بسم الله الرحمن الرحيم

حلول تمارين في رحاب الرياضيات

للسنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة والأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

شعبة العلوم والتكنولوجيات الصناعية

- مسلك العلوم والتكنولوجيات الميكانيكية
- مسلك العلوم والتكنولوجيات الكهربائية

محمد زهير
أستاذ التعليم الثانوي التأهيلي من الدرجة الممتازة

تعبيرات الأجوبة على الأسئلة
- دراسة الدوال العددية
- المتتاليات العددية

ادرس اتصال f في x_0

لدينا : $f(x_0) =$

* اذا كان للدالة f نفس الصيغة حول x_0 نحسب $\lim_{x \to x_0} f(x)$
* اذا كان للدالة f صيغتين مختلفتين حول x_0 نحسب $\lim_{x \to x_0^<} f(x)$ و $\lim_{x \to x_0^>} f(x)$

ادرس اتصال f على المجال I

* اذا كان $I =]a,b[$: نستعمل الخاصيات
كل دالة حدودية هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$
كل دالة جذرية هي دالة متصلة على حيز تعريفها
مجموع دالتين متصلتين على I ، جداء دالتين متصلتين على I ، خارج دالتين متصلتين على I ، مركب دالتين متصلتين على I ، الدالة العكسية لدالة متصلة على I هي دوال متصلة على I
* إذا كان $I = [a,b]$
بالإضافة إلى استعمال الخاصيات بالنسبة للمجال $]a,b[$
ندرس إتصال f على يمين a (نحسب $f(a)$ و $\lim_{x \to a^>} f(x)$)
وندرس إتصال f على يسار b (نحسب $f(b)$ و $\lim_{x \to b^<} f(x)$)

حدد صورة المجال $[a,b]$ بالدالة f

* ندرس اتصال f على $[a,b]$
* ندرس رتابة f على $[a,b]$ وذلك بدراسة إشارة $f'(x)$ على $[a,b]$

اذا كانت f دالة تزايدية على $[a,b]$ فإن $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

اذا كانت f دالة تناقصية على $[a,b]$ فإن $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$

اذا كانت f دالة غير رتيبة على $[a,b]$ فإن $f([a,b]) = [m, M]$

①

* اذا كان : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} =$
- ∞ { للمنحنى C بجوار ∞ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب }
- 0 { للمنحنى C بجوار ∞ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل }
- a ; $\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) =$
  - ∞ { للمنحنى C بجوار ∞ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم $y = ax$ }
  - b { للمنحنى C بجوار ∞ مقاربا مائلا معادلته $y = ax + b$ }

* طريقة مختصرة لايجاد معادلة المقارب المائل

اذا كان $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ فان للمنحنى C بجوار ∞ مقاربا مائلا معادلته $y = ax+b$

اذا كان : $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0^+$ فإن C_f فوق المقارب المائل بجوار ∞

اذا كان : $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0^-$ فإن C_f تحت المقارب المائل بجوار ∞

الدوال اللوغاريتمية والأسية

$\ln(\;\; > 0)$

$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1$

$x = y \iff \ln x = \ln y$

$x > y \iff \ln x > \ln y$

$x > 1 \iff \ln x > 0$

$0 < x < 1 \iff \ln x < 0$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x^n) = n \ln x$

$\begin{cases} x = \ln y \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \iff \begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}; \quad e^x > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; e^{\ln x} = x \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}, \; \ln e^x = x$

$(\ln|f|)' = \frac{f'}{f}$

$(e^f)' = f' e^f$

الدوال الأصلية للدالة : $\frac{f'}{f}$ هي : $\ln|f| + c$

الدوال الأصلية للدالة $f'e^f$ هي : $e^f + c$

$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \; , \; \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0^>} \ln x = -\infty \; , \; \lim_{x \to 0^>} x \ln x = 0^-$

⑤

$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \; , \; \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0 \; , \; \lim_{x \to 0^>} x^n (\ln x)^p = 0 \right)$

البرهان باستعمال تغيير المتغير $t^p = x^n$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \; , \; \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \; , \; \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0^-$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

المتتاليات العددية

	(u_n) متتالية حسابية	(u_n) متتالية هندسية
طبيعة (u_n)	$\forall n \quad u_{n+1} - u_n = r$ r هو أساس المتتالية (u_n)	$\forall n \quad u_{n+1} = q u_n$ q هو أساس المتتالية (u_n)
u_n بدلالة n	* $\forall n \quad u_n = u_0 + nr$ * $\forall n, \; \forall p$. $u_n = u_p + (n-p)r$	$\forall n \quad u_n = q^n u_0$ $\forall n \quad \forall p$ $u_n = q^{(n-p)} u_p$

* لدراسة رتابة (u_n) ندرس إشارة : $\forall n, \; u_{n+1} - u_n$
* كل متتالية تزايدية ومكبورة هي متتالية متقاربة
* كل متتالية تناقصية ومصغورة هي متتالية متقاربة
* نعتبر f دالة عددية معرفة على مجال I و (u_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $u_0 \in I$ و $\forall n, \; u_{n+1} = f(u_n)$

اذا كانت : * f دالة متصلة على I
* $f(I) \subset I$
* $\forall n, \; u_n \in I$
* (u_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

فان ℓ هو حل المعادلة : $f(x) = x$ في المجال I

* نهاية المتتالية (q^n) : اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim q^n = 0$

اذا كان $q = 1$ فان $\lim q^n = 1$

اذا كان $q > 1$ فان $\lim q^n = +\infty$

اذا كان $q \leq -1$ فان (q^n) ليس لها نهاية

* $\lim |u_n - \ell| = 0 \iff \lim u_n = \ell$
* اذا كان $\forall n, \; |u_n - \ell| \leq q^n$ و $\lim q^n = 0$ فإنه حسب مصاديق التقارب : $\lim u_n = \ell$

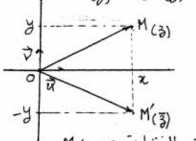
بالتوفيق والنجاح ان شاء الله

⑥

الأعداد العقدية

$i^2 = -1$

$$z = \underbrace{x}_{Re(z)} + \underbrace{y}_{Im(z)}\, i$$



z لحق النقطة $M(x,y)$

z لحق المتجهة $\vec{OM}(x,y)$

$z_B - z_A$ لحق المتجهة $\vec{AB}$

$\frac{z_A + z_B}{2}$ لحق منتصف $[AB]$

$(z = z') \Leftrightarrow (Re(z) = Re(z')$ و $Im(z) = Im(z'))$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (A وB وC نقط مستقيمية)

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow ((AB) \perp (AC))$

مرافق عدد عقدي

$$\bar{z} = x - yi$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

①

حيث m هي القيمة الدنوية للدالة f على $[a,b]$

و M هي القيمة القصوية للدالة f على $[a,b]$

مبرهنة القيم الوسيطية

هدف المبرهنة: تأطير نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل أو تأطير حلول المعادلة $f(x) = 0$

شروط المبرهنة: * f دالة متصلة على $[a,b]$

* $f(a) \cdot f(b) < 0$

اذن C_f يقطع محور الأفاصيل على الأقل في نقطة أفصولها ينتمي إلى $]a,b[$

أو المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a,b[$

شرط إضافي: * f دالة رتيبة قطعا على $[a,b]$

اذن C_f يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها ينتمي إلى $]a,b[$

أو: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $]a,b[$

حدد f^{-1} الدالة العكسية للدالة f على المجال I

الشروط: * f دالة متصلة على I

* f دالة رتيبة قطعا على I

لتحديد f^{-1}

* ندرس اتصال f على I
* ندرس رتابة f على I وذلك بدراسة إشارة f' على I
* نحدد $f(I)$
* نحدد صيغة f^{-1}

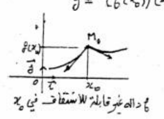
$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases}$$

ومنه $f^{-1} : \begin{bmatrix} f(I) \longrightarrow I \\ x \longmapsto f^{-1}(x) \end{bmatrix}$

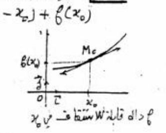
أدرس قابلية اشتقاق f في x_0

الهدف: تحديد معادلة المماس لمنحنى f في النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$

$$y = (f'(x_0))(x - x_0) + f(x_0)$$



f دالة غير قابلة للاشتقاق في x_0



f دالة قابلة للاشتقاق في x_0

②

* اذا كان للدالة f نفس الصيغة حول x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

- $l = f'(x_0)$: f دالة قابلة للاشتقاق في x_0؛ لمنحنى f في $M_0(x_0, f(x_0))$ مماس م م $f'(x_0)$
- ∞: f دالة غير قابلة للاشتقاق في x_0؛ لمنحنى f في النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ مماس يوازي محور الأراتيب

* اذا كان للدالة f صيغتين مختلفتين حول x_0

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

- ∞: f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0؛ لمنحنى f على يمين النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب
- $l = f'_d(x_0)$: f دالة قابلة للاشتقاق على يمين x_0؛ لمنحنى f على يمين النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ نصف مماس م م $f'_d(x_0)$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

- $l' = f'_g(x_0)$: f دالة قابلة للاشتقاق على يسار x_0؛ لمنحنى f على يسار النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ نصف مماس م م $f'_g(x_0)$
- ∞: f دالة غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0؛ لمنحنى f على يسار النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

* إذا كان $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في x_0 ولمنحنى f في النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطة زاوية
* إذا كان $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 ولمنحنى f في النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$ مماس معامله الموجه $f'(x_0)$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على مجال I

* اذا كان $I =]a,b[$ نستعمل الخاصيات

كل دالة حدودية هي دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

كل دالة جذرية هي دالة قابلة للاشتقاق على حيز تعريفها

مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I، جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على I، خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على I، مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على I، الدالة العكسية لدالة قابلة للاشتقاق على I: هي دوال قابلة للاشتقاق على I

* اذا كان $I = [a,b]$، بالإضافة إلى استعمال الخاصيات بالنسبة للمجال $]a,b[$ ندرس قابلية اشتقاق f على يمين a وعلى يسار b

③

حدد f' الدالة المشتقة للدالة f

الهدف: دراسة رتابة f على المجال I وذلك بدراسة إشارة $f'(x)$ على المجال I

القواعد:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(f^n)'(x) = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

أدرس زوجية الدالة f

الهدف: اختصار مجال دراسة الدالة f

* المستقيم $(D) : x = a$ محور تماثل C_f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \; ; \; (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f \; ; \; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

حالة خاصة: f دالة زوجية.

(محور الأراتيب هو محور تماثل C_f)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \; ; \; (-x) \in D_f \\ \forall x \in D_f \; , \; f(-x) = f(x) \end{cases}$$

* النقطة (a,b) مركز تماثل C_f

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \; , \; (2a - x) \in D_f \\ \forall x \in D_f \; ; \; f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$$

حالة خاصة: f دالة فردية

(أصل المعلم مركز تماثل C_f)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \; , \; (-x) \in D_f \\ \forall x \in D_f \; , \; f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

أدرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

* اذا كان: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

فإن لمنحنى f مقاربا معادلته $x = a$

* اذا كان: $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$

فإن لمنحنى f بجوار ∞ مقاربا معادلته $y = b$

④

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow ((AB) /\!/ (CD))$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \Leftrightarrow ((AB) \perp (CD))$$

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overline{\vec{AC}, \vec{AB}}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ ABC مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A

المعادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد في $\mathbb{C}$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) : ax^2 + bx + c = 0$

حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم

العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة (E)

* اذا كان $\Delta > 0$ فإن (E) تقبل حلين حقيقيين هما:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

* اذا كان $\Delta = 0$ فإن (E) تقبل حلا وحيدا هو:

$$z = \frac{-b}{2a}$$

* اذا كان $\Delta < 0$ فإن (E) تقبل حلين عقديين مترافقين هما:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم

$$z = [|z|, \theta] = |z| e^{i\theta}$$

⑤

$$(re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = rr' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\overline{(re^{i\theta})} = r e^{i(-\theta)}$$

$$(-re^{i\theta}) = r e^{i(\pi + \theta)}$$

صيغتا أولير

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{i(n\theta)} + e^{-i(n\theta)}}{2}$$

$$\sin(n\theta) = \frac{e^{i(n\theta)} - e^{-i(n\theta)}}{2i}$$

صيغة موافر

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

الكتابة العقدية لإزاحة / تحاك / دوران

نعتبر $M(z)$، $M'(z')$، $\Omega(z_\Omega)$، $\vec{u}(z)$

* $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{MM'} = \vec{u}$

$\Leftrightarrow z' = \boxed{1} z + z$

* $h_{(\Omega, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{\Omega M'} = k\,\vec{\Omega M}$

$\Leftrightarrow z' = \boxed{k} z + (1 - k) z_\Omega$

* $r_{(\Omega, \theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overline{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}}) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$

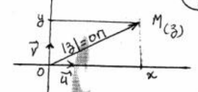
$\Leftrightarrow z' = \boxed{e^{i\theta}} z + (1 - e^{i\theta}) z_\Omega$

ملاحظة: Ω هي النقطة الوحيدة الصامدة بالتحاكي $h_{(\Omega,k)}$ وبالدوران $r_{(\Omega,\theta)}$

بالتوفيق والنجاح إن شاء الله

⑥

(معيار عدد عقدي)



$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$

$|zz'| = |z|\,|z'|$

$|z^n| = |z|^n$

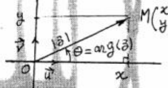
$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$|\bar{z}| = |-z| = |z|$

Attention : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$AB = |z_B - z_A|$

(عمدة عدد عقدي غير منعدم)



$M\binom{x}{y} = \binom{|z|\cos\theta}{|z|\sin\theta}$

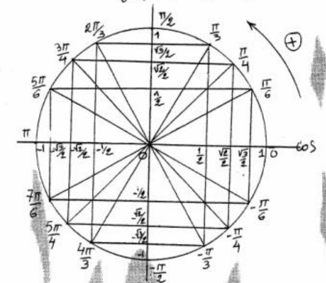
$z = x + iy$
$= |z|\cos\theta + i\,|z|\sin\theta$
$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = [|z|;\theta]$

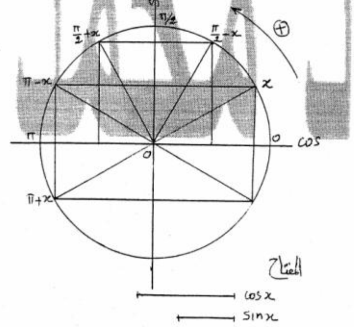
عدد حقيقي موجب قطعا
دالة cos مسبوقة بإشارة (+)
إشارة (+)
نفس الزاوية
دالة sin مسبوقة بإشارة (+)

②

للمرور من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي.
للعدد العقدي $z = x + yi$

① نحسب $|z|$
② نعمل z بـ: $|z|$
③ نحدد $\arg(z) = \theta$





③

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \qquad \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \qquad \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(x + k2\pi) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(x + k2\pi) = \sin x$

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
$\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$

$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = 0 \quad [\pi]$
$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

$[r,\theta]\cdot[r',\theta'] = [rr', \theta+\theta']$
$[r,\theta]^n = [r^n, n\theta]$
$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = [\frac{r}{r'}, \theta-\theta']$

$1 = [1, 0] \qquad i = [1, \frac{\pi}{2}]$
$-1 = [1, \pi] \qquad -i = [1, -\frac{\pi}{2}]$

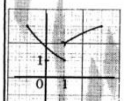
$\overline{(\vec{u}, \overrightarrow{AB})} = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$
$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$
$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$
$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow$ (A وB وC نقط مستقيمية)
$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \Leftrightarrow ((AC) \perp (AB))$

④

1 اتصال دالة عددية

1

الشكل جانبه يمثل منحنى دالة f معرفة على المجال $[-1;3]$



1) هل الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$؟
2) هل الدالة f متصلة على كل من المجالات: $[-1;3]$ و $[-1;1]$ و $[1;3]$؟

2

ليكن a عددا حقيقيا وf الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 ; x \geq 0 \\ f(x) = x + a ; x < 0 \end{cases}$$

1) أ- أنشئ في معلم متعامد منحنى الدالة f في الحالة $a=-1$.
ب- مبيانيا، هل الدالة f متصلة على IR؟
2) ما قيمة a، لكي تكون الدالة f متصلة على IR؟

3

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

بيّن أن الدالة f متصلة في النقطة 1.

4

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

هل الدالة f متصلة في $x_0=0$؟

5

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x) = x - 1 ; x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)^2 ; x < 1 \end{cases}$.

ادرس اتصال الدالة f على اليمين وعلى اليسار في النقطة 1.

6

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ ; \ x < 1 \\ f(x) = x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} \ ; \ x \geq 1 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f عند $x_0=1$

7

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x} ; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1 + x} - \frac{1}{2} ; x \geq 0 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$

8

لتكن f دالة معرفة على المجال I

ادرس اتصال الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 1$ ؛ $I = [-5;2]$.
2) $f(x) = \sin x$ ؛ $I = \left]\frac{\pi}{3};\pi\right]$.
3) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+x+1}$ ؛ $I =]-2;+\infty[$.
4) $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ $I =]0;7]$.

9

ادرس اتصال الدالة f المعرفة على المجال I في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x)=2x-1+\sin x$ $\qquad I =]-\infty;+\infty[$.
2) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ $\qquad I =]0;+\infty[$.
3) $f(x)=x\sin x$ $\qquad I =]0;\pi]$.
4) $f(x)=\cos x+2\sin x$ $\qquad I = [-\pi;\pi]$.

10

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2} ; x \geq 2 \\ f(x) = \frac{3}{3-x} ; x < 2 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على IR.

11

1) لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
ادرس اتصال الدالة f على IR.
2) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ بما يلي:
$f(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$
ادرس اتصال الدالة f على المجال $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.
3) ادرس اتصال الدالة f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=\cos(4x^2+3x-1)$

12

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$$

ادرس اتصال الدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

13

1) حدد صورة المجال $[-1;2]$ بالدالة العددية f المعرفة بما يلي:
$f(x)=2x-1$
حدد صورة المجال $[-3;1]$ بنفس الدالة f.

14

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي $\begin{cases} f(x) = x^2 \ ; (x < 0) \\ f(x) = x ; (x \geq 0) \end{cases}$

1) ادرس اتصال الدالة f على IR.
2) حدد صورة كل مجال من المجالين الآتيين بالدالة f.
$I = [1;2] \qquad J = [-3;-1]$.

15

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[-4;4]$

بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+4} \,;\, x \in [-4;0] \\ f(x) = x^2 + 2 \,;\, x \in]0;4] \end{cases}$

1) ادرس اتصال الدالة f على المجال $[-4;4]$.

2) حدد صورة المجال $[-4;4]$ بالدالة f.

16

بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال I (في كل حالة من الحالات الآتية):

1) $f(x) = 7x^3 - x - 1$ ؛ $I = [0;1]$.

2) $f(x) = \cos x - x$ ؛ $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$ ؛ $I =]-1;0[$.

4) $f(x) = x^4 + x^3 - 9$ ؛ $I = [-2;2]$.

17

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{9x^3 - x - 2}{x^2 + 1}$$

بَيِّنْ أن (C_f) منحنى الدالة f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $[0;1]$.

18

حدد عدد حلول المعادلة: $x-3=x^3$ حيث x عدد حقيقي.

19

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بمايلي: $f(x)=3x^3-4x^2+4x-1$

1) ضع جدول تغيرات الدالة f.

2) بَيِّنْ أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0.

3) تحقق من أن $x_0 \in]0;1[$.

4) باستعمال طريقة التفرع الثنائي، أعط قيمة مقربة للعدد x_0 بالدقة 10^{-2}.

20

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;3]$ بما يلي:

$$f(x)=(x-3)^2-1$$

1) بَيِّنْ أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.

2) احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

21

بَيِّنْ أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده في كل حالة من الحالات الآتية.

1) $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ ؛ $I =]1;+\infty[$.

2) $f(x) = x|x|$ ؛ $I=\mathrm{IR}$.

3) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ؛ $I=\mathrm{IR}^+$.

4) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ ؛ $I =]0;1[$.

22

بسط الأعداد الآتية:

1) $a = \sqrt[3]{27}$ و $b = \sqrt[4]{16}$ و $c = \sqrt[5]{243}$

2) $d = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}$ و $e = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[4]{64}}$ و $f = \sqrt{\sqrt[3]{64}}$

23

احسب: $A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}$

24

رتب ترتيبا تصاعديا الأعداد الآتية: $\sqrt[12]{4}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt[6]{3}$ و $\sqrt[3]{8}$.

25

اجعل مقامات الأعداد a و b و c أعدادا جذرية.

$a = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}$ و $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$ و $c = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$.

26

1) قارن الأعداد a و b و c في كل حالة من الحالتين التاليتين:

أ- $a = \sqrt{5}$ و $b = \sqrt[4]{80}$ و $c = 3^{\frac{1}{2}}$.

ب- $a = \sqrt[4]{5}$ و $b = \sqrt[3]{4}$ و $c = \sqrt[3]{9}$.

2) بسط العددين A و B بحيث:

$A = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8}\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}\sqrt[6]{4}}$ و $B = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[20]{3\sqrt[4]{9}} \times 3^2}{\sqrt[5]{81}\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

27 المعادلات

حل في IR المعادلات: $x^3+27=0$ ؛ $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0$ ؛ $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 64$.

28 نهايات دوال لا جذرية

حدد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ 2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

يمكن استعمال: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

29

حدد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4}$ 2) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}}$ (يمكنك وضع: $\sqrt[12]{x+1} = X$)

30

بسط الكتابات الآتية:

$A = \frac{3^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{1}{4}}}{81^{\frac{1}{4}}}$ و $B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{1}{3}}}{7^{-\frac{1}{3}}}$ و $C = \left(2^{-\frac{1}{5}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{3}}\right) \times \left(8^{\frac{1}{3}}\right)$

31

بسط الكتابة: $A = \frac{a^{-\frac{1}{3}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{a^{-2}} \times \sqrt[3]{a^{-1}}}$ حيث a عدد حقيقي موجب قطعا.

32

حدد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{4}}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)^{\frac{1}{3}} - (2x)^{\frac{1}{3}}$ 3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}} - x}$

34

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - 3x + 1} \,;\, x \neq \frac{1}{2} \text{ و } x \neq 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = a \end{cases}$$

حدد a علما أن الدالة f متصلة في $x_0 = \frac{1}{2}$.

35

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[-4;+\infty[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{4+x} - 2}{x} \,;\, x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$

ناقش حسب قيم العدد الحقيقي a، اتصال الدالة f في النقطة 0.

36

لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $\begin{cases} g(x) = \frac{(1-\cos x)^2}{x^3} \,;\, x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$ بَيِّنْ أن الدالة g متصلة في 0.

37

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} \,;\, x \neq 2 \\ f(2) = \frac{9}{8} \end{cases}$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) بَيِّنْ أن الدالة f متصلة في النقطة 2.

38

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{x}} \,;\, x \neq 1 \\ f(1) = -\sqrt{2} \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس اتصال الدالة f في $x_0=1$.

39

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin \pi x}{x - 1} \,;\, x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$ حيث m بار متر حقيقي،

حدد قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها تكون الدالة f متصلة في 1.

40

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين على IR بما يلي:

$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos x - \cos 2x}{x} \,;\, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} g(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \,;\, x \neq 0 \\ g(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

ادرس اتصال كل من الدالتين f و g في $x_0=0$.

41

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $\begin{cases} f(x) = 1 \,;\, x < 0 \\ f(x) = \frac{1}{x+1} \,;\, x \geq 0 \end{cases}$

ادرس اتصال الدالة f في النقطة 0.

42

الرمز $E(x)$ يمثل الجزء الصحيح للعدد x،

(لكل x من $\mathbb{Z}$، إذا كان $x \in [n, n+1[$ فإن $E(x)=n$)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1;2[$ بما يلي: $f(x)=x-E(x)$

1) اكتب $f(x)$ بدلالة x في الحالات الآتية:

$x \in [-1;0[$ و $x \in [0;1[$ و $x \in [1;2[$.

2) ادرس اتصال الدالة f في النقطتين 0 و1.

3) ارسم منحنى الدالة f.

43

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + x}{|x|} \,;\, x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

ادرس اتصال الدالة f على اليمين في $x_0=0$ وعلى اليسار في $x_0=0$.

44

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 7x - 6}{|x-3|} \;;\; x \neq 3 \\ f(3) = 20 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على اليمين وعلى اليسار في $x_0=3$.

45

لتكن f دالة معرفة على مجال I.

ادرس اتصال الدالة f على المجال I في كل حالة من الحالتين الآتيتين:

1) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1} \,;\, x \geq 0 \\ f(x) = 2\sin x \,;\, x < 0 \end{cases}$ و $I =]-\infty;+\infty[$.

2) $\begin{cases} f(x) = 3x^2 - x + 1 \,;\, -3 \leq x < 0 \\ f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x}} \,;\, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ و $I = [-3;+\infty[$.

46

حدد العددين الحقيقيين a وb بحيث تكون الدالة العددية f المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = 2ax + b \;;\; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 3x^2 - b + 3a \;;\; 1 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{3}{2}ax \;;\; 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

متصلة على المجال $[0;3]$.

47

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $\begin{cases} f(x) = \frac{|x-1|}{x^3 - 1} \,;\, x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$

ادرس اتصال الدالة f على اليمين وعلى اليسار في 1.

48

حدد العددين a وb بحيث تكون الدالة العددية f المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = 2ax^2 - 3b \ ; -3 \leq x < 0 \\ f(x) = 2x - b + a \ ; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 4x - a \ ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

متصلة على المجال $[-3;2]$.

49

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathrm{IR} - \{-2\}$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x} - 2 \ ; x > 0 \\ f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x^2-4} \ ; x \leq 0 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في النقطة 0.

50

بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في المجال I، في كل حالة من الحالات الآتية:

1) (E) : $2\sin x = x$ ؛ $I = \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

2) (E) : $\cos x = x$ ؛ $I = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.

3) (E) : $1 + \sin x = x$ ؛ $I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

51

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $I = [-1;0[$ بما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) بَيِّنْ أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال J (يتم تحديده) نحو المجال I، ثم احسب $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$.

2) احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

52

بَيِّنْ أن المعادلات الآتية تقبل على الأقل حلا في المجال I.

1) $x^3 - 4x + 1$ ؛ $I = [2;3]$.

2) $x^3 - 6x - 7$ ؛ $I = [0;3]$.

3) $x^3 - 5x - m$ حيث $m \in [4;12]$ و $I = [-1;3]$.

53

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [0;1]$ بما يلي:

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

1) بَيِّنْ أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال J (يتم تحديده)

2) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

54

بَيِّنْ أن المعادلة $x = \sqrt[3]{1+x^2}$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1;2]$

55

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;2[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 \ ; x \in]-2;0[\\ f(x) = 2x \ ; x \in [0;1[\\ f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) ; x \in [1;2[\end{cases}$$

1) ادرس اتصال الدالة f في النقطة 0.

2) ادرس اتصال الدالة f في النقطة -1.

3) هل الدالة f متصلة على المجال $]-2;2[$؟

56

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 \ ; x \geq 1 \\ f(x) = x + 1 \ ; x < 1 \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} g(x) = x^2 + 2x \ ; x \geq 1 \\ g(x) = x - 1 \ ; x < 1 \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن الدالتين f و g غير متصلتين في النقطة $x_0 = 1$.

2) عرف الدالة $f \times g$ وادرس اتصالها في النقطة $x_0 = 1$.

57

1) قارن الأعداد a و b و c بحيث: $a = \left(\sqrt[4]{8}\right)^2$ و $b = \sqrt{\sqrt{81}}$ و $c = \sqrt[3]{\sqrt{2}}$.

2) بسط العدد A حيث: $A = \dfrac{2^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{2^{-8}} \times \left(\sqrt[5]{3^4}\right)^{-\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{5}} \times \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

58

1) ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين قطعا،

بَيِّنْ أن: $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{y^{-3}}}} \times \sqrt[12]{\dfrac{x^{-8}}{y^3}} = xy$.

2) ليكن x من المجال $]1;+\infty[$، بسط $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}\left((x-1)^2\right)^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x(x-1)}} \times (1-x)$

59

حل في IR المعادلات الآتية:

1) $x^3 + 125 = 0$ 2) $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$

3) $\sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x^2}$

60

حدد النهايات الآتية:

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$ و $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sin x}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x+63} - 4}$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x+3} - 2\sqrt[3]{x^3+1}$

61

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - \cos x - 1}{x^2} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

بَيِّنْ أن الدالة f متصلة في $x_0 = 0$

62

1) بَيِّنْ أن المعادلة: (E): $x^3 + x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في IR وأن $0 < x_0 < 1$.

2) تحقق من أن: $x_0 = \sqrt[3]{1 - x_0}$.

63

ليكن x_0 عنصرا من المجال $[0;2]$ و f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;2]$ بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{2-x} \ ; x \leq x_0 \\ f(x) = x \ ; x > x_0 \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن: $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$

2) حدد x_0 إذا علمت أن f دالة متصلة في x_0.

64

حدد النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$. 2) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x}$ 4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{3x-5}}{\sqrt{7x+2} - \sqrt{5x+6}}$

65

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $[0;1]$ حيث $f(0) > 0$ و $f(1) < 1$.

باعتبار الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي:

$$g(x) = f(x) - x$$

بَيِّنْ أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]0;1[$.

66

ليكن a و b عددين حقيقيين مع $a < b$.

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $[a;b]$ بحيث:

$f(a) > a$ و $f(b) < b$

بَيِّنْ أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا على المجال $]a;b[$

67

نضع $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x^3} + \sqrt{x}}{x - 1}$ ؛ $(\forall x \in]1;+\infty[)$

1) تحقق من أن: $f(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{1}{x-1}$

2) بَيِّنْ أن المعادلة: $\sqrt{x} = \dfrac{1}{x-1}$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1;2[$

3) بَيِّنْ أن: $\alpha^2(\alpha - 2) = 1 - \alpha$.

68

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[-3;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 3x + 9}$$

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) بَيِّنْ أن: $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = (x+1)^3 + 8$.

3) بَيِّنْ أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[-3;+\infty[$.

4) بَيِّنْ أن الدالة f متصلة على المجال $[-3;+\infty[$.

5) أ- بَيِّنْ أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال J (يتم تحديده) نحو المجال $[-3;+\infty[$.

ب- لتكن f^{-1} الدالة العكسية للدالة f، حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

69

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;2[$ بما يلي:

$f(x) = (x^2 - 1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ إذا كان $x \neq 1$ و $f(1) = 0$

1) بَيِّنْ أنه لكل x من المجال $]0;2[$: $|f(x) - f(1)| \leq 3|x - 1|$.

2) استنتج أن الدالة f متصلة في النقطة 1.

70

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $f(x) = x^3 + x + 1$

1) أعط جدول تغيرات الدالة f.

2) بَيِّنْ أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[-2;2]$.

3) باستعمال طريقة التفرع الثنائي حدد تأطيرا العدد α سعته $1,25 \times 10^{-1}$.

71

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x + \sqrt{x+3}$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2) بَيِّنْ أن الدالة f متصلة ورتيبة قطعا على D_f.

3) استنتج أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة من مجال J يتم تحديده.

4) احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

5) بين أن المعادلة: $f^{-1}(x) = f(x)$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-3;+\infty[$.

72

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{3 + \cos x} - 2}{x^2} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{-1}{8} \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن مجموعة تعريف الدالة f هي IR.

2) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

3) ادرس اتصال الدالة f على IR.

4) بَيِّنْ أن: $|f(x)| < \dfrac{1}{x^2}$ لكل x من IR^* ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

73

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x\sin\frac{1}{x} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن مجموعة تعريف الدالة f هي IR.

2) بَيِّنْ أنه: $|f(x)| \leq |x|$; $(\forall x \in \mathrm{IR}^*)$

3) استنتج أن الدالة f متصلة في $x_0 = 0$.

74

1) ليكن α عددا حقيقيا ولتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - \cos\alpha}{x - \alpha} \ ; x \neq \alpha \\ f(\alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$$

بَيِّنْ أن الدالة f متصلة في $x_0 = \alpha$.

2) استنتج أن الدالة العددية g المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} \ ; x \neq \dfrac{\pi}{3} \\ g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

متصلة في النقطة $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

75

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بمايلي:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$$

1) بوضع $u(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ و $v(x) = \sqrt[3]{x}$ حدد تغيرات الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

2) بَيِّنْ أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال J (يتم تحديده) نحو المجال $[1;+\infty[$.

3) احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J.

تمرين رقم 1

1) لدينا : $f(1)=1$ و $\lim\limits_{x \to 1^>} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x \to 1^<} f(x)=1$

اذن f دالة متصلة على يسار 1 و غير متصلة على يمين 1

اذن f دالة غير متصلة في 1

2) * لدينا f دالة غير متصلة في 1 وبما أن $1 \in [-1,3]$

فإن f دالة غير متصلة على المجال $[-1,3]$

* f دالة متصلة على المجال $]-1,1[$ ومتصلة على يمين -1

ومتصلة على يسار 1 . اذن f دالة متصلة على المجال $[-1,1]$

* f دالة متصلة على المجال $]1,3[$ و متصلة على يسار 3

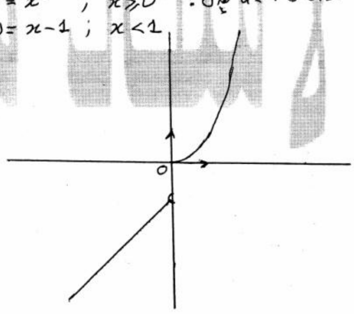
وغير متصلة على يمين 1

اذن f دالة متصلة على المجال $]1,3]$ وليس على المجال $[1,3]$

تمرين رقم 2

1) أ) اذا كان $a=-1$ فإن :

$$\begin{cases} f(x)=x^3 & ; x \geq 0 \\ f(x)=x-1 & ; x<1 \end{cases}$$



ب) f دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$ ومتصلة على المجال $]-\infty,0[$

وغير متصلة على يسار 0 لأن :

$$\lim_{x \to 0^>} f(x)=\lim_{x \to 0^>} x^3 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^<} f(x)=\lim_{x \to 0^<} (x-1) = -1 \neq f(0)$$

اذن f دالة غير متصلة على $\mathbb{R}$

2) لدينا f دالة متصلة على $]0,+\infty[$ وعلى $]-\infty,0[$ لأنها دالة حدودية

ولدينا :

$$\lim_{x \to 0^>} f(x)=\lim_{x \to 0^>} x^3 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^<} f(x)=\lim_{x \to 0^<} (x+a) = a$$

اذن لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون $a=0$

تمرين رقم 3

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ f(1)=3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x)=\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x \to 1} (x^2+x+1) = 3 = f(1)$$

اذن f دالة متصلة في 1

تمرين رقم 4

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & , x \neq 0 \\ f(0)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2} \neq f(0)$$

اذن f دالة غير متصلة في 0

تمرين رقم 5

$$\begin{cases} f(x)=x-1 & , x \geq 1 \\ f(x)=(x-1)^2 & , x<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^>} f(x)=\lim_{x \to 1^>} (x-1) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^<} f(x)=\lim_{x \to 1^<} (x-1)^2 = 0 = f(1)$$

اذن f دالة متصلة في 1

تمرين رقم 6

$$\begin{cases} f(x)=x-x^2 & , x<1 \\ f(x)=x-1-\sqrt{x^2-1} & , x \geq 1 \end{cases}$$

لدينا : $f(1)=0$

$$\lim_{x \to 1^>} f(x)=\lim_{x \to 1^>} (x-1-\sqrt{x^2-1}) = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^<} f(x)=\lim_{x \to 1^<} (x-x^2) = 0 = f(1)$$

اذن f دالة متصلة في 1

تمرين رقم 7

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x} & , x<0 \\ f(x)=\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{2} & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^<} f(x)=\lim_{x \to 0^<} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x} = \lim_{x \to 0^<} \frac{\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+1)}$$

$$=\lim_{x \to 0^<} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}+1}\right) = \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^>} f(x)=\lim_{x \to 0^>} \left(\sqrt{1+x}-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = f(0)$$

اذن f دالة متصلة في 0

تمرين رقم 8

1) $I=[-5,2]$; $f(x)=3x^3-x^2+1$

f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

اذن f دالة متصلة على I

2) $I=]\frac{\pi}{3},\pi]$, $f(x)=\sin x$

f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

اذن f دالة متصلة على I

3) $I=]-2,+\infty[$; $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}$

f دالة متصلة على حيز تعريفها $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة جذرية اذن f دالة متصلة على I

4) $I=]0,7]$; $f(x)=\sqrt{x}$

f دالة متصلة على حيز تعريفها $\mathbb{R}^+$

اذن f دالة متصلة على I

تمرين رقم 9

1) $I=\mathbb{R}$; $f(x)=2x-1+\sin x$

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $\mathbb{R}$ بمايلي :

$$g\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x-1 \end{bmatrix} \quad , \quad h\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin x \end{bmatrix}$$

g و h دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

اذن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

2) $I=]0,+\infty[$; $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على I كمايلي:

$g\begin{bmatrix}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{x} \end{bmatrix}$; $h\begin{bmatrix}]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{bmatrix}$

g و h دالتين متصلتين على $]0,+\infty[$

إذن f دالة متصلة على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين متصلتين على $]0,+\infty[$

3) $I =]0,\pi]$; $f(x) = x\sin x$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على I كمايلي

$g\begin{bmatrix}]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin x \end{bmatrix}$, $h\begin{bmatrix}]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{bmatrix}$

g و h دالتين متصلتين على $]0,\pi[$

إذن f دالة متصلة على $]0,\pi[$ لأنها جداء دالتين متصلتين على $]0,\pi[$

4) $I = [-\pi,\pi]$, $f(x) = \cos x + 2\sin x$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين على I كمايلي:

$g\begin{bmatrix} [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x \end{bmatrix}$, $h\begin{bmatrix} [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\sin x \end{bmatrix}$

g و h دالتين متصلتين على I

إذن f دالة متصلة على I لأنها مجموع دالتين متصلتين على I.

