

التمرين الأول ك 3 ن

المستوى  $P$  منسوب إلى معزم متعامد منظم ومباشر  $(O; \bar{1}; \bar{i})$ . نعتبر التطبيق  $\varphi$  الذي يربط كل نقطة  $M$  من  $P$  لنقطة  $z$

$$z' = -i\bar{z} + 2i \quad \text{بحيث}$$

فيما يلي نعتبر النقط:  $A$  و  $B$  و  $C$  التي الحقاها على التوالي  $z_A = 2i$  و  $z_B = 2$  و  $z_C = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$  والنقط  $M$  و  $N$

و  $M'$  و  $M''$  التي الحقاها على التوالي  $z$  و  $\bar{z}$  و  $z'$  و  $\bar{z}'$  بحيث  $M'$  هي صورة  $M$  بالتطبيق  $\varphi$  و  $z \in \mathbb{C}^* - \{-2\}$ .

1- حدد النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالتطبيق  $\varphi$ . 0,50

2- أ) بين أن المستقيمين  $(ON)$  و  $(AM')$  متعامدان. 0,50

ب) لتكن  $(\mathcal{C})$  الدائرة التي مركزها  $O$  وشعاعها 2

حدد  $\mathcal{C}' = \varphi(\mathcal{C})$  0,50

ج) تحقق أن  $C \in (\mathcal{C})$  وكتب  $z_C$  على الشكل المتكافئ ثم أضحى  $(\mathcal{C})$  و  $(\mathcal{C}')$  و  $C$  و  $C'$ . 0,50

3- لتكن  $M$  نقطة من  $(\mathcal{C})$  تخالف  $B$ . بين أن:  $z = 2e^{i\theta}$   $\exists \theta \in ]0; 2\pi[$  ثم حدد معيار وعتمة  $z'$  بدلالة  $\theta$ . 0,50

4- أ) بين أن  $M'$  هي صورة  $M$  بالدوران  $r$  الذي مركزه  $\Omega(1-i)$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  0,50

ب) ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^* - \{1\}$  ونعتبر النقطة  $M_n$  ذات اللق  $z^n$ . حدد  $z$  إذا طمت أن  $r(M_n) = B$ . 0,50

التمرين الثاني ك 3 ن

1) بين أن 163 عدد أولي 0,25

2) نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة:  $(E): 13x - 162y = 1$

حل المعادلة  $(E)$  0,50

3) نعتبر في  $\mathbb{Z}$  النظمة:  $(S): \begin{cases} x \equiv a [13] \\ x \equiv b [162] \end{cases}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان من  $\mathbb{Z}$

أ- تحقق من أن العدد  $x_0 = 325b - 324a$  هو حل للنظمة  $(S)$  0,25

ب- بين أن:  $(S) \iff x \equiv x_0 [2106]$  0,50

ج- حل في  $\mathbb{Z}$  النظمة  $(S)$  في الحالة  $a=2$  و  $b=3$  0,50

4) ليكن  $x$  عددا من  $\mathbb{Z}$  بحيث:  $x^{25} \equiv 3 [163]$

أ- بين أن:  $x \wedge 163 = 1$  ثم أن:  $x \equiv 3^{13} [163]$  0,75

ب- استنتج أن:  $x \equiv 3^{13} [163] \iff x^{25} \equiv 3 [163]$  0,75

## التمرين الثالث (3)

تذكير:  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  حلقة واحدة(1) نرود المجموعة  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  بقانون التركيب الداخلي  $T$  المعرف بما يلي:

$$(\forall (a;b) \in G)(\forall (c;d) \in G) \quad (a;b)T(c;d) = (ac; ad+bc)$$

أ- بين أن القانون  $T$  تبادلي وتجميعي

0,50

ب حدد العنصر المحايد للقانون  $T$ 

0,25

ج- بين أن  $(G, T)$  زمرة تبادلية

0,25

د- ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^* - \{1\}$  بين أن  $\underbrace{(-1;1)T \dots T(-1;1)}_{n \text{ مرات}} = ((-1)^n; n(-1)^{n+1})$ 

0,50

(2) لكل  $(a;b)$  من  $\mathbb{R}^2$  نضع:  $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  ونعتبر المجموعة  $E = \{M_{(a;b)} / (a;b) \in G\}$ أ- بين أن  $E$  جزء مستقر من  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ 

