أكاديمية البيضاء الكبرى نيابة عين السبع الحي المحمدي	الامتحان التجريبي 1 2013	الشعبة:	الثانية علوم الرياضية
		المادة	الرياضيات
		مدة الانجاز	4ساعات
		الصفحة	1

التمرين 1 :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $g_n(x) = 1+x-e^{-nx}$

I) 1) أعط جدول تغيرات g_n على $\mathbb{R}$ — 0,50

2) أدرس الفروع اللانهائية لـ $\mathcal{C}_{g_n}$ — 0,50

3) أنشئ $\mathcal{C}_{g_1}$ (لاحظ أن $g_n(0)=0$) — 0,50

4) أ) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ \exists! \, x_n>0 \, / \, g_n(x_n) = 1$ — 0,50

ب) بين أن $(x_n)_n$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة — 0,75

ج) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ — 0,75

II) نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كمايلي : $y_1=1$ و $y_{n+1}=e^{-y_n}$

1- بين أن x_1 هو الحل الوحيد لـ $e^{-x}=x$ وأن $\frac{1}{e}\leq x_1\leq 1$ — 0,50

2- بين أن $\frac{1}{e}\leq y_n\leq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ — 0,50

3- بين أن : $|y_{n+1}-x_1|\leq e^{-\frac{1}{e}}|y_n-x_1| \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ — 0,75

4- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ — 0,75

III) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمايلي: $F(0)=\frac{\ln 2}{2}$ و $\forall x>0, \ F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{g_1(t)}\,dt$

1- أ- بين أن $\frac{1}{1+t}\leq\frac{1}{g_1(t)}\leq\frac{1}{t} \quad \forall t>0$ — 0,50

ب- إستنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ — 0,75

2- أ- بين أن $1-t\leq e^{-t}\leq 1-t+\frac{t^2}{2} \quad , \forall t>0$ — 0,75

ب- أدرس اتصال وقابلية إشتقاق F في 0 على اليمين — 1

3- بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ وأحسب $F'(x)$, $\forall x>0$ — 0,50

4- أعط جدول تغيرات F وأنشئ $\mathcal{C}_F$ — 1

التمرين 2 :

(A) نعتبر المستوى P منسوبا إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، A نقطة لحقها 2

f تطبيق من P نحو P بحيث لكل $M(z)$ و $M'(z')$

$$f(M)=M' \Leftrightarrow z'=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

1- ماهي طبيعة f — 0,50

2- أحسب AM' بدلالة AM وحدد قياس الزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}})$ — 1

3- بين أن المثلث AMM' قائم الزاوية في M' — 0,75

4- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر التطبيقات f_n من P نحو P بحيث

$f_1=f$ و $f_{n+1}=f\circ f_n$. نضع $M_n=f_n(O)$ بحيث z_n لحق M_n

أ) حدد z_n بدلالة n . — 1

ب) حدد قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي من أجلها M_n ينتمي إلى المحور $(O,\vec{i})$ — 1

(B) 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية وأكتب حلولها على الشكل الأسي

أ- $z^7=\bar{z}$ — 1

ب- $(1-iz)^n=(1+iz)^n$ ، $n\in\mathbb{N}^*$ — 1

(C) 1- باستعمال الجذور النونية لـ 1 ، بين أن — 1

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(2-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)=2^n-1$$

2- إستنتج أن : — 1

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(5-4\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=(2^n-1)^2$$

التمرين 3 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة ب : $u_n=\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!\,n^n}}$ — 1,25

أحسب $\ln(u_n)$ واستنتج أن :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=4e^{-1}$$

الأجزاء A و B و C غير مرتبطة