تمرين رقم 10

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2} & , x \geq 2 \\ f(x) = \frac{3}{3-x} & , x < 2 \end{cases}$$

ندرس اتصال f في 2:

لدينا $f(2) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x - \sqrt{x-2}) = 2 = f(2)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3}{3-x} = 3 \neq f(2)$

إذن f دالة غير متصلة في 2

ومنه فإن f دالة غير متصلة على $\mathbb{R}$

تمرين رقم 11

$D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

1) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين كمايلي:

$g\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow [\frac{3}{4},+\infty[\\ x \longmapsto x^2+x+1 \end{bmatrix}$, $h\begin{bmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{bmatrix}$

بما أن g دالة حدودية فإنها دالة متصلة على $\mathbb{R}$

و h دالة متصلة على $g(\mathbb{R}) = [\frac{3}{4},+\infty[$

ولدينا:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} [\tfrac{3}{4},+\infty[\xrightarrow{h} \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto x^2+x+1 \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$$
$$f = h \circ g$$

فإن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين متصلتين

2) $I = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ، $f(x) = \sqrt{1-4x^2}$

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين كمايلي:

$g:\begin{bmatrix} [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto 1-4x^2 \end{bmatrix}$ $h:\begin{bmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{bmatrix}$

بما أن g دالة حدودية فإنها متصلة على $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

و h دالة متصلة على $g([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]) = [0,1]$

ولدينا:

$$[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] \xrightarrow{g} [0,1] \xrightarrow{h} \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto 1-4x^2 \longrightarrow \sqrt{1-4x^2}$$
$$f = h \circ g$$

فإن f دالة متصلة على $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ لأنها مركب دالتين متصلتين

3) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \cos(4x^2+3x-1)$

نعتبر الدالتين العدديتين المعرفتين كمايلي:

$g\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow [-100,+\infty[\\ x \longmapsto 4x^2+3x-1 \end{bmatrix}$; $h\begin{bmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \cos x \end{bmatrix}$

بما أن g دالة حدودية فإنها دالة متصلة على $\mathbb{R}$

و h دالة متصلة على: $g(\mathbb{R}) = [-100,+\infty[$

ولدينا:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} [-100,+\infty[\xrightarrow{h} [-1,1]$$
$$x \longmapsto 4x^2+3x-1 \longmapsto \cos(4x^2+3x-1)$$
$$f = h \circ g$$

فإن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين متصلتين

تمرين رقم 12

$I =]1,+\infty[$ ، $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين كمايلي:

$g\begin{bmatrix}]1,+\infty[\longrightarrow]3,+\infty[\\ x \longmapsto \frac{3x-1}{x-1} \end{bmatrix}$ ، $h\begin{bmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{bmatrix}$

بما أن: g دالة متصلة على $]1,+\infty[$ لأنها دالة جذرية

و h دالة متصلة على $g(]1,+\infty[) =]3,+\infty[$

ولدينا:

$$]1,+\infty[\xrightarrow{g}]3,+\infty[\xrightarrow{h} \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \frac{3x-1}{x-1} \longmapsto \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$$
$$f = h \circ g$$

فإن f دالة متصلة على $]1,+\infty[$ لأنها مركب دالتين متصلتين

تمرين رقم 13

$f(x) = 2x-1$

بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[-1,2]$

فإن: $f([-1,2]) = [f(-1), f(2)] = [-3,3]$

بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[-3,1]$

فإن: $f([-3,1]) = [f(-3), f(1)] = [-7,1]$

تمرين رقم 14

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & , x < 0 \\ f(x) = x & , x \geq 0 \end{cases}$$

1) لدينا f دالة متصلة على $]-\infty,0[$ وعلى $[0,+\infty[$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

2) f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $I = [1,2]$

إذن $f(I) = [f(1), f(2)] = [1,2]$

f دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $J = [-3,-1]$

إذن. $f(J) = [f(-1), f(-3)] = [1,9]$

تمرين رقم 15

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+4} & , x \in [-4,0] \\ f(x) = x^2+2 & , x \in]0,4] \end{cases}$$

ب) ندرس اتصال f على المجال $[-4,0]$

نعتبر الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي :

$g\begin{bmatrix} [-4,0] \longrightarrow [0,4] \\ x \longmapsto x+4 \end{bmatrix}$ $\quad h\begin{bmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{bmatrix}$

بما أن g دالة حدودية فإنها دالة متصلة على $[-4,0]$

و h دالة متصلة على $g([-4,0]) = [0,4]$

ولدينا : $[-4,0] \xrightarrow{g} [0,4] \xrightarrow{h} [0,2]$

$x \longmapsto x+4 \longmapsto \sqrt{x+4}$

$f = h \circ g$

فإن f دالة متصلة على $[-4,0]$ لأنها مركب دالتين متصلتين

ندرس اتصال f على المجال $]0,4]$

f دالة متصلة على $]0,4]$ لأنها دالة حدودية

ندرس اتصال f في 0

لدينا $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2+2) = 2 = f(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x+4} = 2 = f(0)$

إذن f دالة متصلة في 0

إذن f دالة متصلة على $[-4,4]$

ج) f دالة تزايدية قطعا على $[-4,0]$ لأنها مركب دالتين تزايديتين قطعا إذن : $f([-4,0]) = [f(-4), f(0)] = [0,2]$

f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $]0,4]$

إذن $f(]0,4]) =]f(0), f(4)] =]2,18]$

$f([-4,4]) = f([-4,0] \cup]0,4]) = f([-4,0]) \cup f(]0,4])$

$= [0,2] \cup]2,18] = [0,18]$

تمرين رقم 16

1) $f(x) = 7x^3 - x - 1$ ، $I = [0,1]$

f دالة متصلة على المجال I ولدينا : $f(1) = 5$ ، $f(0) = -1$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال I

2) $f(x) = \cos x - x$ ، $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

f دالة متصلة على المجال I ولدينا : $f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$ ، $f(0) = 1$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال I

3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$ ، $I =]-1,0[$

f دالة متصلة على المجال I ولدينا : $f(0) = 2$ ، $f(-1) = -2$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال I

4) $f(x) = x^4 + x^3 - 9$ ، $I = [-2,2]$

f دالة متصلة على المجال I وبما أن $[0,2] \subset I$

فإن f دالة متصلة على المجال $[0,2]$

ولدينا : $f(2) = 11$ ، $f(0) = -9$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة ؛ $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال I

تمرين رقم 17

$f(x) = \dfrac{9x^5 - x - 2}{x^2+1}$

لدينا f دالة متصلة على المجال $[0,1]$ لأنها دالة جذرية

ولدينا : $f(1) = 3$ ، $f(0) = -2$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة ؛ $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0,1]$

وبالتالي منحنى الدالة f يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها تنتمي إلى المجال $[0,1]$

تمرين رقم 18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$f(x) = x^3 - x + 3$

لدينا $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ أو $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{27+2\sqrt{3}}{9}$	↘	$\frac{27-2\sqrt{3}}{9}$	↗	$+\infty$

لدينا الدالة f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}[$

و : $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{27+2\sqrt{3}}{9} > 0$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حل وحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}[$

إذن يوجد حل وحيد للمعادلة : $x^3 = x - 3$ في المجال $]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}[$

وبما أن القيمة الدنوية للدالة f في المجال $]-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$ هي $\frac{27-2\sqrt{3}}{9} > 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ ليس لها حل في المجال $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$

إذن ليس للمعادلة $x^3 = x - 3$ حل في المجال $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[$

وبالتالي : للمعادلة $x^3 = x - 3$ حل وحيد في $\mathbb{R}$

تمرين رقم 19

$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

1) $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) = 9x^2 - 8x + 4$

بما أن : $\Delta < 0$ فإن : $\forall x \in \mathbb{R};\ f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا x_0

3) f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,1[$

ولدينا : $f(1) = 2$ ، $f(0) = -1$

فإن : $x_0 \in]0,1[$

4) لدينا $f(0) = -1$ و $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ إذن : $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$

لدينا : $f(\frac{1}{4}) = -\frac{13}{64}$ و $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ إذن : $x_0 \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$

لدينا : $f(\frac{1}{4}) = -\frac{13}{64}$ و $f(\frac{3}{8}) = \frac{49}{512}$ إذن : $x_0 \in]\frac{1}{4}, \frac{3}{8}[$

لدينا : $f(\frac{5}{16}) = \frac{-201}{4096}$ و $f(\frac{3}{8}) = \frac{49}{512}$ إذن : $x_0 \in]\frac{5}{16}, \frac{3}{8}[$

لدينا : $f(\frac{5}{16}) = \frac{-201}{4096}$ و $f(\frac{11}{32}) = \frac{783}{32768}$ إذن $x_0 \in]\frac{5}{16}, \frac{11}{32}[$

وبما أن $\frac{23}{64}$ مركز المجال $]\frac{5}{16}, \frac{11}{32}[$ الذي شعاعه 10^{-2}

فإن $\frac{23}{64}$ قيمة مقربة للعدد x_0 بالدقة 10^{-2}

تمرين رقم 20

$f(x) = (x-3)^2 - 1$

1) لدينا: $\forall x \in]-\infty, 3] ; \ f'(x) = 2(x-3) < 0$

اذن f دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $]-\infty, 3]$

اذن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J حيث

$$J = f(]-\infty, 3]) = [f(3), \lim_{x \to -\infty} f(x)[= [-1, +\infty[$$

2) لدينا

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y \in]-\infty, 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [-1, +\infty[\end{cases}$$

$$x = f(y) \Leftrightarrow (y-3)^2 - 1 = x$$
$$\Leftrightarrow (y-3)^2 = x+1$$
$$\Leftrightarrow y - 3 = -\sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad - \sqrt{x+1} \Leftrightarrow y =$$

اذن: $\forall x \in J : \quad f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1}$

تمرين رقم 21

1) $I =]1, +\infty[\ , \ f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$

$$\forall x \in I ; \quad f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2} < 0$$

f دالة متصلة وتناقصية قطعا على I . اذن تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f(I) =]\lim_{x \to +\infty} f(x) ; \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)[=]2, +\infty[$$

2) $I = \mathbb{R} \ , \ f(x) = x|x|$

لدينا: $f(x) = x|x| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 , & x \geq 0 \\ f(x) = -x^2 , & x \leq 0 \end{cases}$

اذن $\begin{cases} f'(x) = 2x ; & x \geq 0 \\ f'(x) = -2x , & x < 0 \end{cases}$

اذن $\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) \geq 0$

f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ اذن تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f(I) =]\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= \mathbb{R}$$

3) $I = \mathbb{R}^+ \ , \ f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{+2} ; \quad x_1 > x_2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x_1} > \sqrt[3]{x_2}$$

f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ اذن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f(I) = [f(0), \lim_{x \to +\infty} f(x)[= \mathbb{R}^+$$

4) $I =]0, 1[\ , \ f(x) = 2\sqrt{x} - x$

$$\forall x \in I , \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} > 0$$

f دالة متصلة وتزايدية قطعا على I .

اذن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f(I) =]f(0), f(1)[=]0, 1[$$

تمرين رقم 22

1)

$$a = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$
$$b = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$
$$c = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$$

2) $d = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}} = \sqrt[12]{729} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt{3}$

$$e = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[4]{64}} = \frac{\sqrt[3]{2^9}}{\sqrt[4]{2^6}} = \frac{2^3}{\sqrt{2^3}} = \sqrt{8}$$

$$f = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

تمرين رقم 23

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2}} = \frac{\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2}} = \frac{\sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{2^9} \cdot \sqrt[12]{2}} = \sqrt[12]{\frac{2^6 \cdot 2^4}{2^9 \cdot 2}} = 1$$

تمرين رقم 24

لدينا.

$$\sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6} = \sqrt[12]{15625}$$
$$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$$
$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[12]{8^4} = \sqrt[12]{4096}$$

اذن $\sqrt{5} > \sqrt[3]{8} > \sqrt[6]{3} > \sqrt[12]{4}$

تمرين رقم 25

$$a = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}{2-3} = -(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$$

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

$$c = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1 - \sqrt[3]{2}}{(1 - \sqrt[3]{2})(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \sqrt[3]{2} - 1$$

تمرين رقم 26

1) أ)

$$a = \sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$$
$$b = \sqrt[6]{80}$$
$$c = 3^{2/3} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[6]{81}$$

اذن: $b < c < a$

ب)

$$a = \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$
$$b = \sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$$
$$c = \sqrt[3]{9} = \sqrt[12]{9^4} = \sqrt[12]{6561}$$

اذن $a < b < c$

2) $A = \dfrac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{4}} = \dfrac{\sqrt[30]{4^{10}} \cdot \sqrt[30]{8^{15}} \cdot \sqrt[30]{2^6}}{\sqrt[30]{2^{10}} \cdot \sqrt[30]{4^5}}$

$$= \sqrt[30]{\frac{2^{20} \cdot 2^{45} \cdot 2^{6}}{2^{10} \cdot 2^{10}}} = \sqrt[30]{\frac{2^{71}}{2^{20}}} = \sqrt[30]{2^{51}}$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[20]{3\sqrt[4]{9}} \cdot 3^2}{\sqrt[5]{81}\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{3}\ \sqrt[20]{3\sqrt{3}} \cdot 3^2}{\sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[8]{3}} = \frac{\sqrt[40]{3^{20}}\ \sqrt[40]{(3\sqrt{3})^2} \cdot 3^2}{\sqrt[40]{3^{32}} \cdot \sqrt[40]{3^5}}$$

$$= \sqrt[40]{\frac{3^{20} \cdot 3^5}{3^{32} \cdot 3^5}} \cdot 3^2 = \frac{3^2}{\sqrt[40]{3^{12}}} = \sqrt[40]{\frac{3^{80}}{3^{12}}}$$

$$= \sqrt[40]{3^{68}} = \sqrt[10]{3^{17}} = 3\sqrt[10]{3^7}$$

تمرين رقم 27

* $x^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -27$

$$\Leftrightarrow (-x)^3 = 3^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(-x)^3} = \sqrt[3]{3^3} \Leftrightarrow -x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -3$$

$$S = \{-3\}$$

* $\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{x^3}$

$$\Leftrightarrow x^2 = x^3$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ او $x = 1$

$$S = \{0, 1\}$$

* $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 64 = 4^3 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{11}{3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{11}{3}\right)^3 = \frac{1331}{27}$$

$$S = \left\{\frac{1331}{27}\right\}$$

تمرين رقم 28

1)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2}}\right) = 0$$

2)

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)} = \frac{1}{3}$$

تمرين رقم 29

1)

$$\lim_{x\to8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4} = \lim_{x\to8} \frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{(x-56)^2} + 4\sqrt[3]{x+56} + 16\right)}{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)}$$

$$= \lim_{x\to8} \frac{\sqrt[3]{(x-56)^2} + 4\sqrt[3]{x+56} + 16}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{48}{12} = 4$$

2)

$$\lim_{x\to3} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{9}\right)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt[3]{9}}$$

3)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[12]{(x+2)^4} - \sqrt[12]{(x+1)^6}}{\sqrt[12]{(x+1)^3} - \sqrt[12]{(x+1)^6}}$$

$= \lim_{X\to+\infty} \frac{X^4 - X^6}{X^3 - X^6} = 1$: (نضع $X = \sqrt[12]{(x+1)}$)

تمرين رقم 30

$$A = \frac{3^{1/3} \cdot 9^{2/3}}{81^{1/4}} = \frac{3^{1/3} \cdot 3^{4/3}}{(3^4)^{1/4}} = \frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}}}{3} = 3^{2/3}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \cdot 7^{2/3}}{7^{-1/4}} = 7^{1/3} \cdot 7^{2/3} \cdot 7^{1/4} = 7\sqrt[4]{7}$$

$$C = \left(2^{-1/3}\right)^5 \left(4^{-1/2}\right)\left(8^{2/3}\right) = \frac{(2^3)^{2/3}}{2^{5/3} \cdot (2^2)^{1/2}} = \frac{2^2}{2^{5/3} \cdot 2}$$

$$= \frac{1}{2^{2/3}}$$

تمرين رقم 31

$$A = \frac{a^{-4/3} \cdot (a^{1/3})^{-1/2}}{\sqrt[6]{a^{-2}}\ \sqrt[3]{a^{-1}}} = a^{-\frac{4}{3}-\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{4}{3}} = a^{1/6}$$

تمرين رقم 32

1)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^{1/3} - x^{1/2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\left(x^{-\frac{1}{6}} - 1\right) = -\infty$$

(لأن : $\lim_{x\to+\infty} \left(x^{-\frac{1}{6}} - 1\right) = -1$ و $\lim_{x\to+\infty} x^{1/2} = +\infty$)

2)

$$\lim_{x\to+\infty} \left((2x+1)^{1/3} - (2x)^{1/3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(2x+1)^{2/3} + (2x(2x+1))^{1/3} + (2x)^{2/3}}$$

$$= 0$$

3)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^{1/4} - x^{1/3}}{x^{1/2} - x} = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - x}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{\sqrt[12]{x^3} - \sqrt[12]{x^4}}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} = \lim_{x\to1} \left(\frac{\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt{x}}\right) \frac{1 - \sqrt[12]{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to1} \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right) \frac{1 - \sqrt[12]{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to1} \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right) \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{(1-x)\left(1 + \sqrt[12]{x} + \sqrt[12]{x^2} + \sqrt[12]{x^3} + \cdots + \sqrt[12]{x^{11}}\right)}$$

$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$(a^{12}-b^{12}) = (a-b)(a^{11}+a^{10}b+a^{9}b^{2}+ \text{———} + ab^{10}+b^{11}).$$

تمرين رقم 34

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+1} , & x \neq \frac{1}{2} \text{ و } x \neq 1 \\ f(\frac{1}{2}) = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2(x-\frac{1}{2})(x+1)}{2(x-\frac{1}{2})(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} = 3$$

لكي تكون f دالة متصلة في $\frac{1}{2}$ يجب ان يكون $a = 3$

تمرين رقم 35

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}-2}{x} , & x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{4-x}+2} = -\frac{1}{4}$$

لكي تكون f دالة متصلة في 0 يجب أن يكون $a = -\frac{1}{4}$

تمرين رقم 36

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{(1-\cos x)^2}{x^3} , & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)^2}{x^3} = \lim_{x \to 0} x\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^2 = 0$$

(لأن $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$).

اذن g دالة متصلة في 0.

تمرين رقم 37

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} , & x \neq 2 \\ f(2) = \frac{9}{8} \end{cases}$$

1) $x \in D \Leftrightarrow x+2 \geq 0$ و $4x+1 \geq 0$ و $\sqrt{4x+1}-3 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -2$ و $x \geq -\frac{1}{4}$ و $x \neq 2$

اذن، $D = [-\frac{1}{4}, 2[\cup]2, +\infty[$

2) $$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \frac{9}{8} = f(2)$$

اذن f دالة متصلة في 2

تمرين رقم 38

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}} , & x \neq 1 \\ f(1) = -\sqrt{2} \end{cases}$$

1) $x \in D \Leftrightarrow x \geq 0$ و $x - \sqrt{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$ و $x \neq 0$ و $x \neq 1$

اذن $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

2) $$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2-(1+x^2))(x+\sqrt{x})}{(x^2-x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1-x^2)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)(\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2})}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(1+x)(x+\sqrt{x})}{-x(\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2})} = -\sqrt{2} = f(1)$$

اذن f دالة متصلة في 1

تمرين رقم 39

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin \pi x}{x-1} , & x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

نحسب $\lim_{x \to 1} f(x)$

نضع $X = x-1 \Leftrightarrow x = X+1$

$x \to 1 \Leftrightarrow X \to 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{X \to 0} \frac{\sin(\pi X+\pi)}{X} = \lim_{X \to 0} -\pi\left(\frac{\sin(\pi X)}{\pi X}\right)$$

$$= -\pi$$

لكي تكون f دالة متصلة في 1 يجب أن يكون $m = -\pi$

تمرين رقم 40

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - \cos 2x}{x} , & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos 2x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (4x)\left(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\right) - \lim_{x \to 0} (x)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= 0 = f(0)$$

اذن f دالة متصلة في 0

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^2 \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{x}{\cos x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = 0 \neq g(0)$$

اذن g دالة غير متصلة في 0

تمرين رقم 41

$$\begin{cases} f(x) = 1 , & x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x+1} , & x \geq 0 \end{cases}$$

لدينا، $f(0) = 1$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 1 = f(0)$$

اذن f دالة متصلة في 0

تمرين رقم 42

$$f(x) = x - E(x)$$

1)
$\forall x \in [-1,0[\ ,\quad E(x) = -1$

إذن: $\forall x \in [-1,0[\ ,\quad f(x) = x+1$

$\forall x \in [0,1[\ ;\quad E(x) = 0$

إذن $\forall x \in [0,1[\ ,\quad f(x) = x$

$\forall x \in [1,2[\ ,\quad E(x) = 1$

إذن $\forall x \in [1,2[\ ,\quad f(x) = x-1$

2)
$$\begin{cases} f(x) = x+1 \ ; & x \in [-1,0[\\ f(x) = x \ ; & x \in [0,1[\\ f(x) = x-1 \ ; & x \in [1,2[\end{cases}$$

لدينا. $f(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x+1) = 1 \neq f(0)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x) = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على اليمين في 0 وغير متصلة على اليسار في 0

إذن f دالة غير متصلة في 0

لدينا: $f(1) = 0$

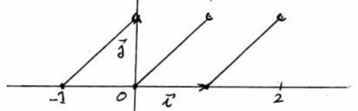
$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-1) = 0 = f(1)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x) = 1 \neq f(1)$

إذن f دالة متصلة على اليمين في 1 وغير متصلة على اليسار في 1

إذن f دالة غير متصلة في 1

3)



تمرين رقم 43

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+x}{|x|} \ , & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x^3+x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x^2+1) = 1 = f(0)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -\dfrac{x^3+x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -(x^2+1) = -1 \neq f(0)$

إذن f دالة متصلة على اليمين في 0 وغير متصلة على اليسار في 0

تمرين رقم 44

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-7x-6}{|x-3|} \ , & x \neq 3 \\ f(3) = 20 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{x^3-7x-6}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \dfrac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x-3}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (x^2+3x+2) = 20 = f(3)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} -\dfrac{x^3-7x-6}{x-3} = -\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \dfrac{(x-3)(x^2+3x+2)}{x-3}$

$= -\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} (x^2+3x+2) = -20 \neq f(3)$

إذن f دالة متصلة على اليمين في 3 وغير متصلة على اليسار في 3

تمرين رقم 45

1)
$I =]-\infty,+\infty[\ ,\ \begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x+1} \ , & x \geq 0 \\ f(x) = 2\sin x \ , & x < 0 \end{cases}$

لدينا f دالة متصلة على $]-\infty,0[$

و f متصلة على $[0,+\infty[$ لأنها دالة جذرية

ولدينا: $f(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 2\sin x = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{x+1} = 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

2)
$I = [-3,+\infty[\ ,\ \begin{cases} f(x) = 3x^2-x+1 \ , & x \in [-3,0[\\ f(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x}} \ , & x \in]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

لدينا: f دالة متصلة على $]0,+\infty[$

و f دالة متصلة على $[-3,0[$ لأنها دالة حدودية

ولدينا:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{x}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (3x^2-x+1) = 1 \neq f(0)$

إذن f دالة متصلة على $[-3,+\infty[- \{0\}$

تمرين رقم 46

$$\begin{cases} f(x) = 2ax+b \ , & 0 \leq x < 1 \\ f(x) = 3x^2-b+3a \ , & 1 \leq x \leq 2 \\ f(x) = \frac{3}{2}ax \ , & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

ندرس اتصال f في 1

لدينا $f(1) = 1-b+3a$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (2ax+b) = 2a+b$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (3x^2-b+3a) = 1-b+3a$

لكي تكون f دالة متصلة في 1 يجب أن تكون

$2a+b = 1-b+3a \iff a-2b = -1$

ندرس اتصال f في 2

لدينا. $f(2) = 12-b+3a$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (3x^2-b+3a) = 12-b+3a$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\frac{3}{2}ax\right) = 3a$

لكي تكون f دالة متصلة في 2 يجب أن تكون:

$12-b+3a = 3a \iff b = 12$

إذن لكي تكون f دالة متصلة على المجال $[0,3]$ يجب أن يكون

$a = 23$ و $b = 12$

تمرين رقم 47

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^3-1} \ , & x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x \underset{>}{\to} 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3} = f(1)$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{-(x-1)}{x^3-1} = \lim_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{-1}{x^2+x+1}$$

$$= -\frac{1}{3} \neq f(1)$$

اذن f دالة متصلة على اليمين في 1 وغير متصلة على اليسار في 1

تمرين رقم 48

$$\begin{cases} f(x) = 2ax^3 - 3b &, x \in [-3,0[\\ f(x) = 2x - b + a &; x \in [0,1[\\ f(x) = 4x - a &, x \in [1,2] \end{cases}$$

ندرس اتصال f في 0

لدينا $f(0) = a - b$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} (2x - b + a) = a - b$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} (2ax^2 - 3b) = -3b$$

لكي تكون f دالة متصلة في 0 يجب أن تكون

$$a - b = 3b \Leftrightarrow a = 4b$$

ندرس اتصال f في 1

لدينا $f(1) = 4 - a$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 1} (4x - a) = 4 - a$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 1} (2x - b + a) = 2 - b + a$$

لكي تكون f دالة متصلة في 1 يجب ان يكون

$$2 - b + a = 4 - a \Leftrightarrow 2a - b = 2$$

اذن لكي يكون f دالة متصلة على المجال $[-3,2]$ يجب ان تكون

$$\begin{cases} a = 4b \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{8}{7} \end{cases}$$

تمرين رقم 49

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} - 2 &, x > 0 \\ f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-4} &; x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا : $f(0) = 0$

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} 2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)$$

$$= 2 \neq f(0)$$

$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{x(x+1)}{x^2-4} = 0 = f(0)$$

اذن f دالة متصلة على اليسار في 0 وغير متصلة على اليمين في 0

إذن f دالة غير متصلة في 0

تمرين رقم 50

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I = [\frac{\pi}{3}, \pi]$ بما يلي :

$$f(x) = 2\sin x - x$$

لدينا f دالة متصلة على I ولدينا :

$$f(\tfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \tfrac{\pi}{3} > 0 \quad , \quad f(\pi) = -\pi < 0$$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الاقل حل للمعادلة : $f(x) = 0$

يعني ان للمعادلة $2\sin x = x$ على الاقل حل في المجال I

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ بما يلي :

$$f(x) = \cos x - x$$

f دالة متصلة على I ولدينا :

$$f(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{\pi}{6} > 0 \quad , \quad f(\tfrac{\pi}{4}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\pi}{4} < 0$$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل حل للمعادلة $f(x) = 0$

يعني ان للمعادلة : $\cos x = x$ على الأقل حل في المجال I

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I = [\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ بما يلي

$$f(x) = 1 - x + \sin x$$

f دالة متصلة على I ولدينا :

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = 2 - \tfrac{\pi}{2} > 0 \quad , \quad f(\tfrac{2\pi}{3}) = 1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{2\pi}{3} < 0$$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الأقل حل للمعادلة $f(x) = 0$

يعني ان للمعادلة $1 + \sin x = x$ على الأقل حل في المجال I

تمرين رقم 51

$$I = [-1, 0[\quad , \quad f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1) $\forall x \in [-1, 0[\; ; \; f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

f دالة متصلة وتناقصية قطعا على I.

اذن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J حيث

$$J = f(I) =]\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) \, , \, f(-1)] =]-\infty, -2]$$

نحسب : $f^{-1}(-\frac{5}{2})$

$$f^{-1}(-\tfrac{5}{2}) = x \Leftrightarrow f(x) = -\tfrac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9.$$

$$x_1 = -2 \notin I \; ; \; x_2 = -\frac{1}{2} \in I$$

اذن $f^{-1}(-\frac{5}{2}) = -\frac{1}{2}$

2) $\begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$

$$x = f(y) \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = x$$

$$\Leftrightarrow y^2 - xy + 1 = 0$$

لأن : $\Delta = x^2 - 4 \geq 0 \; ; (x \in J$

اذن : $y = \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}$ أو $y = \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}$

بما ان f^{-1} معرفة من المجال $]-\infty, -2]$ نحو المجال $[-1, 0[$

فاننا بالنسبة لـ : $y = \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}$

لدينا : $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2} = -\infty$

وهذا غير ممكن

وبالنسبة لـ $y = \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2}$

لدينا $\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x - \sqrt{x^2-4}} = 0^-$

إذن $f^{-1}(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$

تمرين رقم 52

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[2,3]$ بما يلي:

$$f(x)=x^3-4x-1$$

f دالة متصلة على I ولدينا: $f(2)=-1$ ، $f(3)=14$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد على الأقل حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال I.

إذن يوجد على الأقل حل للمعادلة: $x^3=4x+1$ في I

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0,3]$ بما يلي:

$$f(x)=x^3-6x-7$$

f دالة متصلة على I ولدينا: $f(0)=-7$ ، $f(3)=2$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد على الأقل حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال I

إذن يوجد على الأقل حل للمعادلة: $x^3-6x=7$ في I

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[-1,3]$ بما يلي:

$$f(x)=x^3-5x-m$$

f دالة متصلة على I ولدينا:

$f(-1)=4-m\leqslant 0$ ، $f(3)=12-m\geqslant 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد على الأقل حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال I

إذن يوجد على الأقل حل للمعادلة: $x^3-5x=m$ في I.

تمرين رقم 53

1) $f(x)=x^4-2x^2$ ، $I=[0,1]$

$\forall x\in I\ ;\ f'(x)=4x(x^2-1)<0$

f دالة متصلة وتناقصية قطعا على I إذن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال J حيث

$$J=f(I)=[f(1),f(0)]=[-1,0]$$

2) $\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in[-1,0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f(y) \\ y\in[0,1] \end{cases}$

$x=f(y) \Leftrightarrow x=y^4-2y^2$

$\Leftrightarrow (y^2)^2-2y^2-x=0$

$\Delta=4(1+x)\geqslant 0$ (لأن: $x\in[-1,0]$)

$y^2=1-\sqrt{1+x}$ أو $y^2=1+\sqrt{1+x}$

لدينا. $y\in[0,1] \Leftrightarrow y^2\in[0,1]$

وبما أن: $1+\sqrt{1+x}\geqslant 1$

فإن $y^2=1-\sqrt{1+x}$

إذن: $y=-\sqrt{1-\sqrt{1+x}}$ أو $y=\sqrt{1-\sqrt{1+x}}$

بما أن: $y\in[0,1]$

فإن: $f^{-1}(x)=\sqrt{1-\sqrt{1+x}}$

تمرين رقم 54

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1,2]$ بما يلي.

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}-x$$

f دالة متصلة على I ولدينا:

$f(1)=\sqrt[3]{2}-1>0$ ، $f(2)=\sqrt[3]{5}-2<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد على الأقل حل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $[1,2]$

إذن يوجد على الأقل حل للمعادلة: $\sqrt[3]{1+x^2}=x$ في $[1,2]$

تمرين رقم 55

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 & ,x\in]-2,0[\\ f(x)=2x & ,x\in[0,1[\\ f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & ,x\in[1,2[\end{cases}$$

1) لدينا: $f(0)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x=0=f(0)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} (2x+1)=1\neq f(0)$

f دالة متصلة على يمين 0 وغير متصلة على يسار 0

إذن f دالة غير متصلة في 0

2) لدينا: $f(1)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1=f(1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (2x)=2\neq f(1)$

f دالة متصلة على يمين 1 وغير متصلة على يسار 1

إذن f دالة غير متصلة في 1

3) f دالة متصلة على $]-2,0[$ لأنها دالة حدودية

f دالة متصلة على $[0,1[$ لأنها دالة حدودية

f دالة متصلة على $[1,2[$ لأنها مركب دالتين متصلتين

إذن f دالة متصلة على $]-2,2[-\{0,1\}$

تمرين رقم 56

1) $\begin{cases} f(x)=x-1 & ,x\geqslant 1 \\ f(x)=x+1 & ,x<1 \end{cases}$

لدينا: $f(1)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (x-1)=0=f(1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (x+1)=2\neq f(1)$

f دالة متصلة على يمين 1 وغير متصلة على يسار 1

إذن f دالة غير متصلة في 1

$$\begin{cases} g(x)=x^2+2x & ,x\geqslant 1 \\ g(x)=x-1 & ,x<1 \end{cases}$$

لدينا: $g(1)=3$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (x^2+2x)=3=g(1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (x-1)=0\neq g(1)$

g دالة متصلة على يمين 1 وغير متصلة على يسار 1

إذن g دالة غير متصلة في 1

2) $\begin{cases} (fg)(x)=(x^2+2x)(x-1) & ,x\geqslant 1 \\ (fg)(x)=x^2-1 & ,x<1 \end{cases}$

لدينا، $(fg)(1)=0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (fg)(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (x^2+2x)(x-1)=0=f(1)$

$$\lim_{x \to 1^<} (fg)(x) = \lim_{x \to 1^<} (x^2-1) = 0 = f(1)$$

اذن (fg) داله متصلة في 1

تمرين رقم 57

1) لدينا :

$$a^6 = \left(\sqrt[4]{8}\right)^{12} = 2^9$$
$$b^6 = \left(\sqrt{\sqrt{81}}\right)^6 = 3^9$$
$$c^6 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^6 = 2$$

اذن : $c < a < b$

2)

$$A = \frac{2^{5/3}\sqrt[4]{2^{-8}}\left(\sqrt[5]{3^4}\right)^{-\frac{1}{2}}}{3^{5/2}\left(2^{2/3}\right)^{5/2}} = \frac{2^{5/3} \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-\frac{2}{5}}}{3^{5/2} \cdot 2^{5/3}}$$
$$= \frac{1}{2^2\, 3^{29/10}}$$

تمرين رقم 58

1)

$$\frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{y^{-5}}}} \cdot \sqrt[12]{\frac{x^{-8}}{y^3}} = \frac{\sqrt[12]{x^{20}}}{\sqrt[12]{y^{-15}}} \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{x^8 y^3}}$$
$$= \sqrt[12]{\frac{x^{20}\, y^{15}}{x^8\, y^3}} = \sqrt[12]{(xy)^{12}} = xy$$

2)

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}\left((x-1)^2\right)^{-1/3}}{\sqrt[3]{x(x-1)}}(1-x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}\,(1-x)}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x-1}\,\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$
$$= \frac{-x\sqrt[3]{x}\,(x-1)}{\sqrt[3]{x}\,(x-1)} = -x$$

تمرين رقم 59

1)

$$x^3 + 125 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -125$$
$$\Leftrightarrow (-x)^3 = 5^3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(-x)^3} = \sqrt[3]{5^3}$$
$$\Leftrightarrow -x = 5 \quad \Leftrightarrow x = -5$$
$$S = \{-5\}$$

2) يجب أن يكون $2-x \geqslant 0$ و $2+x \geqslant 0$

يعني $x \in [-2,2]$

$$\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2+x} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2-x}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2+x}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2-x}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow 2+x = 4 - 3\sqrt[3]{16}\,\sqrt[3]{2-x} + 3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{(2-x)^2} - 2 + x$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{2-x}\left(\sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{4}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x} = 0$ أو $\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$

$\Leftrightarrow x = 2$ أو $x = -2$

$$S = \{2, -2\}$$

3) يجب أن يكون $4 - x^2 \geqslant 0$

يعني $x \in [-2,2]$

$$\sqrt[3]{(2+x)^2} + \sqrt[3]{(2-x)^2} = 2\sqrt[3]{4-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2+x}\right)^2 - 2\sqrt[3]{2-x}\,\sqrt[3]{2+x} + \left(\sqrt[3]{2-x}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{2-x}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2+x} = \sqrt[3]{2-x}$$

$$\Leftrightarrow 2 + x = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$
$$S = \{0\}$$

تمرين رقم 60

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{8-x} - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x\left(\sqrt[3]{(8-x)^2} + 2\sqrt[3]{8-x} + 4\right)}$$
$$= -\frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{(\sin x)\left(1 + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(1 + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x+63} - 4} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+63)^2} + 4\sqrt[3]{x+63} + 16\right)}{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)(x-1)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{(x+63)^2} + 4\sqrt[3]{x+63} + 16}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = 16$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x + 3} - 2\sqrt[3]{x^3 + 1}\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}} - 2\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}}\right)$$
$$= -\infty$$

تمرين رقم 61

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - \cos x - 1}{x^2} \;;\; x \neq 0 \\ f(0) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(2\cos^2 x - 2) - \cos x + 1}{x^2}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin^2 x}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$
$$= -2\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 + \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$
$$= -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = f(0)$$

اذن f دالة متصلة في 0

تمرين رقم 62

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

لدينا : f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ولدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الاقل حل x_0 للمعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

وبما ان $\forall x \in \mathbb{R} \;;\; f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

فان : f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

اذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في $\mathbb{R}$

وبما ان $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$

فان f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $]0,1[$
ادن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $x_0 \in]0,1[$

ج) $f(x_0)=0 \Leftrightarrow x_0^3+x_0-1=0$
$\Leftrightarrow x_0^3 = 1-x_0$
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x_0^3} = \sqrt[3]{1-x_0}$; $(x_0>0$ و $1-x_0>0)$
$\Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{1-x_0}$

تمرين رقم 63

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{2-x} & , x \leq x_0 \\ f(x)=x & , x > x_0 \end{cases}$$

1) $(x-1)(x^2+x+2) = x^3+x^2+2x-x^2-x-2$
$= x^3+x-2$

2) لدينا: $f(x_0)=\sqrt[3]{2-x_0}$
و $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = x_0$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \sqrt[3]{2-x_0}$
f دالة متصلة في x_0 $\Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{2-x_0}$
$\Leftrightarrow x_0^3 = 2-x_0$
$\Leftrightarrow (x_0-1)(x_0^2+x_0+2)=0$
$\Leftrightarrow x_0=1$ أو $x_0^2+x_0+2=0$
بما أن $\Delta<0$
فإن $x_0=1$

تمرين رقم 64

1) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = 1$$

2) $$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4} = \lim_{x \to 8} \frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{(x+56)^2}+4\sqrt[3]{x+56}+16\right)}{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}$$
$$= \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{(x+56)^2}+4\sqrt[3]{x+56}+16}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4} = \frac{48}{12} = 4$$

3) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt{x}}-1\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\sqrt[6]{(x^3+1)^2}}{\sqrt[6]{x^3}}-1\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt[6]{\frac{(x^3+1)^2}{x^3}}-1\right) = +\infty$$

4) $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{2x-3}-\sqrt[3]{3x-5}}{\sqrt{7x+2}-\sqrt{5x+6}} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(2-x)\left(\sqrt{7x+2}+\sqrt{5x+6}\right)}{(2x-4)\left(\sqrt[3]{(2x-3)^2}+\sqrt[3]{(2x-3)(3x-5)}+\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right)}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{7x+2}+\sqrt{5x+6}}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}+\sqrt[3]{(2x-3)(3x-5)}+\sqrt[3]{(3x-5)^2}}$$
$$= -\frac{4}{3}$$

تمرين رقم 65

باعتبار أن f دالة متصلة على $[0,1]$ فان g دالة متصلة على $[0,1]$
ولدينا: $g(0)=f(0)>0$ و $g(1)=f(1)-1<0$
فانه حسب مبرهنة القيم الوسيطية للمعادلة $g(x)=0$ على الأقل حل في $]0,1[$
اذن للمعادلة $f(x)=x$ على الاقل حل في المجال $]0,1[$

