

www.9alami.com

التمرين الأول

3 ن

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx \quad \text{لكل } n \in \mathbb{N} \text{ نضع}$$

(1) أحسب I_0 .

(2) (a) بين أن $I_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

(b) بين أن المتتالية (I_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة.

(3) (a) بين أن $I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

(b) استنتج $\lim I_n$.

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \quad \text{(4) (a) بين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن}$$

$$(b) \text{ بين أن } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

(c) استنتج $\lim nI_n$.

التمرين الثاني

9 ن

لكل دالة متصلة على $]-1, +\infty[$ نعتبر الدالة $T(f)$ المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt$$

الجزء الأول

(1) حدد الدالة $T(f)$ إذا كانت f ثابتة يعني $f(t) = a$ ($\forall t \in]-1, +\infty[$).

(2) حدد الدالة $T(f)$ إذا كانت f معرفة بـ: $f(t) = \frac{t(t+1)}{(t+2)^2}$ ($\forall t \in]-1, +\infty[$).

الجزء الثاني

نفترض في هذا الجزء أن الدالة f معرفة بما يلي: $f(t) = e^{-t}$ ($\forall t \in]-1, +\infty[$).

(1) (a) بين أن الدالة $T(f)$ قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ واحسب $(T(f))'(x)$.

(b) ضع جدول تغيرات الدالة $T(f)$ على $]-1, +\infty[$.

(2) (a) بين أن $(\forall x \geq 0) : T(f)(x) \leq 1 - e^{-x}$

(b) استنتج أن الدالة $T(f)$ تقبل نهاية منتهية l في $+\infty$ وأن $l \leq 1$.

(3) (a) بين أن $(\forall -1 < x < 0) : T(f)(x) \leq \ln(1+x)$

(b) استنتج $\lim_{x \rightarrow -1^+} T(f)(x)$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها ..

(4) أنشئ المنحنى $(C_{T(f)})$.

(5) (a) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln(x)} = 0$

(b) بين أن $(\forall x \geq 1) : 0 \leq T(f)(x) \leq \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{x} \int_{\ln(x)}^x \frac{1}{1+t} dt$

(c) استنتج أن

$(\forall x \geq 1) : 0 \leq T(f)(x) \leq \ln(1 + \ln(x)) + \frac{1}{x} [\ln(1+x) - \ln(1 + \ln(x))]$

(d) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{T(f)(x)}{\ln(x)}$

الجزء الثالث

نعتبر في هذا الجزء الدالة f_n المعرفة بما يلي : $(\forall t \in]-1, +\infty[) : f_n(t) = t^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

(1) ليكن $x > -1$.

(a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : T(f_n)(x) + T(f_{n+1})(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

(b) أحسب $T(f_1)(x)$.

(c) استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : T(f_n)(x) = (-1)^n \left[\ln(1+x) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^k}{k} \right]$

(2) ليكن $x \in]-1, 1[$.

(a) بين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} T(f_n)(x) = 0$

(b) استنتج أن $\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

التمرين

5

المستوى φ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$. A هي النقطة ذات اللق 2. ليكن التطبيق φ من \mathcal{P} نحو \mathcal{P} الذي

يربط كل نقطة M ذات اللق z بالنقطة M' ذات اللق z' بحيث: $z' = \frac{3+\sqrt{3}i}{4}z + \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

- 1- بين أن A هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتطبيق φ .
- 2- لتكن M نقطة من \mathcal{P} . تخالف A و M' صورتها بالتطبيق φ .

(أ) بين أن $z'-2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) (z-2)$

- (ب) استنتج AM' بدلالة AM وحدد قياسا للزاوية $(\widehat{AM}; \widehat{AM'})$.
- (ج) بين أن المثلث AMM' قائم الزاوية في M' .
- (د) أنشئ M' في حالة $z = 4+i$

3- (أ) بين أن $\varphi = \text{hor } r$ حيث r هو الدوران ذو المركز A والزاوية $\frac{\pi}{6}$ و h هو التحاكي ذو المركز A والنسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (ب) حدد صورة الدائرة (C) ذات المركز O والشعاع 1 بالتطبيق φ .
- 4- ليكن n عدداً من \mathbb{N}^* ونعتبر التطبيقات φ_n من \mathcal{P} نحو \mathcal{P} المعرفة بما يلي: $\varphi_1 = \varphi$ و $\varphi_{n+1} = \varphi \circ \varphi_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)
نضع $M_n(O) = \varphi_n(O)$ وليكن z_n لق النقطة M_n .
(أ) احسب z_1 .

(ب) تحقق أن $M_{n+1} = \varphi(M_n)$ واستنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) z_{n+1} - 2 = \frac{3+\sqrt{3}i}{4} (z_n - 2)$

(ج) نضع $t_n = z_n - 2$. بين بالترجع أن: $t_n = -2 \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{4} \right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) ثم حدد z_n بدلالة n .

(د) اكتب العدد $\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{4} \right)^n$ على شكله الجبري ثم حدد قيم n التي من أجلها النقطة M_n تنتمي إلى المحور $(O; \vec{i})$.

التمرين

3

a و b عدداً صحيحان طبيعيين بحيث $a > b$. نعتبر العدد $N = ab(a^{30} - b^{30})$.

- 1- ليكن p عدداً أولياً موجباً بحيث $p-1$ يقسم العدد 30.
(أ) بين أن العدد N يقسم p (يمكنك استعمال مبرهنة فيرما)
- (ب) حدد قيم p واستنتج أن N يقبل القسمة على 14 322.

2- نفترض أن: $\begin{cases} a^2 + b^9 = 1953637 \\ a^{13} - b^{13} = 1220694933 \end{cases}$

- (أ) تحقق أن $b < a < 10$
- (ب) بين أن: $x^9 \equiv x[5]$ و $x^{13} \equiv x[5]$ ($\forall x \in \mathbb{N}$) و $x^9 \equiv x[5]$ و $x^{13} \equiv x[5]$
- (ج) استنتج أن $\begin{cases} a+b \equiv 2[5] \\ a-b \equiv 3[5] \end{cases}$ وحدد قيمة كل من a و b ثم بين أن N يقبل القسمة على 71 610.