

التمرين الأول (7نقط)

ليكن n من N^* نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي والمعرفة بما يلي :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$$

و (C_n) منحنى f_n في معلم متعامد ممنظم $(0; \bar{I}, \bar{J})$

(I) نضع في هذا الجزء $n=1$

(1) احسب نهايات f_1 عند محداة مجموعة تعريفها

0,50

(2) ادرس تغيرات f_1 وضع جدولاً لها

0,50

(3) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على R^+ بما يلي : $g(x) = e^x - x^2 - x$

أ- ادرس تغيرات g'

0,50

ب- بين ان المعادلة : $g'(x) = 0$ تقبل حلين احدهما α ينتمي الى المجال $\left]1; \frac{3}{2}\right[$

0,50

ج- استنتج ان $g(x) \geq 0$ على R^+

0,25

د- حدد الوضع النسبي بين (C_1) والمستقيم دو المعادلة : $y = x$ على R^+

0,50

ه- حدد الفروع اللانهائية ل (C_1)

0,50

(4) ليكن h قصور f_1 على R^+

أبين ان h تقابل من R^+ الى مجال J يتم تحديده

0,50

ب- بين ان h^{-1} قابلة للاشتقاق في $\frac{e}{2}$ واحسب $(h^{-1})'(\frac{e}{2})$

0,50

(5) انشئ (C_1) و (C_{n-1}) (منحنى h^{-1})

0,50

(II) ناخذ في هذا الجزء $n \geq 2$

(1) احسب نهايات f_n عند محداة مجموعة تعريفها

0,50

(2) أ- ادرس تغيرات f_n وحدد قيمتها الدنياوية β_n

0,50

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$

0,25

(3) ادرس الوضع النسبي بين (C_{n+1}) و (C_n)

0,50

(4) انشئ (C_2) في نفس الشكل مع (C_1)

0,50

التمرين الثاني (3نقط)

نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة بما يلي : $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(1+k)}{1+k}$

(1) حدد الدالة F الاصلية للدالة : $f : x \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ والتي تنعدم في 0

1

(2) ليكن k عدد صحيح طبيعي و $k \geq 1$

1

باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين ان : $\frac{\ln(k+2)}{k+2} \leq F(k+1) - F(k) \leq \frac{\ln(k+1)}{k+1}$

(3) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

1

تمرين 3 (5 نقط)

لكل z من \mathbb{C} نضع : $P(z) = z^3 - (5-2i)z^2 + (5-4i)z - 9-2i$ (1) بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا يتم تحديده

(5 ن)

0,50

ب - حل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - (5-3i)z + 2-9i = 0$

0,50

ج - حدد حلول المعادلة : $P(z) = 0$ من \mathbb{C}

0,50

(2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ ولتكن النقط A و B و C و J ذات الألفاق i و $1-2i$ و $4-i$ و 2 على التوالي

أ - بين أن المثلث ABC متساوي الساقين وثم الزاوية في B

0,50

ب - ليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حدد لحق النقطة D صورة B بالدوران r

0,50

ج - لتكن (Γ) مجموعة النقط التي الحلقها تكتب على الشكل $2 + \sqrt{5}e^{i\alpha}$ حيث α يتغير في \mathbb{R} . حدد المجموعة (Γ) وبين أن $ABCD$ مربع تنتمي رؤوسه إلى (Γ)

1

(3) لكل n من \mathbb{N} ، نعتبر النقط M_n ذات اللحق z_n بحيث $z_0 = 4-i$ و $M_{n+1} = r(M_n)$

أ - تحقق أن : $z_n = (4-2i)^n + i$

0,75

ب - حسب z_{2014}

ج - حدد قيم n من \mathbb{N} بحيث $M_n \in \Gamma$

0,75

تمرين 4 (5 نقط)
الجزء الأول:

(5 ن)

نعرف في المجموعة $G = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ قانون التركيب الداخلي T بما يلي :

$$\forall (x,y) \in G ; \forall (x',y') \in G \quad (x,y)T(x',y') = (xx', \sqrt{xy'} + x'y)$$

(1) بين أن (G,T) زمرة غير تبادلية

1

(2) نعتبر المجموعة $F = \{(1;y) / y \in \mathbb{Z}\}$ بين أن (F,T) زمرة جزئية للزمرة (G,T) هل هي تبادلية ؟ علل جوابك .

1

الجزء الثاني :

لتكن المجموعة D بحيث :

$$D = \left\{ M_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & y \\ 0 & x \end{pmatrix} / (x,y) \in G \right\}$$

(1) بين أن D جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); \times)$

0,50

(2) نعتبر للتطبيق φ بحيث :

$$\varphi : G \rightarrow D$$

$$(x,y) \rightarrow M(x,y)$$

أ - بين أن φ تشكل تقابلي من (G,T) نحو (D,\times)

0,50

ب - استنتج بنية (D,\times) وحدد مقلوب $M(x,y)$

0,75

(3) نضع $A = M(1;1)$ و $I = M(1;0)$ نعتبر المجموعة $E = \{aI + bA / (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$

0,50

أ - تحقق من أن : $A^2 = -I + 2A$ و استنتج A^{-1}

ب - بين أن $(E, +; \times)$ حلقة تبادلية وواحدية . هل هي كاملة ؟ علل جوابك

0,75