أكاديمية الجهة الشرقية
نيابة وجدة

المـادة : الـريـاضيـات

مذكرة رقم : 5
الأستاذ : عثماني نجيب

مذكرة رقم 5 في درس اللوغاريتم النبيري

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
- دالة اللوغاريتم هي الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم في 1؛ - نقبل في هذا المستوى أن $\lim\limits_{+\infty} \ln x = +\infty$ وأن $\lim\limits_{0^+} \ln x = -\infty$ وتعتبران نهايتين أساسيتين؛ كما تقبل صيغة الدالة المشتقة لدالة اللوغاريتم النبيري.	- التمكن من الحساب على اللوغاريتمات النبيرية والعشرية؛ - التمكن من حل معادلات ومتراجحات لوغاريتمية بسيطة؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للوغاريتم عدد حقيقي موجب قطعا أو تحديد قيمة مقربة لعدد لوغاريتمه معلوم؛	**1. دالة اللوغاريتم النبيري** - الرمز $\ln$؛ - صيغ: $\ln ab$ ؛ $\ln\frac{1}{b}$ ؛ $\ln\frac{a}{b}$ ؛ $\ln\sqrt{a}$ ؛ $\ln a^n \quad (n \in Z)$ ؛ - دراسة وتمثيل الدالة
	- التمكن من نهايتي دالة اللوغاريتم النبيري عند محدات حيز تعريفه؛ - التمكن من دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على دالة اللوغاريتم النبيري	$x \to \ln x$ ؛ **2. اللوغاريتم العشري**

I. تعريف:

- دالة اللوغاريتم النبيري يرمز لها ب ln و هي الدالة الأصلية للدالة $x \to \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1.

و لدينا: $(\forall x \in]0,+\infty[) : \ln'(x) = \frac{1}{x}$

- دالة اللوغاريتم النبيري تنعدم في 1 أي $\ln(1) = 0$.

II. النهايات: تقبل النهايات التالية:

الخاصية 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

الخاصية 2: $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

III. خاصية جبرية:

1. $(\forall a \succ 0)(\forall b \succ 0)$
2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$
6. $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(a^n) = n\ln(a)$

تطبيق الخاصية 1:

لدينا $\ln(2) \simeq 0,7$

و $\ln(3) \simeq 1,1$

اذن:

$$\ln(6) = \ln(2 \times 3)$$
$$= \ln(2) + \ln(3)$$
$$\simeq 0,7 + 1,1 \simeq 1,8$$

الأستاذ : عثماني نجيب

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبيري: مثال : إذا علمت أن $\ln(2)\simeq 0,7$ و $\ln(3)\simeq 1,1$ فاحسب ما يلي:

$$\ln\left(\frac{8}{12}\right) \qquad \ln(72) \qquad \ln\left(\sqrt{6}\right) \qquad \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right) \qquad \ln\left(3\sqrt{2}\right)$$

الحل:

$$\ln\left(\frac{8}{12}\right)=\ln\left(\frac{2\times 4}{3\times 4}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln(2)-\ln(3)=0,7-1,1=-0,4$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)}$$

$$\boxed{72=9\times 8}$$

$$\ln(72)=\ln(9\times 8)=\ln(9)+\ln(8)=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2^3\right)=2\ln(3)+3\ln(2)=2\times(1,1)+3\times(0,7)=2,2+2,1=4,3$$

$$\boxed{\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)}$$

$$\boxed{\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)}$$

$$\boxed{\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)}$$

$$\ln\left(\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}\ln(6)=\frac{1}{2}\ln(2\times 3)=\frac{1}{2}\left(\ln(2)+\ln(3)\right)=\frac{1}{2}(0,7+1,1)=\frac{1}{2}(1,8)=0,9$$

$$\boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(3)-\ln(2)\right)=\frac{1}{2}(1,1-0,7)=\frac{1}{2}\times 0,4=0,2$$

$$\ln\left(3\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\ln\left(\sqrt{2}\right)=\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(2)=1,1+\frac{1}{2}(0,7)=1,1+0,35=1,45$$

$$\boxed{\begin{array}{r}\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)\\ \ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln(a)\end{array}}$$