تمرين رقم 66

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي:
$$g(x)=f(x)-x$$
وباعتبار ان الدالة f متصلة على $[a,b]$ فان الدالة g متصلة على $[a,b]$ ولدينا:
$g(a)=f(a)-a>0$
$g(b)=f(b)-b<0$
اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد على الاقل حل للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $]a,b[$
إذن يوجد على الاقل حل للمعادلة $f(x)=x$ في المجال $]a,b[$

تمرين رقم 67

$f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{x-1}$ ، $]1,+\infty[$

1) $\forall x \in]1,+\infty[$; $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x^2}\sqrt{x}}{x-1}$
$=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{\sqrt{x}(1-x)}{x-1} = -\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-1}$

2) لدينا f دالة متصلة على المجال $]1,+\infty[$ لانها مجموع دالتين متصلتين على $]1,+\infty[$
ولدينا: $\forall x \in]1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$
$=-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)<0$
اذن f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $]1,+\infty[$
ومنه f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $]1,2[$
ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty$
$f(2)=-\sqrt{2}+1<0$
اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حلا وحيدا α للمعادلة: $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$
اذن للمعادلة: $\dfrac{1}{x-1}=\sqrt{x}$ حلا وحيدا α في المجال $]1,2[$

3) لدينا: $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha-1}=\sqrt{\alpha}$ ، $\alpha \in]1,2[$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{\alpha-1}\right)^2=\alpha$
$\Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)^2=1$
$\Leftrightarrow \alpha(\alpha^2-2\alpha+1)=1$
$\Leftrightarrow \alpha^3-2\alpha^2=1-\alpha$
$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha-2)=1-\alpha$

تمرين رقم 68

$f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+9}$ ، $[-3,+\infty[$

1) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+9}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{9}{x^3}} = +\infty$$

2) $(x+1)^3+8 = x^3+3x^2+3x+1+8$

$= x^3+3x^2+3x+9$

3) لكل x_1 و x_2 عنصرين مختلفين من المجال $[-3,+\infty[$

لدينا: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow (x_1+1)^3 > (x_2+1)^3$

$\Leftrightarrow (x_1+1)^3+8 > (x_2+1)^3+8$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x_1+1)^3+8} > \sqrt[3]{(x_2+1)^3+8}$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $[-3,+\infty[$

4) نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين بمايلي

$$g\begin{bmatrix} [-3,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^3+3x^2+3x+9 \end{bmatrix} ; h\begin{bmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[-3,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+}_{} $$
$$\underbrace{x \longmapsto x^3+3x^2+3x+9 \longmapsto \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+9}}_{f}$$

لدينا g داله متصلة على $[-3,+\infty[$ لأنها داله حدودية

و h داله متصلة على $\mathbb{R}^+$

اذن f داله متصلة على $[-3,+\infty[$ لأنها مركب دالتين متصلتين

5) أ) بما ان f داله متصلة وتزايدية قطعا على $[-3,+\infty[$

فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث

$J = f([-3,+\infty[) = [f(-3), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$

$= [0,+\infty[$

ب) $\begin{cases} x = f(y) \\ y \in [-3,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

$x = f(y) \Leftrightarrow \sqrt[3]{(y+1)^3+8} = x$

$\Leftrightarrow (y+1)^3+8 = x^3$

$\Leftrightarrow (y+1)^3 = x^3-8$

لدينا: $y \geq -1 \Leftrightarrow x \geq 2$

و $-3 \leq y \leq -1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$

إذا كان: $x \geq 2$ فان:

$(y+1)^3 = x^3-8 \Leftrightarrow y+1 = \sqrt[3]{x^3-8}$

$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3-8} - 1$

اذا كان: $0 \leq x \leq 2$ فان:

$(y+1)^3 = x^3-8 \Leftrightarrow (-y-1)^3 = 8-x^3$

$\Leftrightarrow -y-1 = \sqrt[3]{8-x^3}$

$\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{8-x^3} - 1$

اذن

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3-8} - 1 , & x \geq 2 \\ f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{8-x^3} - 1 , & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

تمرين رقم 69

$$\begin{cases} f(x) = (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) , & x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

1) لدينا: $\forall x \in]0,2[; \quad |f(x)-f(1)| = |f(x)|$

$= \left|(x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right|$

$= \left|(x-1)(x+1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right|$

$= |x-1|\left|(x+1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right|$

ولدينا: $\forall x \in]0,2[-\{1\} ; \quad \left|\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \leq 1 \quad (*)$

$\forall x \in]0,2[; \quad 0 < x < 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,2[; \quad 1 < x+1 < 3$

اذن: $\forall x \in]0,2[; \quad |x+1| < 3 \quad (**)$

من $(*)$ و $(**)$ نحصل على:

$\forall x \in]0,2[-\{1\} ; \quad |x+1|\left|\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \leq 3$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,2[-\{1\} ; \quad \left|(x+1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \leq 3$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,2[-\{1\} ; \quad |x-1|\left|(x+1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \leq 3|x-1|$

اذن: $\forall x \in]0,2[; \quad |f(x)-f(1)| \leq 3|x-1|$

2) بما ان $\lim_{x \to 1} 3|x-1| = 0$

فان $\lim_{x \to 1} |f(x)-f(1)| = 0$

اذن $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

ومنه فإن الدالة f متصلة في 1

تمرين رقم 70

$f(x) = x^3+x+1$

1) $\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = 3x^2+1 > 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) لدينا f داله متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[-2,2]$

و $f(2) = 11$ ، $f(-2) = -9$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حلا وحيدا α

للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[-2,2]$

3) f داله متصلة وتزايدية قطعا على $[-2,2]$ ولدينا

$f(2) = 11$ و $f(-2) = -9$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حلا وحيدا α في

المجال $[-2,2]$ سعته 4

* لدينا منتصف $[-2,2]$ هو 0 ولدينا: $f(0) = 1$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\alpha \in [-2,0]$ سعته 2

* لدينا منتصف $[-2,0]$ هو -1 ولدينا: $f(-1) = -1$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\alpha \in [-1,0]$ سعته 1

* لدينا منتصف $[-1,0]$ هو $-\frac{1}{2}$ ولدينا $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\alpha \in [-1,-\frac{1}{2}]$ سعته 0,5

* لدينا منتصف $[-1,-\frac{1}{2}]$ هو $-\frac{3}{4}$ ولدينا $f(-\frac{3}{4}) = \frac{-29}{64}$.

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\alpha\in[-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}]$ بسعة 0,25

* لدينا منتصف $[-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}]$ هو $-\frac{5}{8}$ و $f(-\frac{5}{8})=\frac{67}{512}$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\alpha\in[-\frac{3}{4},-\frac{5}{8}]$ بسعة 0,125

تمرين رقم 71

$f(x)=x+\sqrt{x+3}$

1) $x\in D_f \Leftrightarrow x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$

$\Leftrightarrow D_f=[-3,+\infty[$

2) f دالة متصلة على D_f لأنها مجموع دالتين متصلتين على D_f

ولدينا $\forall x\in D_f;\ f'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x+3}}>0$

اذن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على D_f.

3) f دالة متصلة وتزايدية قطعا على D_f.

اذن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث

$J=f(D_f)=[f(-3),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)[$

$=[-3,+\infty[$

5) حل المعادلة $f(x)=f^{-1}(x)$ هو أفصول نقطة تقاطع منحنيي f و f^{-1}

يعني هو أفصول نقطة تقاطع منحنى f والمستقيم الذي معادلته $y=x$

اذن $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x$

$\Leftrightarrow f(x)-x=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+3}=0$

$\Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

اذن $\alpha=-3$

تمرين رقم 72

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}, & x\neq 0 \\ f(0)=-\frac{1}{8} \end{cases}$$

1) لدينا $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos x\geq -1$

اذن $\forall x\in\mathbb{R},\ 3+\cos x\geq 2$

اذن $D_f=\mathbb{R}$

2)
$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(3+\cos x)-4}{x^2(\sqrt{3+\cos x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{3+\cos x}+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}=f(0)$$

اذن f دالة متصلة في 0

3) نعتبر الدالتين u و v المعرفتين بمايلي

$u\begin{bmatrix}\mathbb{R}^*\longrightarrow[2,4[\\ x\longmapsto 3+\cos x\end{bmatrix}$, $v:\begin{bmatrix}[2,4[\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\sqrt{x}-2\end{bmatrix}$

لدينا:
$$\underbrace{\mathbb{R}^*\longrightarrow[2,4[\longrightarrow\mathbb{R}}_{g}$$
$$x\longmapsto 3+\cos x\longmapsto\sqrt{3+\cos x}-2$$

الدالة g متصلة على $\mathbb{R}^*$ لأنها مركب دالتين متصلتين

اذن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}^*$ لأنها خارج دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^*$

وبما ان f دالة متصلة في 0

فإن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

4) لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ |f(x)|=\left|\frac{\sqrt{3+\cos x}-2}{x^2}\right|$

$=\frac{1}{x^2}|\sqrt{3+\cos x}-2|$

نبين أن $\forall x\in\mathbb{R}^*\ |\sqrt{3+\cos x}-2|<1$

لدينا $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ -1\leq\cos x<1$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ 2\leq 3+\cos x<4$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ \sqrt{2}\leq\sqrt{3+\cos x}<2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ -2+\sqrt{2}\leq\sqrt{3+\cos x}-2<0$

اذن $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ -1<-2+\sqrt{2}\leq\sqrt{3+\cos x}-2<0<1$

اذن $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ -1<\sqrt{3+\cos x}-2<1$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ |\sqrt{3+\cos x}-2|<1$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ \frac{1}{x^2}|\sqrt{3+\cos x}-2|<\frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*;\ |f(x)|<\frac{1}{x^2}$

بما ان $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

تمرين رقم 73

$$\begin{cases} f(x)=x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) $D_f=\mathbb{R}$

2) $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ |\sin\frac{1}{x}|\leq 1$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*\ |x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x|$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*\ |x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^*\ |f(x)|\leq|x|$

3) بما ان $\lim_{x\to0}|x|=0$

فإن $\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0)$

اذن f دالة متصلة في 0

تمرين رقم 74

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}, & x\neq\alpha \\ f(\alpha)=-\sin\alpha \end{cases}$$

بما أن الدالة $h: x\mapsto\cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

فإنها قابلة للاشتقاق على كل α من $\mathbb{R}$

ولدينا $\lim_{x\to\alpha}\frac{\cos x-\cos\alpha}{x-\alpha}=h'(\alpha)=-\sin\alpha$

إذن $\lim_{x\to\alpha}f(x)=-\sin\alpha=f(\alpha)$

إذن f دالة متصلة في $x_0=\alpha$

ج)

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1-2\cos x}{\pi - 3x}, & x \neq \dfrac{\pi}{3} \\ g\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} g(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

إذن g دالة متصلة في $\frac{\pi}{3}$

تمرين رقم 75

$I = [1, +\infty[$ ، $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$

1) لدينا: $\forall x \in I ;\ u'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$

إذن الدالتين u و v تزايديتين على المجال I

إذن الدالة f تزايدية على المجال I لأنها مركب u و v

$$I \xrightarrow{v} I \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt[3]{x} \longmapsto \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{f}$$

ج) بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال I فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f(I) = \left[f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$$

$$= [0, 1[$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{\sqrt[3]{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}} = 1\right)$$

3)

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y \in [1, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in [0, 1[\end{cases}$$

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{y} - 1}{\sqrt[3]{y} + 1}$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt[3]{y} + 1) = \sqrt[3]{y} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y}(1 - x) = 1 + x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$$

إذن، $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^3$

2 الاشتقاق وتطبيقاته - دراسة الدوال

1

باستعمال التعريف، حدد العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x)=x^2+x$ و $x_0=1$

2) $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $x_0=2$

3) $f(x)=\sin x$ و $x_0=\frac{\pi}{2}$

2

باستعمال التعريف، ادرس قابلية اشتقاق الدالة f، (محددا العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x)=|x-1|$ و $x_0=1$

2) $\begin{cases} f(x)=x^2+1; x\geq 0 \\ f(x)=4x+1; x<0 \end{cases}$ و $x_0=0$

3) $f(x)=\sqrt{x}$ و $x_0=1$

3

لتكن f الدالة العددية المعرفة كالآتي: $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1}\ ; x\geq 0 \\ f(x)=x^2+\sqrt{-x}\ ; x<0 \end{cases}$

1) ادرس اتصال الدالة f في 0.

2) هل الدالة f قابلة للاشتقاق في 0؟

4

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-\cos x}{\tan x}; x\in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g(0)=0 \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة g.

2) هل الدالة g متصلة على اليمين في النقطة $x_0=0$؟

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة g على اليمين في النقطة $x_0=0$.

5

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي: $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=2$.

2) حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f في النقطة التي أفصولها $x_0=2$.

6

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-3x}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 3 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

7

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي: $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}$

هل منحنى الدالة f يقبل مماسا معامله الموجه $\frac{1}{2}$؟

8

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$f(x)=x-\sqrt{1-x}$$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

9

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كالآتي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) ادرس اتصال الدالة f على اليمين في الصفر.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر.

10

باستعمال العدد المشتق حدد النهايات الآتية:

1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^4-625}{x-5}$ 3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}}$

11

باستعمال العدد المشتق حدد النهايات الآتية

1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin^2 x-\sin x\sin\alpha}{x-\alpha}$

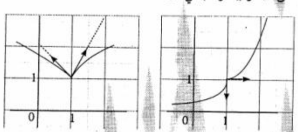
3) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^7-128}{x^5-32}$ 4) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^3-a^3}$ (حيث $a>0$)

12 قراءة تمثيل مبياني

ليكن (C) منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ و A نقطة من (C) أفصولها 1.

1) هل الدالة f قابلة للاشتقاق في 1؟

2) حدد العدد المشتق، أو العدد المشتق على اليمين، أو العدد المشتق على اليسار (إذا وُجد) في كل حالة من الحالتين الآتيتين:



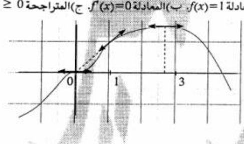
13

في الشكل أسفله، المنحنى (C) يمثل منحنى دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، و (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1.

1) حدد مبيانيا مايلي: $f(0)$ و $f(1)$ و $f'(1)$.

2) حل مبيانيا:

أ) المعادلة $f(x)=1$. ب) المعادلة $f'(x)=0$. ج) المتراجحة $f'(x)\geq 0$



14

حدد في كل حالة من الحالات الآتية الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بمايلي:

1) $f(x)=x^6+x^5+2x^2-\frac{x}{2}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2+5}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{x}+3x$ 4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

15

حدد في كل حالة من الحالات الآتية الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بمايلي:

1) $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$ 2) $f(x)=(4x-1)\sin x$

3) $f(x)=x^2\cos^3x$ 4) $f(x) = (\sqrt{x}-1)^4$

16

حدد في كل حالة من الحالات الآتية الدالة المشتقة للدالة f المعرفة بمايلي:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{x}$ 2) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ 4) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

17

باستعمال مشتقة مركب دالتين، حدد في كل حالة من الحالات التالية مشتقة الدالة f المعرفة بمايلي:

1) $f(x)=\cos(x^2+7x-1)$ 2) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^3$

3) $f(x) = \sqrt{x^3+x^2-2}$ 4) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+5}\right)$

18

حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f:\ x \mapsto \sin(\sin x)$ 2) $f:\ x \mapsto \sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$

3) $f:\ x \mapsto \sin\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$

19

حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f:x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ 2) $f:x \mapsto x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$

3) $f:x \mapsto \cos(5x^2+4)$ 4) $f:x \mapsto \frac{\sqrt{x+5}}{x\sqrt{x}}$

5) $f:x \mapsto \sqrt[3]{x^2+x+1}$ 6) $f:x \mapsto (x-1)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x-1}$

20

في كل حالة من الحالات الاتية، f دالة عددية لمتغير حقيقي x.

حدد مجموعة تعريف الدالة f و احسب $f'(x)$.

1) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ 2) $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$

3) $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ 4) $f(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

21

حدد مشتقة كل دالة من الدوال العددية المعرفة كالآتي:

1) $f(x) = (x^2+x)^{\frac{1}{3}}$ 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+7}}$ 4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[4]{x^3+1}$

22

حدد في كل حالة من الحالات الآتية الدوال الأصلية للدالة f المعرفة على I بمايلي:

1) $f(x)=4x^4+3x^3+2x^2+x+1$ ، $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + 3$; $I =]0;+\infty[$.

3) $f(x)=1+\tan^2x+\sin x$ ، $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

4) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{3x^3}$ على $]0;+\infty[$.

23

حدد الدوال الأصلية لكل دالة من الدوال الآتية:

1) $f:\ x \mapsto 2x(x^2+1)^3$ 2) $g:\ x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$

3) $h:\ x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ 4) $u:\ x \mapsto 2x\sqrt{x^2+1}$

24

حدد الدوال الأصلية لكل دالة من الدوال الآتية:

1) $f_1:\ x \mapsto \sin x(\cos x)^3$ 2) $f_2:\ x \mapsto \sin^3x$

3) $f_3:\ x \mapsto \cos^3x$ 4) $f_4:\ x \mapsto \cos^2x$

5) $f_5:\ x \mapsto \sin^2x$ 6) $f_6:\ x \mapsto \tan^2x$ على $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

25

حدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f:x \mapsto (x^2+x+1)\sqrt{x}$; $I =]0;+\infty[$.

2) $f:x \mapsto \sqrt[3]{x+1}$; $I =]-1;+\infty[$.

3) $f:x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+1}}$; $I =]-1;+\infty[$.

26

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;\pi]$ بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = x+1 ; 0 \le x \le 1 \\ f(x) = x^2+x ; 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن f تقبل دوال أصلية على المجال $[0;3]$.

2) لتكن g الدالة العددية المعرفة كالآتي:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{2} + x + a ; 0 \le x \le 1 \\ g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + b ; 1 < x \le 3 \end{cases}$$ حيث a و b عددان حقيقيان.

حدد علاقة بين a و b لكي تكون الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $[0;3]$.

27 المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ادرس تقعر منحنى الدالة f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. 2) $f(x)=\sin x-3x^2+7$

3) $f(x) = \frac{x^2+x+3}{x+2}$. 4) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

28

ادرس تقعر منحنى الدالة العددية f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = \sqrt{2x-2} + x$. 3) $f(x) = 16\sqrt{x-1} + x^2$.

2) $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$. 4) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

29

أدرس تقعر منحنى الدالة f وحدد نقط انعطافه (إذا وُجدت) في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$. 2) $f(x) = \frac{x-}{3x^2+3}$.

3) $f(x) = (x-1)^{\frac{5}{3}}$. 4) $f(x)=-\cos^2x-2\sin x+1$.

30 المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

حدد مركز تماثل منحنى الدالة f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x)=4x^2+x^5$.

2) $f(x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(2x)+4}$.

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+7}-1}{x^3+x}$.

31

تحقق من أن النقطة I مركز تماثل منحنى الدالة f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x)=x^3-3x+2$ و $I(0;2)$.

2) $f(x) = \frac{5x+1}{1-2x}$ و $I\left(\frac{1}{2};\frac{-5}{2}\right)$.

3) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ و $I(-1;-2)$.

32 المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

حدد محور تماثل منحنى الدالة العددية f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 2) $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2+1}$.

2) $f(x) = \frac{2-\sin^4x}{\cos x+3}$ 3) $f(x) = \frac{2}{x^2+3x-4}$.

33

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي: $f(x) = \frac{2x-1}{x+2-x^2}$

1) حدد نقطة انعطاف المنحنى الممثل للدالة f.

2) بَيِّنْ أن النقطة المحصل عليها، مركز تماثل المنحنى الممثل للدالة f.

34

لتكن f الدالة العددية. ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة العددية f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$. 2) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

3) $f(x) = x + \sqrt{x^2+x+1}$. 4) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

35

لتكن f الدالة العددية. ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = x\sqrt{x} - 2$. 2) $f(x) = \sqrt{x+2} - x$

3) $$\begin{cases} f(x) = x^2 + x ; x \le 0 \\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}} ; x > 0 \end{cases}$$

36

ادرس الدالة العددية f وأنشئ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x)=x^3+x^2-5x$ 2) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

3) $f(x)=\cos(2x)-\sin x$ 4) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

37

أدرس الدالة f وأنشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $f(x) = x\sqrt{x-1}$. 2) $f(x) = (4-x)^{\frac{3}{2}}$.

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$. 4) $f(x)=\cos x+\cos 2x$.

5) $f(x) = x\sqrt{x-1}$. 6) $f(x) = (x-2)\sqrt{x-2}$.

38

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$f(x) = \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}$.

ادرس الدالة f وأنشئ منحناها (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

39

أوجد قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون الدالة العددية f المعرفة كالآتي:

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 - 1 ; x \ge 1 \\ f(x) = ax - x ; x < 1 \end{cases}$$ قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=1$

40

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} , \ x \neq 1 \\ f(1) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=1$، ثم أعط تأويلا هندسيا.

41

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=0$.

42

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي: $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2-x}$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) أ- بَيِّنْ أن:

$$(\forall x \in]1;+\infty[) ; \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x+1}} - \sqrt[3]{\frac{x}{(x-1)^2}}$$

ب- استنتج أن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 وأعط تأويلا هندسيا

43

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) بَيِّنْ أن الدالة f متصلة في النقطة 0.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=0$.

4) احسب $f'(x)$ لكل x من D ومخالف للعدد 0 .

44

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a باستعمال $f'(a)$ حدد النهايات الآتية:

1) $\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$. 2) $\lim_{x \to 0} \frac{f(a+x) - f(a+x^2)}{x}$.

45

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولتكن g و h و k دوال معرفة كالآتي: $g(x)=f(-x)$ و $h(x)=f(3x)$ و $k(x)=f(x^2)$

حدد g' و h' و k' بدلالة f'.

46

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$f(x) = x + \sqrt{x^2-4}$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 2 وأعط تأويلا هندسيا.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في -2 وأعط تأويلا هندسيا.

4) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

48

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\pi;\pi[$ بمايلي:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} ; x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن g قابلة للاشتقاق في الصفر.

2) أعط قيمة مقربة للعدد: $g(10^{-5})$

3) بَيِّنْ أن g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\pi;\pi[$ واحسب $g'(x)$ لكل x يخالف العدد 0 .

49

1) بَيِّنْ أن: $(\forall x \in \mathrm{IR})\ ;\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$

2) لتكن f الدالة العددية المتغير الحقيقي x المعرفة كالآتي

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

بَيِّنْ أن: $2\sqrt{1+x^2}f'(x) = f(x)$

3) استنتج أن: $4(1+x^2)f''(x)+4xf'(x)=f(x)$

50

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالآتي: $f(x)=x^3-3x-3$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$،

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} وحدد مجموعة تعريف الدالة g^{-1}.

ب- بَيِّنْ أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α وأن $2<\alpha<3$.

ج- بَيِّنْ أن $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$.

51

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بمالي: $f(x) = |x|\cos 3x$.

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0.

2) احسب $f'(x)$ لكل x من IR .

3) حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها π.

52

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty;0]$ كالآتي: $f(x)=x-\sin x$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;0]$ واستنتج رتابة الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

2) استنتج أن: $x \leq \sin x$ لكل x من $]-\infty;0]$.

53

لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي:

$$h(x)=\sin 3x+4\sin^3 x-3\sin x+1$$

1) احسب $h'(x)$ لكل x من IR.

2) باستعمال العلاقة $\cos 3x=\cos x(1-4\sin^2 x)$ لكل x من IR

بَيِّنْ أن : $(\forall x \in \mathrm{IR})\ ;\ h'(x)=0$.

3) استنتج قيمة $h(x)$ لكل x من IR.

54

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بمايلي: $f(x) = \frac{x^4+2x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$

1) حدد العددين a و b بحيث: لكل x من IR $f(x) = a + \frac{bx}{(x^2+1)^2}$

2) استنتج الدوال الأصلية للدالة f على IR.

3) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على IR التي تحقق $F(1)=5$.

55

لتكن الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) ادرس زوجية الدالة f.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1 وأعط تأويلا هندسيا.

4) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0;1]$.

5) أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

56

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2-2x}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- احسب نهايات الدالة f عند محدات D_f.

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 2 وأعط تأويلا هندسيا.

ب- احسبْ $f'(x)$ وادرس إشارتها.

3) بَيِّنْ أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا ثم حدد وضع (C_f) بالنسبة لمقاربه المائل.

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[2;+\infty[$.

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1}.

ب- أنشئ في نفس المعلم السابق منحنى الدالة g^{-1}.

57

لتكن f الدالة العددية لمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}.$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0، وأعط تأويلا هندسيا.

3) احسب $f'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أنشئ (C_f).

58

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-2;-1[\cup]-1;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}-1}$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب النهايات الآتية:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to-1\\ x<-1}} f(x)$.

2) احسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتيجة.

3) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في -2.

ب- بَيِّنْ أنه لكل x من $]-2;-1[\cup]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+2}-1)^2+1}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-1)^2}$$

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-1;2]$.

بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

5) أ- ارسم المنحنى (C_f) (دراسة التقعر غير مطلوبة).

ب- ارسم في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ منحنى الدالة g^{-1}.

(حيث g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g).

59

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$f(x) = x - \sqrt{2x-1}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f واحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f).

3) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $\frac{1}{2}$.

ب- بَيِّنْ أن إشارة $f'(x)$ على المجال $]\frac{1}{2};+\infty[$ هي إشارة $x-1$.

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f

د- أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 5.

4) ارسم المنحنى (C_f).

5) لتكن g الدالة العددية المعرفة من $[1;+\infty[$ نحو $[0;+\infty[$ بمايلي $g(x)=f(x)$.

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية.

ب- تحقق من أن: $(\forall x \in [1;+\infty[);g(x) = \frac{(\sqrt{2x-1}-1)^2}{2}$

ج- احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من $[0;+\infty[$.

60

لتكن الدالة العددية f المعرفة على IR^+ بمايلي: $f(x) = 1 - \frac{x}{4}(\sqrt{x}-2)^2$.

1) بَيِّنْ أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

2) بَيِّنْ أن: $(\forall x \in \mathrm{IR}^{*+});f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)$

ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

3) أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

ب- بَيِّنْ أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها.

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[4;+\infty[$.

أ- بَيِّنْ أن المعادلة $g(x)=0$ ، $x \in I$ تقبل حلا وحيداً α من المجال $]\frac{64}{9};\frac{121}{16}[$

ب- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ج- لتكن g^{-1} الدالة العكسية للدالة g.

حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J ثم استنتج أن: $\alpha = 4+2\sqrt{3}$.

د- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحنيين (C_f) و (C_g). (حيث C_g هو منحنى الدالة g).

61

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x^2-|x|+1}.$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) لتكن D مجموعة تعريف الدالة f، بين أن $D=\mathrm{IR}$.

2) ادرس زوجية الدالة f

3) أ- حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

4) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر.

ب- ادرس تغيرات الدالة f

5) أنشئ (C_f).

6) لتكن g قصور الدالة f على المجال $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- أنشئ $C_{g^{-1}}$ منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

62

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = -x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f.

2) احسب نهايات الدالة f عند محدات D.

3) أ- ادرس قابلية الدالة f على اليسار في الصفر وأعط تأويلا هندسيا.

ب- حدد f' الدالة المشتقة للدالة f، وتحقق من أن:

$(\forall x \in (D_f-\{0\}));f'(x)<0$.

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f

4) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته: $y=-x+1$.

أ- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والمنحنى (C_f).

ب- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

ج- حدد نقطتي تقاطع (C_f) ومحور الأفاصيل ثم أنشئ (C_f).

63

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x(\sqrt{x}-2)^2.$$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة التي أفصولها 0 وأعط تأويلا هندسيا.

3) أ- بَيِّنْ أنه: لكل $x>0$ لدينا: $f'(x) = 2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)$.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات الدالة f.

4) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) (وحدة القياس $1cm$).

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=[4;+\infty[$.

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

ج- أنشئ Cg^{-1} منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم السابق.

64

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = |x|\sqrt{x^2-1}.$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3cm)$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f وادرس زوجيتها.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1، وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) أ- ادرس تقعر المنحنى (C_f) على المجال $]1;+\infty[$.

ب- حدد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

ج- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د- أنشئ (C_f).

5) لتكن الدالة g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- ليكن g^{-1} التقابل العكسي للدالة g. احسب $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

ج- أعط تعبير $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

د- أنشئ في نفس المعلم السابق منحنى الدالة g^{-1}.

65

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بمايلي:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

1) أ- حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ وأول النتائج هندسيا.

ب- حدد $f'(x)$ لكل x من المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ وأعط جدول تغيرات f

2) أ- بَيِّنْ أن $(\forall x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[); f'(x) = (2x+1)^{-\frac{3}{2}}(1-x)$

ب- بَيِّنْ أن النقطة A ذات الأفصول 1 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

4) أنشئ (C_f) $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$.

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0; +\infty[$، بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

66

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D =]-2; -1] \cup [1; +\infty[$ بما يلي: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$، ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1 وعلى اليسار في (-1)، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3) بَيِّنْ أن $(\forall x \in D - \{-1;1\}); f'(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}}$، ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

4) ارسم المنحنى (C) (تحديد نقطة الانعطاف غير مطلوب).

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]-2; -1]$.

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- أعط معادلة ديكارتية لمماس منحنى الدالة g^{-1} في النقطة التي أفصولها 1.

67

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2-x} & ; x \in [0;1] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} & ; x \in]-\infty, 0[\cup]1; +\infty[\end{cases}$$

وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) ادرس اتصال الدالة f في 0 و1، ثم احسب النهايتين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في كل من 0 و1 وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

3) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathrm{IR}^{*}-\{0,1\}$ وأعط جدول تغيرات الدالة f

4) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f).

68

يصنع معمل منتوجا صناعيا A.

1) بَيَّنت دراسة أن الكلفة الإجمالية (بالدرهم) لصنع q وحدة من المنتوج A هي: $C(q)=2q^2-12q+100$

حدد عدد الوحدات التي ينبغي إنتاجها لكي تكون الكلفة الإجمالية دنوية.

2) نعلم أن ثمن بيع كل وحدة من المنتوج A هو 100 درهم.

أ- حدد الربح $B(q)$ الذي يحققه المعمل عند بيع q وحدة من المنتوج A.

ب- حدد عدد الوحدات التي ينبغي إنتاجها لتحقيق ربح قصوي ثم أعط هذا الربح القصوي.

69

تصنع شركة منتوجا M، الكلفة الإجمالية (بالدراهم) لصنع x وحدة من المنتوج M هي:

$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 100x + 300$ حيث $0 \leq x \leq 30$

ثمن بيع وحدة من المنتوج M هو 121DH.

1) حدد الدخل الإجمالي $R(x)$ الناتج عن بيع x وحدة من المنتوج M.

2) أ- حدد الربح الإجمالي $B(x)$.

ب- ما عدد الوحدات التي ينبغي إنتاجها من المنتوج M لكي يكون الربح الإجمالي قصويا؟

ما قيمة هذا الربح القصوي؟

70

تريد شركة لصنع الحلويات تحديد أبعاد علبة حجمها $216cm^3$ على شكل متوازي المستطيلات القائم، له قاعدة على شكل مربع، لتلفيف نوع جديد من الحلوى، وبينت الدراسة أن كلفة هذه العلبة مرتبطة بطول ضلع هذه القاعدة، بحيث إذا كان طول ضلع القاعدة بالسنتمتر هو x، فإن الكلفة بالسنتيم هي: $C(x) = \frac{1}{10}\left(4x^2 + \frac{216}{x}\right)$

1) ادرس منحى الدالة C على المجال $]0; +\infty[$ (حساب $C'(x)$ وجدول التغيرات).

2) حدد طول ضلع القاعدة التي تكون من أجلها التكلفة دنوية وحدد هذه التكلفة.

3) إذا كان h هو ارتفاع العلبة وحجمها هو $V=x^2.h$، حدد h حين تكون هذه التكلفة دنوية.

71

تسير سيارة بسرعة v بحيث $0 \leq v \leq 130$ (v معبر عنها بـ km/h).

مسافة التوقف عند الضغط على دواسة الفرامل تأخذ بعين الاعتبار فعالية ولحظة تجاوب السائق مع الفرامل، وهي محددة بالعلاقة

$$d(v) = \frac{v^2}{200} + \frac{v}{5}$$

1) انقل ثم املأ الجدول التالي:

v	0	10	30	50	60	80	90	100	120	130
dv										

2) نعتبر في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المنحى (C) الممثل للدالة d المعرفة على المجال $[0;130]$ بما يلي: $d(v) = \frac{v^2}{200} + \frac{v}{5}$

أنشئ المنحى (C)

نمثل $10km/h$ بـ $1cm$ على محور الأفاصيل.

ونمثل $10m$ بـ $1cm$ على محور الأراتيب.

3) نفترض أن السيارة تسير بسرعة $120km/h$، وأن سائقها ضغط على دواسة الفرامل في اللحظة التي لمح فيها عائقا على بعد $100m$.

هل سيتجنب السائق الاصطدام؟

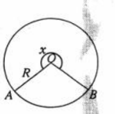
4) لمح سائق السيارة حيوانا على بعد $48cm$، ثم ضغط تلقائيا على دواسة الفرامل.

ما أقصى سرعة لا ينبغي للسائق تجاوزها لتجنب الاصطدام مع الحيوان؟

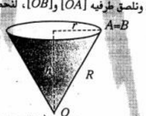
72

نعتبر قرصا من الورق المقوى، مركزه O وشعاعه R.

نقطع من هذا القرص قطاعا زاويا (انظر الشكل (1))



نأخذ القطاع الزاوي ونلصق طرفيه $[OA]$ و$[OB]$، لنحصل على مخروطي.



الهدف من هذا التمرين هو تحديد قيمة x $(0 < x < 2\pi)$، قياس الزاوية بالرديان للقطاع الزاوي التي من أجلها يكون للمخروطي حجم قصوي.

1) حدد r وh على التوالي شعاع وارتفاع المخروطي بدلالة R و x.

2) بَيِّنْ أن حجم المخروطي معرف بما يلي:

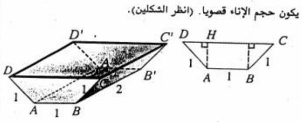
$$V(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

3) أ- ادرس تغيرات الدالة V على المجال $]0; 2\pi[$.

ب- حدد قيمة x التي من أجلها يكون للمخروطي حجم قصوي، ثم احسب حجم المخروطي بدلالة R.

73

نعتبر إناء على شكل موشور قائم $ABCDA'B'C'D'$، قاعدته شبه منحرف $ABCD$ متساوي الساقين، و $AB=BC=1$ وH هو المسقط العمودي للنقط A. الهدف من هذا التمرين هو تحديد الطول CD لكي يكون حجم الإناء قصويا. (انظر الشكلين).



1) حدد المجموعة التي ينتمي إليها x؟

2) حدد مساحة شبه المنحرف $ABCD$ بدلالة x، وبين أن حجم الإناء هو: $V(x) = 2(1+x)\sqrt{1-x^2}$

3) ادرس تغيرات الدالة V.

4) حدد قيمة x لكي يكون حجم الإناء قصويا.

74

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالآتي:

$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. وليكن (C_f) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم ادرس زوجية الدالة f.

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f).

4) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (T).

ج- أنشئ (C_f).

5) أ- بَيِّنْ أن f تقبل دالة عكسية.

ب- لتكن f^{-1} الدالة العكسية للدالة f

بَيِّنْ أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في الصفر واحسب $(f^{-1})'(0)$.

ج- بَيِّنْ أن f^{-1} دالة فردية ثم أنشئ (C_f^{-1}) منحنى الدالة f^{-1}

6) حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة: $m\sqrt{1+x^2} = x$ حيث m بارمتر حقيقي.

75

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$f(x) = \sqrt{x+4} - x + 1$.

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f واحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في -4، وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

5) أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) ليكن g قصور الدالة f على المجال $\left[\frac{-15}{4}; +\infty\right[$.

أ- بَيِّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J (حيث g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g).

76

I) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$g(x) = \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{x}$ وليكن (C_g) منحناها في معلم ممنظم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ بحيث وحدة القياس هي $1cm$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة g.

2) احسب نهايات g عند محدات مجموعة تعريفها ثم استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_g).

3) بَيِّنْ أن النقطة $\Omega(0,1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_g).

4) احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}$، ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

5) احسب الدالة المشتقة للدالة g.

II) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة في IR كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \; ; \; x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\\ x \in]-2;2[\; ; \; f(x) = \sqrt{4-x^2} + 1 \end{cases}$$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f و بَيِّنْ أن قصور f على المجال $]-2;2[$ دالة زوجية.

2) ادرس اتصال الدالة f في النقطة 2.

3) ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في النقطة 2.

4) احسب مشتقة f على المجال $]-2;2[$.

5) ضع جدول تغيرات الدالة f

6) أنشئ (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

III) لتكن h قصور f على المجال $[2; +\infty[$.

1) بَيِّنْ أن الدالة h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده. ما منحى تغيرات الدالة h^{-1}؟

2) أنشئ المنحنى الممثل للدالة h^{-1} في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) ليكن x من $D_{h^{-1}}$، عبر عن $h^{-1}(x)$ بدلالة x.

77

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}.$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد مجموعة التعريف D للدالة f

2) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$،

(لاحظ أن $X - 2\sqrt{X} = \sqrt{X}\left(\sqrt{X}-2\right)$ لكل X من IR^{+}).

3) حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

4) أ- بيّنْ أنه لكل x من D: $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}\left(1-\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)$.

ب- بيّنْ أنه لكل x من D: $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}} < 1$.

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f

5) بيّنْ أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

6) ارسم المنحنى (C).

7) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]0;2[$.

أ- بيّنْ أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- ارسم في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ منحنى الدالة g^{-1}.

78

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$$

1) أ- ليكن x عنصرا من IR ، عمل $1+x^3$.

ب- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>-1}} f(x)$.

3) أ- ادرس إشارة $2+x^3$ حيث $x \in]-1;+\infty[$.

ب- بيّنْ أن: $f'(x) = \frac{3x^2(x^3+2)}{2(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}$; $(\forall x \in]-1;+\infty[)$.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f

3) ادرس الفرعين اللانهائيين لـ (C_f) منحنى الدالة f

4) أنشئ (C_f) في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

79

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}.$$

وليكن (C_g) منحنى الدالة g في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g.

