المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي
قطاع التعليم المدرسي
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
لجهة الدار البيضاء الكبرى

الامتحان التجريبي لمادة الرياضيات
السنة الثانية بكالوريا شعبة العلوم الرياضية ب
2012

المدة : 4 ساعات
المعامل 9

التمرين الأول : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ و m عدد عقدي.

1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2-(m-i\bar{m}+1-i)z-i|m-i|^2=0$

0,5 أ- تحقق أن مميز المعادلة هو : $\Delta=(m+i\bar{m}-1-i)^2$

0,5 ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

0,5 ج- بين أن m ليس حلا للمعادلة (E)

2) في كل مايلي نفترض أن $m\neq i$ ونضع: $z_1=m-i$ و $z_2=1-i\bar{m}$

نعتبر في المستوى العقدي النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$

0,5 أ- بين أن $A\neq O$ و $B\neq O$ وأن $OB=OA$

0,5 ب- حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون $(OA)\perp(OB)$

0,5 ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ تكون النقط O و A و B مستقيمية.

0,5 د- حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ في الحالة $m=e^{i\frac{\pi}{3}}$

التمرين الثاني: (3,5 ن)

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_a): 2z^2+a(1-i)z+a^2(1-i)=0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.

0,5 1) أحسب $(a+3ia)^2$.

0,5 2) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_a).

0,5 3) حدد معيار و عمدة كل من z_1 و z_2 بدلالة معيار و عمدة a.

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ،

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما على التوالي a و ia :

1) بين أن المثلث OAB قائم الزاوية و متساوي الساقين. 0,5

2) ليكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z'=(1+i)z-ia$

أ- نفترض أن $M\neq A$. بين أن $AM'=\sqrt{2}AM$ وحدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)$. 0,5

ب- لتكن (C) الدائرة التي مركزها A و شعاعها $\sqrt{2}$. 0,5

بين أن صورة (C) بالتطبيق F هي دائرة (C') محددا مركزها و شعاعها.

ج- نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{4}$ التطبيق $h=r\circ F$. 0,5

حدد الصيغة العقدية للتطبيق h و استنتج طبيعته و عناصره المميزة.

التمرين الثالث :(3 ن)

1) بين أن 163 عدد أولي 0.25

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E):\ 13x-162y=1$

أ- حدد حلا خاصا للمعادلة (E) 0,25

ب- حل المعادلة (E) 0,5

3) نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases}x\equiv a\ [13]\\ x\equiv b\ [162]\end{cases}$ حيث a و b عددان من $\mathbb{Z}$

أ- تحقق من أن العدد $x_0=325b-324a$ هو حل للنظمة (S) 0.25

ب- بين أن: $(S)\Longleftrightarrow x\equiv x_0\ [2106]$ 0.5

ج- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) في الحالة $a=2$ و $b=3$ 0.25

4) ليكن x عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث : $x^{25}\equiv 3\ [163]$

أ- بين أن: $x\wedge 163=1$ ثم أن: $x\equiv 3^{13}\ [163]$ 0.5

ب- استنتج أن: $x^{25}\equiv 3\ [163]\Longleftrightarrow x\equiv 3^{13}\ [163]$ 0.5

مسألة : (10 ن)

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $\begin{cases}f_n(x)=x^2e^{\frac{-n^2}{x^2}}\ ,\ x\neq 0\\ f_n(0)=0\end{cases}$

الجزء الأول : نضع: $f = f_1$ وليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

1) تحقق من أن الدالة f زوجية — 0.25

2) أ- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ — 0.5

ب- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$ — 0.25

3) أ- بين أن f متصلة على اليمين في الصفر — 0.25

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر وأول النتيجة هندسيا — 0.5

4) اعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ — 0.5

5) لكل n من $\mathbb{N}^*$ و لكل x من $\mathbb{R}$ نضع: $g_n(x) = x^2 - n^2$

أ- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x \geq x+1$ — 0.25

ب- استنتج أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_n(x) \geq g_n(x)$ — 0.5

ج- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - g_n(x)) = 0$ — 0.5

6) ارسم في نفس المعلم منحنى الدالة g_1 و المنحنى (C) — 1

الجزء الثاني:

1) أ- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ يوجد عدد حقيقي وحيد u_n موجب قطعا بحيث: $f_n(u_n) = 1$ — 1

ب- تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n > 1$ — 0.25

ج- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) \quad u_n > \frac{n}{\sqrt{2\ln n}}$ — 0.5

د- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ — 0.25

2) أ- تحقق من أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2(u_n)^2 \ln(u_n) = n^2$ — 0.25

ب- بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \ln 2 + 2\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = 2\ln n$ — 0.25

ج- استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln n} = 1$ — 0.5

الجزء الثالث :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية g بحيث : $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$

1) بين أن الدالة g معرفة على $\mathbb{R}^+$ — 0.25

2) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ واحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$ — 0.5

3) أ- بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad g(x) \geq \sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - 1\right)$ — 0.5

ب- استنتج النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ — 0.5

4) أ- بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad 0 \leq g(x) \leq \sqrt{x} f(\sqrt{x})$ — 0.5

ب- استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر — 0.25