IV. جدول تغيرات الدالة $x\to\ln(x)$:

لدينا: $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right):\ln'(x)=\frac{1}{x}$

بما أن $x\succ 0$ فان $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right):\ln'(x)=\frac{1}{x}\succ 0$

و بالتالي الدال ln ة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

$(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)$
$\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b$
$(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0)$
$\ln(a)\succ\ln(b)\Leftrightarrow a\succ b$
$\ln(a)\prec\ln(b)\Leftrightarrow a\prec b$
لأن الدالة ln تزايدية قطعا.

و منه الجدول:

x	0	$+\infty$
f'	‖	$+$
f(x)	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

$\ln\left(e^{3}\right)=3$

$\ln\left(e^{4}\right)=-4$

حل المعادلة $\ln(x)=7$

هو العدد $x=e^{7}$

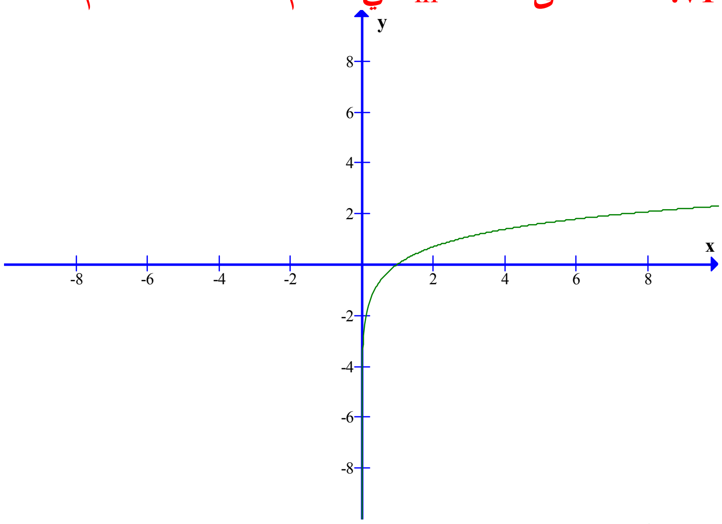
V. العدد e : $e\simeq 2,71828\cdots$

- e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e)=1$.
- بتطبيق الخاصية الخامسة على العدد e

نحصل على: $(\forall n\in\mathbb{Z})\ln\left(e^{n}\right)=n\ln(e)$

أي: $(\forall n\in\mathbb{Z})\ln\left(e^{n}\right)=n$

VI. منحنى الدالة $\ln$ في معلم متعامد ممنظم



ملاحظات: معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(1,0)$ هي:

$$y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)$$

أي: $y=x-1$

$\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$

$\ln(1)=0$

$\ln'(e)=\dfrac{1}{e}$

$\ln(e)=1$

معادلة مماس المنحنى الدالة $\ln$ في النقطة $(e,0)$ هي:

$$y=\ln'(e)(x-e)+\ln(e)$$

أي: $y=\dfrac{1}{e}(x-e)+1$

أي: $y=\dfrac{1}{e}x$

x	0	$+\infty$
f'		$+$
f(x)	$-\infty$	↗ $+\infty$

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]0,1[$ و هذا يعني أن $0\prec$ $\ln(x)$: $(\forall x\in]0,1[)$.

منحنى الدالة $\ln$ يوجد تحت محور الأفاصيل في المجال $]1,+\infty[$ و هذا يعني أن $0\succ$ $\ln(x)$: $(\forall x\in]1,+\infty[)$.