0,25

ب- بين أن التطبيق:  $f: G \rightarrow E$   $(a;b) \rightarrow M_{(a;b)}$  تشاكل تقابلي من  $(G, T)$  نحو  $(E, \times)$ 

0,50

ج- استنتج بنية  $(E; \times)$  ثم حدد مقلوب كل مصفوفة  $M_{(a;b)}$  من  $E$ 

0,25

د- نضع:  $A = M_{(-1;1)}$  احسب:  $A^n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^* - \{1\}$ 

0,50

## التمرين الرابع (3 نقط)

## الجزء I

ليكن  $a$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم بحيث:  $a \wedge 10 = 1$ (1) أ- بين أن  $a$  عدد فردي واستنتج أن:  $a^8 \equiv 1 [2]$ 

0,25

ب- بين أن  $a$  غير قابل للقسمة على 5 وأن  $a^4 \equiv 1 [5]$ 

0,25

ج- استنتج أن  $a^8 \equiv 1 [10]$ 

0,25

(2) أ- بين أن  $\forall k \in \mathbb{N}$ 

0,75

ب- استنتج أن:  $a^{8 \times 10^k} \equiv 1 [10^{k+1}]$  و  $a^{800000001} \equiv a [10^9]$ ب- باستعمال نتيجة السؤال السابق، أثبت وجود عدد صحيح طبيعي  $x$  بحيث الكتابة العشرية للعدد  $x^3$  تنتهي

0,5

بالعدد 123456789

الجزء الثاني

61- نضع  $E = \{0, 1, 2, \dots, 30\}$  ونعتبر التطبيق  $f$  من  $E$  نحو  $E$  والذي يربط كل عنصر  $n$  من  $E$

ببإحدى القسمة ل  $27n + 4$  على 31

بين أن  $f$  تقابل من  $E$  نحو  $E$  وحدد  $f^{-1}$ .

مسألة: (7 ن)

لكل  $n$  من  $\mathbb{N} - \{0, 1\}$  نضع:  $I = ]-\frac{1}{n}, +\infty[$

نعتبر الدالة العددية  $f_n$  المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{\ln(1+nx)}{x} & ; x \in I - \{0\} \\ f_n(0) = n \end{cases}$$

(1) ا- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  و أول النتيجة هندسيا.

50 ن

ب- بين أن الدالة  $f_n$  متصلة على اليمين في 0.

50 ن

(2) نعتبر الدالة  $\varphi_t$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $I$  بمايلي:

$$t \in I ; \varphi_t(x) = x^2 (\ln(1+nt) - nt) - (\ln(1+nx) - nx)t^2$$

ا- باستعمال  $\varphi_t$  بين أنه يوجد عدد  $c$  من  $]0, t[$  بحيث:

50 ن

$$\frac{\ln(1+nt) - nt}{t^2} = \frac{-n^2}{2(1+nc)}$$

ب- استنتج أن  $f_n$  قابلة للاشتقاق في 0 وان  $f_n'(0) = -\frac{n^2}{2}$

50 ن

(3) نعتبر الدالة  $g_n$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $I$  بمايلي:

$$g_n(x) = nx - (1+nx) \ln(1+nx)$$

ا- بين أن:  $(\forall x \in I - \{0\}) g_n(x) < 0$

50 ن

ب- بين أن  $f_n$  قابلة للاشتقاق على  $I - \{0\}$  وان:

$$\forall x \in I - \{0\} f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2(1+nx)}$$

50 ن

ج- اعط جدول تغييرات الدالة  $f_n$ .

50 ن

(4) ادرس الوضع النسبي لمنحني الدالتين  $f_n$  و  $f_{n+1}$  على المجال  $[0, +\infty[$ .

5 ن

(5) ا- بين أن المعادلة  $f_n(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  في  $[0, +\infty[$ .

5 ن

ب- بين أن  $1.09 < \alpha_2 < 1.01$  وحدد باستعمال طريقة التفرع الثاني تاثيرا

5 ن

للعدد  $\alpha_2$  سعته 0,02.

ج- بين أن المتتالية  $(\alpha_n)$  تزايدية.

5 ن

د- احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .

5 ن

(6) - انشى في معلم متعاهد ممنظم منحني الدالتين  $f_2$  و  $f_3$ .

5 ن

+ 0,5