 - أ- بين أن : $(\mathbb{Z}[\alpha],+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية 0,5

ب- هل $(\mathbb{Z}[\alpha],+,\times)$ حلقة كاملة ؟ 0,5

3- تحقق أن : $\mathbb{Z}[\alpha]=\mathbb{Z}[\bar{\alpha}]$ 0,5

4- نعتبر التطبيق f المعرف بمايلي :

$$f:\ \mathbb{Z}[\alpha]\longrightarrow\mathbb{Z}$$
$$a+b\alpha\longmapsto a^2+b^2-ab$$

أ- بين أن : $f(x)=|x|^2$, $\forall x\in\mathbb{Z}[\alpha]$ 0,5

ب- بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Z}[\alpha],\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\times)$ 0,5

د- لتكن G المجموعة المكونة من عناصر $\mathbb{Z}[\alpha]$ التي تقبل مقلوبا أي مماثلا بالنسبة لـ "$\times$"

i- بين أن : $f(G)=\{1\}$ 0,5

ii- إستنتج G . 0,5