2) احسب النهايات الآتية: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} \frac{g(x)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \frac{g(x)}{x-1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x>-2}} \frac{g(x)}{x+2}$

وأول النتائج المحصل عليها مبيانيا.

3) أعط جدول تغيرات الدالة g.

4) بيّنْ أن المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_g).

5) أنشئ (C_g). (نأخذ: $\sqrt[3]{4} \simeq 1,6$ و $\sqrt[3]{2} \simeq 1,25$).

80

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على IR^{+} بما يلي:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - x.$$

وليكن (C) منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- تحقق أن: $f(x) = x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)$ لكل x من IR^{+*}.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C).

2) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

ب- بيّنْ أن: $f'(x) = -\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$ لكل x من IR^{+*}

ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ- بيّنْ أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α من المجال $[1;+\infty[$.

ب- بيّنْ أن α يحقق: $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$، ثم استنتج قيمة α.

(تذكير: $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$).

4) ارسم المنحنى (C) (نأخذ $\alpha \simeq 4,2$).

5) استنتج مما سبق أنه إذا كان a و b عددين حقيقيين بحيث:

$0 < a < \alpha < b$ فإن: $\frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} > \frac{a}{b}$.

تمرين رقم 1

1)

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+2) = 3 = f'(1)$$

2)

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$= \frac{1}{2} = f'(2)$$

3)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X+\frac{\pi}{2})-1}{X} \quad (\text{بوضع}: X = x-\frac{\pi}{2})$$

$$= \lim_{X\to 0} -\frac{1-\cos X}{X} = \lim_{X\to 0} (-X)\left(\frac{1-\cos X}{X^2}\right)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 = f'(\frac{\pi}{2})$$

تمرين رقم 2

1)

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{x-1}{x-1} = 1 = f'_d(1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 = f'_g(1)$$

بما أن $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق في 1

2)

$$\begin{cases} f(x) = x^2+1 & , x \geq 0 \\ f(x) = 4x+1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \frac{x^2+1-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} x = 0 = f'_d(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} \frac{4x+1-1}{x} = 4 = f'_g(0)$$

بما أن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق في 0

3)

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3} = f'(1)$$

ومنه فإن f دالة قابلة للاشتقاق في 1

تمرين رقم 3

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & , x \geq 0 \\ f(x) = x^2+\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$$

لدينا $f(0) = 1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\>}} \sqrt{x+1} = 1 = f(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\<}} (x^2+\sqrt{-x}) = 0 \neq f(0)$$

إذن f دالة متصلة على يمين 0 وغير متصلة على يسار 0

ومنه فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق في 0

ملاحظة: يمكننا دراسة قابلية اشتقاق f على يمين 0 فقط

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2} = f'_d(0)$$

تمرين رقم 4

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1-\cos x}{\tan x}, & x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1) $D = [0, \frac{\pi}{2}[$

2)

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{\tan x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} (x) \frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = 0 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

$$= 0 = g(0)$$

إذن الدالة g متصلة على يمين 0

3)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{x \tan x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)} = \frac{1}{2} = g'_d(0)$$

g دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0

تمرين رقم 5

$$f(x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

1) نعتبر الدالتين g و h المعرفتين بما يلي:

$$g \begin{bmatrix} D_f \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^2+1 \end{bmatrix} \quad h \begin{bmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{bmatrix}$$

لدينا:

$$D_f \xrightarrow{g} \mathbb{R}^+ \xrightarrow{h} \mathbb{R}^+$$

$$x \longmapsto x^2-1 \longmapsto \sqrt{x^2-1}$$

$$f = h \circ g$$

لدينا: f دالة متصلة على D_f لأنها مركب دالتين متصلتين

و f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق

ومنه فإن f دالة قابلة للاشتقاق في 2 ولدينا:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3})} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

2)

$$(T_2): y = (f'(2))(x-2) + f(2)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(x-2) + \sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

تمرين رقم 6

$$f(x) = x + \sqrt{x^2-3x}$$

$$x \in D \Leftrightarrow x^2-3x \geq 0$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$D =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$$

2)

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+\sqrt{x^2-3x}-3}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3)+\sqrt{x(x-3)}}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \left(1 + \frac{\sqrt{x(x-3)}}{\sqrt{(x-3)^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x-3}}\right) = +\infty$$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 3

ومنحنى الدالة f على يمين النقطة التي إحداثيتها $(3,3)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

تمرين رقم 7

لكي يقبل منحنى f مماسا في x_0 معامله الموجه $\frac{1}{2}$

يجب أن تكون f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) = \frac{1}{2}$

إذن: نحدد x_0 بحيث $f'(x_0) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{3x-5}{x-2} - \frac{3x_0-5}{x_0-2}}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0-2)(3x-5)-(x-2)(3x_0-5)}{(x-x_0)(x-2)(x_0-2)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{(x-2)(x_0-2)} = \frac{-1}{(x_0-2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x_0-2)^2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x_0^2-4x_0+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = 3 \quad \text{أو} \quad x_0 = 1$$

إذن منحنى الدالة f يقبل مماسا معامله الموجه $\frac{1}{2}$ في النقطتين اللتين أفصولاهما على التوالي 1 ، 3

تمرين رقم 8

$$f(x) = x - \sqrt[3]{1-x}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

إذن: $D_f =]-\infty, 1]$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-\sqrt[3]{1-x}-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)-\sqrt[3]{1-x}}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{1-x}}{1-x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1-x}{(1-x)^3}}\right) = \lim_{x \to 1^-} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)^2}}\right) = +\infty$$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يسار 1

ومنحنى f على يسار النقطة التي إحداثيتها $(1,1)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

تمرين رقم 9

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$D_f = [0, +\infty[$$

1)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x})\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= 0 = f(0)$$

إذن f دالة متصلة على يمين 0

2)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^>} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right) = +\infty$$

. إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0
ومنحنى f يقبل عند النقطة التي احداثيتها (0,0) نصف مماس يوازي محور الأراتيب

تمرين رقم 10

1)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{3}}{x-\frac{\pi}{3}} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2)
$$\lim_{x\to 5} \frac{x^4-625}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{x^4-(5)^4}{x-5} = 4(5)^3 = 500$$

3)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(\frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\cos x-\cos\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)} =$$

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = -1$$

تمرين رقم 11

1)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)}{\left(\frac{\sin x-\sin\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}\right)} =$$

$$= \frac{1+\tan^2\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

2)
$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin^2 x-\sin x\sin\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} (\sin x)\left(\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}\right) = \sin\alpha\cos\alpha$$

3)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^7-128}{x^5-32} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\frac{x^7-2^7}{x-2}\right)}{\left(\frac{x^5-2^5}{x-2}\right)} = \frac{7(2^6)}{5(2^4)} = \frac{28}{5}$$

4)
$$\lim_{x\to a} \frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^3-a^3} = \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{x-a}\right)}{\left(\frac{x^3-a^3}{x-a}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{2a^2}$$

تمرين رقم 12

1) f حالة التي دالة غير قابلة للاشتقاق في 1 لأن A في الحالتين نقطة زاوية .

2) في الحالة الأولى:

$f'_d(1)=0$ و $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

في الحالة الثانية : $f'_g(1) = -1$ و $f'_d(1) = 2$

تمرين رقم 13

1) $f(0)=0$ ، $f(1)=1$

$f'(1)=1$: (المعامل الموجه لمماس منحنى f في النقطة (1,1))

2) أ) $f(x)=1 \Leftrightarrow x=1$ أو $x=3{,}8$

(نقطتي تقاطع $\mathcal{C}_f$ والمستقيم الذي معادلته $y=1$)

ب) $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=2{,}7$

(أفاصيل نقط منحنى f حيث المماس أفقي)

ج) $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2{,}7$

(المجال حيث f دالة تزايدية)

تمرين رقم 14

1) $f'(x) = 6x^5+5x^4+4x-\frac{1}{2}$

2) $f'(x) = \frac{-2}{3x^3}+\frac{1}{x^2}+3$

3) $f'(x) = \frac{-6x}{(3x^2+5)^2}$

4)
$$f'(x) = \frac{(x^2+x+1)-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

تمرين رقم 15

1)
$$f'(x) = \left(\left(\frac{x}{x-1}\right)^2\right)' = 2\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)' = 2\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

2) $f'(x) = ((4x-1)\sin x)' = 4\sin x+(4x-1)\cos x$

3)
$$f'(x) = (x^2\cos^3 x)' = 2x\cos^3 x + x^2(-3\cos^2 x\sin x) = 2x\cos^3 x - 3x^2\cos^2 x\sin x$$

4)
$$f'(x) = ((\sqrt{x}-1)^4)' = 4(\sqrt{x}-1)^3(\sqrt{x}-1)' = 4(\sqrt{x}-1)^3\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}$$

تمرين رقم 16

1) $f'(x) = \left(\frac{x}{3}+\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{3}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2)
$$f'(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}-(x+\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\sqrt{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

3)
$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{x}\right)' = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-2(x-1)}{2x^2\sqrt{x-1}} = \frac{-x+2}{2x^2\sqrt{x-1}}$$

4)
$$f'(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(x-\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2} = \frac{(2\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})(2\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}(x-\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{-2x}{2\sqrt{x}\,(x-\sqrt{x})^2} = \frac{-\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}$$

تمرين رقم 17

(1 $f'(x) = (\cos(x^2+7x-1))' = -(2x+7)\sin(x^2+7x-1)$

(2 $f'(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^3\right)' = 3\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^2\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)'$

$$= 3\left(\frac{x+1}{x^2+3x+7}\right)^2 \frac{x^2+3x+7-(x+1)(2x+3)}{(x^2+3x+7)^2}$$

$$= \frac{3(x+1)^2(-x^2-2x+4)}{(x^2+3x+7)^4}$$

$$= \frac{-3(x^4+4x^3+x^2-6x-4)}{(x^2+3x+7)^4}$$

(3 $f'(x) = \left(\sqrt{x^3+x^2-2}\right)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^3+x^2-2}}(x^3+x^2-2)'$$

$$= \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2-2}}$$

(4 $f'(x) = \left(\cos\sqrt{x^2+1}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\sin\sqrt{x^2+1}$

تمرين رقم 18

(1 $f'(x) = (\sin(\sin x))' = (\cos(\sin x))(\sin x)'$

$$= (\cos(\sin x))(\cos x)$$

(2 $f'(x) = \left(\sqrt{\tan\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan\frac{x}{2}}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)'$

$$= \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)'}{2\sqrt{\tan\frac{x}{2}}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{4\sqrt{\tan\frac{x}{2}}}$$

(3 $f'(x) = \left(\sin\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)\right)' = \left(\cos\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)\right)\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)'$

$$= \left(\cos\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)\right)\frac{1+x^2-2x(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)\right)\frac{-x^2-2x+1}{(1+x^2)^2}$$

تمرين رقم 19

(1 $f'(x) = \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

(2 $f'(x) = \left(x\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)' = \sqrt{\frac{x}{x-1}} + x\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right)'$

$$= \sqrt{\frac{x}{x-1}} + x\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}\left(\frac{x}{x-1}\right)'\right) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{-1}{(x-1)^2}$$

(3 $f'(x) = (\cos(5x^2+4))' = (-\sin(5x^2+4))(5x^2+4)'$

$$= -10x\sin(5x^2+4)$$

(4 $f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x+5}}{x\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}x\sqrt{x} - \sqrt{x+5}\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)}{(x\sqrt{x})^2}$

$$= \frac{\frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x+5}} - \sqrt{x+5}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)}{x^3} = \frac{x\sqrt{x}-3(x+5)\sqrt{x}}{(2x^3)\sqrt{x+5}}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}(2x+15)}{(2x^3)\sqrt{x+5}}$$

(5 $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^2+x+1}\right)' = \frac{(x^2+x+1)'}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$

$$= \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

(6 $f'(x) = \left((x-1)^{1/3}\sqrt{x-1}\right)' = \frac{\sqrt{x-1}}{3(x-1)^{2/3}} + \frac{(x-1)^{1/3}}{2\sqrt{x-1}}$

تمرين رقم 20

(1 $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

(2 $f'(x) = \left(\sqrt[3]{2-x}\right)' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}}$

(3 $f'(x) = \left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-2/3}\left(\frac{x-1}{x}\right)'$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2/3}\frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{3x^2}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{2/3}$$

(4 $f'(x) = \left(\left(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2}\right)' = \frac{3}{2}\left(x^{1/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}\left(x^{1/3}-x^{2/3}\right)'$

$$= \frac{3}{2}\left(x^{1/3}-x^{2/3}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{3x^{2/3}}-\frac{2}{3x^{1/3}}\right)$$

تمرين رقم 21

(1 $f'(x) = \left((x^2+x)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(x^2+x)^{-2/3}(x^2+x)'$

$$= \frac{2x+1}{3(x^2+x)^{2/3}}$$

(2 $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}+(x-1)^{1/3}\right)' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$

$$= \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}$$

(3 $f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+7}}\right)' = \left((x^2+7)^{-1/3}\right)'$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+7)^{-4/3}(2x) = \frac{-2x}{3\left(\sqrt[3]{(x^2+7)^4}\right)}$$

(4 $f'(x) = \left(x^{2/3}-\sqrt[4]{x^3+1}\right)' = \left(x^{2/3}-(x^3+1)^{1/4}\right)'$

$$= \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{4}(x^3+1)^{-3/4}(3x^2) = \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{3x^2}{4\sqrt[4]{(x^3+1)^3}}$$

تمرين رقم 22

1) $F(x) = \frac{4}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$; $c \in \mathbb{R}$

2) $F(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + 3x + c \quad / c \in \mathbb{R}$

3) $F(x) = \tan x - \cos x + c \quad / c \in \mathbb{R}$

4) $F(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{6x^4} + c \quad / c \in \mathbb{R}$

تمرين رقم 23

1) $f(x) = (x^2+1)^3 (x^2+1)'$

$F(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c \quad / c \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$F(x) = \frac{-1}{x^2+1} + c \quad / c \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}} = 2\,\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + c \quad / c \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = 2x\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)'$

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c \quad / c \in \mathbb{R}$

تمرين رقم 24

1) $f(x) = (\sin x)(\cos x)^3$

$= -(\cos x)^3 (\cos x)'$

$F(x) = \frac{1}{4}(\cos x)^4 + c \quad / c \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sin^3 x = \sin x(\sin^2 x)$

$= \sin x(1 - \cos^2 x)$

$= \sin x + \cos^2 x(\cos x)'$

$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c \quad / c \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \cos^3 x = \cos x(\cos^2 x)$

$= \cos x(1 - \sin^2 x)$

$= \cos x - \sin^2 x(\sin x)'$

$F(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c \quad / c \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c \quad / c \in \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c \quad / c \in \mathbb{R}$

6) $f(x) = \tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$

$F(x) = (\tan x) - x + c \quad / c \in \mathbb{R}$

تمرين رقم 25

1) $f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt{x}$

$= x^{5/2} + x^{3/2} + \sqrt{x}$

$F(x) = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

$c \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$F(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} + c \quad / c \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$= \sqrt{x+1} - 2\,\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x+1} + c \quad / c \in \mathbb{R}$

تمرين رقم 26

1) لكي تقبل f دوال أصلية على المجال $[0,3]$ يجب ان تكون f دالة متصلة على $[0,3]$

f دالة متصلة على المجالين $[0,1]$ و $]1,3]$ لأنها حدودية

ندرس اتصال f في 1

لدينا $f(1) = 2$

$\lim_{x \to 1^<} f(x) = \lim_{x \to 1^<} (x+1) = 2 = f(1)$

$\lim_{x \to 1^>} f(x) = \lim_{x \to 1^>} (x^2+x) = 2 = f(1)$

إذن f دالة متصلة في المجال $[0,3]$

ومنه فان f تقبل دوال أصلية على المجال $[0,3]$

2) لكي تكون g دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,3]$

يجب ان تكون g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0,3[$

و $\forall x \in]0,3[\ ;\ g'(x) = f(x)$

لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على المجالين $]0,1[$ و $]1,3[$

لأنها دالة حدودية

ندرس قابلية اشتقاق g في 1

$$\lim_{x \to 1^<} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^<} \frac{\frac{x^2}{2} + x + a - a - \frac{3}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^<} \frac{\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^<} \frac{x^2+2x-3}{2(x-1)} = \lim_{x \to 1^<} \frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$$

$$= 2 = g'_g(1)$$

$$\lim_{x \to 1^>} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^>} \frac{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + b - a - \frac{3}{2}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^>} \frac{2x^3+3x^2-6+6(b-a)}{6(x-1)} =$$

يجب أن يكون 1 جذر للحدودية : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6 + 6(b-a)$

$P(1) = 0 \iff b - a = \frac{1}{6}$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{2x^3+3x^2-5}{6(x-1)} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(x-1)(2x^2+5x+5)}{6(x-1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{2x^2+5x+5}{6} = 2 = g'_d(1)$$

إذن العلاقة بين a و b لكي تكون الدالة g دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,3]$ هي :

$$b - a = \frac{1}{6}$$

تمرين رقم 27

1)
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = x^2 + x + 1$$
$$f''(x) = 2x + 1$$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
تقعر منحنى f		$\frown$		$\smile$	

f'' تنعدم عند $-\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها

إذن، $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{12}\right)$ نقطة انعطاف لمنحنى f

2)
$$f(x) = \sin x - 3x^2 + 7$$
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \cos x - 6x$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f''(x) = -(\sin x + 6) < 0$$

منحنى f تقعره موجها نحو الأراتيب السالبة

3)
$$f(x) = \frac{x^2+x+3}{x+2}$$
$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$$
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+2) - x^2 - x - 3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4x-1)}{(x+2)^4}$$
$$= \frac{10}{(x+2)^3}$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	
تقعر منحنى f		$\frown$	‖	$\smile$	

4)
$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2-1}$$
$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

منحنى f تقعره موجها نحو الأراتيب الموجبة

تمرين رقم 28

1)
$$f(x) = \sqrt{2x-2} + x$$
$$D_f = [1, +\infty[$$
$$\forall x \in]1, +\infty[\; ; \; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-2}} + 1$$
$$\forall x \in]1, +\infty[\; ; \; f''(x) = \frac{-1}{\sqrt{(2x-2)^3}} < 0$$

منحنى الدالة f تقعره موجها نحو الأراتيب السالبة

2)
$$f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$$
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = 1 - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = \frac{3(2x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تقعر منحنى f		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \quad , \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}$$

3)
$$f(x) = 16\sqrt{x-1} + x^2$$
$$D_f = [1, +\infty[$$
$$\forall x \in]1, +\infty[\; ; \; f'(x) = \frac{8}{\sqrt{x-1}} + 2x$$
$$\forall x \in]1, +\infty[\; , \; f''(x) = \frac{2\left((\sqrt{x-1})^3 - 2\right)}{(\sqrt{x-1})^3}$$
$$f''(x) = 0 \iff (\sqrt{x-1})^3 = 2$$
$$\iff \sqrt{x-1} = \sqrt[3]{2}$$
$$\iff x - 1 = \sqrt[3]{4}$$
$$\iff x = 1 + \sqrt[3]{4}$$

x	1		$1+\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تقعر منحنى f	‖	$\frown$		$\smile$	

4)
$$f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$
$$= \frac{-x-5}{2\sqrt{x+1}}$$
$$D_f =]-1, +\infty[$$
$$\forall x \in D_f \; ; \; f'(x) = \frac{-2\sqrt{x+1} + (x+5)\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)}$$
$$= \frac{-2(x+1)+x+5}{4(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{-x+3}{4\sqrt{(x+1)^3}}$$
$$\forall x \in D_f : \; f''(x) = \frac{-4(x+1)\sqrt{x+1} + 6(x-3)\sqrt{x+1}}{16(x+1)^3}$$
$$= \frac{\sqrt{x+1}\,(x-11)}{8(x+1)^3}$$

x	1		11		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
تقعر منحنى f	‖	$\frown$		$\smile$	

تمرين رقم 29

1)
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$$
$$D_f = \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \;;\; f'(x) = x^2 + 3x - 4$

$\forall x \in \mathbb{R} \;;\; f''(x) = 2x + 3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{37}{4}$

x	$-\infty$		$-3/2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
تقعر منحنى f		$\frown$		$\smile$	

f'' تنعدم عند $-\frac{3}{2}$ وتغير اشارتها

اذن $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{37}{4}\right)$ نقطة انعطاف لمنحنى f

2) $f(x) = \frac{x}{3x^2+3}$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \;;\; f'(x) = \frac{3x^2+3 - x(6x)}{(3x^2+3)^2} = \frac{-3x^2+3}{(3x^2+3)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \;;\; f''(x) = \frac{-6x(3x^2+1)^2 - (3x^2-3)12x(3x^2+1)}{(3x^2+3)^4}$

$= \frac{-6x(3x^2+3) + 12x(3x-3)}{(3x^2+3)^3}$

$= \frac{18x(x^2-3)}{(3x^2+3)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ او $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
تقعر منحنى f		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

f'' تنعدم عند 0 وتغير اشارتها

اذن النقطة $O(0,0)$ نقطة انعطاف لمنحنى f

f'' تنعدم عند $-\sqrt{3}$ وتغير اشارتها

اذن النقطة $A\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{12}\right)$ نقطة انعطاف لمنحنى f

f'' تنعدم عند $\sqrt{3}$ وتغير اشارتها

اذن النقطة $B\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$ نقطة انعطاف لمنحنى f

3) $f(x) = (x-1)^{2/3}$

$D_f = [1, +\infty[$

$\forall x \in]1, +\infty[\;;\; f'(x) = \frac{2}{3(x-1)^{1/3}}$

$\forall x \in]1, +\infty[\;,\; f''(x) = \frac{-2}{9(x-1)^{4/3}} < 0$

منحنى f تقعره موجها نحو الاراتيب السالبة

4) $f(x) = -\cos^2 x - 2\sin x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \;;\; f'(x) = 2\cos x \sin x - 2\cos x$

$\forall x \in \mathbb{R} \;;\; f''(x) = -2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 2\sin x$

$= 2(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x$

$= -4\sin^2 x + 2\sin x + 2$

$= 4\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(1 - \sin x)$

اشارة $f''(x)$ هي اشارة $\sin x + \frac{1}{2}$

لدينا f دالة دورية ودورها : $T = 2\pi$

اذن ندرس تقعر منحنى f على المجال $[0, 2\pi]$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ او $x = \frac{11\pi}{6}$

x	0		$\pi/2$		$7\pi/6$		$11\pi/6$		2π
$f''(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
تقعر منحنى f			$\smile$			$\frown$		$\smile$	

f'' تنعدم في $\frac{7\pi}{6} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وتغير الاشارة

اذن النقط $A_k\left(\frac{7\pi}{6} + k2\pi, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ نقط انعطاف لمنحنى f

f'' تنعدم في $\frac{11\pi}{6} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وتغير الاشارة

اذن النقط $B_k\left(\frac{11\pi}{6} + k2\pi, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ نقط انعطاف لمنحنى f

تمرين رقم 30

1) $f(x) = 4x + x$

$D_f = \mathbb{R}$

لكل x من D_f لدينا : $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f : f(-x) = 4(-x) + (-x)$

$= -f(x)$

f دالة فردية ومنه فإن أصل المعلم هو مركز تماثل منحنى f

2) $f(x) = \frac{\sin 4x}{\cos(2x)+4}$

$D_f = \mathbb{R}$

لكل x من D_f لدينا $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f \;;\; f(-x) = \frac{\sin(4(-x))}{\cos(2(-x)) + 4}$

$= -\frac{\sin 4x}{\cos 2x + 4} = -f(x)$

بما أن f دالة فردية فإن أصل المعلم هو مركز تماثل منحنى f

3) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+7} - 1}{x^3 + x}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

لكل x من D_f لدينا $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f \;;\; f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2+7} - 1}{(-x)^3 + (-x)}$

$= -\frac{\sqrt{x^2+7} - 1}{x^3 + x} = -f(x)$

بما أن f دالة فردية فإن أصل المعلم هو مركز تماثل منحنى f

تمرين رقم 31

1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

لكل x من D_f لدينا $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f \;;\; f(-x) + f(x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 + x^3 - 3x + 2$

$= 4$

اذن النقطة $I(0,2)$ مركز تماثل منحنى f

2) $f(x) = \frac{5x+1}{1-2x}$

$D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

لكل x من D_f . نبين أن $(1-x) \in D_f$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -x \neq -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1-x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f \; ; \; f(1-x) + f(x) = \frac{5(1-x)+1}{1-2(1-x)} + \frac{5x+1}{1-2x}$

$= \frac{6-5x}{2x-1} + \frac{5x+1}{1-2x} = \frac{5-10x}{2x-1} = -5$

اذن النقطة $I(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2})$ مركز تماثل منحنى f

3) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

لكل x من D_f نبين أن $(-2-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -1$

$\Leftrightarrow -x \neq 1$

$\Leftrightarrow -x-2 \neq -1 \Leftrightarrow (-2-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f ; \; f(-2-x) + f(x) = \frac{(-2-x)^2}{(-2-x)+1} + \frac{x^2}{x+1}$

$= \frac{4+4x+x^2}{-1-x} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{-4-4x^2}{x+1} = -4$

إذن النقطة $I(-1, -2)$ مركز تماثل منحنى f

تمرين رقم 32

1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = 2x - 4$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-3	$\nearrow$	

نبين أن المستقيم $(D) : x = 2$ محور تماثل منحنى f

لكل x من D_f لدينا: $4-x \in D_f$

$\forall x \in D_f ; \; f(4-x) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 1$

$= 16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 1$

$= x^2 - 4x + 1 = f(x)$

اذن المستقيم $(D) : x = 2$ محور تماثل منحنى f

2) $f(x) = x^4 + \sqrt{x^2+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

لكل x من D_f لدينا $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f ; \quad f(-x) = (-x)^4 + \sqrt{(-x)^2+1} = f(x)$

اذن f داله زوجية

ومنه فان محور الأراتيب محور تماثل منحنى f

3) $f(x) = \frac{2 - \sin^4 x}{\cos x + 3}$

$D_f = \mathbb{R}$

لكل x من D_f لدينا: $\forall k \in \mathbb{Z} \; , \; (x + k2\pi) \in D_f$.

f داله دورية ودورها: $T = 2\pi$

$\forall x \in D_f ; \; \forall k \in \mathbb{Z} ; \; f(x + k2\pi) = f(x)$

اذن المستقيمات: $(D_k) : x = k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

محاور تماثل منحنى f

4) $f(x) = \frac{2}{x^2+3x-4}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$

$\forall x \in D_f , \quad f'(x) = \frac{-2(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2}$

x	$-\infty$		-4		$-3/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	$-\frac{8}{25}$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	

نبين ان المستقيم: $(D) : x = -\frac{3}{2}$ محور تماثل منحنى f

لكل x من D_f نبين أن $(-3-x) \in D_f$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -4$ و $x \neq 1$

$\Leftrightarrow -x \neq 4$ و $-x \neq -1$

$\Leftrightarrow -3-x \neq 1$ و $-3-x \neq -4$

$\Leftrightarrow (-3-x) \in D_f$.

$\forall x \in D_f \; ; \; f(-3-x) = \frac{2}{(-3-x)^2+3(-3-x)-4} = f(x)$

اذن المستقيم: $(D) : x = -\frac{3}{2}$ محور تماثل منحنى f

تمرين رقم 33

$f(x) = \frac{2x-1}{x+2-x^2}$

1) $x \in D_f \Leftrightarrow 2+x-x^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 2$ و $x \neq -1$

$\Leftrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

$\forall x \in D_f ; \quad f'(x) = \frac{2(2+x-x^2) - (2x-1)(1-2x)}{(2+x-x^2)^2}$

$= \frac{4+2x-2x^2+1-4x+4x^2}{(2+x-x^2)^2} = \frac{2x^2-2x+5}{(2+x-x^2)^2}$

$\forall x \in D_f ; \quad f''(x) = \frac{(4x-2)(2+x-x^2) - 2(1-2x)(2x^2-2x+5)}{(2+x-x^2)^3}$

$= \frac{(4x-2)(x^2-x+7)}{(2+x-x^2)^3}$

x	$-\infty$		-1		$1/2$		2		$+\infty$
$4x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x+7		$+$		$+$		$+$		$+$	
$2+x-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	
تقعر منحنى f		$\smile$	‖	$\frown$		$\smile$	‖	$\frown$	

$A(\frac{1}{2}, 0)$ نقطة انعطاف منحنى f

2) لكل x من D_f نبين أن $(1-x) \in D_f$

$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq -1$ و $x \neq 2$

$\Leftrightarrow -x \neq 1$ و $-x \neq -2$

$\Leftrightarrow 1-x \neq 2$ و $1-x \neq -1$

$\Leftrightarrow (1-x) \in D_f$

$$\forall x \in D_f \; ; \; f(1-x)+f(x) = \frac{2(1-x)-1}{2+(1-x)-(1-x)^2} + \frac{2x-1}{2+x-x^2}$$

$$= \frac{1-2x}{2+x-x^2} + \frac{2x-1}{2+x-x^2} = 0$$

اذن $A(\frac{1}{2},0)$ مركز تماثل C_f

تمرين رقم 34

1)
$$f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وبما ان $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

فإن للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ مقارب مائلا معادلته $y = x$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

وبما ان $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

فإن للمنحنى C_f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = x$

2)
$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$D_f = [-1, +\infty[$$

لدينا. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = 0$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا هو محور الافاصيل

3)
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 x+1}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = 2x + \frac{1}{2}$

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x(1+\frac{1}{x})}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = -\frac{1}{2}$$

اذن لمنحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا معادلته $y = -\frac{1}{2}$

4)
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا معادلته $y = 1$

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1$$

اذن لمنحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا معادلته $y = -1$

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

اذن لمنحنى f مقاربا معادلته $x = 1$

تمرين رقم 35

1)
$$f(x) = x\sqrt{x-2}$$

$$D_f = [2, +\infty[$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا إتجاهه محور الأراتيب

2)
$$f(x) = \sqrt{x+2} - x$$

$$D_f = [-2, +\infty[$$

لدينا.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$$

اذن لمنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=-x$

3)
$$\begin{cases} f(x)=x^2+x \; ; \; x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}} \; , \; x>0 \end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}$$

لدينا:
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}-1\right)=-\infty$$

اذن لمنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=x$

لدينا. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$$

اذن لمنحنى C_f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

تمرين رقم 36

1) $f(x)=x^3+x^2-5x$

$D_f=\mathbb{R}$

* النهايات

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

* ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى C_f

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x^2+x-5)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

اذن لمنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(x^2+x-5)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

اذن لمنحنى C_f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

* ندرس رتابة f وتقعر منحنى C_f

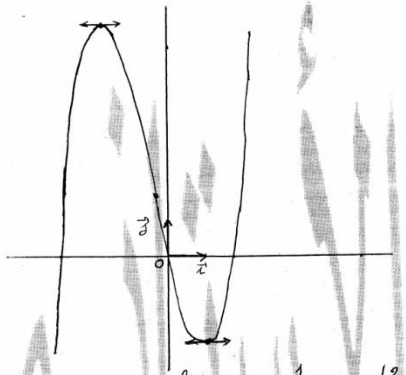
$$\forall x\in\mathbb{R} \; ; \quad f'(x)=3x^2+2x-5 = (3x+5)(x-1)$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \; , \quad f''(x)=2(3x+1)$$

x	$-\infty$		$-5/3$		$-1/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{175}{27}$	↘	$\frac{47}{27}$	↘	-3	↗	$+\infty$
$f''(x)$		−			0		+		

* تقاطع منحنى C_f ومحور الأفاصيل

$$f(x)=0 \iff x^3+x^2-5x=0$$
$$\iff x(x^2+x-5)=0$$
$$\iff x=0 \; , \; x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \; , \; x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$



2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$

$D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

* النهايات

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$)

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (لأن $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0$)

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ (لأن $\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0^+$)

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$ (لأن $\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0^-$)

* ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى C_f

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0^+$$

اذن لمنحنى C_f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته: $y=x$ والمنحنى C_f فوق المقارب المائل بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0^-$$

اذن لمنحنى C_f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y=x$ والمنحنى C_f تحت المقارب المائل بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$. $\lim_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$

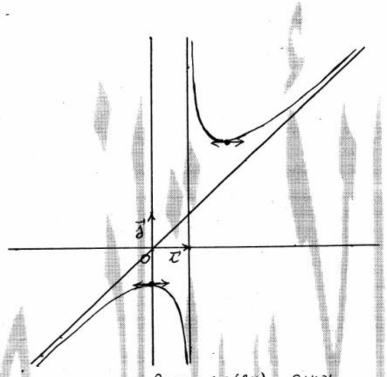
اذن لمنحنى C_f مقاربا معادلته $x=1$

* ندرس رتابة f وتقعر منحنى C_f

$$\forall x\in D_f \; ; \quad f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$\forall x\in D_f \; ; \quad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		0		1 ‖		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$
$f''(x)$		−			‖		+		



3) $f(x) = \cos(2x) - \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$

f دالة دورية ودورها $T = 2\pi$

اذن نكتفي بدراسة الدالة f على المجال $I = [0, 2\pi]$

$\forall x \in I ;\quad f'(x) = -2\sin 2x - \cos x$

$= -4\sin x \cos x - \cos x$

$= -\cos x\,(4\sin x + 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ او $\sin x = -\frac{1}{4}$

نعتبر عددا حقيقيا $\alpha \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ حيث $\sin\alpha = -\frac{1}{4}$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ او $x = \frac{3\pi}{2}$

$\sin x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \alpha$ او $x = 3\pi - \alpha$

x	0		$\pi/2$		α		$3\pi/2$		$3\pi-\alpha$		2π
$-\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\sin x + \frac{1}{4}$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	(-1)	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	(-1)
$f(x)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	1

$f(\alpha) = \cos 2\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{4} + \cos 2\alpha$

لدينا $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$

إذن $f(\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{7}{8} = \frac{9}{8}$

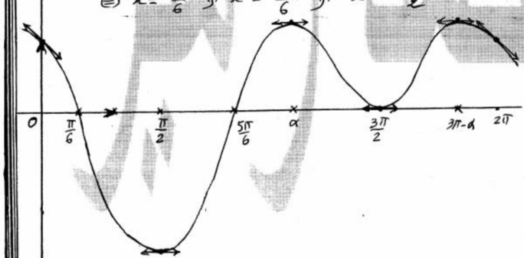
* تقاطع C_f ومحور الأفاصيل

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$ أو $\sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ او $x = \frac{5\pi}{6}$ او $x = \frac{3\pi}{2}$



4) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

* النهايات

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

* دراسة الفروع اللانهائية

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

اذن منحنى f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

* دراسة الرتابة

$\forall x \in \mathbb{R} ;\quad f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

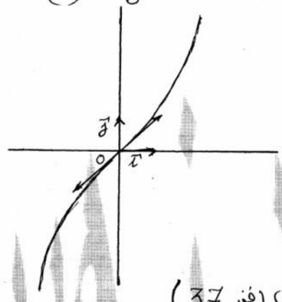
* دراسة تقعر منحنى f

$\forall x \in \mathbb{R} ;\quad f''(x) = \frac{x(2x^2+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

* معادلة المماس لمنحنى f في أصل المعلم

$(T_0):\quad y = x$



تمرين (فقرة 37)

1) $f(x) = x\sqrt{x+1}$

$D_f = [1, +\infty[$

* قابلية اشتقاق f على يمين 1

$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x\sqrt{x-1}}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1^+} x\sqrt{\frac{1}{x-1}} = +\infty$

اذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 1

ومنحنى f على يمين النقطة التي احداثياها (1,0) نصف مماس يوازي محور الأراتيب

* النهايات ودراسة الفرع اللانهائي

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$

اذن منحنى f بجوار +∞ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

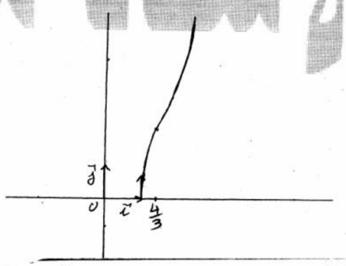
* دراسة رتابة f وتقعر منحنى f

$\forall x\in]1,+\infty[\; ; \; f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}}$

$= \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$

$\forall x\in]1,+\infty[\; ; \; f''(x) = \frac{3x-4}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$

x	1		$4/3$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$		$+$	
$f(x)$	0	↗		↗	$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	



2) $f(x) = (4-x)^{3/2}$

$D_f =]-\infty, 4]$

* دراسة قابلية اشتقاق f على يسار 4

$\lim_{x\to 4^-} \frac{f(x)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{(4-x)^3}}{x-4}$

$= -\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{(4-x)^3}}{4-x} = -\lim_{x\to 4^-} \sqrt{\frac{(4-x)^3}{(4-x)^2}}$

$= \lim_{x\to 4^-} \sqrt{4-x} = 0 = f'_g(0)$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يسار 4 ولدينا $f'_g(4)=0$.

