أكاديمية الجهة الشرقية
نيابة وجدة

المـادة : الـريـاضيـات

مذكرة رقم : 1
الأستاذ : عثماني نجيب

مذكرة رقم 1 في درس المتتاليات الترجعية

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- المتتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$ وتمثيلها مبيانيا؛ - نهايات المتتاليات المرجعية: $(n)_{n\geq 0}$ و $(n^2)_{n\geq 0}$ و $(n^3)_{n\geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ و $(n^p)_{n\geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، - نهايات المتتاليات المرجعية: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3؛ - نهاية متتالية هندسية (a^n) حيث $a\in\mathbb{R}$. - العمليات على النهايات؛	- استعمال المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية في دراسة أمثلة من متتاليات من الشكل: $u_{n+1}=au_n+b$؛ - استعمال نهايات المتتاليات المرجعية لتحديد نهايات متتاليات عددية؛	- نقبل أن المتتاليات $(n)_{n\geq 0}$ و $(n^2)_{n\geq 0}$ و $(n^3)_{n\geq 0}$ و $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ و $(n^p)_{n\geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3 تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول n إلى $+\infty$ وأن المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\geq 0}$ حيث p عدد صحيح طبيعي أكبر من 3، تؤول إلى 0 عندما يؤول n إلى $+\infty$ اعتبارا لكون المتتالية العددية دالة عددية معرفة على مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية؛ - جميع النهايات الواردة في محتوى البرنامج تعتبر نهايات مرجعية؛ - تعتبر العمليات على النهايات المنتهية واللامنتهية مقبولة وينبغي تعويد التلاميذ على الاستعمال الصحيح لها؛ - إن أي دراسة نظرية لمفهوم نهاية متتالية تعتبر خارج البرنامج

I. المتتاليات الحسابية: تذكير

تمرين1

لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل متتالية من المتتاليات التالية :

1. $0, 2, 4, 6, 8, 10$, ...
2. $6, 3, 0, -3, -6, -9, -12$, ...
3. $1, 3, 9, 27, 81, 243$, ...
4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$, ...
5. $1, 2, 4, 9, 16, 32, 64$, ...

مثال1 : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n=2n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- أحسب حدها الأول u_0
- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$
- أحسب $u_{n+1}-u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1. تعريف :

نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث : $u_{n+1}=u_n+r \quad \forall n\geq n_0$

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين2 :
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب : $u_{n+1} - u_n$
2. ماذا تستنتج ؟

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :
إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان : $u_n = u_p + (n-p)r$ لكل $n \geq n_0$ و $p \geq n_0$

3. مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :
لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حسابية

نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ حيث $n \succ p \geq n_0$

لدينا $S_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_n + u_p}{2}\right)$

المجموع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$ يحتوي على $(n-p+1)$ حد

تمرين3 :
1. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $u_0 = 1$

أحسب المجموع التالي : $S_1 = u_3 + u_4 + u_5 + \cdots + u_{30}$

2. لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -2$ و حدها الأول $u_0 = 4$

أحسب المجموع التالي : $S_2 = u_7 + u_8 + u_9 + \cdots + u_{25}$

تمرين4 :
نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_n = \dfrac{n+3}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية
2. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_6$

II. المتتاليات الهندسية
نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة الصريحة التالية : $u_n = 2\times 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب حدها الأول u_0
2. أحسب $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$
3. ماذا تستنتج ؟

1. **تعريف:** نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث : $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$

العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$

تمرين5 :
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $u_n = 3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية و حدد أساسها و حدها الأول

2. صيغة الحد العام للمتتالية بدلالة n :
إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_{n_0} فان : $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

نتيجة : إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم فان : $u_n = u_m q^{n-m}$ لكل $n \geq n_0$ و $m \geq n_0$

3.مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم نضع $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n$

حيث $n \succ p \geq n_0$ لدينا :

- إذا كان $q \neq 1$ فان : $S_n = u_p \left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-p} \right)$
- إذا كان $q = 1$ فان : $S_n = (n-p+1) \times u_p$

تمرين6 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة التالية : $u_{n+1} = 3 \times U_n$ و $u_0 = 2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. تحقق أن $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية
2. أعبر عن U_n بدلالة n
3. أحسب المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_6$

III. المتتاليات من صنف $U_{n+1} = aU_n + b$

مثال : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة الترجعية التالية : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

ملاحظة : *هذه المتتالية تسمى متتالية ترجعيه*

تمرين7 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بالعلاقة : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 8$

1. نفترض أن : $u_0 = 12$ أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. نفترض أن : $u_0 = 3$ أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين8 :

نعتبر المتتالية الترجعية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \\ u_0 = 2 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ أحسب u_1 و u_2 و u_3

تمرين9 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = 10 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - 3$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب v_0 و v_1 و v_2
2. أحسب $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب بدلالة n المجموع : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

تمرين10 :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + 2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب v_0 و v_1

2. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

تمرين11 :
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 5^n - 1$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 5u_n + 4$

تمرين 12 :
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n - 1$

1. أحسب u_1 و u_2 و u_3
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n + 2$

تمرين 13 :
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{2}{3}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $-\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أنشئ في معلم متعامد ممنظم المستقيم ذو المعادلة : $y = x$ و المستقيم ذو المعادلة : $y = 2x + 2$
6. مثل مبيانيا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية (u_n)

تمرين14 :
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + 1$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمرين15 :
نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + \frac{3}{2} \\ u_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n + \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج أن : $u_n = \frac{13}{12} \times 3^n - \frac{3}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
5. أحسب : $\lim_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n$

تمرين16 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n = u_n - \frac{8}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim_{n \to +\infty} u_n$
6. بين أن: $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} = -\frac{44}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$
7. بين أن: $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = -\frac{44}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + \frac{8}{3} n$