VII. اللوغاريتم العشري:

تعريف:

يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: $\log$ و هي معرفة على $]0,+\infty[$

كما يلي: $(\forall x\in]0,+\infty[):\log(x)\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

لاحظ أن $\ln(10)\neq 1$

في حين $\log(10)=1$

الأستاذ : عثماني نجيب

خاصيات هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

1. $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$
2. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
3. $(\forall a\succ 0):\log\left(\dfrac{1}{b}\right)=-\log(b)$
4. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$
5. $(\forall a\succ 0)(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(a^n)=n\log(a)$
6. $(\forall n\in\mathbb{Z}):\log(10^n)=n$
7. $(\forall x\in]0,+\infty[):\log'(x)=\dfrac{1}{x\ln(10)}$
8. $\lim\limits_{x\to 0^+}\log(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(x)=+\infty$
9. إذا كان $10^c\le x\prec 10^{c+1}$ فان $c\le\log(x)\prec c+1$
10. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a)=\log(b)\Leftrightarrow a=b$
11. $(\forall a\succ 0)(\forall b\succ 0):\log(a)\succ\log(b)\Leftrightarrow a\succ b$

تطبيق الخاصية 2:

نريد حساب $\log(20)$

علما أن $\log(2)\simeq 0,30103$

$$\log(20)=\log(2\times 10)$$
$$=\log(2)+\log(10)$$
$$\simeq 0,30103+1$$
$$\simeq 1,30103$$

نضع: $x=104,27$

لدينا: $100\le x\le 1000$

أي: $10^2\le x\prec 10^3$

إذن: $2\le\log(x)\prec 3$

أي: $\log(x)\simeq 2,\cdots\cdots$

جدول تغيرات دالة اللوغاريتم العشري:

x	0		+∞
f'	||	+	
f(x)	|| -∞	↗	+∞

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبري: المعادلات:

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=0$ 2) $\ln(x)=1$ 3) $\ln(x)=7$

4) $\ln(x+1)=\ln(3)$ 5) $\ln(x-1)=\ln(2x+3)$ 6) $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$

الحل:

1) يجب أن يكون $x\succ 0$ في المعادلة $\ln(x)=0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0,+\infty[$

المعادلة $\ln(x)=0$ تكافئ $\ln(x)=\ln(1)$

و منه $x=1$ و بما أن $1\in]0,+\infty[$

فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S=\{1\}$

الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x\succ 0$.

$\ln(1)=0$.

2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=1$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e)$ أي $x=e$

و بما أن $e\in]0,+\infty[$ فان $S=\{e\}$

3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x)=7$ هي $]0,+\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x)=\ln(e^7)$ أي $x=e^7$

$7=\ln(e^7)$

$(\forall n\in\mathbb{Z}):\ln(e^n)=n$.

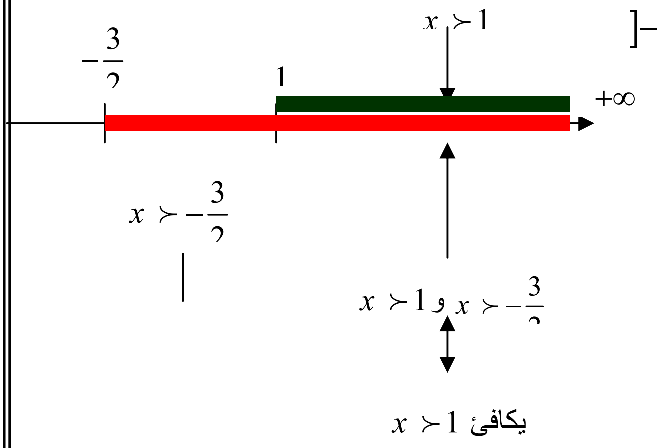
و بما أن $e^7 \in]0,+\infty[$ فان $S=\{e^7\}$.