* النهايات ودراسة الفرع اللانهائي

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(4-x)^3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{(4-x)^3}}{(-x)}$

$= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{(4-x)^3}{x^2}} = -\infty$

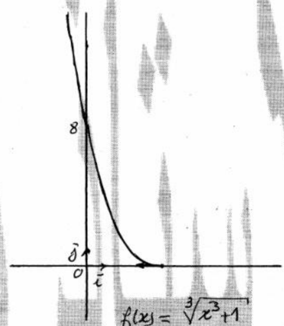
اذن منحنى f بجوار -∞ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

* دراسة رتابة f وتقعر منحنى f

$\forall x\in]-\infty,4[\; ; \; f'(x) = -\frac{3}{2}(4-x)^{1/2}$

$\forall x\in]-\infty,4[\; ; \; f''(x) = \frac{3}{4(4-x)^{1/2}}$

x	$-\infty$		4
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	0
$f''(x)$		$+$	||



$f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$

3) $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1}$

$x\in D_f \iff x^3+1 \geq 0$

$\iff (x+1)(x^2-x+1) \geq 0$

$\iff x+1 \geq 0$

$\iff D_f = [-1, +\infty[$

* دراسة قابلية اشتقاق f على يمين -1

$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{(x+1)^3}}$

$= \lim_{x\to -1^+} \sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}} = +\infty$

اذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين -1

ومنحنى الدالة f نصف مماس يوازي محور الأراتيب على يمين النقطة التي احداثيتها (-1,0)

* النهايات ودراسة الفرع اللانهائي

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x^3}} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+1} - x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2} + x\sqrt[3]{x^3+1} + x^2} = 0^+$

اذن منحنى الدالة f بجوار +∞ مقاربا مائلا معادلته $y=x$

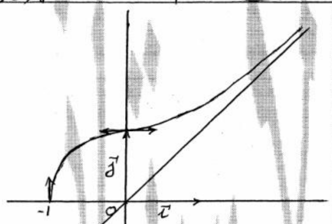
ومنحنى الدالة f فوق المقارب المائل بجوار +∞

* دراسة رتابة f وتقعر منحنى f

$\forall x\in]-1,+\infty[\; ; \; f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$

$\forall x\in]-1,+\infty[\; ; \; f''(x) = \frac{2x}{(x^3+1)\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$			$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	



4) $f(x) = \cos x + \cos 2x$

$D_f = \mathbb{R}$

f داله دورية ودورها $T = 2\pi$

اذن نكتفي بدراسة الداله f على المجال $I = [-\pi, \pi]$

f داله زوجية

اذن نكتفي بدراسة الدالة f على المجال $[0, \pi]$

* دراسة رتابة f

$$f'(x) = -\sin x - 2\sin 2x = -\sin x - 4\sin x\cos x = -\sin x(1 + 4\cos x)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ أو $\cos x = -\frac{1}{4}$

نعتبر α عدد حقيقيا بحيث $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ ، $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ أو $x = \pi$

$\cos x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \alpha$

x	0		α		π
$-\sin x$	0	$-$		$-$	0
$1+4\cos x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	2	$\searrow$	$-9/8$	$\nearrow$	0

$$f(\alpha) = \cos\alpha + \cos 2\alpha = -\frac{1}{4} - \frac{7}{8} = -\frac{9}{8}$$

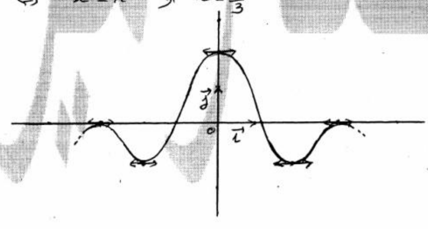
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$$

* تقاطع C_f ومحور الأفاصيل

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$ أو $\cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pi$ أو $x = \frac{\pi}{3}$



6) $f(x) = (x-2)\sqrt{x-2}$

$D_f = [2, +\infty[$

* دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 2

$$\lim_{x \to 2^>} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \to 2^>} \sqrt{x-2} = 0 = f'_d(2)$$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 2

* النهايات ودراسة الفرع اللانهائي.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-2}{x}\right)\sqrt{x-2} = +\infty$$

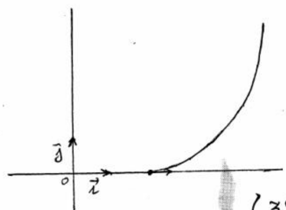
اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

* دراسة رتابة f وتقعر منحنى f

$$\forall x \in]2, +\infty[\ , \ f'(x) = \sqrt{x-2} + \frac{x-2}{2\sqrt{x-2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x-2}$$

$$\forall x \in]2, +\infty[\ ; \ f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x-2}}$$

x	2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	



تمرين رقم 38

$f(x) = \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}$

$D_f = [0, +\infty[$

* دراسة قابلية اشتقاق f على يمين 0

$$\lim_{x \to 0^>} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^>} \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right) = \lim_{x \to 0^>} \left(\frac{1}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty$$

اذن f داله غير قابلة للاشتقاق على يمين 0

ومنحنى الداله f على يمين النقطة التي احداثيها $(0,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

* النهايات ودراسة الفرع اللانهائي

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{3} - \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt[3]{x}=-\infty$$

إذن لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المقارب المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{3}x$

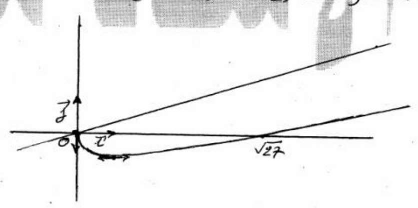
* دراسة رتابة f

$$\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

* تقاطع منحنى f ومحور الأفاصيل

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}x \Leftrightarrow \frac{1}{27}x^3=x$$
$$\Leftrightarrow x(x^2-27)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ أو } x=\sqrt{27}$$



تمرين رقم 39

$$\begin{cases} f(x)=ax^2-1 & , x\geq 1\\ f(x)=ax-x & , x<1\end{cases}$$

لدينا:

$$\lim_{x\to1^>}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^>}\frac{ax^2-1-(a-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^>}\frac{a(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to1^>}a(x+1)=2a=f'_d(1)$$

$$\lim_{x\to1^<}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^<}\frac{ax-x-a+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^<}\frac{(a-\ )(x-1)}{x-1}=a-1=f'_g(1)$$

لكي تكون f دالة قابلة للاشتقاق في 1 يجب أن تكون

$$f'_d(1)=f'_g(1)\Leftrightarrow 2a=a-1$$
$$\Leftrightarrow a=-1$$

تمرين رقم 40

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & , x\neq 1\\ f(1)=-\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

1) $x\in D \Leftrightarrow x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$

$D=[-3,+\infty[$

2) $$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{4-(x+3)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2+\sqrt{x+3}}=-\frac{1}{4}=f(1)$$

إذن f دالة متصلة في 1.

3) $$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}+\frac{1}{4}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{8-4\sqrt{x+3}+x-1}{4(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+7)-4\sqrt{x+3}}{4(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x+7)^2-16(x+3)}{4(x-1)^2(x+7+4\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{4(x-1)^2(x+7+4\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to1}\frac{1}{4(x+7+4\sqrt{x+3})}$$
$$=\frac{1}{64}=f'(1)$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق في 1

تمرين رقم 41

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x} & , x\neq 0\\ f(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

1) $x\in D \Leftrightarrow 1+2x\geq 0$ و $1+x\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$ و $x\geq -1$

إذن $D=[-\frac{1}{2},+\infty[$

2) $$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-1-x}{x(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}}$$
$$=\frac{1}{2}=f(0)$$

إذن f دالة متصلة في 0

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}-\frac{1}{2}x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sqrt{1+2x}-(2\sqrt{1+x}+x)}{2x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(4-x)-4\sqrt{1+x}}{2x(2\sqrt{1+2x}+2\sqrt{1+x}+x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(4-x)^2-16(1+x)}{2x(2\sqrt{1+2x}+2\sqrt{1+x}+x)(4-x+4\sqrt{1+x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x-24}{2(2\sqrt{1+2x}+2\sqrt{1+x}+x)(4-x+4\sqrt{1+x})}=-\frac{3}{8}$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا $f'(0)=-\frac{3}{8}$

تمرين رقم 42

$$f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2-x}$$

1) $x\in D \Leftrightarrow x\geq 0$ و $x(x-1)\geq 0$

$\Leftrightarrow x\geq 0$ و $x\geq 1$

إذن $D=[1,+\infty[$

2) أ) $$\forall x\in]1,+\infty[\ ;\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2-x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x-1}$$
$$=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}-\frac{\sqrt[3]{x^2-x}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}-\sqrt[3]{\frac{x}{(x-1)^2}}$$

ب) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} \sqrt[3]{\dfrac{x}{(x-1)^2}} \right)$

$= -\infty$

اذن f داله غير قابلة للاشتقاق على يمين 1

ومنحنى الدالة f على يمين النقطة التي احداثيتها $(1,1)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب.

تمرين رقم 43

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & , x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) بما أن $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ 1+x^2 > 0$

فإن $D = \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$

$= 0 = f(0)$

إذن f دالة متصلة في 0

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$

$= \dfrac{1}{2} = f'(0)$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا: $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}^* ; \ f'(x) = \dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2} + 1}{x^2}$

$= \dfrac{x^2 - 1 - x^2 + \sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

تمرين رقم 44

1) لدينا f داله قابلة للاشتقاق في a يعني أن

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(a) + af(a) - af(x)}{x-a}$

$= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)f(a)}{x-a} - \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a(f(x)-f(a))}{x-a}$

$= \lim\limits_{x \to a} f(a) - a \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$= f(a) - af'(a)$

2) لدينا $\lim\limits_{X \to a} \dfrac{f(X)-f(a)}{X-a} = f'(a)$

بوضع $x = X-a \Leftrightarrow X = x+a$

$X \to a \Leftrightarrow x \to 0$

$\lim\limits_{X \to a} \dfrac{f(X)-f(a)}{X-a} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+a)-f(a)}{x} = f'(a)$

بوضع $x^2 = X-a \Leftrightarrow X = x^2+a$

$X \to a \Leftrightarrow x \to 0$

$\lim\limits_{X \to a} \dfrac{f(X)-f(a)}{X-a} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x^2+a)-f(a)}{x^2} = f'(a)$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x)-f(a+x^2)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x)-f(a)+f(a)-f(a+x^2)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x)-f(a)}{x} - \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x^2)-f(a)}{x^2} x$

$= f'(a)$

تمرين رقم 45

$g(x) = f(-x)$

نعتبر الدالة العددية i المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي $i : x \mapsto -x$

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} ; \ g(x) = (f \circ i)(x)$

f و i دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا،

$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ g'(x) = f'(i(x)) \cdot i'(x)$

$= -f'(-x)$

$h(x) = f(3x)$

نعتبر الدالة العددية j المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي: $j : x \mapsto 3x$

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} ; \ h(x) = (f \circ j)(x)$

f و j دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$\forall x \in \mathbb{R} ; \ h'(x) = f'(j(x)) \cdot j'(x)$

$= 3f'(3x)$

$k(x) = f(x^2)$

نعتبر الدالة العددية l المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي، $l : x \mapsto x^2$

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} ; \ k(x) = (f \circ l)(x)$

f و l دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$\forall x \in \mathbb{R} ; \ k'(x) = f'(l(x)) \cdot l'(x)$

$= 2x f'(x^2)$

تمرين رقم 46

$f(x) = x + \sqrt{x^2-4}$

1) $x \in D_f \Leftrightarrow x^2-4 \geq 0$

$D =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

2) $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \dfrac{x-2+\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

$= \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \left(1 + \dfrac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 2} \left(1 + \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}\right)$

$= +\infty$

اذن f داله غير قابلة للاشتقاق على يمين 2

ومنحنى f على يمين النقطة التي احداثيتيها $(2,2)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

3) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} \dfrac{x+2+\sqrt{x^2-4}}{x+2}$

$= \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} \left(1 - \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{-(x+2)}\right) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} \left(1 - \sqrt{\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}}\right)$

$= \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} \left(1 - \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}\right) = -\infty$

اذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يسار -2

وطمنحنى f على يسار النقطة التي احداثيها $(-2,-2)$ نصف مماس يوازي محور الاراتيب

4) $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$;

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2-4}\right)'$$

$$= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

تمرين رقم 48

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} &, x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)}{\tan\left(\frac{1}{2}x\right)} = 2$$

g دالة قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا $g'(0) = 2$

2) $$g(10^{-5}) \simeq g(0) + 2 \cdot 10^{-5}$$

$$\simeq 2 \cdot 10^{-5}$$

قيمة مقربة للعدد $g(10^{-5})$ هو : $2 \cdot 10^{-5}$

3) لكل x من $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$ g دالة قابلة للاشتقاق لانها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$

و g دالة قابلة للاشتقاق في 0

اذن g دالة قابلة للاشتقاق في $]-\pi,\pi[$

$\forall x \in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$;

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right)' = \frac{2x\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{-x^2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 4x\tan\left(\frac{x}{2}\right) - x^2}{2\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

تمرين رقم 49

1) لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ;\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$

و $\forall x \in \mathbb{R}^- ;\ \sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} > 0$

اذن. $\forall x \in \mathbb{R} ;\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$

2) $$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}\,\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1}\, f'(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} = f(x)$$

3) لدينا $f(x) = 2\sqrt{x^2+1}\, f'(x)$

اذن $$f'(x) = \left(2\sqrt{x^2+1} \cdot f'(x)\right)'$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} f'(x) + 2\sqrt{x^2+1}\, f''(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(2x f'(x) + 2(x^2+1) f''(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot f'(x) = 2x f'(x) + 2(x^2+1) f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} f(x) = 2x f'(x) + 2(x^2+1) f''(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4x f'(x) + 4(x^2+1) f''(x)$$

تمرين رقم 50

$$f(x) = x^3 - 3x - 3$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

1) * النهايات ودراسة الفرعين اللانهائيين

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 3 - \frac{3}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 3 - \frac{3}{x}\right) = +\infty$$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ فرعين شلجميين اتجاههما محور الاراتيب

* دراسة رتابة f وتقعر منحنى f.

$\forall x \in \mathbb{R} ;\ f'(x) = 3(x^2-1)$

$\forall x \in \mathbb{R} ,\ f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$			-5	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$			$-$		0		$+$		

2) g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$

أ) g دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[1,+\infty[$

اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f([1,+\infty[) = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$$

$$= [-5, +\infty[$$

ب) g دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]2,3[$

ولدينا : $g(3) = 15$ ، $g(2) = -1$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حل وحيد α للمعادلة $g(x) = 0$

ج) لدينا : $$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'(g^{-1}(0))} = \frac{1}{g'(\alpha)}$$

$$= \frac{1}{3(\alpha^2-1)}$$

تمرين رقم 51

$$f(x) = |x| \cos 3x$$

1) $$\lim_{\underset{>}{x \to 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\underset{>}{x \to 0}} \frac{x\cos 3x}{x}$$

$$= \lim_{\underset{>}{x \to 0}} \cos 3x = 1 = f'_d(0)$$

$$\lim_{\underset{>}{x \to 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\underset{>}{x \to 0}} \frac{-x\cos 3x}{x}$$

$$= \lim_{\underset{>}{x \to 0}} -\cos 3x = -1 = f'_g(0)$$

بما ان $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق في 0

2) لدينا $\begin{cases} f(x) = x\cos 3x \ ; \ x \geq 0 \\ f(x) = -x\cos 3x \ ; \ x \leq 0 \end{cases}$

اذن $\begin{cases} f'(x) = \cos 3x - 3x\sin 3x \ , \ x > 0 \\ f'(x) = -\cos 3x + 3x\sin 3x \ , \ x < 0 \end{cases}$

3) $(T_\pi) : y = (f'(\pi))(x-\pi) + f(\pi)$

$= -x$

تمرين رقم 52

$I =]-\infty, 0]$ ، $f(x) = x - \sin x$

1) $\forall x \in]-\infty, 0] \ ; \ f'(x) = 1 - \cos x$

وبما أن: $\forall x \in]-\infty, 0] \ ; \ -\cos x \geq -1$

فإن $\forall x \in]-\infty, 0] , \ 1 - \cos x \geq 0$

اذن $\forall x \in]-\infty, 0] , \ f'(x) \geq 0$

اذن f دالة تزايدية على المجال I

2) f دالة تزايدية على المجال I وقيمتها القصوى هي.

$f(0) = 0$

اذن $\forall x \in]-\infty, 0] \ ; \ f(x) \leq 0$

اذن $\forall x \in]-\infty, 0] , \ x \leq \sin x$

تمرين رقم 53

$h(x) = \sin 3x + 4\sin^3 x - 3\sin x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ h'(x) = 3\cos 3x + 12\sin^2 x \cos x - 3\cos x$

$\forall x \in \mathbb{R} ; \ h'(x) = 3\cos x(1 - 4\sin^2 x) + 12\sin^2 x\cos x - 3\cos x$

$= 3\cos x - 12\cos x \sin^2 x + 12\cos x \sin^2 x - 3\cos x$

$= 0$

وهذا يعني أن $\forall x \in \mathbb{R} ; \ h(x) = c$

حيث $c \in \mathbb{R}$

وبما أن $h(0) = 1$

فإن $\forall x \in \mathbb{R} ; \ h(x) = 1$

تمرين رقم 54

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}{(x^2+1)^2}$$

1) $\forall x \in \mathbb{R} , \ f(x) = \dfrac{(x^4 + 2x^2 + 1) - 4x}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{(x^2+1)^2 - 4x}{(x^2+1)^2} = 1 + \frac{-4x}{(x^2+1)^2}$$

اذن $b = -4$ و $a = 1$

2) الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} , \ f(x) = 1 - 2(x^2+1)^{-2}(x^2+1)'$

اذن: $F(x) = x + \dfrac{2}{x^2+1} + c$

حيث $c \in \mathbb{R}$

3) $F(1) = 5 \Leftrightarrow 2 + c = 5 \Leftrightarrow c = 3$

اذن $\forall x \in \mathbb{R} , \ F(x) = x + \dfrac{2}{x^2+1} + 3$

تمرين رقم 55

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

تمرين رقم 56

$f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$

1) أ) $x \in D \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0$

$D =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left((x+1) - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x}{x + 1 + \sqrt{x^2 - 2x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 1}{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(4 - \frac{1}{x})}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left((x+1) - \sqrt{x^2 - 2x}\right) = -\infty$$

2) أ) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \dfrac{x + 1 - \sqrt{x^2 - 2x} - 3}{x - 2}$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{(x-2) - \sqrt{x(x-2)}}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(1 - \sqrt{\frac{x(x-2)}{(x-2)^2}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x-2}}\right) = -\infty$$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 2

ومنحنى f على يمين النقطة التي احداثيتها $(2, 3)$ نصف

مماس يوازي محور الاراتيب

ندرس قابلية اشتقاق f على يسار 0

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(1 + \frac{\sqrt{x(x-2)}}{(-x)}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(1 + \sqrt{\frac{x(x-2)}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{x}}\right) = +\infty$$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 0

ومنحنى f على يسار النقطة التي احداثيتها $(0, 1)$ نصف

مماس يوازي محور الأراتيب

ب) $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x}} =$$

ندرس إشارة $f'(x)$

* اذا كان $x < 0$

فإن $-x > 0$

$\Leftrightarrow 1 - x > 1$

اذن: $\forall x \in]-\infty, 0[; \ f'(x) > 0$

* اذا كان $x > 2$ ؛

$$f'(x) = 1 + \frac{1 - x}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - (x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

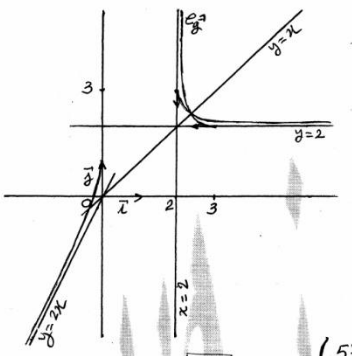
$$= \frac{(x^2 - 2x) - (x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}\left(\sqrt{x^2 - 2x} + (x-1)\right)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 2x}\left(\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1\right)}$$

إذن. $\forall x \in]2, +\infty[\ ; \ f'(x) < 0$

x	$-\infty$		0	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1 ‖	‖ 3	$\searrow$	2

(3
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\sqrt{x^2-2x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-2x}}{(-x)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}\right)=2$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to-\infty}\left((1-x)-\sqrt{x^2-2x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)^2-(x^2-2x)}{(1-x)+\sqrt{x^2-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(1-x)+\sqrt{x^2-2x}}$$
$$=0^+$$
اذن منحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا. معادلته $y=2x$
ولدينا C_f بجوار $-\infty$ فوق مقاربه المائل

(4 لدينا g دالة متصلة وتناقصية قطعا على $[2,+\infty[$
اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث
$$J=f([2,+\infty[)=]\lim_{x\to+\infty}f(x),f(2)]$$
$$=]2,3]$$



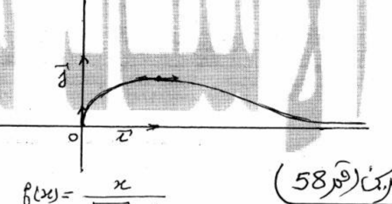
تمرين (رقم 57)

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$$
(1 أ)
$$x\in D\iff\frac{x}{x^2+1}\geq0\iff x\geq0$$
$$D=[0,+\infty[$$
(ب
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}=0^+$$
اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ محور الأفاصيل مقارب
ومنحنى f بجوار $+\infty$ فوق المقارب
(2
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x}{x^2(x^2+1)}}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x(x^2+1)}}=+\infty$$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0
ومنحنى f على يمين النقطة التي احداثيتيها $(0,0)$ نصف
مماس يوازي محور الاراتيب

(3
$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f'(x)=\frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}}=\frac{\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}}$$
$$=\frac{1-x^2}{2(x^2+1)^2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0



تمرين (رقم 58)

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}-1}$$
$$D=[-2,-1[\cup]-1;+\infty[$$
(1
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x+2}-1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x+2}+1)}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}+1}{1+\frac{1}{x}}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{\sqrt{x+2}-1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x(\sqrt{x+2}+1)}{x+1}=-\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{\sqrt{x+2}-1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x(\sqrt{x+2}+1)}{x+1}=+\infty$$
(2
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+2}-1}=0$$
اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا إتجاهه محور الأفاصيل
(3 أ)
$$\lim_{x\to-2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{\frac{x}{\sqrt{x+2}-1}-2}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2^+}\frac{x-2(\sqrt{x+2}-1)}{(x+2)(\sqrt{x+2}-1)}=\lim_{x\to-2^+}\frac{(x+2)-2\sqrt{x+2}}{(x+2)(\sqrt{x+2}-1)}$$
$$=\lim_{x\to-2^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-1}\right)\left(1-\frac{2\sqrt{x+2}}{x+2}\right)$$
$$=\lim_{x\to-2^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-1}\right)\left(1-2\sqrt{\frac{x+2}{(x+2)^2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to-2^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}-1}\right)\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x+2}}\right)=+\infty$$
اذن f داله غير قابلة للاشتقاق على يمين 2-
لمنحنى f على يمين النقطة التي احداثيتها $(-2,2)$ نصف
مماس يوازي محور الاراتيب

ب) $\forall x \in]-2,-1[\cup]-1,+\infty[$;

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 1 - x\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(\sqrt{x+2}-1)^2}$$

$$= \frac{2(x+2) - 2\sqrt{x+2} - x}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-1)^2} = \frac{((x+2) - 2\sqrt{x+2} + 1) + 1}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-1)^2 + 1}{2\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-1)^2}$$

ج)

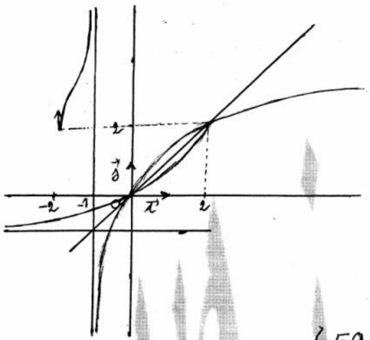
x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	||	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$ $+\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) g دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال I
اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f(I) = f(]-1,2]) =]\lim_{x \to -1^{>}} f(x) , f(2)]$$

$$=]-\infty, 2]$$

5)



تمرين رقم 59

1) $f(x) = x - \sqrt{2x-1}$

$x \in D \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$D = [\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{2x-1})$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \sqrt{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

2) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\left(1 - \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} -\sqrt{2x-1} = -\infty$$

إذن لمنحنى الدالة f فرع شلجمي اتجاهه المستقيم الذي معادلته: $y=x$

3) أ) $$\lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} \frac{x - \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} \frac{x - \frac{1}{2} - \sqrt{2(x-\frac{1}{2})}}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{x-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= -\infty$$

اذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين $\frac{1}{2}$
لمنحنى f على يمين النقطة التي إحداثيتها $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ نصف مماس يوازي محور الاراتيب

ب) $\forall x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} =$

$$= \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1}+1)}$$

ج)

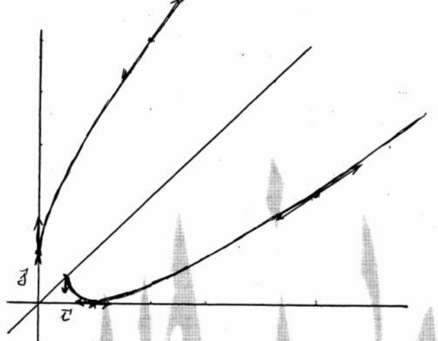
x	$1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1/2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

د) (T_5) : $y = (f'(5))(x-5) + f(5)$

$$= \frac{1}{3}(x-5) + 2 = \frac{1}{3}(x+1)$$

$f'(5) = \frac{2}{3}$, $f(5) = 2$

4)



5) أ) g دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[1, +\infty[$
اذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = f([1,+\infty[) = [f(1), \lim_{x \to +\infty} f(x)[$$

$$= [0, +\infty[$$

ب) $$\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1} - 1)^2 = \frac{1}{2}(2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1)$$

$$= x - \sqrt{2x-1} = g(x)$$

ج) $$\begin{cases} x = g(y) \\ y \in [1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

$$x = g(y) = \frac{1}{2}(\sqrt{2y-1} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x = (\sqrt{2y-1} - 1)^2$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2y-1} - 1 = \sqrt{2x}$

لأن $\begin{cases} y \geq 1 \Leftrightarrow 2y \geq 2 \\ \Leftrightarrow 2y-1 \geq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} - 1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = 1 + \sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow 2y - 1 = (1+\sqrt{2x})^2$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\left(1 + (1+\sqrt{2x})^2\right) = x + \sqrt{2x} + 1$

إذن $f^{-1}(x) = x + \sqrt{2x} + 1$

تمرين رقم 60

$f(x) = 1 - \frac{x}{4}(\sqrt{x} - 2)^2$

$D_f = [0, +\infty[$

1) نبين ان الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \frac{x}{4}(\sqrt{x}-2)^2 - 1}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{4}(\sqrt{x}-2)^2 = -1 = f'_d(0)$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0 ولدينا: $f'_d(0) = -1$

والمنحنى C_f على يمين النقطة التي احداثيها $(0,1)$ نصف مماس معامله الموجه -1

ج) $\forall x \in]0, +\infty[; \quad f'(x) = \left(1 - \frac{x}{4}(\sqrt{x}-2)^2\right)'$

$= -\left(\frac{1}{4}(\sqrt{x}-2)^2 + \frac{x}{4} \cdot 2(\sqrt{x}-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= -\frac{1}{4}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x})$

$= -\frac{1}{2}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$ أو $\sqrt{x} = 1$

$\Leftrightarrow x = 4$ أو $x = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{x}{4}(\sqrt{x}-2)^2\right) = -\infty$

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$3/4$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}(\sqrt{x}-2)^2\right) = -\infty$

اذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب

ب) $\forall x \in]0, +\infty[; \quad f''(x) = \left(-\frac{1}{2}(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)\right)'$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-2)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= -\frac{1}{4\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x} - 2) = -\frac{2\sqrt{x}-3}{4\sqrt{x}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$

x	0		$9/4$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

للمنحنى C_f نقطة انعطاف احداثيها $\left(\frac{9}{4}, \frac{55}{64}\right)$

4) أ) لدينا g دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $\left]\frac{64}{9}, \frac{121}{16}\right[$

(لأن $\left]\frac{64}{9}, \frac{121}{16}\right[\subset [4, +\infty[$)

ولدينا $g\left(\frac{121}{16}\right) = -\frac{833}{256}$ ، $g\left(\frac{64}{9}\right) = \frac{17}{81}$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حل وحيد α للمعادلة: $g(x) = 0$

ب) بما أن g دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال I فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$J = g(I) = g([4, +\infty[) = \left]\lim_{x \to +\infty} g(x), g(4)\right]$

$=]-\infty, 1]$

ج) $\begin{cases} x = g(y) \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$

$x = g(y) \Leftrightarrow 1 - x = \frac{y}{4}(\sqrt{y}-2)^2$

$= \left(\frac{\sqrt{y}}{2}(\sqrt{y}-2)\right)^2 = \left(\frac{y}{2} - \sqrt{y}\right)^2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y} = 2\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y} - 1)^2 = 2\sqrt{1-x} + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} - 1 = \sqrt{2\sqrt{1-x} + 1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 + \sqrt{2\sqrt{1-x} + 1}$

$\Leftrightarrow y = \left(1 + \sqrt{2\sqrt{1-x} + 1}\right)^2$

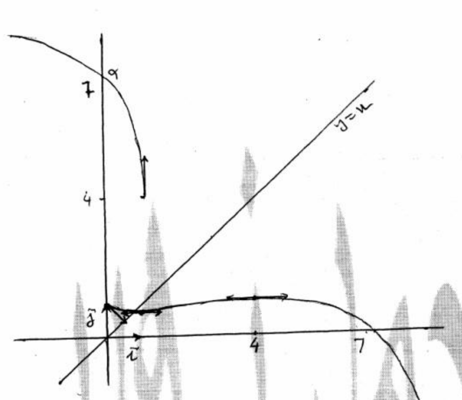
$g^{-1} \left[\begin{array}{l} J \longrightarrow I \\ x \mapsto g^{-1}(x) = \left(\sqrt{2\sqrt{1-x}+1} + 1\right)^2 \end{array}\right]$

لدينا ،

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = \alpha$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3} + 1)^2 = \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha = 4 + 2\sqrt{3}$



تمرين رقم 61

$f(x) = \sqrt{x^2 - |x| + 1}$

1) $x \in D \Leftrightarrow x^2 - |x| + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow |x|^2 - |x| + 1 \geq 0$

بما أن $\Delta = -3$ فان: $\forall x \in \mathbb{R} ; \quad |x|^2 - |x| + 1 \geq 0$

اذن $D = \mathbb{R}$

2) لكل x من D لدينا: $(-x) \in D$

$\forall x \in D ; \quad f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - |-x| + 1}$

$= \sqrt{x^2 - |x| + 1} = f(x)$

ادن f دالة زوجية

3) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-x+1}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{2}$

ادن للمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = x - \frac{1}{2}$

4) أ) $\lim_{x\to0^{>}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^{>}} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x} =$

$= \lim_{x\to0^{>}} \frac{x^2-x}{x(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \lim_{x\to0^{>}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}-1} = -\frac{1}{2}$

ادن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0 ولدينا $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$

* ندرس قابلية اشتقاق f على يسار 0

$\lim_{x\to0^{<}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^{<}} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} =$

$= \lim_{x\to0^{<}} \frac{x^2+x}{x(\sqrt{x^2+x+1}+1} = \lim_{x\to0^{<}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{1}{2}$

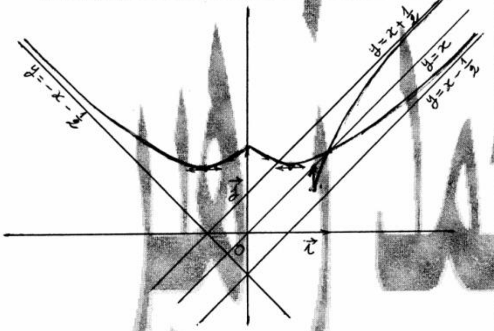
ادن f دالة قابلة للاشتقاق على يسار 0 ولدينا: $f'_g(0) = \frac{1}{2}$

وبما أن: $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ فان f دالة غير قابلة للاشتقاق في 0

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \quad f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^* ; \quad f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



6) أ) بما أن g دالة متصلة وتزايدية قطعا على $I = [\frac{1}{2}, +\infty[$

فانها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على المجال J حيث

$J = f(I) = [f(\frac{1}{2}), +\infty[= [\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty[$

تمرين رقم 62

$f(x) = -x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

1) $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0$ و $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow D_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}) = +\infty$

(لأن $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = 1$)

$\lim_{x\to1^{>}} f(x) = \lim_{x\to1^{>}} (-x + \sqrt{\frac{x}{x-1}}) = +\infty$

3) أ) $\lim_{x\to0^{<}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^{<}} (-1 + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}}) =$

$= \lim_{x\to0^{<}} (-1 + \sqrt{\frac{x}{x^2(x-1)}}) = \lim_{x\to0^{<}} (-1 + \sqrt{\frac{1}{x(x-1)}}) = -\infty$

ادن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يسار 0

وللمنحنى f على يسار النقطة $O(0,0)$ نصف مماس موازي لمحور الأراتيب

ب) $\forall x \in D-\{0\} ; \quad f'(x) = -1 + \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}$

$= -\left(1 + \frac{1}{2(x-1)^2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}\right) < 0$

ج)

x			0		1		
$f'(x)$		$-$	$-\infty$			$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4) أ) $\forall x \in D ; \quad f(x) - (-x+1) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 =$

$= \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} = \frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1\right)}$

إذن إشارة $(f(x) - (-x+1))$ هي إشارة $(x-1)$ وبالتالي:

$\forall x > 1 ; \quad f(x) - (-x+1) > 0$

ادن C_f فوق (D) على $]1, +\infty[$

و $\forall x \leq 0 ; \quad f(x) - (-x+1) < 0$

ادن C_f تحت (D) على $]-\infty, 0]$

ب) لنحدد نقطتي تقاطع C_f ومحور الافاصيل نحل المعادلة $f(x) = 0$ على D.

$\forall x > 1 , \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}} = x$

$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} = x^2$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) = x$

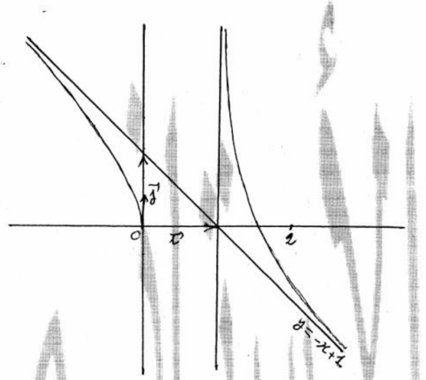
$\Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\forall x \leq 0 , \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}} = x$

$\Leftrightarrow x = 0$

إذن C_f تقطع محور الافاصيل في النقطتين $O(0,0)$ و $A(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$



تمرين رقم 63

$f(x) = x(\sqrt{x}-2)^2$

$D = [0, +\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x}-2)^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt{x}-2)^2 = 4$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0 ولدينا. $f'_d(0) = 4$

ومنحنى f على يمين النقطة O نصف مماس معامله الموجه 4

3) أ) $\forall x \in]0,+\infty[; \quad f'(x) = \left(x(\sqrt{x}-2)^2\right)'$

$= (\sqrt{x}-2)^2 + 2x(\sqrt{x}-2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2+\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)$

ب) $f'(x)=0 \iff \sqrt{x}=2$ او $\sqrt{x}=1$

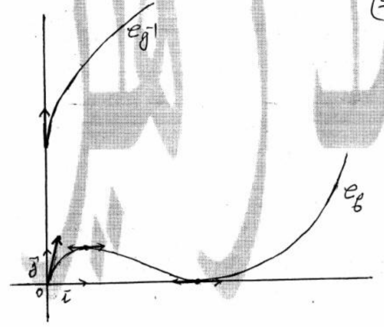
$\iff x=4$ او $x=1$

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x}-2)^2 = +\infty$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

5)



6) أ) بما ان الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال I فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$J = f(I) = f([4,+\infty[)$

$= [f(4), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[$

ب) $\begin{cases} x = f(y) \\ y \in I \end{cases} \iff \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases}$

$x = f(y) \iff x = (\sqrt{y}(\sqrt{y}-2))^2$

$\iff \sqrt{x} = (\sqrt{y})^2 - 2\sqrt{y}$

$\iff \sqrt{x}+1 = (\sqrt{y}-1)^2$

$\iff \sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{x}+1} + 1$

$\iff y = f^{-1}(x) = \left(\sqrt{\sqrt{x}+1}+1\right)^2$

تمرين رقم 64

$f(x) = |x|\sqrt{x^2-1}$

1) $x \in D \iff x^2-1 \geq 0$

$D =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

لكل x من D لدينا: $(-x) \in D$

$\forall x \in D \; ; \; f(-x) = |-x|\sqrt{(-x)^2-1}$

$= |x|\sqrt{x^2-1} = f(x)$

اذن f دالة زوجية

2) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} x\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to 1^+} x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = +\infty$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1

ومنحنى f على يمين النقطة التي احداثيتيها $(1,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

3) $\forall x>1; \quad f'(x) = \left(x\sqrt{x^2-1}\right)'$

$= \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	$+\infty$

بما ان f دالة زوجية فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$

4) أ) $\forall x>1; \quad f''(x) = \dfrac{x(2x^2-3)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

x	1		$\sqrt{3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

اذن لمنحنى f نقطة إنعطاف احداثيتيها $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$

ب) $\forall x>1; \; f(x) = x \iff x\sqrt{x^2-1} = x$

$\iff x(\sqrt{x^2-1}-1) = 0$

$\iff \sqrt{x^2-1} = 1 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2}$

$\forall x < -1 \;;\; f(x) = x \iff -x\sqrt{x^2-1} = x$

$\iff x\left(\sqrt{x^2-1}+1\right) = 0$ غير ممكن

اذن $(\mathcal{C}_g)$ يقطع المستقيم (Δ) في النقطة التي احداثيها $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

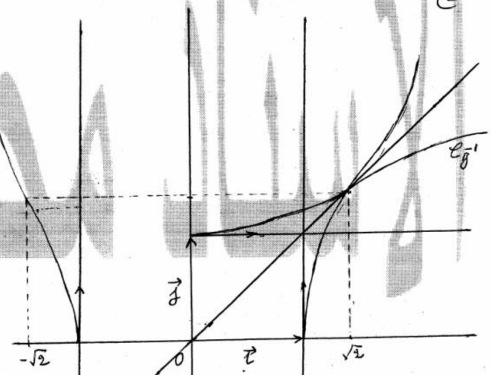
ج)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$$

اذن للمنحنى $(\mathcal{C}_g)$ بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب

د)



5) أ) بما أن g دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[1,+\infty[$

فانها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J = g([1,+\infty[) = [g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)[$$

$$= [0,+\infty[$$

ب) لدينا

$$(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\sqrt{2}))}$$

نحسب $g^{-1}(\sqrt{2})$

$g^{-1}(\sqrt{2}) = x \iff g(x) = \sqrt{2}$

$\iff x\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \sqrt{2}$

$\iff x^2(x^2-1) = 2$

$\iff x^4 - x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2$

اذن $x = \sqrt{2}$

ومنه $g^{-1}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

ولدينا: $g'(\sqrt{2}) = f'(\sqrt{2}) = 3$

اذن $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{3}$

ج)

$$\begin{cases} x = g(y) \\ y \in [1,+\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$x = g(y) \iff x = y\left(\sqrt{y^2-1}\right)$

$\iff x^2 = y^4 - y^2$

$\iff x^2 + \frac{1}{4} = y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = \left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^2$

$\iff y^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}$

$\iff y^2 = \sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$

$\iff y = g^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}}$

تمرين رقم 65

$$f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

$$D =]-\tfrac{1}{2}, +\infty[$$

1) أ)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1-x}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2x+1}} = 0$$

للمنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+}\left(\sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\right) = +\infty$$

