ثانوية أنفيس / نيابة عين السبع	الامتحان التجريبي رقم 4	
	مادة: الرياضيات / ع رياضية	المدة: 4 ساعات
	السنة الدراسية 2010/2009	الصفحة : 1/2

التمرين الأول 4 نقط

المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A(1)$, $A'(-1)$, $B(i)$, $B'(-i)$ من المستوى .

نربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثين BMM_1 و AMM_2 متساويي الساقين وقائمي الزاوية مع : $(\overline{M_1B},\overline{M_1M})\equiv(\overline{M_2M},\overline{M_2A})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. أ. بين أن $z-z_1=i(i-z_1)$ و $1-z_2=i(z-z_2)$ — 1

ب. تحقق أن $z_1=\frac{1+i}{2}(z+1)$ و $z_2=\frac{1-i}{2}(z+i)$. — 0.5

2. أ. اثبت أن $OM_1=OM_2 \Leftrightarrow |z+1|=|z+i|$ — 0.5

ب. استنتج (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ التي من اجلها تكون $OM_1=OM_2$ وانشيء (Δ). — 0.5

ج. اثبت أن $OM_1=M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2=2|z|^2$. — 0.5

د . استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي من اجلها يكون $OM_1=M_1M_2$ وانشيء (Γ) — 0.5

3. استنتج النقط $M(z)$ التي من اجلها يكو ن المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع . — 0.5

التمرين الثاني 3,5 نقط

المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

نعتبر التطبيق g من (P) إلى (P) الذي يربط كل نقطة M(z) بالنقطة M'(z') بحيث $z'=(1+i)\bar{z}-1+3i$

1. حدد النقط الصامدة ب g . — 0.5
2. بين أن gog تحاك محددا مركزه Ω ونسبته k . — 0.5
3. بين انه عندما تتغير M(z) على الدائرة $C(O,1)$ فان $M'(z')$ تتغير على مجموعة (C') يتم تحديدها — 1
4. نفترض أن $z=m+ni$ حيث m و n عنصرين من $\mathbb{Z}$ ونعتبر النقطة $A(3+2i)$

أ. بين أن $(\Omega A)\perp(\Omega M')\Leftrightarrow 5m+3n=-2$ et $(m,n)\neq(-1,1)$. — 0.5

ب. تحقق أن حلول $5m+3n=-2$. في $\mathbb{Z}^2$ هي الأزواج $(-3k-1, 5k+1)$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ — 0.5

ج. استنتج النقط $M(m+ni)$ حيث m و n تنتميان للمجال $[-6,6]$ و $(\Omega A)\perp(\Omega M')$. — 0.5

التمرين الثالث 12,5 نقط

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي:
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}} & ; \ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

الجـــــــــزء الأول

1) تحقق أن f متصلة في 0 . — 0,5

2) لكل $x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[$ نضع

$u(t)=\ln(1+t)-t$ و $v(t)=t^2$ و $w(t)=u(t)v(x)-u(x)v(t)$

a) باستعمال مبرهنة ROLLe بين أنه يوجد c محصور بين 0 و x بحيث : $\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u'(c)}{v'(c)}$ — 1

b) استنتج أن $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$ — 0,5

3) a) بين أن $(\forall x\neq 0):\ \frac{f(x)-f(0)}{x}=\left(\frac{2+x}{2}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{h(x)}-1}{h(x)}$ — 0,5

حيث h دالة تحقق $\lim_{x\to 0}h(x)=0$.

4) a) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-1^+} f(x)$.	1
b) بين $\frac{1+x}{x}$. $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}\frac{1}{2}}$: $(\forall x \neq 0)$	0,5
c) استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .	0,5
5) نعتبر الدالة φ المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي: $\varphi(x) = \frac{x^2+2x}{1+x} - 2\ln(1+x)$	
a) أدرس تغيرات الدالة φ واستنتج إشارتها . (لاحظ أن $\varphi(0) = 0$) .	1
b) بين أن $f'(x) = \frac{1}{2x^2}\varphi(x)f(x)$: $(\forall x \neq 0)$.	0,5
c) ضع جدول تغيرات الدالة f على $]-1,+\infty[$.	0,5
d) استنتج أن $f(x) \geq 1$: $(\forall x \in]-1,+\infty[)$.	0,5
6) أنشئ المنحنى (C_f) .	1
الجـــــزء الثـــــاني	
لكل $x \in \mathbb{R}^+$ و $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $u_n(x) = \frac{(nx)^n n^{\frac{1}{2}}}{n!}$ ونضع $v_n = u_n\left(\frac{1}{e}\right)$	
1) a) بين أن $\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e.x.f\left(\frac{1}{n}\right)$ $(\forall x > 0)$	0, 5
b) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية :	0,5
2) a) بين أن $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$.	0, 5
b) استنتج أن $\ln(f(x)) \leq \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{6}$: $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$.	0, 5
3) ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	
a) بين أن $\ln\left(u_{k+1}\left(\frac{1}{e}\right)\right) - \ln\left(u_k\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leq \frac{1}{12}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{k^3}$: $(\forall k \in [\![1, n-1]\!])$	0, 5
b) استنتج أن $\ln\left(u_n\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{12}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{k^3}\right)$: $(\forall n \geq 1)$	0, 5
c) أثبت أن المتتالية (v_n) مكبورة واستنتج أنها متقاربة .	0,5
4) أحسب $\lim\left(\frac{n^n e^{-n}}{n!}\right)$	0,5