4) يجب أن يكون $x+1 \succ 0$ أي $x \succ -1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x+1)=\ln(3)$ هي $]-1,+\infty[$

المعادلة تكافئ $x+1=3$ أي $x=2$

و بما أن $2 \in]-1,+\infty[$ فان $S=\{2\}$



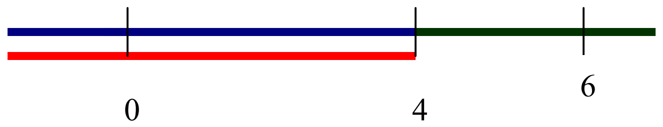
5) يجب أن يكون $x-1 \succ 0$ و $2x+3 \succ 0$

أي $x \succ 1$ و $2x \succ -3$ أي $x \succ 1$ و $x \succ -\frac{3}{2}$ أي $x \succ 1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x-1)=\ln(2x+3)$

هي $]1,+\infty[$ و $-4 \notin$ و هي تكافئ $x-1=2x+3$ أي $x=-4$

و بما أن $-4 \notin]1,+\infty[$ فان $S=\phi$



6) يجب أن يكون $x \succ 0$ و $4-x \succ 0$

و $6-x \succ 0$.

أي $x \succ 0$ و $x \prec 4$ و $x \prec 6$.

و منه مجموعة تعريف

المعادلة $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$

هي $]0,4[$ و هي تكافئ $\ln[x(4-x)]=\ln(6-x)$

$x \succ 0$ و $x \prec 4$ و $x \prec 6$ يكافئ $0 \prec x \prec 4$.

أي $x(4-x)=6-x$

أي $4x-x^2=6-x$ أي $x^2-5x+6=0$

و هذه الأخيرة معادلة من الدرجة الثانية

يتم حلها بحساب المميز Δ

$$ax^2+bx+c=0 \Longrightarrow \Delta=b^2-4ac$$

إذا كان $\Delta \succ 0$ فان المعادلة $ax^2+bx+c=0$ تقبل حلين مختلفين

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$$

لدينا $\sqrt{\Delta}=1$ و منه المعادلة $x^2-5x+6=0$

تقبل حلين مختلفين $x_1=\frac{5-1}{2}=2$ و $x_2=\frac{5+1}{2}=3$.

و بما أن $2 \in]0,4[$ و $3 \in]0,4[$

فان مجموعة حلول المعادلة $\ln(x)+\ln(4-x)=\ln(6-x)$

هي: $S=\{2,3\}$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبيري: دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبيري:

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب: $(\forall x \in]0,+\infty[) f(x)=x\ln x-x+1$

1. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(4)$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)$ علما أن $\ln(2)\simeq 0,69$ و $\ln(3)\simeq 1,1$ و $e\simeq 2,71$.
2. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.
3. أعط جدول تغيرات الدالة f.
4. حدد معادلة مماس (C_f) في 4.

الأستاذ : عثماني نجيب

الحل:

1. $f(1)=1\ln(1)-1+1=0$

$\boxed{\ln(1)=0}$

$$f(e)=e\ln(e)-r+1$$
$$=e\times1-e+1$$
$$=e-e+1=1$$

$\boxed{\ln(e)=1}$

$$f(4)=4\ln(4)-4+1$$
$$=4\ln\left(2^2\right)-4+1$$
$$=8\ln(2)-3$$
$$=8\times0,69-3=2,52$$

$\boxed{\ln\left(2^2\right)=2\ln(2)}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln(3)\simeq-1,1$$

$\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)}$

2. حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(x\ln(x)-x+1\right)$$
$$=\left(x\ln(x)\right)'-(x)'+(1)'$$
$$=(x)'\ln(x)+x\cdot\ln'(x)-1+0$$
$$=\ln(x)+1-1$$

$\boxed{f'(x)=\ln(x)}$

3. معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 4

هي: $y=f'(4)(x-4)+f(4)$

أي $y=1,38x-3$ لأن $f(4)=2,25$ و $f'(4)=1,38$.

معادلة المماس عند النقطة ذات الأفصول 1

هي: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

أي $y=0$ لأن $f(1)=0$ و $f'(1)=0$

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ ب : $f(x)=2\ln(x)-x$

أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,3]$

أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم على المجال. $]0,3]$

الحل:

لدينا $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$ اذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$.

$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$ اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعا.

و منه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0		2		3
f'(x)		+		-	
f(x)	-∞	↗	-0,6	↘	-0,8

الأستاذ : عثماني نجيب