للمنحنى $\mathcal{C}_f$ مقاربا معادلته $x = -\frac{1}{2}$

ب)

$$\forall x > -\tfrac{1}{2},\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{\sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{x+1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} = (2x+1)^{-3/2} \cdot x$$

x	$-1/2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ)

$$\forall x > -\tfrac{1}{2} \;;\; f''(x) = \left((2x+1)^{-3/2} \cdot x\right)'$$

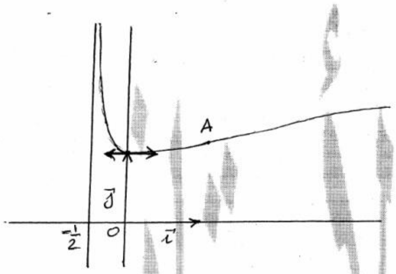
$$= -\frac{3}{2}(2x+1)^{-5/2} \cdot 2x + (2x+1)^{-3/2}$$

$$= (2x+1)^{-5/2}(-3x+2x+1)$$

$$= (2x+1)^{-5/2}(1-x)$$

x	$-1/2$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

اذن النقطة $A\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $\mathcal{C}_f$



5) بما أن g دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$
فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J=g([0,+\infty[)=[g(0), \lim_{x\to+\infty} g(x)[=[1,+\infty[$$

نحدد $g^{-1}(x)$

$$\begin{cases} x=g(y) \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\geq 1 \end{cases}$$

$$x=g(y)=\sqrt{2y+1}-\frac{y}{\sqrt{2y+1}}$$

نضع $Y=\sqrt{2y+1} \Leftrightarrow y=\frac{Y^2-1}{2}$

$$x=Y-\frac{Y^2-1}{2Y}=\frac{Y^2+1}{2Y}$$

$$\Leftrightarrow Y^2+1=2xY \Leftrightarrow Y^2-2xY+1=0$$

$\Delta=4(x^2-1)\geq 0$ (لأن $x\geq 1$)

$$Y_1=\sqrt{2y_1+1}=x-\sqrt{x^2-1}$$

$$Y_2=\sqrt{2y_2+1}=x+\sqrt{x^2-1}$$

يعني

$$y_1=\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^2-1\right)$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^2-1\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ إذن: $\lim_{x\to+\infty} g^{-1}(x)=+\infty$

وبما أن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left((x-\sqrt{x^2-1})^2-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^2-1\right)=-\frac{1}{2}$$

فإن $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^2-1\right)$

تمرين (رقم 66)

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}$$

$$D=]-2,-1]\cup[1,+\infty[$$

1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})}=1$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=+\infty$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ فإن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ مقارب معادلته: $y=1$

بما أن $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$ فإن منحنى f مقارب معادلته $x=-2$

2)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x+2)(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+2}\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1

لمنحنى f على يمين النقطة التي إحداثياها $(1,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x+2)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{-1}{x+2}\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$=+\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار -1

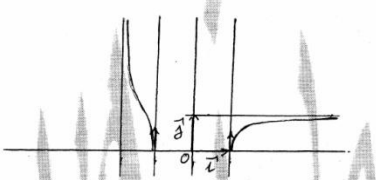
ولمنحنى f على يسار النقطة التي إحداثياها $(-1,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

3) $\forall x\in]-2,-1[\cup]1,+\infty[$;

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}\right)'=\frac{\frac{x(x+2)}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x+1}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}}$$

x	-2		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	0	$\nearrow$	1



5) أ) بما أن الدالة g متصلة وتناقصية قطعا على $]-2,-1]$
فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$$J=g(]-2,-1])=[g(-1), \lim_{x\to-2^+} g(x)[$$

$$=[0,+\infty[$$

ب) $(T_1): y=\left((g^{-1})'(1)\right)(x-1)+g^{-1}(1)$

$$g^{-1}(1)=x \Leftrightarrow g(x)=1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=x^2+4x+4$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$$

$g^{-1}(1) = -\frac{5}{4}$

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'(-\frac{5}{4})} = -\frac{9}{32}$$

تمرين رقم 67

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2-x} & , \quad x \in [0,1] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2-x} & , \quad x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

(1 لدينا $f(1) = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{2-x} = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - \sqrt{x^2-x}) = 1 = f(1)$$

اذن f دالة متصلة في 1

لدينا $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2-x} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - \sqrt{x^2-x}) = 0 = f(0)$$

اذن f دالة متصلة في 0

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2-x}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x - \sqrt{x^2-x}) = -\infty$$

(2

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - \sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

اذن f غير قابلة للاشتقاق على يسار 0
ومنحنى f على يسار النقطة 0 نصف مماس يوازي محور الأراتيب

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2-x} = 0 = f'_d(0)$$

اذن f قابلة للاشتقاق على يمين 0
ولدينا $f'_d(0) = 0$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x - \sqrt{x^2-x} - 1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1) - \sqrt{x^2-x}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \left(1 - \sqrt{\frac{x(x-1)}{(x-1)^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(1 - \sqrt{\frac{x}{x-1}}\right) = -\infty$$

اذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 1
ومنحنى f على يمين النقطة التي إحداثيتها $(1,1)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\frac{x^2}{2-x} - 1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+x-2}{(x-1)(2-x)} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{2-x} = 3 = f'_g(1)$$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يسار 1 ولدينا: $f'_g(1) = 3$
ومنحنى f على يسار النقطة التي احداثيتها $(1,1)$ نصف مماس معامله الموجه 3

(3

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2} & ; \quad x \in]0,1[\\ f'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} & , \quad x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\end{cases}$$

لدينا: $\forall x \in]0,1[\; ; \; f'(x) > 0$

$\forall x \in]-\infty,0[\; ; \; f'(x) > 0$

$$\forall x \in]1,+\infty[\; ; \; f'(x) = 1 - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2-x} - (2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x^2-x}\left(2\sqrt{x^2-x} + (2x-1)\right)} < 0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty \| 0$	$+$	$3 \| -\infty$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			1	$\searrow$	$1/2$

(4

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ مقارب معادلته $y = \frac{1}{2}$

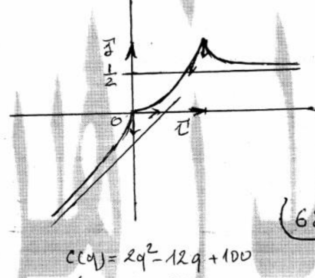
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right) = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to -\infty} (-x - \sqrt{x^2-x}) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x+\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2}$$

اذن منحنى f بجوار $-\infty$ مقارب مائل معادلته: $y = x - \frac{1}{2}$



تمرين رقم 68

(1

$C(q) = 2q^2 - 12q + 100$

$C'(q) = 4q - 12$

q	0		3		$+\infty$
$C'(q)$		$-$	0	$+$	
$C(q)$	100	$\searrow$	82	$\nearrow$	$+\infty$

عدد الوحدات التي ينبغي انتاجها لكي تكون الكلفة الاجمالية دنوية هي $q = 3$

(2 أ

$B(q) = 100q - C(q)$

$= -2q^2 + 88q - 100$

ب) $B'(q) = 88 - 4q$

q	0		22		$+\infty$
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	-100	$\nearrow$	868	$\searrow$	

عدد الوحدات التي ينبغي انتاجها لتحقيق ربح قصوى هي: $q=22$

والربح القصوى: $B(22) = 868\ DH$

تمرين رقم 69

$C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 100x + 300$

1) $R(x) = 121x$

2) أ) $B(x) = R(x) - C(x)$

$= -\frac{1}{3}x^3 + 10x^2 + 21x - 300$

ب) $B'(x) = -x^2 + 20x + 21$

$\Delta = 484 = (22)^2$

اذن: $x = 21$

x	0		21		30
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$	1464	$\searrow$	

عدد الوحدات التي ينبغي انتاجها من المنتوج M لكي يكون الربح الاجمالي قصويا هو: $x = 21$

قيمة الربح القصوى: $B(21) = 1464$

تمرين رقم 70

$C(x) = \frac{1}{10}\left(4x^2 + \frac{216}{x}\right)$

1) $C'(x) = \frac{1}{10}\,\frac{12x^3 - 4x^3 - 216}{x^2}$

$= \frac{8x^3 - 216}{10x^2} = \frac{4(x^3 - 27)}{5x^2}$

x	0		3		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$54/5$	$\nearrow$	$+\infty$

2) طول ضلع القاعدة التي تكون من اجلها الكلفة دنوية هو: $x=3$

والتكلفة الدنوية هي: $C(3) = \frac{54}{5}$

3) اذا كان $x=3$ فان $V = 9h = 216 \Leftrightarrow h = 24\,cm$

تمرين رقم 71

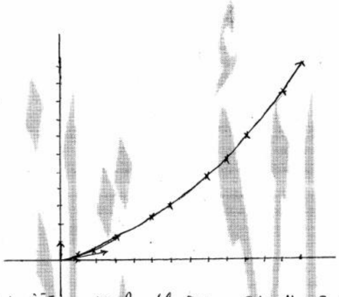
$v \in [0, 130]$ ، $d(v) = \frac{v^2}{200} + \frac{v}{5}$

1)

v	0	10	30	50	60	80	90	100	120	130
dv	0	2,5	10,5	22,5	30	48	58,5	70	96	110,5

2) $(dv)' = \frac{v}{100} + \frac{1}{5} = \frac{v+20}{100}$

v	0		130
$(dv)'$	$1/5$	$+$	$3/2$
dv	0	$\nearrow$	$110,5$



3) تسير السيارة بسرعة $120\,km/h$ ستتقف على بعد $96\,m$ اذن سيتجنب السائق الاصطدام لان العائق على بعد $100\,m$

4) أقصى سرعة التي لا ينبغي للسائق أن يتجاوزها لتجنب الاصطدام مع الحيوان هي $60\,km/h$

تمرين رقم 72

لدينا محيط قاعدة المخروطي: $\ell = Rx$

ولدينا: $\ell = 2\pi r$

اذن: $2\pi r = Rx \Leftrightarrow r = \frac{Rx}{2\pi}$

ولدينا: $h^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow h^2 = R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}$

اذن $h = \frac{R\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{2\pi}$

ومنه فان: $V = \frac{1}{3}h\pi r^2 = \frac{1}{3}\,\frac{R\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{2\pi}\cdot\frac{R^2x^2}{4\pi}$

$= \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

3) أ) $\forall x \in]0, 2\pi[$; $V'(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right)$

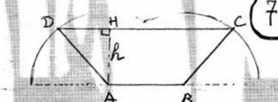
$= \frac{R^3x(8\pi^2 - 3x^2)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$

x	0		$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$		2π
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$	$\searrow$	

قيمة x التي من اجلها يكون للمخروطي حجم قصوي هي: $x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$

وحجم المخروطي في هذه الحالة هو: $V\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right) = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

تمرين رقم 73



نضع $CD = x$

1) لدينا $0 < x < 3$

2) بما أن: $CD = 2HD + AB$

فان $HD = \frac{x-1}{2}$

وبما أن المثلث AHD قائم في H

فان $h^2 + HD^2 = 1 \Leftrightarrow h = \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$

اذن $S = \frac{1+x}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$

إذن: $V(x) = 2S = (1+x)\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$

3) $V'(x) = \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2} + \frac{1-x^2}{4\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}$

$= \frac{-x^2+x+2}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} = \frac{-(x-2)(x+1)}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}$

x	0		2		3
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

4) قيمة x لكي تكون حجم الإناء قصوية هو: $x = 2$

تمرين رقم 74

$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1) $D = \mathbb{R}$; $(\forall x\in\mathbb{R};\ 1+x^2>0)$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R};\ f(-x) = -x + \frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}}$

$= -\left(x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -f(x)$

إذن f دالة فردية.

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x) = 1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$

إذن منحنى f بجوار $+\infty$ مقارب مائل معادلته: $y = x+1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = -1$

إذن منحنى f بجوار $-\infty$ مقارب مائل معادلته: $y = x-1$

4) أ) $(T_0): y = f'(0)(x-0) + f(0)$

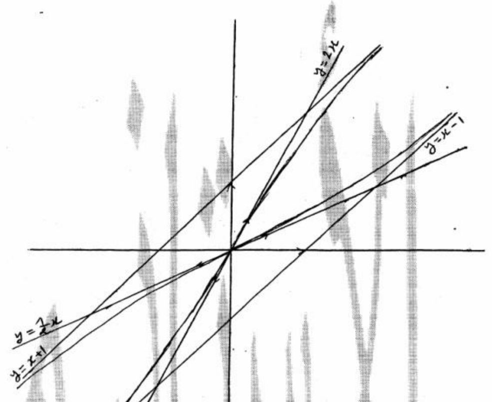
$y = 2x$

ب) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x) - 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x =$

$= \frac{x(1-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-x^3}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}$

إذن: C_f فوق (T_0) في $\mathbb{R}^-$

و C_f تحت (T_0) في $\mathbb{R}^+$



5) أ) بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإنها تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$

ب) بما أن f دالة قابلة للاشتقاق في 0 فإن f^{-1} دالة قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا:

$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$

$f^{-1}(0) = 0 \iff f(0) = 0$

ولدينا $f'(0) = 2$

إذن: $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$

ج) $\forall x\in\mathbb{R};\ f^{-1}(-x) = y \iff -x = f(y)$

$\iff x = -f(y) = f(-y)$

$\iff -y = f^{-1}(x)$

$\iff y = -f^{-1}(x)$

إذن: $\forall x\in\mathbb{R};\ f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$

إذن f^{-1} دالة فردية.

6) $m\sqrt{1+x^2} = x \iff m = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\iff x+m = x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\iff x+m = f(x)$

وبالتالي فإن حلول هذه المعادلة هي أفاصيل نقط تقاطع C_f والمستقيم: $(\Delta_m): y = x+m$

وإذا كان: $m\in]-1,1[$: نقطة واحدة

إذا كان: $m\notin]-1,1[$: $C_f\cap(\Delta_m) = \emptyset$

تمرين رقم 75

$f(x) = \sqrt{x+4} - x + 1$

1) $x\in D \iff x+4\geq 0$

$D = [-4,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to -4^+} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4} = \lim\limits_{x \to -4^+} \frac{\sqrt{x+4}-x+1-5}{x+4} =$

$= \lim\limits_{x \to -4^+} \frac{-(x+4)+\sqrt{x+4}}{x+4} = \lim\limits_{x \to -4^+} \left(-1+\frac{\sqrt{x+4}}{x+4}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to -4^+} \left(-1+\sqrt{\frac{x+4}{(x+4)^2}}\right) = \lim\limits_{x \to -4^+} \left(-1+\sqrt{\frac{1}{x+4}}\right) = +\infty$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين -4

ومنحنى f على يمين النقطة التي احداثيتها $(-4,5)$ نصف مماس يوازي محور الاراتيب

3) $\forall x > -4 \,;\; f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - 1 =$

$= \frac{1-2\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}} = \frac{-(4x+15)}{2\sqrt{x+4}\,(1+2\sqrt{x+4})}$

x	-4		$-15/4$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	5	$\nearrow$	$21/4$	$\searrow$	$-\infty$

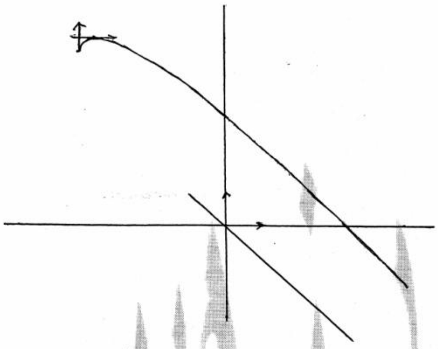
4) لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+4}-x+1}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x+4}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)+x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+4}+1) = +\infty$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته: $y=-x$



6) أ) بما ان g دالة متصلة وتناقصية قطعا على $[-\frac{15}{4},+\infty[$

فانها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J حيث

$J = g([-\frac{15}{4},+\infty[) =]\lim\limits_{x \to +\infty} g(x), g(-\frac{15}{4})]$

$=]-\infty, \frac{21}{4}]$

ب) نحدد $g^{-1}(x)$

$\begin{cases} x = g(y) \\ y \geq -\frac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \leq \frac{21}{4} \end{cases}$

$x = \sqrt{y+4} - y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y+4} - (y+4) + 5$

$\Leftrightarrow (\sqrt{y+4})^2 - \sqrt{y+4} + (x-5) = 0$

$\Delta = 21 - 4x \geq 0 \;;\; (x \leq \frac{21}{4}$ لان$)$

اذن: $y = \left(\frac{1+\sqrt{21-4x}}{2}\right)^2 - 4$ أو $y = \left(\frac{1-\sqrt{21-4x}}{2}\right)^2 - 4$

اذا كان: $y = \left(\frac{1-\sqrt{21-4x}}{2}\right)^2 - 4$

$y = \left(\frac{1-\sqrt{21-4x}}{2}\right)^2 - 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{y+4} = 1+\sqrt{21-4x}$

لدينا: $2\sqrt{y+4} \geq 1$ في حين أن $1-\sqrt{21-4x} \leq 1$

وهذا غير ممكن.

اذن: $g^{-1}(x) = \left(\frac{1+\sqrt{21-4x}}{2}\right)^2 - 4$

تمرين (رقم 76)

$g(x) = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$

I-1) $x \in D_g \Leftrightarrow x^2-4 \geq 0$ و $x \neq 0$

$D_g =]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}})}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right) = 2$

اذن منحنى g بجوار $+\infty$ مقارب معادلته $y=2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x(1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}})}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right) = 0$

اذن منحنى g بجوار $-\infty$ مقاربا هو محور الافاصيل

3) نبين أن: $\forall x \in D_g \,;\; g(-x) = 2 - g(x)$

لدينا: لكل x من D_g. $(-x) \in D_g$

$\forall x \in D_g \,;\; g(-x)+g(x) = \frac{-x+\sqrt{(-x)^2-4}}{-x} + \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x}$

$= \frac{x-\sqrt{x^2-4}+x+\sqrt{x^2-4}}{x} = \frac{2x}{x} = 2$

اذن النقطة $\Omega(0,1)$ مركز تماثل C_g

4) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x} - 1}{x-2} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}} = \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = +\infty$

اذن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على يمين 2

ومنحنى f على يمين النقطة التي احداثيتها $(2,1)$ نصف مماس عمودي.

5) $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\,;$

$g'(x) = \frac{x+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - x - \sqrt{x^2-4}}{x^2} = \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}} > 0$

II) $f(x) = g(x) \;;\; x \in]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$

$f(x) = \sqrt{4-x^2}+1 \,,\quad x \in]-2,2[$

1) $D_f = \mathbb{R}$

لكل x من $]-2,2[$ لدينا $(-x) \in]-2,2[$

$\forall x \in]-2,2[\,;\; f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2}+1 = f(x)$

اذن قصور الدالة f على $]-2,2[$ هي دالة زوجية

2) $f(2) = g(2) = 1$

$$\lim_{x \to 2^>} f(x) = \lim_{x \to 2^>} \frac{x + \sqrt{x^2-4}}{x} = 1 = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^<} f(x) = \lim_{x \to 2^<} \sqrt{4-x^2} + 1 = 1 = f(2)$$

اذن f داله متصلة في 2

3)
$$\lim_{x \to 2^<} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^<} \frac{\sqrt{4-x^2} - 1}{x-2}$$

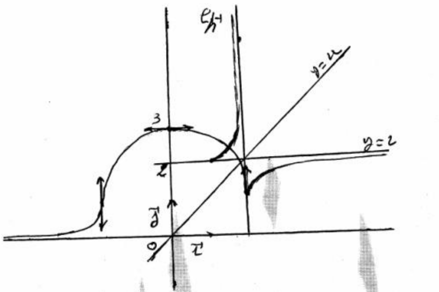
$$= \lim_{x \to 2^<} - \frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{2-x} = \lim_{x \to 2^<} - \sqrt{\frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)^2}}$$

$$= - \lim_{x \to 2^<} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = -\infty$$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 2
ومنحنى f على يسار النقطة التي احداثيتها $(2,1)$
نصف مماس يوازي محور الاراتيب

4)
$$\forall x \in]-2,2[; \quad f'(x) = (\sqrt{4-x^2} - 1)'$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2



III (1 بما ان h دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[2,+\infty[$
فإنها تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال J حيث
$$J = [1,2[$$

3)
$$\begin{cases} x = h(y) \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = h^{-1}(x) \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{y} \Leftrightarrow xy - y = \sqrt{y^2-4}$$
$$\Leftrightarrow (xy-y)^2 = y^2 - 4$$
$$\Leftrightarrow y^2(2x - x^2) = 4$$
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{2x - x^2}$$

اذن،
$$h^{-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{2x - x^2}}$$

تمرين رقم 77

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}$$

1) $D = \mathbb{R}^*$

2)
$$\lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} \sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} - 2\right) = +\infty$$

اذن لمنحنى f مقارب هو محور الاراتيب

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x}} - 2\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+4}{x^2} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x^3}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\right) = -\infty$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم $y=x$

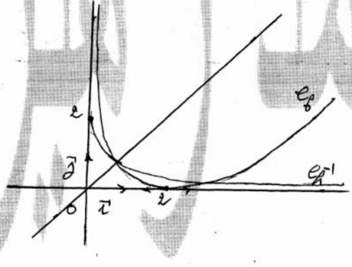
4) أ)
$$\forall x \in \mathbb{R}^*; \quad f'(x) = \left(\frac{x^2+4}{x} - 2\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}\right)' =$$
$$= \frac{x^2-4}{x^2} - \frac{\frac{x^2-4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2+4}{x}}} = \frac{x^2-4}{x^2}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)$$

ب)
$$\forall x \in \mathbb{R}^*; \quad 1 - \sqrt{\frac{x}{x^2+4}} = \frac{1 - \frac{x}{x^2+4}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}} =$$
$$= \frac{x^2 - x + 4}{(x^2+4)\left(1 + \sqrt{\frac{x}{x^2+4}}\right)} > 0$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) نعتبر الدالة العددية h المعرفة بمايلي $h(x) = f(x) - x$
لدينا h دالة متصلة على $]\frac{1}{2}, 1[$ لانها مجموع دالتين
متصلتين ولدينا:
$$h(\tfrac{1}{2}) = 8 - 2\sqrt{\tfrac{17}{2}} > 0 \;،\; h(1) = 4 - 2\sqrt{5} > 0$$
اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية للمعادلة $h(x) = 0$ على الاقل
حل في المجال $]\frac{1}{2}, 1[$
ومنه للمعادلة $f(x) = x$ على الاقل حل في المجال $]\frac{1}{2}, 1[$.

7) بما ان g دالة متصلة وتناقصية قطعا على I فانها تقبل
دالة عكسية g^{-1} معرفة على $J = \mathbb{R}^+$.



تمرين رقم 78

$$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$$

1) أ) $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\quad 1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$

ب) $x\in D_f \Leftrightarrow 1+x^3>0$

$\Leftrightarrow 1+x>0$

$D_f=]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^6}{1+x^3}}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}=-\infty$

3) أ) لدينا: $x>-1 \Leftrightarrow x^3>-1$

$\Leftrightarrow x^3+2>1$

إذن: $\forall x\in]-1,+\infty[\ ;\quad x^3+2>0$

ب) $\forall x\in D_f\ ;\quad f'(x)=\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)'=$

$$=\frac{3x^2\sqrt{1+x^3}-x^3\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}}{1+x^3}=$$

$$=\frac{6x^2(1+x^3)-3x^5}{2(1+x^3)\sqrt{1+x^3}}=\frac{3x^2(x^3+2)}{2(1+x^3)^{3/2}}>0$$

ب)

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$

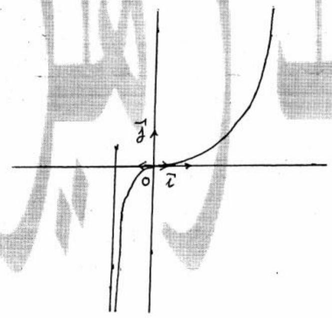
إذن لمنحنى f مقاربا معادلته $x=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^4}{1+x^3}}$

$=+\infty$

إذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب



تمرين رقم 79

$$g(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$$

1) $x\in D_g \Leftrightarrow x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$

$D_g=[-2,+\infty[$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}{x-1}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{g(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}{x-1}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}-\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}{1-x}=-\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(1-x)^3}}$

$=-\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\sqrt[3]{\frac{x+2}{1-x}}=-\infty$

إذن g دالة غير قابلة للاشتقاق في 1 ومنحنى g في النقطة التي احداثيتها $(1,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{g(x)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}{x+2}=$

$=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x+2)^3}}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}}=+\infty$

إذن g دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين -2

منحنى g على يمين النقطة التي احداثيتها $(-2,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

3) $\forall x\in D_g-\{-2,1\}\ ;$

$g'(x)=\left(\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}\right)'=$

$=\frac{1}{3}\left((x-1)^2(x+2)\right)^{-2/3}\left((x-1)^2(x+2)\right)'$

$=-\left((x-1)^2(x+2)\right)^{-2/3}(x-1)(x+1)$

x	-2		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \Vert +\infty$	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{12}\simeq 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}=+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}}=1$

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}-x\right)$$

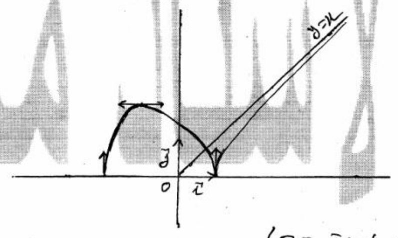
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^2(x+2)-x^3}{\sqrt[3]{((x-1)^2(x+2))^2}+x\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt[3]{((x-1)^2(x+2))^2}+x\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}+x^2}$$

$$=0^-$$

اذن لمنحنى g بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته : $y=x$

و منحنى g تحت المقارب المائل بجوار $+\infty$



تمرين رقم 80

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x$$

$$D_f=\mathbb{R}^+$$

1) أ)

$$\forall x\in\mathbb{R}^+;\ x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)=\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}-x$$

$$=\sqrt[3]{\frac{x^3}{x}}+\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2}}-x$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x\quad=f(x)$$

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\right)=+\infty$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=-x$

ج) أ)

$$\lim_{x\to0^>}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^>}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-1\right)=+\infty$$

اذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0

والمنحنى $\mathcal{C}_f$ على يمين النقطة التي احداثيها $(0,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

ب)

$$\forall x\in\mathbb{R}^*_+;\ f'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-x\right)'$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}-1=$$

$$=\frac{2\sqrt[3]{x}+1-3(\sqrt[3]{x})^2}{3\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=-\frac{3(\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}-1}{3\sqrt[3]{x^2}}=-\frac{(3\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3) أ) بما أن f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $[1,+\infty[$

ولدينا $f(1)=1$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1,+\infty[$

ب)

$$f(\alpha)=0\iff\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}-\alpha=0$$

$$\iff\alpha=\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}$$

$$\iff\alpha^3=\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\right)^3$$

$$=\alpha^2+\alpha+3\sqrt[3]{\alpha^2}\sqrt[3]{\alpha}\left(\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}\right)$$

$$=\alpha^2+\alpha+3\alpha(\alpha)$$

$$\iff\alpha^3=4\alpha^2+\alpha$$

$$\iff\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$$

$$\iff\alpha=0\ \text{أو}\ \alpha^2-4\alpha-1=0$$

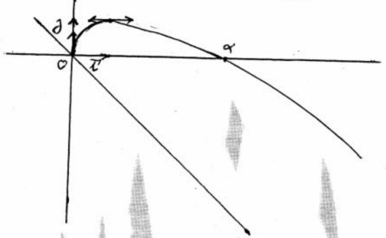
$\alpha=0$ لا يمكن لأن $0\notin[1,+\infty[$

$$\iff\alpha^2-4\alpha-1=0$$

$$\Delta=20$$

اذن $\alpha=2+\sqrt{5}$

4)



5) لدينا $f(a)>0$ و $f(b)<0$

اذن $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}-a>0$ و $\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}-b<0$

يعني $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}>a$ و $\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}<b$

اذن لدينا: $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}>a$ و $\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}}>\dfrac{1}{b}$

ومنه :

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b}}>\frac{a}{b}$$

يعني :

$$\frac{a^{2/3}+a^{1/3}}{b^{2/3}+b^{1/3}}>\frac{a}{b}$$

3 المتتاليات العددية

1

حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ المعرفة بحدها العام u_n في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = n\sqrt{n}$. 2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

3) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{n}{n+1}$. 4) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{2n+3}{5n-1}$.

2

حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \sqrt{n^2+7} - \sqrt{n^2+4}$.

3) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$.

3

حدد نهاية كل متتالية من المتتاليات $(u_n)_{n \geq 0}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ و $(w_n)_{n \geq 0}$ و $(t_n)_{n \geq 0}$ بحيث:

$$u_n = \frac{n^2+2}{n+3} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{u_n}{n}$$

$$\text{و}\ w_n = u_n - 3n \quad \text{و} \quad t_n = \frac{u_n - 1}{v_n + 2}.$$

4

ادرس تقارب المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ u_n = \frac{1}{n^3}$.

2) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{n-1}{n+2}$.

3) $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$.

5

حدد نهاية كل متتالية من المتتاليات الآتية:

1) $(u_n)_{n \geq 0}$ بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = \sqrt{n} - n$.

2) $(v_n)_{n \geq 2}$ بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})\ ;\ v_n = 3n + \frac{n}{n-1}$.

3) $(w_n)_{n \geq 0}$ بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$

6

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $(n \in \mathbb{N}^*);\ u_n = \frac{n^3+2}{3n^3-n}$.

2) $(n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ u_n = \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}}$.

7

لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ المتتالية المعرفة بمايلي: $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = 4 + \frac{(-1)^n \cos n}{n}$

1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ |u_n - 4| \leq \frac{1}{n}$.

2) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

8

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n = \frac{\sin n}{n+2}$.

1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N});\ \frac{-1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$.

2) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

9

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$

1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$.

2) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+n}$.

3) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

10

لتكن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$(\forall n \in \mathbb{N});\ v_n = 3n + 5\sin n$.

1) بيّن أن $v_n \geq 3n - 5$. 2) استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

11

لتكن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$(\forall n \in \mathbb{N});\ a_n = -4n + 3\cos n$.

1) بيّن أن $a_n \leq -4n + 3$.

2) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} -4n + 3$ ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

12

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + 1) \end{cases}$$

1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2) بيّن أن المتتالية (u_n) تناقصية، ثم استنتج أنها متقاربة.

13

نضع لكل n من IN، $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

1) بيّن أن المتتالية (u_n) تناقصية.

2) هل المتتالية (u_n) مصغورة؟ ماذا تستنتج؟

14

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات الآتية:

1) $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = -\frac{1}{3^n}$. 2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = 7 \times 2^n$.

3) $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = -3.\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

15

حدد نهاية كل متتالية من المتتاليات الآتية:

1) (u_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n}$.

2) (v_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$.

3) (w_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ w_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{3}{4}}$.

4) (t_n) بحيث: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ t_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{-\frac{1}{3}}$

16

حدد نهاية المتتالية (v_n) في كل حالة:

1) $(\forall n \in \mathbb{N});\ v_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}$

2) $(\forall n \in \mathbb{N});\ v_n = \frac{\sqrt{(0,3)^n + 5}}{\sqrt{(0,3)^n + 4}}$

17

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0 = 2$ وَ $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$.

1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N});\ 2 \leq u_n \leq 3$.

2) ادرس رتابة (u_n).

3) باستعمال الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x} + 1$ على المجال $I = [2;3]$ حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

18

لتكن $(v_n)_{n \geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$v_0 = 0$ و $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$

1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq v_n \leq 2$.

2) ادرس رتابة (v_n) ماذا تستنتج؟

3) باستعمال الدالة $f: x \mapsto \sqrt{x+2}$ على المجال $I = [0,2]$ حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

19

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0 = 2$ و $(\forall n \in \mathbb{N})$ ، $u_{n+1} = 3u_n - 4$

1) تظنن $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (يمكن استعمال منحنى الدالة: $x \mapsto 3x - 4$ والمستقيم ذا المعادلة $y = x$).

2) بيّن أن المتتالية (v_n) المعرفة بمايلي: $(\forall n \in \mathbb{N})$ ، $v_n = u_n - 2$ هندسية.

3) استنتج u_n بدلالة n

20

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2.

2) بيّن أن (u_n) متتالية تزايدية.

3) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} > 2u_n$ واستنتج $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_n > 3 \times 2^n$

4) احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

21

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 100$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 10}$

1) بيّن بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$.

2) بيّن أن (u_n) متتالية تناقصية واستنتج أنها متقاربة.

3) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{10}$ واستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

22

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0 = 3$ و $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = \frac{u_n - \frac{1}{4}}{u_n + 2}$.

1) بيّن أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > \frac{-1}{2}$.

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{2}{2u_n + 1}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$.

ب) اكتب u_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

26

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

نضع لكل n من IN : $v_n = u_n + 2n - 1$

1) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

2) احسب u_n بدلالة n لكل n من IN. ثم حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) نضع $T_0 = u_0$ وَ $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ لكل n من IN*.

احسب T_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

27

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} \end{cases}$$

1) أ- بيّن أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > \sqrt{6}$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا.

2) نضع لكل n من IN: $v_n = u_n^2 - 6$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n لكل n من IN.

ج- حدد u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

28

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3 + 3^n.u_n} \end{cases}$$

1) أ- بيّن أن: $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_n > 0$.

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) تناقصية ثم استنتج أن: $u_n \leq 3$ لكل n من IN

ج- استنتج أن (u_n) متتالية متقاربة.

2) نضع لكل عنصر n من IN: $v_n = \frac{1}{3^n.u_n}$.

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية محددا أساسها وحدها الأول.

ب- حدد u_n بدلالة n لكل n من IN. ثم حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

29

حدد نهاية المتتالية (u_n)، المعرفة بحدها العام في كل حالة من الحالات التالية

1) $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}$ 2) $u_n = \frac{2^n + \pi^n - 3^n}{2^n - \pi^n - 3^n}$

3) $u_n = \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{(n+1)^2 n}$ 4) $u_n = \frac{2n^2 - 3\sin n}{n^2 + 1}$

5) $n \geq 2\ ;\ u_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

6) $n \geq 2\ ;\ u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

30

لتكن (u_n) متتالية عددية، بحيث لكل n من IN ؛ $u_n > 0$، ويوجد عدد حقيقي q من المجال $]0;1[$ بحيث $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$

1) بيّن أن المتتالية (u_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة.

2) بيّن أن: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

31

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بمايلي:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

1) بيّن أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2) حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

32 استعمال تأطير لتحديد نهاية متتالية

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بمايلي: $(n \geq 2),\ u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

باستعمال تأطير للصيغة u_n حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

33

حدد نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة من الحالات الاتية:

1) $n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 2^n - \cos n$.

2) $n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = n + (-1)^n \sin n$.

3) $n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 2^n + (-1)^n$.

4) $n \in \mathbb{N}^*\ ;\ u_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$.

34

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 = \frac{1}{2}$ و $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{1 + u_n}$.

1) بيّن أن $(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ 0 \leq u_n \leq 1$.

2) بيّن أن (u_n) متتالية رتيبة واستنتج أنها متقاربة.

3) أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN)\ ;\ 1-u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1-u_n)$.

ب- استنتج أن $(\forall n \in IN);\ 1-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

ج- ما نهاية (u_n)؟

35

لتكن (u_n) المتتالية العددية بحيث $u_0=2$ و $u_1=4$ و $u_{n+2}=(1+\sqrt{2})u_{n+1}-\sqrt{2}u_n$، لكل n من IN.

1) نضع $v_n=u_{n+1}-u_n$ ، لكل n من IN.

بَيِّنْ أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها q.

2) احسب u_n بدلالة n، ثم حدد نهاية المتتالية (u_n).

3) نضع $n \in IN\ ;\ w_n = v_n^2 - 2v_n\cos v_n + 1$.

أ- بَيِّنْ أن $w_n \geq (v_n-1)^2$ لكل n من IN.

ب- استنتج نهاية المتتالية (w_n).

36

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ (\forall n \in IN^*);\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1) احسب u_2 و u_3

2) بَيِّنْ أن $u_n < 3$; $(\forall n \in IN^*)$.

3) ادرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$ واستنتج أن $(\forall n \in IN^*)\ ;\ u_n \geq 2$.

4) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $(\forall n \in IN^*);\ v_n=u_n-3$

أ- بَيِّنْ أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية ثم احسب v_n بدلالة n.

ب- حدد u_n بدلالة n واحسب $\lim u_n$.

ج- احسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n ثم حدد $\lim S_n$.

37

وضعت هبة 1000 درهم بحسابها دون فائدة، ثم أخذت تضيف إليه 80% من قيمة رأس المال الذي وَضَعَتْهُ في الشهر السابق.

ليكن a_n قيمة رأس المال الذي وضعته هبة بحسابها في الشهر n، و c_n هو مجموع رأس المال الموجود في هذا الحساب.

1) احسب a_1 و a_2 ثم حدد a_n بدلالة n.

2) احسب c_1 و c_2 و c_n بدلالة n.

3) احسب $\lim_{n\to+\infty} C_n$.

38

وضع أحمد في فاتح يناير 2007 مبلغ 25000 درهم بفائدة مركبة سعرها 4% سنوياً.

في نهاية كل سنة، يسحب أحمد ربع المبلغ المتوفر في حسابه.

ليكن u_n المبلغ المتبقي في حساب أحمد بعد مرور n سنة (أي سنة $2007+n$).

1) احسب u_1 و u_2

2) أ- اكتب u_{n+1} بدلالة u_n ؛

ب- استنتج u_n بدلالة n.

3) حدد نهاية المتتالية (u_n)، ثم أول النتيجة لمحصل عليها.

39

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كالآتي:

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ \forall n \in IN^*\ ;\ 5u_n - 4u_{n-1} = 5 \end{cases}$$

1) حدد عدداً حقيقياً a بحيث $(\forall n \in IN^*);\ u_n-a=\frac{4}{5}(u_{n-1}-a)$

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $(\forall n \in IN);\ v_n=u_n-a$

أ- برهن أن (v_n) هندسية.

ب- احسب v_n بدلالة n.

ج- احسب $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}(u_0+u_1+\ldots\ldots+u_n)$

40

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in IN)\ ;\ u_{n+1} = -2+\sqrt{5+(u_n+2)^2} \end{cases}$$

1) أ- بَيِّنْ بالترجع أن: $(\forall n \in IN);\ u_n \geq 1$.

ب- بَيِّنْ أن (u_n) تزايدية.

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$(\forall n \in IN);\ v_n = (2+u_n)^2$

أ- بَيِّنْ أن (v_n) متتالية حسابية محددا أساسها.

ب- احسب v_n بدلالة n حيث $n \in IN$

ج- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

41

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0=0$ و $u_1=1$ و $u_{n+2}=\frac{7}{3}u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n$ لكل n من IN.

لكل n من IN نضع: $v_{n+1}=u_{n+1}-2u_n$ و $w_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3}u_n$

1) أ- احسب v_1 و w_1.

ب- بَيِّنْ أن $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ متتاليتان هندسيتان محددا أساسيهما.

2) احسب u_n بدلالة n وحدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

42 ×

لتكن $(u_n)_{n\in IN}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0=3$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}$.

1) بَيِّنْ بالترجع أن: $(\forall n \in IN);\ 2 < u_n < 4$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n)، واستنتج أنها متقاربة.

3) أ- بَيِّنْ أن $(\forall n \in IN);\ 4-u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4-u_n)$.

ب- استنتج أن $(\forall n \in IN);\ 4-u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) نضع، $(\forall n \in IN);\ v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب- حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

ج- استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

5) نضع لكل $n \geq 1$، $S_n = v_0+v_1+\ldots\ldots+v_{n-1}$

احسب S_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

43

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ بحيث:

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{-7u_n-8}{2u_n+1};\ n \geq 0 \end{cases}$$

1) بَيِّنْ بالترجع أن: $(\forall n \in IN)\ ;\ u_n \neq -2$.

2) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_n$ بحيث: $v_n = \frac{1}{2+u_n}$.

أ- أثبت أن $(v_n)_n$ متتالية حسابية ثم احسب حدها العام بدلالة n.

ب- استنتج u_n بدلالة n.

3) أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN^*)\ ;\ |u_n+2| \leq \frac{3}{n}$.

ب- استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

44

بَيَّنَتْ دراسةُ نوع من البكتيريات التي أجريت في لتر من "زراعة سائلة" حيث يحتوي في البداية على 150 بكتيرية، أن عدد هذه البكتيريات يتضاعف

تقريبا ب 1,035 مرة كل دقيقة، وأن بكتيرية واحدة تموت كل دقيقة.

1) ليكن u_n عدد البكتيريات الحية بعد مرور n دقيقة.

2) لكل n من IN، نضع $V_n = u_n - \frac{1}{0,035}$

أ- بَيِّنْ أن (v_n) متتالية هندسية ثم استنتج v_n بدلالة n؛

ب- استنتج u_n بدلالة n؛

ج- ما عدد البكتيريات الحية بعد مرور 20 دقيقة؟

3) تم تحسين ظروف الدراسة بحيث لا تموت أية بكتيرية خلال مدة التجربة.

أ- حدد عدد البكتيريات الحية بعد مرور 20 دقيقة.

ب- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$، ثم أول هذه النتيجة.

45

لتكن $(u_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$u_0=1$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n+3}{2}}$

1) بَيِّنْ أن: $\forall n \in IN;\ \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.

2) بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) تزايدية.

3) بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

46

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بما يلي:

$g(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.

1) بَيِّنْ أنه: $(\forall x \in]1;+\infty[)\ ;\ g(x) \geq 3$.

2) لتكن المتتالية العددية (u_n) بحيث $u_0=2$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = g(u_n)$

أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN^*);\ u_n \geq 3$.

ب- بَيِّنْ أن (u_n) متتالية رتيبة، واستنتج أنها متقاربة.

ج- حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

47

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كالآتي:

$u_0=1$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n+1}-1$.

1) احسب u_1.

2) أ- برهن أن: $(\forall n \in IN);\ 0 \leq u_n \leq 1$.

ب- ادرس رتابة (u_n). ج- استنتج أن (u_n) متقاربة.

3) حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

48

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0=2$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

نضع لكل n من IN: $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

1) أ- احسب u_1 و v_0.

ب- بَيِّنْ أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

ج- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN);\ u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

د- حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2) نضع $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ لكل n من IN.

احسب S_n بدلالة n وحدد $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

49

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0=2$ و $u_1 = \frac{4}{9}$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n)$.

ونضع $v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$ لكل n من IN.

1) باستعمال البرهان بالترجع، برهن أن:

$(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$.

2) استنتج أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها.

3) حدد u_n بدلالة n، هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

50 متتالية "فيبوناتشي"

تناسل النحل يرتكز على القاعدة التالية:

النحلة الأنثى لها أب وأم، أما النحلة الذكر فلها أم فقط.

ليكن u_n عدد أجداد نحلة ذكر بعد n جيل، وهكذا $u_0 = u_1 = 1$ و $u_2=2$ و $u_3=3$

ليكن F_n عدد الجدات الإناث، و M_n عدد الأجداد الذكور لهذه النحلة الذكر بعد n جيل.

وهكذا يكون لدينا: $u_n=F_n+M_n$

1) أ- بَيِّنْ أن لكل n من IN^* : $F_n=u_{n-1}$ وأن $M_{n+1}=F_n$ ،

ب- استنتج أن: $u_{n+1}=u_n+F_n=u_n+u_{n-1}$

هذا النوع من المتتاليات يسمى متتالية "فيبوناتشي" Fibonacci

2) أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN);\ u_n \geq n$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

ب- بَيِّنْ بالترجع أن: $(\forall n \in IN);\ (u_n)^2 = u_{n-1}\times u_{n+1} + (-1)^n$

3) لكل n من IN، نضع: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN);\ v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)}{u_n u_{n+1}}$

استنتج $\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_n)$

ب- لكل n من IN، نضع: $w_n=v_{2n-1}$ و $t_n=v_{2n}$

ادرس رتابة كل من المتتاليتين (w_n) و (t_n).

ج- حدد إشارة w_n-t_n ثم استنتج أن المتتاليتين (w_n) و (t_n) متقاربتان.

4) أ- بَيِّنْ أن $\lim_{n\to+\infty}(w_n-t_n) = 0$، ثم استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} t_n$

ب- بَيِّنْ أن $(v_n)_n$ متقاربة ولتكن ℓ نهايتها.

ج- بَيِّنْ أن $\lim_{n\to+\infty}(v_n^2-v_n-1) = 0$ ثم استنتج قيمة ℓ.

أعط تأويلاً لهذه النتيجة.

51 ×

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0=3$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \sqrt{u_n+12}$.

1) برهن أن: $(\forall n \in IN);\ 0 \leq u_n \leq 4$.

2) ادرس رتابة (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3) أ- بَيِّنْ أنه: لكل n من IN لدينا: $|u_{n+1}-4| \leq \frac{1}{4}|u_n-4|$.

ب- استنتج أن: $|u_n-4| \leq \frac{1}{4^n}$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

52 متتالية والعدد الذهبي

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$u_0 = \frac{3}{2}$ و $(\forall n \in IN);\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n}$.

1) برهن بالترجع أن: $(\forall n \in IN);\ \frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

2) ليكن $I = \left[\frac{3}{2};2\right]$ و f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي: $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

برهن أن f تقبل نقطة صامدة وحيدة ℓ على المجال I يتم تحديدها.

(العدد ℓ يسمى العدد الذهبي)

3) برهن أن: $|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{4}{9}|u_n-\ell|$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

53

ليكن C_0 مربعاً طول ضلعه 8.

ننشئ خارجه مربعاً C_1 طول ضلعه نصف طول ضلع المربع C_0 (انظر الشكل)

ننشئ بنفس الطريقة المربعات C_2 و C_3 و ...... و C_n.

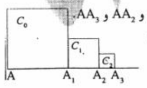
ليكن u_n طول ضلع المربع C_n و a_n مساحة المربع C_n.

1) احسب u_n و a_n بدلالة n.

2) احسب المسافات التالية: AA_1 و AA_2 و AA_3.

3) احسب المسافة AA_n بدلالة n.

4) احسب $\lim_{n\to+\infty} AA_n$



54

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \ ; \ n \in IN \end{cases}$$

نضع: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) بَيِّنْ أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2. استنتج v_n بدلالة n.

2) نضع: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_{n-1}$، لكل n من IN^*.

أ- احسب S_n بطريقتين مختلفتين ثم استنتج u_n بدلالة n.

ب- حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

55

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{nu_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \ ; \ n \in IN^* \end{cases}$$

1) أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN^*) \ ; \ u_n < 1$.

ب- بَيِّنْ أن (u_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة.

2) نضع: $(\forall n \in IN^*) \ ; \ v_n = nu_n$.

أ- بَيِّنْ أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1.

ب- استنتج v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n. ثم حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3) بَيِّنْ أنه إذا كان $u_1 = 1$ فإن (u_n) متتالية ثابتة.

56

ليكن n من IN نضع $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

1) حدد عددين حقيقيين a و b بحيث:

$$(\forall n \in IN) ; u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

2) ليكن $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$ حيث n من IN.

حدد S_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

57

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \ ; \ u_1 = 1 \\ (\forall n \in IN) \ ; \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1) احسب u_2 و u_3.

2) نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث:

$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ ، $b_n = 2^n u_n$ لكل n من IN

أ- بَيِّنْ أن (a_n) متتالية هندسية واحسب a_n بدلالة n.

ب- بَيِّنْ أن (b_n) متتالية حسابية واحسب b_n بدلالة n.

ج- استنتج u_n بدلالة n.

3) أ- بَيِّنْ بالترجع $(\forall n \in IN) \ ; \ \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$.

ب- حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n}$ ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

58

نعتبر المتتالية العددية (u_n) بحيث: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3 ; n \in IN \end{cases}$

1) احسب u_1 و u_2.

2) بَيِّنْ بالترجع أن $(\forall n \in IN) \ ; \ 0 \leq u_n < 1$.

3) أثبت أن المتتالية (u_n) تزايدية.

4) استنتج أنها متقاربة.

5) نضع لكل n من IN ، $a_n = \sqrt[3]{u_n} - 1$

أ- بَيِّنْ أن المتتالية (a_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب- احسب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ج-نعتبر المجموع $S_n = \sqrt[3]{u_0} + \sqrt[3]{u_1} + \ldots\ldots + \sqrt[3]{u_n}$ حيث $n \in IN$

اكتب S_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

59

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3 + x^2}$

1) ادرس تغيرات الدالة f على IR^+.

2) حل في IR المعادلة $f(x) = x$.

3) بَيِّنْ أن $(\forall x \in [0;1[) ; f(x) > x$.

II) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \ (\forall n \in IN) \end{cases}$

1) بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN) \ ; 0 \leq u_n < 1$.

2) ادرس رتابة المتتالية (u_n) وحدد نهايتها.

III) لتكن المتتالية العددية (v_n) بحيث $(\forall n \in IN) ; v_n = u_n^2 - 1$

1) بَيِّنْ أن (v_n) متتالية هندسية محدداً أساسها وحدها الأول.

2) حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

3) حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

60

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين العدديتين المعرفتين بمايلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in IN^*) ; u_n = \frac{3}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1} \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0 = 2 \\ (\forall n \in IN) ; v_n = \frac{3}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-1} \end{cases}$$

ونضع لكل n من IN : $a_n = u_n + v_n$ و $b_n = u_n - v_n$

1) بَيِّنْ أنه: $(\forall n \in IN) ; b_n = -1$.

2) أ- بَيِّنْ أن المتتالية (a_n) هندسية.

ب- هل (a_n) متقاربة وحدد $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$؟

3) أ- أعط صيغة u_n و v_n بدلالة a_n و b_n.

ب- استنتج u_n و v_n بدلالة n.

ج- حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

61

لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ بمايلي: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين 0.

ج- بَيِّنْ أن $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2(\sqrt{x} - 1)^2} \ (\forall x \in]1; +\infty[)$

ثم أعط جدول تغيرات f

د- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) مع المستقيم $(\Delta) : y = x$.

2) لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in IN}$ المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ (\forall n \in IN) \ ; \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ- بَيِّنْ بالترجع أن: $(\forall n \in IN) \ ; \ u_n \geq 4$.

ب- بَيِّنْ أن المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ تناقصية.

ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in IN}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

62

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 1 + 4u_n + \sqrt{1 + 4u_n} \ ; \ (\forall n \in IN)$.

1- أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN) \ ; \ u_n > 0$.

ب- بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.

2) نضع لكل n من IN، $v_n = \sqrt{1 + 4u_n}$.

أ- احسب u_n بدلالة v_n لكل n من IN.

ب- أثبت أن: $(\forall n \in IN) \ ; \ v_{n+1}^2 = 4\left(v_n + \frac{1}{2}\right)^2$.

ثم استنتج v_{n+1} بدلالة v_n.

3) نضع، من أجل كل عنصر من IN، $w_n = v_n + 1$.

أ- برهن أن المتتالية العددية (w_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب w_n بدلالة n.

4) أ- برهن أن: $\forall n \in IN \ ; \ u_n = \frac{1}{4}(w_n^2 - 2w_n)$.

ب- استنتج u_n بدلالة n، هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

ج- احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$ بدلالة n.

63

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ (\forall n \in IN^*) ; u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN^*) ; u_n > 0$

2) بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN^*) ; u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$

ثم استنتج أن: $(\forall n \in IN^*) ; u_n > \sqrt{2}$

3) بَيِّنْ أن: $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

ثم استنتج أن: $(\forall n \in IN^*) \ ; \ u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^n}$ وحدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

64

1) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

2) حدد نهاية المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي:

$$v_n = \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

65

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 2}$ المعرفة بما يلي:

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

1) باستعمال البرنام "Excel" أو باستعمال حاسبة قابلة للبرمجة تظنن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

2) ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$

3) بَيِّنْ أن $u_n > 2(\sqrt{n} - 1)$ لكل n من IN بحيث $n \geq 2$

(يمكن استعمال $\sqrt{p} - \sqrt{p-1} < \frac{1}{2\sqrt{p-1}}$ لكل p من IN بحيث $p \geq 2$)

4) حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

66 تأطير عدد لاجذري بعددين جذريين.

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين بمايلي:

$u_0 = 3$ و $v_0 = 5$ ولكل n من IN

$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1) بَيِّن أن المتتاليتن (u_n) و (v_n) موجبتين قطعا.

2) بَيِّن أن $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}$، ثم ادرس رتابة كل من (u_n) و (v_n).

3) أ- لكل n من IN نضع $w_n = v_n - u_n$

بَيِّن أن $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n$ لكل n من IN .

ب- باستعمال البرهان بالترجع بَيِّنْ أن:

$0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (لكل n من IN)

ج- هل المتتالية (w_n) متقاربة؟

4) بَيِّنْ أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتان ولهما نفس النهاية.

5) باستعمال المتتالية $(u_n v_n)_{n \in IN}$ حدد نهاية كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).

6) احسب u_2 و v_2 واستنتج تأطيرا للعدد $\sqrt{15}$ بعددين جذريين.

67 استعمال تعامدات متكررة.

لتكن $[OA_0]$ قطعة طولها 1، نمدد كل طرف من القطعة $[OA_0]$ بقطعتين طولاهما 1 وهما $[OI_1]$ و $[AJ_1]$ (بحيث O و A و I_1 و J_1 مستقيمية) العمودي على حامل القطعة $[OA_0]$ المار من النقطة O يقطع نصف الدائرة التي أحد أقطارها $[I_1J_1]$ في النقطة C_1، ليكن A_1 منتصف القطعة $[OC_1]$.

نمدد كل طرف من القطعة $[OA_1]$ بقطعتين طولاهما 1 وهما $[OI_2]$ و $[A_1J_2]$. العمودي على حامل القطعة $[OA_1]$ المار من O يقطع نصف الدائرة التي أحد أقطارها $[I_2J_2]$ في C_2، ليكن A_2 منتصف القطعة $[OC_2]$ وهكذا نواصل نفس طريقة الإنشاءات السابقة.

نعتبر $u_0 = OA_0$ و $u_1 = OA_1$ و $u_n = OA_n$

1) بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) تحقق الشرطين: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{4}}$

2) أ- احسب u_1 و u_2

ب- بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) تناقصية، ثم استنتج أنها متقاربة.

4) باستعمال الدالة $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{4}}$ حدد $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

68

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_n$ بحيث:

$u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ و $(\forall n \in IN) \ ; u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1 + u_n^3}{8}}$

1) أ- بَيِّنْ بالترجع أن $(\forall n \in IN) ; u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

ب- استنتج أن $(\forall n \in IN) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

2) بَيِّنْ أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة.

3) نضع لكل n من IN. $v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

بَيِّنْ أن المتتالية $(v_n)_n$ هندسية أساسها $\frac{1}{8}$.

4) احسب u_n بدلالة n واستنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

تمرين رقم 1

1) $\lim u_n = \lim n\sqrt{n} = +\infty$

2) $\lim u_n = \lim \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$

3) $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

4) $\lim u_n = \lim \frac{2n+3}{5n-1} = \lim \frac{n(2+3(\frac{1}{n}))}{n(5-(\frac{1}{n}))} = \lim \frac{2+3(\frac{1}{n})}{5-\frac{1}{n}} = \frac{2}{5}$

تمرين رقم 2

1) $\lim u_n = \lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

2) $\lim u_n = \lim(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+4}) = \lim \frac{3}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+4}} = 0$

3) $\lim u_n = \lim(\sqrt{2n^2-5}-n\sqrt{2}) = \lim \frac{-5}{\sqrt{2n^2-5}+n\sqrt{2}} = 0$

تمرين رقم 3

1) $\lim u_n = \lim \frac{n^2+2}{n+3} =$

$= \lim \frac{n^2(1+2(\frac{1}{n})^2)}{n(1+3(\frac{1}{n}))} = \lim \frac{n(1+2(\frac{1}{n})^2)}{1+3(\frac{1}{n})} = +\infty$

2) $\lim v_n = \lim \frac{u_n}{n} = \lim \frac{n(1+2(\frac{1}{n})^2)}{n(1+3(\frac{1}{n}))} =$

$= \lim \frac{1+2(\frac{1}{n})^2}{1+3(\frac{1}{n})} = 1$

3) $\lim w_n = \lim(u_n - 3n) =$

$= \lim(\frac{n^2+2}{n+3}-3n) = \lim n\left(\frac{1+2(\frac{1}{n})^2}{1+3(\frac{1}{n})}-3\right)$

$= -\infty$

4) $\lim t_n = \lim \frac{u_n-1}{v_n+2} = \lim \frac{n^2-n-1}{n+3}\cdot\frac{n^2+3n}{3n^2+6n+2}$

$= \lim \frac{n^3-n^2-n}{3n^2+6n+2} = \lim \frac{n^3(1-\frac{1}{n}-(\frac{1}{n})^2)}{n^2(3+6(\frac{1}{n})+2(\frac{1}{n})^2)} =$

$= \lim \frac{n(1-\frac{1}{n}-(\frac{1}{n})^2)}{3+6(\frac{1}{n})+2(\frac{1}{n})^2} = +\infty$

تمرين رقم 4

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \frac{1}{n}$

بما أن $\lim u_n = 0$

فإن $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة

2) $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{n-1}{n+2}$

بما أن $\lim u_n = 1$

فإن (u_n) متتالية متقاربة

3) $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \sqrt{n^2+n+1}-n$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

بما أن: $\lim u_n = \frac{1}{2}$ فإن (u_n) متتالية متقاربة

تمرين رقم 5

1) $\forall n\in\mathbb{N};\quad u_n = \sqrt{n}-n$

$\lim u_n = \lim \sqrt{n}(1-\sqrt{n}) = -\infty$

2) $\forall n\geq 2;\quad v_n = 3n+\frac{n}{n-1}$

$\lim v_n = \lim(3n+\frac{n}{n-1}) = \lim(3n+\frac{n}{n(1-(\frac{1}{n}))}) =$

$= \lim(3n+\frac{1}{1-\frac{1}{n}}) = +\infty$

3) $\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$

$\lim w_n = \lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}) = \lim \frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = 0$

تمرين رقم 6

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \frac{n^3+2}{3n^3-n}$

$\lim u_n = \lim \frac{n^3+2}{3n^3-n} = \lim \frac{n^3(1+2(\frac{1}{n})^3)}{n^3(3-(\frac{1}{n})^2)} =$

$= \lim \frac{1+2(\frac{1}{n})^3}{3-(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{3}$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}}$

$\lim u_n = \lim \frac{n^2}{n^2+\sqrt{n}} = \lim \frac{n^2}{n^2(1+\sqrt{(\frac{1}{n})^3})} = \lim \frac{1}{1+\sqrt{(\frac{1}{n})^3}} = 1$

تمرين رقم 7

1) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |\cos n|\leq 1$

وبما أن $\forall n\in\mathbb{N},\quad |(-1)^n| = 1$

فإن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |(-1)^n||\cos n|\leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{|(-1)^n\cos n|}{n}\leq\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad |u_n-4|\leq\frac{1}{n}$

2) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq|u_n-4|\leq\frac{1}{n}$

وبما أن $\lim \frac{1}{n} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب

$\lim |u_n-4| = 0$

إذن $\lim u_n = 4$

تمرين رقم 8

$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \frac{\sin n}{n+2}$

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N};\quad -1\leq\sin n\leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN;\ \frac{-1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$

وبما أن: $\lim \frac{-1}{n+2} = \lim \frac{1}{n+2} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim u_n = 0$

تمرين رقم 9

$\forall n\in IN^*;\ u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$

1) لكل $k\in\{1,2,\dots,n\}$ لدينا:

$\forall n\in IN^*;\ n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*;\ \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*;\ \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$

من أجل $k=1$ لدينا: $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$

من أجل $k=2$ لدينا: $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+2} \leq \frac{n}{n^2+1}$

$\vdots$

من أجل $k=n$ لدينا: $\frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1}$

نجمع طرفا بطرف نحصل على: $\frac{n^2}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

2) $\lim \frac{n^2}{n^2+1} = \lim \frac{n^2}{n^2(1+(\frac{1}{n})^2)} = \lim \frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} = 1$

$\lim \frac{n^2}{n^2+n} = \lim \frac{n^2}{n^2(1+(\frac{1}{n}))} = \lim \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

3) حسب مصاديق التقارب: $\lim u_n = 1$

تمرين رقم 10

$\forall n\in IN;\ v_n = 3n + 5\sin n$

1) $\forall n\in IN;\ \sin n \geq -1$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN;\ 5\sin n \geq -5$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN;\ 3n+5\sin n \geq 3n-5$

إذن، $\forall n\in IN;\ v_n \geq 3n-5$

2) بما أن: $\lim(3n-5) = +\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim v_n = +\infty$

تمرين رقم 11

$\forall n\in IN;\ a_n = -4n + 3\cos n$

1) $\forall n\in IN;\ \cos n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN;\ 3\cos n \leq 3$

$\Leftrightarrow \forall n\in IN;\ -4n+3\cos n \leq -4n+3$

إذن: $\forall n\in IN;\ a_n \leq -4n+3$

2) بما أن: $\lim(-4n+3) = -\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim a_n = -\infty$

تمرين رقم 12

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in IN;\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2+1) \end{cases}$

1) لدينا $0 \leq u_0 \leq 1$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 1$

نبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا حسب افتراض الترجع: $0 \leq u_n \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_n^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq u_n^2+1 \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{5}(u_n^2+1) \leq \frac{2}{5}$

وبما أن: $0 \leq \frac{1}{5}$ و $\frac{2}{5} \leq 1$

فإن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

إذن: $\forall n\in IN;\ 0 \leq u_n \leq 1$

2) نبين أن: $\forall n\in IN;\ u_{n+1} < u_n$

لدينا: $u_1 = \frac{2}{5}$ و $u_0 = 1$

إذن: $u_1 < u_0$

نفترض أن $u_n < u_{n-1}$

نبرهن أن $u_{n+1} < u_n$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n < u_{n-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}(u_n^2+1) < \frac{1}{5}(u_{n-1}^2+1)$

$\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$

إذن $\forall n\in IN;\ u_{n+1} < u_n$

إذن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

إذن (u_n) متقاربة

تمرين رقم 13

$\forall n\in IN;\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

1) $\forall n\in IN;\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

$= \frac{-1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)} < 0$

إذن المتتالية (u_n) تناقصية

2) (u_n) مصغورة بالعدد 0

لأن: $\forall n\in IN;\ u_n > 0$

إذن (u_n) متقاربة

ولدينا، $\lim u_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$

تمرين رقم 14

1) $\lim u_n = \lim -\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

لأن: $-1 < \frac{1}{3} < 1$

2) $\lim u_n = \lim 7\cdot 2^n = 7\cdot\lim(2)^n = +\infty$

لأن $(2) > 1$

3) $\lim u_n = -3\lim\left(\frac{4}{3}\right)^n = -\infty$

لأن: $\frac{4}{3} > 1$

تمرين رقم 15

1) $\lim u_n = \lim \frac{2^n - 3^n}{3^n} = \lim \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{3^n}$

$$= \lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -1$$

($\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن)

2) $\lim v_n = \lim \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \lim \dfrac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} =$

$$= \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = -1$$

3) $\lim w_n = \lim \left(n^{2/3} - n^{3/4}\right)$

$$= \lim \left(n^{3/4}\right)\left(\frac{n^{2/3}}{n^{3/4}} - 1\right)$$

$$= \lim \left(n^{3/4}\right)\left(\frac{1}{n^{1/12}} - 1\right)$$

$$= \lim \left(n^{3/4}\right)\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{1/12} - 1\right) = -\infty$$

($\lim (n)^{3/4} + \infty$ و $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{1/12} = 0$ ، لأن)

4) $\lim t_n = \lim \left(n^{2/3} - n^{-1/3}\right) = \lim \left(n^{2/3} - \left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}\right)$

$$= +\infty$$

تمرين رقم 16

1) $\lim v_n = \lim \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3} = -\frac{1}{3}$

($\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن)

2) $\lim v_n = \lim \dfrac{\sqrt{(0,3)^n + 5}}{\sqrt{(0,3)^n + 4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

لأن: $\lim (0,3)^n = \lim \left(\frac{3}{10}\right)^n = 0$

تمرين رقم 17

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \end{cases}$$

1) لدينا: $2 \leq u_0 \leq 3$

نفترض أن $2 \leq u_n \leq 3$

نبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

لدينا حسب افتراض الترجع: $2 \leq u_n \leq 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n} \leq \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{u_n} \leq 1 + \sqrt{3}$

وبما أن $2 \leq 1 + \sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{3} \leq 3$

فإن $2 \leq u_{n+1} \leq 3$

إذن $\forall n \in \mathbb{N};\ 2 \leq u_n \leq 3$

2) نبين أن $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} > u_n$

لدينا: $u_1 = 1 + \sqrt{2}$ و $u_0 = 2$

إذن $u_1 > u_0$

نفترض أن: $u_n > u_{n-1}$

نبرهن أن $u_{n+1} > u_n$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n > u_{n-1}$

$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{u_n} > 1 + \sqrt{u_{n-1}}$

$\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

إذن $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} > u_n$

إذن (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 3

إذن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ.

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [2, 3]$

بما يلي: $f(x) = \sqrt{x} + 1$

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

نحدد $f(I)$

بما أن: $\forall x \in I;\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

فإن f دالة تزايدية على I

إذن: $f(I) = [f(2), f(3)] = [\sqrt{2} + 1, \sqrt{3} + 1] \subset I$

بما أن: * f دالة متصلة على I

* $f(I) \subset I$

* $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \in I$

* (u_n) متقاربة نهايتها ℓ

فإن ℓ هو حل للمعادلة $f(x) = x$ في المجال I

$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 1$

$\Leftrightarrow x = x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 5;\quad x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \notin I$ ، $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \in I$

إذن $\lim u_n = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

تمرين رقم 18

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$$

1) لدينا: $0 \leq v_0 \leq 2$

نفترض أن $0 \leq v_n \leq 2$

نبرهن أن $0 \leq v_{n+1} \leq 2$

لدينا حسب افتراض الترجع، $0 \leq v_n \leq 2$

$\Leftrightarrow 2 \leq v_n + 2 \leq 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{v_n + 2} \leq 2$

وبما أن $0 \leq \sqrt{2}$ فإن $0 \leq v_{n+1} \leq 2$

إذن $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq v_n \leq 2$

2) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1} - v_n = \sqrt{2 + v_n} - v_n$

$$= \frac{2 + v_n - v_n^2}{\sqrt{2 + v_n} + v_n}$$

$$= \frac{(2 - v_n)(1 + v_n)}{\sqrt{2 + v_n} + v_n} \geq 0$$

لأنه حسب السؤال 1: $\forall n \in \mathbb{N};\ 2 - v_n \geq 0$

و $\forall n \in \mathbb{N};\ 1 + v_n \geq 0$

إذن (v_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 2

إذن (v_n) متقاربة نهايتها ℓ

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0, 2]$

بما يلي. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

لدينا: $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N};\ v_{n+1} = f(v_n)\end{cases}$

نحدد $f(I)$:

بما أن $\forall x\in I;\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$

فإن f دالة تزايدية على I

إذن: $f(I) = [f(0), f(2)] = [\sqrt{2}, 2] \subset I$

بما أن
* f دالة متصلة على I
* $f(I)\subset I$
* $\forall n\in\mathbb{N};\ v_n \in I$
* (v_n) متقاربة نهايتها ℓ

فإن ℓ هو حل للمعادلة $f(x)=x$ في المجال I

$f(x)=x \iff \sqrt{x+2} = x$

$\iff x^2-x-2=0$

$\Delta = 9\ ,\ x_1 = 2\in I\ ,\ x_2 = -1 \notin I$

إذن $\lim v_n = 2$

تمرين رقم 19

$\begin{cases}u_0=2\\ \forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=3u_n-4\end{cases}$

1) بأخذ قيم للعدد n نلاحظ أن:

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_n = 2$

وهذا يعني أن $\lim u_n = 2$

2) $\forall n\in\mathbb{N};\ v_n = u_n - 2$

لدينا $\forall n\in\mathbb{N};\ v_{n+1} = u_{n+1}-2$

$= 3u_n - 6 = 3(u_n-2) = 3v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول $v_0=0$

3) بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول $v_0=0$

فإن: $\forall n\in\mathbb{N};\ v_n = 0$

إذن $\lim v_n = 0$

إذن $\lim (u_n - 2) = 0$

إذن $\lim u_n = 2$

تمرين رقم 20

$\begin{cases}u_0=3\\ \forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1} = u_n(u_n+1)\end{cases}$

1) $u_1 = u_0(u_0+1) = 12$

$u_2 = u_1(u_1+1)=156$

2) $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}-u_n = u_n(u_n+1)-u_n$

$= u_n^2 > 0$

إذن (u_n) متتالية تزايدية

3) $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}-2u_n = u_n(u_n+1) - 2u_n$

$= u_n(u_n+1-2)$

$= u_n(u_n-1) > 0$

لأن: بما أن (u_n) متتالية تزايدية فإن

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n \ge u_0 \iff \forall n\in\mathbb{N};\ u_n \ge 3 > 1$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n - 1 > 0$

استنتاج: نبرهن بالترجع أن

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_n \ge 3\cdot 2^n$

لدينا: $u_0 \ge 3\cdot 2^0$

نفترض أن $u_n \ge 3\cdot2^n$

نبرهن أن $u_{n+1}\ge 3\cdot 2^{n+1}$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n \ge 3\cdot 2^n$

وحسب السؤال السابق: $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} > 2u_n$

إذن $u_{n+1}\ge 3\cdot 2^{n+1}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\ge 3\cdot 2^n$

4) بما أن $\lim 2^n = +\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim u_n = +\infty$.

تمرين رقم 21

$\begin{cases}u_0=100\\ \forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n+10}\end{cases}$

1) لدينا $u_0\ge 0$

نفترض أن $u_n \ge 0$

نبرهن أن $u_{n+1}\ge 0$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n \ge 0$

إذن: $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n+10}\ge 0$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\ge0$

2) $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}-u_n = \frac{u_n}{u_n+10}-u_n$

$= -\frac{u_n(u_n+9)}{u_n+10}\le 0$

إذن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

إذن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ

3) $\forall n\in\mathbb{N};\ \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{1}{10} = \frac{10u_{n+1}-u_n}{10u_n}$

$= \frac{\frac{10u_n}{u_n+10}-u_n}{10u_n}$

$= \frac{-u_n^2}{10u_n(u_n+10)} \le 0$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ \frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{1}{10}$

$\iff \forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}\le \frac{1}{10}u_n$

نبرهن بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n \le \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}$

لدينا: $u_0 \le \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$ (لأن $u_0 = 10^2$)

نفترض أن $u_n\le\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}$

نبرهن أن $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n\le\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}$

$\iff \frac{u_n}{10}\le\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} \iff \frac{u_n}{10}\le\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

ولدينا حسب السؤال السابق

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}\le\frac{1}{10}u_n$

إذن: $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ 0\le u_n\le\left(\frac{1}{10}\right)^{n-2}$

بما أن: $\lim \left(\frac{1}{10}\right)^{n-2} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim u_n = 0$

تمرين رقم 22

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - \frac{1}{4}}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) لدينا: $u_0 > -\frac{1}{2}$

نفترض أن $u_n > -\frac{1}{2}$

نبرهن أن $u_{n+1} > -\frac{1}{2}$

$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = \frac{u_n - \frac{1}{4}}{u_n + 2} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3\left(u_n + \frac{1}{2}\right)}{2(u_n + 2)} > 0$$

لأنه حسب افتراض الترجع: $u_n + \frac{1}{2} > 0$

إذن: $u_{n+1} > -\frac{1}{2}$

إذن، $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n > -\frac{1}{2}$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2}{2u_n + 1}$

أ) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1} - v_n = \dfrac{2}{2u_{n+1} + 1} - \dfrac{2}{2u_n + 1}$

$$= \frac{2(u_n+2)}{3u_n + \frac{3}{2}} - \frac{2}{2u_n + 1}$$
$$= \frac{2(u_n+2)}{\frac{3}{2}(2u_n + 1)} - \frac{2}{2u_n + 1}$$
$$= \frac{4(u_n+2) - 6}{3(2u_n+1)} = \frac{2(2u_n+1)}{3(2u_n+1)} = \frac{2}{3}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول: $v_0 = \frac{2}{7}$

ب) لدينا: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{2}{7} + \frac{2n}{3}$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2}{2u_n + 1}$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{v_n} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{\frac{2}{7} + \frac{2n}{3}} - \frac{1}{2}$$

ومنه فإن $\lim u_n = -\frac{1}{2}$

تمرين رقم 26

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = u_n + 2n - 1$

1) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1) - 1$

$$= \frac{1}{2}u_n - n - \frac{3}{2} + 2n + 1$$
$$= \frac{1}{2}u_n + n - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(u_n + 2n - 1) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_0 = 1$

2) لدينا. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - 2n + 1$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1$$

إذن $\lim u_n = -\infty$

3) $$\begin{cases} T_0 = u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \end{cases}$$

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

$$= (v_0 - 2\cdot 0 + 1) + \cdots + (v_n - 2\cdot n + 1)$$
$$= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) - 2(1 + 2 + \cdots + n) + (n+1)$$
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{n}{2}(1+n) + (1+n)$$
$$= 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (1+n)(1-n)$$

إذن، $\lim T_n = -\infty$

تمرين رقم 27

$u_0 = 3$

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2}$

1) أ) لدينا $u_0 > \sqrt{6}$

نفترض أن $u_n > \sqrt{6}$

نبرهن أن $u_{n+1} > \sqrt{6}$

لدينا: $u_{n+1} - \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} - \sqrt{6}$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n^2 + 2 - 6}{\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} + \sqrt{6}} = \frac{\frac{2}{3}(u_n^2 - 6)}{\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} + \sqrt{6}}$$
$$= \frac{\frac{2}{3}(u_n + \sqrt{6})(u_n - \sqrt{6})}{\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} + \sqrt{6}} > 0$$

لأنه حسب افتراض الترجع لدينا، $u_n > \sqrt{6}$

إذن، $u_{n+1} > \sqrt{6}$

إذن، $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n > \sqrt{6}$

ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} - u_n$

$$= \frac{\frac{2}{3}u_n^2 + 2 - u_n^2}{\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} + u_n} = \frac{\frac{2}{3}(6 - u_n^2)}{\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} + u_n}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}(\sqrt{6} + u_n)(\sqrt{6} - u_n)}{\sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + 2} + u_n} < 0$$

لأنه حسب السؤال السابق؛ $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \sqrt{6}$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n^2 - 6$

أ) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 6$

$$= \frac{2}{3}u_n^2 + 2 - 6$$
$$= \frac{2}{3}u_n^2 - 4 = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول. $v_0 = 3$

ب) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج. لدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n^2 - 6$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{v_n + 6} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6}$$

بما أن $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ فإن $\lim u_n = \sqrt{6}$

تمرين (رقم 28)

$u_0 = 3$

$\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_{n+1} = \frac{u_n}{3+3^n u_n}$

1) أ) لدينا : $u_0 > 0$

نفترض أن $u_n > 0$

لنبين أن $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_{n+1} = \frac{u_n}{3+3^n u_n} > 0$

لأنه حسب افتراض الترجع $u_n > 0$

إذن، $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n > 0$

ب) $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3+3^n u_n} - u_n$

$= -u_n \frac{2+3^n u_n}{3+3^n u_n} < 0$

إذن (u_n) متتالية تناقصية

وبما أن (u_n) تناقصية فإن : $\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n \leq u_0$

إذن $\forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n \leq 3$

ج) (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

إذن (u_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

3) $\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = \frac{1}{3^n u_n}$

أ) $\forall n \in \mathbb{N}, \; v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3^{n+1} u_{n+1}} - \frac{1}{3^n u_n}$

$= \frac{1}{\frac{3^{n+1} u_n}{3+3^n u_n}} - \frac{1}{3^n u_n}$

$= \frac{3+3^n u_n}{3^{n+1} u_n} - \frac{3}{3^{n+1} u_n} = \frac{3^n u_n}{3^{n+1} u_n} = \frac{1}{3}$

إذن (u_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0 = \frac{1}{3}$

ب) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}, \; v_n = \frac{1}{3}(1+n)$

ولدينا : $\forall n \in \mathbb{N} ; \; v_n = \frac{1}{3^n u_n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \; u_n = \frac{1}{3^n v_n} = \frac{1}{3^{n-1}(1+n)}$

ومنه $\lim u_n = 0$

تمرين (رقم 29)

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}$

$\forall n \in \mathbb{N} ; \; -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \; 2^n - 1 \leq 2^n + (-1)^n \leq 2^n + 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} ; \; \frac{2^n - 1}{3^n} \leq u_n \leq \frac{2^n + 1}{3^n}$

وبما أن : $\lim \frac{2^n - 1}{3^n} = \lim \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = 0$

و $\lim \frac{2^n + 1}{3^n} = \lim \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) = 0$

(لأن : $-1 < \frac{1}{3} < 1$ و $-1 < \frac{2}{3} < 1$)

فإنه حسب مصاديق التقارب : $\lim u_n = 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \frac{2^n + \pi^n - 3^n}{2^n - \pi^n - 3^n} =$

$= \frac{\pi^n \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^n + 1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \right)}{\pi^n \left(\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \right)} = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n + 1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^n}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^n - 1 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^n}$.

إذن : $\lim u_n = -1$

لأن : $-1 < \frac{2}{\pi} < 1$ و $-1 < \frac{3}{\pi} < 1$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \; u_n = \frac{1+2+3+ \cdots +n}{(n+1)^2 n} =$

$= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{(n+1)^2 n} = \frac{1}{2(n+1)}$

إذن : $\lim u_n = \lim \frac{1}{2(n+1)} = 0$

4) $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = \frac{2n^2 - 3\sin n}{n^2+1} =$

$= \frac{2n^2}{n^2+1} - 3 \frac{\sin n}{n^2+1}$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}, \; -1 \leq \sin n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \; \frac{-1}{n^2+1} \leq \frac{\sin n}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$

بما أن : $\lim \frac{-1}{n^2+1} = \lim \frac{1}{n^2+1} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب .

$\lim \frac{\sin n}{n^2+1} = 0$

ولدينا : $\lim \frac{2n^2}{n^2+1} = \lim \frac{2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1} =$

بما أن $\lim u_n = 2$

5) $\forall n \geq 2 ; \; u_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)$

لكل $k \in \{2,3,\dots,n\}$ لدينا .

$\forall n \geq 2 \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$

من أجل $k=2$ لدينا : $1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{2} \leq 1+\frac{1}{2}$

من أجل $k=3$ لدينا $1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{3} \leq 1+\frac{1}{2}$

$\vdots$

من أجل $k=n$ لدينا . $1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{2}$

نضرب المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على :

$\forall n \geq 2 ; \; \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \leq u_n \leq \left(1+\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

بما أن : $\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = +\infty$

لأن $\forall n \geq 2, \; 1+\frac{1}{n} > 1$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim u_n = +\infty$

6) $\forall n \geq 2 ; \; u_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) \cdots \left(1-\frac{1}{n}\right)$

لكل $k \in \{2,3,\dots,n\}$ لدينا :

$\forall n \geq 2 ; \quad \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2 \quad 1-\frac{1}{2} \leq 1-\frac{1}{k} \leq 1-\frac{1}{n}$

لأجل $k=2$ لدينا. $1-\frac{1}{2} \leq 1-\frac{1}{2} \leq 1-\frac{1}{n}$

لأجل $k=3$ لدينا، $1-\frac{1}{2} \leq 1-\frac{1}{3} \leq 1-\frac{1}{n}$

لأجل $k=n$ لدينا، $1-\frac{1}{2} \leq 1-\frac{1}{n} \leq 1-\frac{1}{n}$

نضرب المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على،

$$\forall n \geq 2, \quad \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq u_n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

وبما أن، $\lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = 0$

لأن: $\forall n \geq 2, \quad -1 < 1-\frac{1}{n} < 1$

و $\lim \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim u_n = 0$

تمرين رقم 30

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$

إذن، $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$

إذن (u_n) متتالية تناقصية.

وبما أن، $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$

فإن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

إذن (u_n) متقاربة

2) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n \leq q^n u_0$

لدينا. $u_0 \leq u_0$

نفترض أن: $u_n \leq q^n u_0$

نبرهن أن $u_{n+1} \leq q^{n+1} u_0$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n \leq q^n u_0$

$\Leftrightarrow q u_n \leq q^{n+1} u_0$

وبما أن: $\forall n \in \mathbb{N}; \; u_{n+1} \leq q u_n$

فإن $u_{n+1} \leq q^{n+1} u_0$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq u_n \leq q^n u_0$

وبما أن: $q \in]0,1[$ فإن: $\lim q^n = 0$

إذن حسب مصاديق التقارب فإن

$\lim u_n = 0$

تمرين رقم 31

1) نبين أن: لكل $k \in \{1,2,\dots,n\}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

لدينا، $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}, \quad 1 \leq k \leq n$

$\Leftrightarrow \forall k \in \{1,2,\dots,n\}; \quad n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$

$\Leftrightarrow \forall k \in \{1,2,\dots,n\}, \quad \sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$

$\Leftrightarrow \forall k \in \{1,2,\dots,n\}, \quad \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

لأجل $k=1$ لدينا: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

لأجل $k=2$ لدينا، $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

لأجل $k=n$ لدينا. $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

نجمع المتفاوتات طرفا بطرف نحصل على،

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

إذن. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}$

وبما أن $\lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} = 1$

فإنه حسب مصاديق التقارب. $\lim u_n = 1$

تمرين رقم 32

لدينا $\forall n \geq 2; \quad \sqrt{n}-1 \leq \sqrt{n}+(-1)^n \leq \sqrt{n}+1$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2; \quad \frac{1}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2; \quad \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2; \quad \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}} \leq u_n \leq \frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{n}}}$

وبما أن: $\lim \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}} = \lim \frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{n}}} = 1$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim u_n = 1$

تمرين رقم 33

1) $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 2^n - \cos n$

لدينا، $\forall n \in \mathbb{N}; \quad \cos n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \quad -\cos n \geq -1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \quad 2^n - \cos n \geq 2^n - 1$

وبما أن، $\lim 2^n - 1 = +\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim u_n = +\infty$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n + (-1)^n \sin n$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}; \quad -1 \leq \sin n \leq 1$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq (-1)^n \sin n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \quad n-1 \leq n+(-1)^n \sin n \leq n+1$

وبما أن، $\lim (n-1) = +\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim u_n = +\infty$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + (-1)^n$

لدينا، $\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \quad 2^n - 1 \leq u_n \leq 2^n + 1$

وبما أن $\lim 2^n - 1 = +\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب، $\lim u_n = +\infty$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n = n\left(\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) + \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)\right)$$

$= n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) + n^2\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n-1}\right)\right)$

$= -\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n-1}\right)}{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2$

بما أن $\lim \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n-1}\right)}{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2} = \frac{1}{2}$

و $\lim \frac{n}{n-1} = 1$

فإن $\lim u_n = 0$

تمرين رقم 34

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{1+u_n} \end{cases}$$

1) لدينا $0 \leq u_0 \leq 1$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 1$

نبرهن أن: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا من جهة، $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{1+u_n} \geq 0$ لأنه حسب افتراض الترجع: $u_n \geq 0$

ولدينا من جهة أخرى $u_{n+1} - 1 = \frac{1+u_n^2}{1+u_n} - 1$

$= \frac{u_n(u_n-1)}{1+u_n} \leq 0$

لأنه حسب افتراض الترجع $u_n \leq 1$ يعني $(u_n - 1) \leq 0$

و $u_n \geq 0$ و $u_n + 1 > 0$

اذن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

اذن $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq u_n \leq 1$

2) $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n^2}{1+u_n} - u_n$

$= \frac{1-u_n}{1+u_n} \geq 0$

لأنه حسب السؤال السابق $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq u_n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ 1 - u_n \geq 0$

ولدينا: $\forall n \in \mathbb{N};\ 1 + u_n > 0$

اذن (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1

اذن (u_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

3) أ) $\forall n \in \mathbb{N};\ 1 - u_{n+1} - \frac{2}{3}(1 - u_n) =$

$= 1 - \frac{1+u_n^2}{1+u_n} - \frac{2}{3} + \frac{2u_n}{3}$

$= \frac{-(u_n^2 - 3u_n + 2)}{3(1+u_n)} = -\frac{(u_n-1)(u_n-2)}{3(1+u_n)} \leq 0$

لأنه حسب السؤال ① لدينا:

$\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq 1 \leq 2$

اذن، $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 1 \leq 0$

و $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 2 \leq 0$

ب) نبين بالترجع أن. $\forall n \in \mathbb{N};\ 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا. $1 - u_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^0$

نفترض أن $1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

نبرهن أن، $1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

لدينا حسب افتراض الترجع: $1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1 - u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

ولدينا حسب السؤال ③ أ

$1 - u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1 - u_n)$

اذن $1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

اذن: $\forall n \in \mathbb{N};\ 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج) لدينا $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 < 1 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

وبما أن $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim(1 - u_n) = 0$

اذن $\lim u_n = 1$

تمرين رقم 35

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2} = (1+\sqrt{2})u_{n+1} - \sqrt{2}\,u_n \end{cases}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+2} - u_{n+1}$

$= (1+\sqrt{2})u_{n+1} - \sqrt{2}\,u_n - u_{n+1}$

$= \sqrt{2}(u_{n+1} - u_n) = \sqrt{2}\,v_n$

اذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \sqrt{2}$

وحدها الأول $v_0 = 2$

2) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_0 + v_1 + \text{———} + v_{n-1} =$

$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \text{———} + (u_n - u_{n-1})$

$= u_n - u_0$

بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\sqrt{2}$ وحدها الأول $v_0 = 2$

فإن: $\forall n \in \mathbb{N};\ v_0 + v_1 + \text{—} + v_{n-1} = 2\,\frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}}$

اذن: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n = 2\left(\frac{1-(\sqrt{2})^n}{1-\sqrt{2}} + 1\right)$

بما أن: $\lim (\sqrt{2})^n = +\infty$ فإن $\lim u_n = +\infty$

3) أ) لدينا. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2(\sqrt{2})^n > 0$

ولدينا. $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \cos v_n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ -2v_n \cos v_n \geq -2v_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n^2 - 2v_n \cos v_n + 1 \geq v_n^2 - 2v_n + 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geq (v_n - 1)^2$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ w_n \geq (2(\sqrt{2})^n - 1)^2$

ب) بما أن $\lim (2(\sqrt{2})^n - 1)^2 = +\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim w_n = +\infty$

تمرين رقم 36

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1) $u_2 = \frac{8}{3}$ ، $u_3 = \frac{26}{9}$

2) لدينا $u_1 < 3$

نفترض أن $u_n < 3$

نبرهن أن $u_{n+1} < 3$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n < 3$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + 2 < 3$

اذن $u_{n+1} < 3$

اذن $\forall n \in IN^*,\ u_n < 3$

3) $\forall n \in IN^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n$

$= 2 - \frac{2}{3}u_n$

$= \frac{2}{3}(3 - u_n) > 0$

لأنه حسب السؤال السابق: $\forall n \in IN^*,\ 3 - u_n > 0$

اذن $(u_n)_{IN^*}$ متتالية تزايدية

ومنه $\forall n \in IN^*;\ u_n \geq u_1$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*;\ u_n \geq 2$

4) أ- $\forall n \in IN^*,\ v_n = u_n - 3$

$\forall n \in IN^*,\ v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

$= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3$

$= \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$

اذن $(v_n)_{IN^*}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول: $v_1 = -1$

ومنه $\forall n \in IN^*,\ v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

ب- لدينا: $\forall n \in IN^*,\ u_n = v_n + 3$

$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$

وبما أن $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ فإن $\lim u_n = 3$

ج) $S = \sum_{i=1}^{i=n} u_i = \sum_{i=1}^{i=n}\left(3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\right)$

$= 3n - \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

$= 3n - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 3n - \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$\lim S_n = +\infty$

تمرين رقم 37

1) $a_1 = a_0 + (0,8)a_0 = (1,8)a_0$

$= 1800\ DH$

$a_2 = a_1 + (0,8)a_1 = (1,8)a_1 = 3240\ DH$

لكل n من IN نعتبر a_n رأسمال هبة في الشهر n

اذن رأسمال هبة في الشهر $n+1$ هو:

$a_{n+1} = a_n + (0,8)a_n = (1,8)a_n$

اذن (a_n) متتالية هندسية أساسها $1,8$

ومنه $\forall n \in IN;\ a_n = a_0(1,8)^n$

2) $c_1 = a_0 + a_1 = 2800\ DH$

$c_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 6040\ DH$

$\forall n \in IN,\ c_n = a_0\frac{1 - (1,8)^n}{1 - 1,8}$

3) $\lim c_n = \lim a_0 \frac{1 - (1,8)^n}{1 - 1,8} = +\infty$

تمرين رقم 38

1) لدينا $u_0 = 25000\ DH$

$u_1 = (u_0 \cdot 1,04) - \frac{1}{4}(u_0 \cdot 1,04)$

$= u_0(1,04)\cdot\frac{3}{4} = u_0(0,78)$

$= 19500\ DH$

$u_2 = (0,78)u_1 = 15210\ DH$

2) أ) نعتبر u_n المبلغ الذي بقي لأحمد في فاتح يناير $(2007+n)$

اذن u_{n+1} هو المبلغ المتبقي لأحمد في بداية هذه السنة

$u_{n+1} = (u_n \cdot 1,04) - \frac{1}{4}(u_n \cdot 1,04)$

$= (0,78)u_n$

اذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $(0,78)$

ب) $\forall n \in IN;\ u_n = u_0(0,78)^n$

$= 25000(0,78)^n$

3) لأن $-1 < 0,78 < 1$

فإن $\lim u_n = 0$

بعد 40 سنة سيكون المبلغ المتبقي في حساب أحمد هو 1,6 درهما.

تمرين رقم 39

$\begin{cases} u_0 = 6, \\ \forall n \in IN^*,\ 5u_n - 4u_{n-1} = 5 \end{cases}$

1) لدينا: $\forall n \in IN^*,\ u_n = \frac{4}{5}u_{n-1} + 1$

اذن $\forall n \in IN^*,\ u_n - a = \frac{4}{5}(u_{n-1} - a)$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*,\ \frac{4}{5}u_{n-1} + 1 - a = \frac{4}{5}u_{n-1} - \frac{4a}{5}$

$\Leftrightarrow a = 5$

2) $\forall n \in IN,\ v_n = u_n - 5$

أ) $\forall n \in IN,\ v_{n+1} = u_{n+1} - 5$

$= \frac{4}{5}u_n + 1 - 5$

$= \frac{4}{5}u_n - 4 = \frac{4}{5}(u_n - 5) = \frac{4}{5}v_n$

اذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ وحدها الأول $v_0 = 1$

ب) $\forall n \in IN,\ v_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$

ج) لدينا $\forall n \in IN,\ u_n = v_n + 5$

اذن $\frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) =$

$= \frac{1}{n}\left((v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 5(n+1)\right)$

$= \frac{1}{n}\frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} + \frac{5(n+1)}{n}$

$= \frac{5}{n}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) + \frac{5(n+1)}{n}$

ومنه $\lim \frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = 5$

تمرين رقم 40

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in IN;\ u_{n+1} = -2 + \sqrt{5 + (u_n + 2)^2} \end{cases}$

1) أ) لدينا . $u_0 \geq 1$

نفترض ان $u_n \geq 1$

نبرهن ان $u_{n+1} \geq 1$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n \geq 1$

$\Rightarrow (u_n+2)^2 \geq 9$

$\Leftrightarrow 5+(u_n+2)^2 \geq 14$

$\Leftrightarrow \sqrt{5+(u_n+2)^2} \geq \sqrt{14}$

$\Leftrightarrow -2+\sqrt{5+(u_n+2)^2} \geq \sqrt{14}-2$

$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq \sqrt{14}-2$

وبما ان $\sqrt{14}-2 \geq 1$

فان $u_{n+1} \geq 1$

اذن $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \geq 1$

ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1}-u_n =$

$= \sqrt{5+(u_n+1)^2} - (u_n+2)$

$= \dfrac{5}{\sqrt{5+(u_n+2)^2}+(u_n+2)} > 0$

اذن (u_n) متتالية تزايدية

ج) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = (2+u_n)^2$

2) أ) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1}-v_n = (2+u_{n+1})^2-(2+u_n)^2$

$= \left(\sqrt{5+(u_n+2)^2}\right)^2 - (2+u_n)^2$

$= 5+(u_n+2)^2-(2+u_n)^2 = 5$

اذن (v_n) متتالية حسابية اساسها 5 وحدها الاول $v_0 = 9$

ب) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 9+5n$

ج) $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n = \sqrt{v_n}-2$

$= \sqrt{9+5n}-2$

$\lim u_n = +\infty$

تمرين (رقم 41)

$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2} = \frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n \end{cases}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 2u_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

1) أ) $w_1 = u_1 - \frac{1}{3}u_0 = 1\ ,\quad v_1 = u_1 - 2u_0 = 1$

ب) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+2} = u_{n+2} - 2u_{n+1}$

$= \frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n - 2u_{n+1}$

$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1}-2u_n) = \frac{1}{3}v_{n+1}$

اذن $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الاول $v_1 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+2} = u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1}$

$= \frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n+1}$

$= 2u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = 2(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n) = 2w_{n+1}$

اذن $(w_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية اساسها 2 وحدها الاول $w_1 = 1$

ج) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = 2^{n-1}$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}^*\quad \begin{cases} u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = 2^{n-1} & (1) \\ u_{n+1} - 2u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & (2) \end{cases}$

$(1)-(2):\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{5}{3}u_n = 2^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \frac{3}{5}\left(2^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

بما ان $\lim 2^{n-1} = +\infty$ و $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

فان $\lim u_n = +\infty$

تمرين (رقم 42)

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$

1) لدينا: $2 < u_0 < 4$

نفترض ان $2 < u_n < 4$

نبرهن ان $2 < u_{n+1} < 4$

لدينا من جهة. $u_{n+1} - 2 = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} - 2$

$= \dfrac{8u_n - 8 - 2u_n - 4}{u_n+2}$

$= \dfrac{6(u_n-2)}{u_n+2} > 0$

لانه حسب افتراض الترجع $u_n - 2 > 0$

ولدينا من جهة أخرى: $u_{n+1} - 4 = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} - 4$

$= \dfrac{8u_n - 8 - 4u_n - 8}{u_n+2} = \dfrac{4(u_n-4)}{u_n+2} <$

لأنه حسب افتراض الترجع $u_n - 4 < 0$

اذن: $2 < u_{n+1} < 4$

اذن $\forall n \in \mathbb{N};\ 2 < u_n < 4$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} - u_n$

$= -\dfrac{u_n^2 - 6u_n + 8}{u_n+2}$

ندرس اشاره $= \dfrac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2} > 0$

لان: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n - 2 > 0$ و $u_n - 4 < 0$

اذن. (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 4

اذن (u_n) متتالية متقاربة

3) أ) $\forall n \in \mathbb{N};\ 4 - u_{n+1} - \frac{16}{5} - \frac{4}{5}u_n =$

$= 4 - \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} - \frac{16}{5} - \frac{4}{5}u_n$

$= \dfrac{-4(u_n^2 + 11u_n - 12)}{5(u_n+2)} = \dfrac{-4(u_n+12)(u_n-1)}{5(u_n+2)} \leq 0$

لانه حسب السؤال (1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2 > 1$

اذن $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 1 > 0$

ب) لدينا $4 - u_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0$

نفترض ان. $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

نبرهن ان : $4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

لدينا حسب افتراض الترجع : $4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$\Leftrightarrow \frac{4}{5}(4 - u_n) \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

وحسب السؤال السابق لدينا $4-u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4-u_n)$

اذن $4-u_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

اذن $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < 4-u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

وبما أن $\lim \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim (4-u_n) = 0$

اذن $\lim u_n = 4$

4) $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$

أ) $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-4}{u_{n+1}-2}$

$$= \frac{\frac{8(u_n-1)}{u_n+2} - 4}{\frac{8(u_n-1)}{u_n+2} - 2} = \frac{4u_n-16}{6u_n-12}$$

$$= \frac{4}{6}\,\frac{u_n-4}{u_n-2} = \frac{2}{3} v_n$$

اذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -1$

ب) لدينا $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\quad v_n u_n - 2v_n = u_n - 4$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\quad u_n(v_n - 1) = 2v_n - 4$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\quad u_n = \frac{2v_n-4}{v_n-1} = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$

ج) بما أن $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ فإن $\lim u_n = 4$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S_n = v_0 + v_1 + \text{——} + v_{n-1}$

$$= \frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}\left(1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

اذن $\lim S_n = \frac{3}{5}$

تمرين رقم 43

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{-7u_n-8}{2u_n+1} \end{cases}$$

1) لدينا $u_0 \neq -2$

نفترض انه اذا كان $u_n \neq -2$ فإن $u_{n+1} \neq -2$

لدينا $(u_n \neq -2 \Rightarrow u_{n+1} \neq -2) \Leftrightarrow (u_{n+1} = -2 \Rightarrow u_n = -2)$

$u_{n+1} = -2 \Leftrightarrow \frac{-7u_n-8}{2u_n+1} = -2$

$\Leftrightarrow -7u_n - 8 = -4u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = -2$

ومنه فإن $u_{n+1} = -2 \Leftrightarrow u_n \neq -2$

اذن $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \neq -2$

2) نعتبر المتتالية: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{2+u_n}$

أ) $\forall n \in \mathbb{N};\quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2+u_{n+1}} - \frac{1}{2+u_n}$

$$= \frac{1}{2+\frac{-7u_n-8}{2u_n+1}} - \frac{1}{2+u_n} = \frac{2u_n+1}{-3(u_n+2)} - \frac{1}{2+u_n}$$

$$= -\frac{2u_n+4}{3(u_n+2)} = -\frac{2}{3}$$

اذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\left(-\frac{2}{3}\right)$ وحدها الأول: $v_0 = -\frac{1}{3}$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{-(1+2n)}{3}$

ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = \frac{1}{2+u_n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \frac{1}{v_n} - 2$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{-3}{1+2n} - 2$

3) أ) $\forall n \in \mathbb{N}^*;\quad |u_n+2| = \left|\frac{-3}{1+2n}\right| = \frac{|-3|}{|1+2n|}$

$$= \frac{3}{1+2n} \leq \frac{3}{2n} \leq \frac{3}{n}$$

ب) بما أن $\lim \frac{3}{n} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب $\lim u_n = -2$

تمرين رقم 44

1) $u_0 = 150$

$u_1 = (150 \cdot 1{,}035) - 1$

لكل n من $\mathbb{N}$

u_n هو عدد البكتيريات في الدقيقة n

و u_{n+1} هو عدد البكتيريات في الدقيقة $n+1$

لدينا $u_{n+1} = (u_n \cdot 1{,}035) - 1$

2) أ) $\forall n \in \mathbb{N};\quad v_n = u_n - \frac{1}{0{,}035}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{0{,}035} = u_n \cdot 1{,}035 - 1 - \frac{1}{0{,}035}$$

$$= (1{,}035)u_n - \frac{1{,}035}{0{,}035}$$

$$= (1{,}035)\left(u_n - \frac{1}{0{,}035}\right) = (1{,}035)v_n$$

اذن (v_n) متتالية هندسية اساسها $1{,}035$

$\forall n \in \mathbb{N};\quad v_n = (1{,}035)^n v_0$

$$= (1{,}035)^n\left(150 - \frac{1}{0{,}035}\right)$$

ب) $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = v_n + \frac{1}{0{,}035}$

$$= (1{,}035)^n\left(150 - \frac{1}{0{,}035}\right) + \frac{1}{0{,}035}$$

ج) $u_{20} = (1{,}035)^{20}\left(150 - \frac{1}{0{,}035}\right) + \frac{1}{0{,}035}$

3) أ) $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_{n+1} = (1{,}035)u_n$

(u_n) متتالية هندسية اساسها $1{,}035$

وحدها الاول $u_0 = 150$

اذن $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_n = (1{,}035)^n \cdot 150$

$u_{20} = (1{,}035)^{20} \cdot 150$

ب) بما أن $1{,}035 > 1$

فإن $\lim u_n = +\infty$

تمرين رقم 45

$\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=\sqrt{\frac{u_n+3}{2}} \end{cases}$

1) لدينا $\frac{1}{2}\le u_0\le\frac{3}{2}$

نفترض أن $\frac{1}{2}\le u_n\le\frac{3}{2}$

نبرهن أن $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le\frac{3}{2}$

لدينا حسب افتراض الترجع $\frac{1}{2}\le u_n\le\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{7}{4}\le\frac{u_n+3}{2}\le\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{2}\le\sqrt{\frac{u_n+3}{2}}\le\frac{3}{2}$

وبما أن $\frac{1}{2}\le\frac{\sqrt{7}}{2}$ فإن $\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le\frac{3}{2}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ \frac{1}{2}\le u_n\le\frac{3}{2}$

2) $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=\sqrt{\frac{u_n+3}{2}}-u_n$

$$=\frac{\frac{u_n+3}{2}-u_n^2}{\sqrt{\frac{u_n+3}{2}}+u_n}=-\frac{2u_n^2-u_n-3}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+3}{2}}+u_n\right)}$$

$$=\frac{-(2u_n-3)(u_n+1)}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+3}{2}}+u_n\right)}\ge0$$

لأنه حسب السؤال السابق $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{1}{2}\le u_n\le\frac{3}{2}$

إذن (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد $\frac{3}{2}$

إذن (u_n) متقاربة

3) نحدد $\lim u_n$:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ بما يلي:

$f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{2}}$

لدينا $\forall x\in I,\ f'(x)=\frac{1}{4\sqrt{\frac{x+3}{2}}}>0$

إذن f دالة تزايدية على I ومنه فإن

$f(I)=[f(\frac{1}{2}),f(\frac{3}{2})]=[\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{3}{2}]\subset I$

بما أن * f دالة متصلة على I

* $f(I)\subset I$
* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in I$
* (u_n) متقاربة نهايتها l

فإن l هو حل للمعادلة $f(x)=x$ في المجال I

$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{x+3}{2}=x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0$

$\Delta=25$; $x_1=\frac{3}{2}\in I$; $x_2=-1\notin I$

إذن $\lim u_n=\frac{3}{2}$

تمرين رقم 46

$I=]1,+\infty[$; $g(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1) لدينا $\forall x\in I$; $g'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+	0	−		−	0	+	
$g'(x)$					‖	−	0	+	
$g(x)$					‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, $\lim_{x\to1^{+}}g(x)=+\infty$, $g(3)=3$

فإن القيمة الدنوية للدالة g على I هي 3 فإن

$\forall x\in I$, $g(x)\ge3$

2) $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*;\ u_{n+1}=g(u_n) \end{cases}$

أ) لدينا $u_1=4\ge3$

نفترض أن $u_n\ge3$

نبرهن أن $u_{n+1}\ge3$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n\ge3$

بما أن g دالة تزايدية على المجال $[3,+\infty[$ فإن

$g(u_n)\ge g(3)$

$\Leftrightarrow u_{n+1}\ge3$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\ge3$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-3u_n+6}{u_n-1}-u_n$

$=\frac{-2(u_n-3)}{u_n-1}\le0$

لأنه حسب السؤال السابق: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ u_n\ge3\ge1$

يعني أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n-3\ge0$

و $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n-1\ge0$

إذن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 2

إذن (u_n) متقاربة نهايتها l

ج) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I=]1,+\infty[$ بما يلي:

$g(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$

لدينا: * g دالة متصلة على I

* $g(I)=[3,+\infty[\subset I$
* $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\in I$
* (u_n) متقاربة نهايتها l

إذن l هو حل للمعادلة $g(x)=x$ في المجال I

$g(x)=x \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+6}{x-1}=x \Leftrightarrow x=3$

إذن $\lim u_n=3$

تمرين رقم 47

$u_0=1$

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=\sqrt[3]{3u_n+1}-1$

1) $u_1=\sqrt[3]{4}-1$

2) أ) لدينا $0\le u_0\le1$

نفترض أن $0\le u_n\le1$

نبرهن أن $0\le u_{n+1}\le1$

لدينا حسب افتراض الترجع $0\le u_n\le1$

$\Leftrightarrow 1\le3u_n+1\le4$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt[3]{3u_{n}+1} \leq \sqrt[3]{4}$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq \sqrt[3]{4}-1$

بما أن $\sqrt[3]{4}-1 \leq 1$ فإن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

إذن $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq u_n \leq 1$

ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1}-u_n = \sqrt[3]{3u_n+1}-(1+u_n)$

$$= \frac{-u_n(u_n+3)}{\sqrt[3]{(3u_n+1)^2}+(1+u_n)\sqrt[3]{3u_n+1}+(1+u_n)^2} \leq 0$$

(لأن $\forall n \in \mathbb{N}.\ u_n+3>0$)

إذن (u_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 0

إذن (u_n) متقاربة نهايتها l

ج) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I=[0,1]$ بما يلي

$f(x)=\sqrt[3]{3x+1}-1$

لدينا: $\forall x \in I,\quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}>0$

إذن $f(I)=[f(0),f(1)]=[0,\sqrt[3]{4}-1] \subset I$

بما أن * f دالة متصلة على I

* $f(I) \subset I$

* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$

* (u_n) متقاربة نهايتها l

فإن l هو حل للمعادلة $f(x)=x$ في المجال I

$f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+1}-1=x$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+1}=x+1$

$\Leftrightarrow 3x+1=(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow x^2(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x_1=0 \in I,\quad x_2=-3 \notin I$

إذن $\lim u_n = 0$

تمرين رقم 48

$$\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

أ) لدينا $v_0=1\ ,\ u_1=\frac{7}{8}$

ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_{n+1}=u_{n+1}-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=\frac{1}{4}u_n+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=\frac{1}{4}u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=\frac{1}{4}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

ج) لدينا: $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=u_n-\left(\frac{3}{4}\right)^n$

إذن $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n$

د) بما أن: $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n=\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$

فإن $\lim u_n = 0$

ع) $\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n=u_0+u_1+\text{——}+u_n$

$=\left(1+\frac{1}{4}+\text{—}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)+\left(1+\frac{3}{4}+\text{—}+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

$=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}$

$=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$

بما أن $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\lim\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}=0$

فإن: $\lim S_n=\frac{3}{4}+4=\frac{19}{4}$

تمرين رقم 49

$$\begin{cases} u_0=2,\ u_1=\frac{4}{9} \\ \forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n) \end{cases}$$

1) لدينا $\left(\frac{4}{9}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\right)$ ، $u_1=\frac{1}{9}u_0+\frac{2}{3^2}$

نفترض أن $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

نبرهن أن $u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+2}}$

لدينا ، $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2}=\frac{12}{27}u_{n+1}-\frac{1}{27}u_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ \frac{1}{27}u_n=\frac{12}{27}u_{n+1}-u_{n+2}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ \frac{1}{9}u_n=\frac{12}{9}u_{n+1}-3u_{n+2}$

وبحسب افتراض الترجع: $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

$=\frac{12}{9}u_{n+1}-3u_{n+2}+\frac{2}{3^{n+2}}$

$\Leftrightarrow 3u_{n+2}=\frac{12}{9}u_{n+1}-u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+2}}$

$=\frac{1}{3}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+2}}$

$\Leftrightarrow u_{n+2}=\frac{1}{9}u_{n+1}+\frac{2}{3^{n+3}}$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N};\quad u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{3^{n+1}}$

$=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}}-\frac{1}{3^{n+1}}$

$=\frac{1}{9}u_n+\frac{2-3}{3^{n+2}}$

$=\frac{1}{9}u_n-\frac{1}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\left(u_n-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{9}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{9}$ وحدها الأول $v_0=1$

3) لدينا $\forall n \in \mathbb{N};\quad v_n=\left(\frac{1}{9}\right)^n=\frac{1}{3^{2n}}$

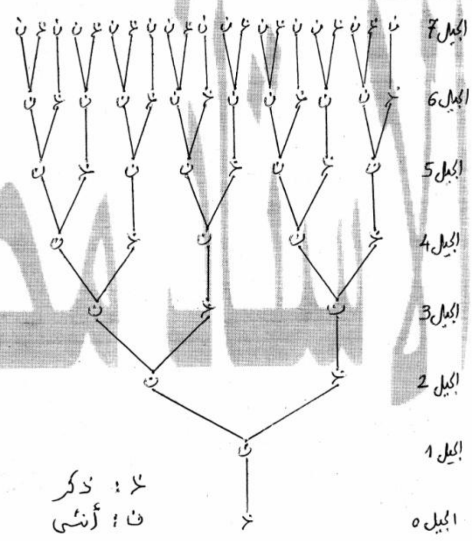
$=u_n-\frac{1}{3^n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ u_n=\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3^n}-1\right)$

بما أن $\lim \frac{1}{3^n} = 0$

فإن المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim u_n = 0$

تمرين رقم 50



u_n	F_n	M_n	الجيل n
1	0	1	0
1	1	0	1
2	1	1	2
3	2	1	3
5	3	2	4
8	5	3	5
13	8	5	6
21	13	8	7

1) أ) بما أن كل أنثى من الجيل $n+1$ يستلزم نملة أنثى أو ذكر من الجيل n فإن $u_n = F_{n+1}$

وعدد إناث الجيل n هو عدد إناث الجيل $n+1$ الملقحة وبما أن كل ذكر يلقح أنثى واحدة فإن عدد إناث الجيل n هو عدد ذكور الجيل $n+1$.

إذن $M_{n+1} = F_n$

ب) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = F_{n+1} + M_{n+1}$

$= F_{n+1} + F_n = u_n + u_{n-1}$

ج) أ) لدينا $u_0 = 1 \geq 0$ و $u_1 = 1 \geq 1$

نفترض أن $u_n \geq n$

نبرهن أن $u_{n+1} \geq n+1$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

و لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \geq 1$

يعني أن $u_{n-1} \geq 1$

إذن $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

$\geq n + 1$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq n$

وبما أن $\lim n = +\infty$ فإنه حسب مصاديق التقارب

$\lim u_n = +\infty$

ب) لدينا $(u_1)^2 = u_0 \cdot u_2 + (-1)^2$

نفترض أن $(u_n)^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^n$

نبرهن أن $(u_{n+1})^2 = u_n \cdot u_{n+2} + (-1)^{n+1}$

لدينا حسب افتراض الترجع:

$(u_n)^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^n$

$= (u_{n+1} - u_n) \cdot u_{n+1} + (-1)^n$

$= (u_{n+1})^2 - u_n \cdot u_{n+1} + (-1)^n$

$\Leftrightarrow (u_{n+1})^2 = (u_n)^2 + u_n \cdot u_{n+1} - (-1)^n$

$= u_n(u_n + u_{n+1}) + (-1)^{n+1}$

$= u_n \cdot u_{n+2} + (-1)^{n+1}$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N}; \ (u_n)^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^n$

3) $\forall n \in \mathbb{N}; \ v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

أ) $\forall n \in \mathbb{N}; \ v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$= \frac{u_n \cdot u_{n+2} - (u_{n+1})^2}{u_n \cdot u_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{u_n \cdot u_{n+1}}$

لدينا حسب السؤال 2 أ: $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \geq n$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \geq n+1$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)}$

إذن لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}, \ -1 \leq (-1)^n \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; \ \frac{-1}{u_n u_{n+1}} \leq \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{u_n u_{n+1}}$

(لأن: $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n > 0$)

ولدينا: $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ و

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{-1}{u_n u_{n-1}} \geq \frac{-1}{n(n+1)}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{-1}{n(n+1)} \leq \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)}$

وبما أن $\lim \frac{-1}{n(n+1)} = \lim \frac{1}{n(n+1)} = 0$

فإن $\lim (v_{n+1} - v_n) = 0$

ب) $\forall n \in \mathbb{N}; \ w_n = v_{2n-1}, \ t_n = v_{2n}$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+1} - w_n = v_{2n+1} - v_{2n-1}$

$$= (v_{2n+1} - v_{2n}) + (v_{2n} - v_{2n-1})$$
$$= \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}} + \frac{(-1)^{2n-1}}{u_{2n} \cdot u_{2n-1}}$$
$$= \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}} + \frac{-1}{u_{2n} \cdot u_{2n-1}} = \frac{u_{2n}(u_{2n-1} - u_{2n+1})}{(u_{2n})^2 (u_{2n+1})(u_{2n-1})} < 0$$

لأن (u_n) متتالية تزايدية

إذن (w_n) متتالية تناقصية.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} - t_n = v_{2n+2} - v_{2n}$$
$$= (v_{2n+2} - v_{2n+1}) + (v_{2n+1} - v_{2n})$$
$$= \frac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+1} \cdot u_{2n+2}} + \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}}$$
$$= \frac{-1}{u_{2n+1} \cdot u_{2n+2}} + \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n+1}} = \frac{u_{2n+1}(u_{2n+2} - u_{2n})}{(u_{2n+1})^2 \cdot u_{2n} \cdot u_{2n+2}} > 0$$

إذن (t_n) متتالية تزايدية

ج) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n - t_n = -(v_{2n} - v_{2n-1})$
$$= -\frac{(-1)^{2n-1}}{u_{2n} \cdot u_{2n-1}} = \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n-1}} > 0$$

إذن، $\forall n \in \mathbb{N};\ w_n > t_n$

إذن. (t_n) متتالية تزايدية ومكبورة بحدود (w_n). إذن (t_n) متتالية متقاربة و (w_n) متتالية تناقصية ومصغورة بحدود (t_n). إذن (w_n) متتالية متقاربة

4) $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n - t_n = \dfrac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n-1}}$

ولدينا حسب السؤال ② ل

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < \frac{1}{u_{2n} \cdot u_{2n-1}} \leq \frac{1}{2n(2n-1)}$$

وبما أن: $\lim \dfrac{1}{2n(2n-1)} = 0$

فإنه حسب مصادق التقارب. $\lim (w_n - t_n) = 0$

إذن $\lim w_n = \lim t_n$

ب) بما أن: $\lim w_n = \lim t_n = \ell$

فإن $\lim v_{2n} = \lim v_{2n+1} = \ell$

إذن (v_n) متتالية متقاربة و $\lim v_n = \ell$

ج) لدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{u_{n-1}}{u_n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 + \dfrac{1}{v_{n-1}}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \cdot v_{n-1} - v_{n-1} - 1 = 0$

وبما أن: $\lim v_n = \lim v_{n-1} = \ell$

فإن $\lim (v_n^2 - v_n - 1) = 0$

ولدينا. $\ell^2 - \ell - 1 = 0$

إذن $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

تمرين رقم 51

$u_0 = 3$

$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$

1) لدينا $0 \leq u_0 \leq 4$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 4$

نبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

لدينا حسب افتراض الترجع : $0 \leq u_n \leq 4$

$\Leftrightarrow 12 \leq u_n + 12 \leq 16$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 4$

بما أن. $0 < 2\sqrt{3}$ فإن $0 \leq u_{n+1} \leq 4$

إذن $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leq u_n \leq 4$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 12} - u_n$
$$= \frac{-u_n^2 + u_n + 12}{\sqrt{u_n + 12} + u_n}$$
$$= \frac{-(u_n - 4)(u_n + 3)}{\sqrt{u_n + 12} + u_n} \geq 0$$

(لأن: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 4$)

إذن (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 4

إذن (u_n) متقاربة

3) أ) بما أن: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N};\ 4 - u_n \geq 0$

إذن : $|u_{n+1} - 4| = 4 - u_{n+1}$ و $|u_n - 4| = 4 - u_n$

نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(4 - u_n)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 4 - u_{n+1} - \frac{1}{4}(4 - u_n) =$
$$= 3 + \frac{u_n}{4} - \sqrt{u_n + 12}$$
$$= \frac{1}{4}\left(12 + u_n - 4\sqrt{u_n + 12}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{12 + u_n}}{4}\left(\sqrt{12 + u_n} - 4\right)$$
$$= \frac{\sqrt{12 + u_n}}{4(\sqrt{12 + u_n} + 4)}(12 + u_n - 16)$$
$$= \frac{\sqrt{12 + u_n}}{4(\sqrt{12 + u_n} + 4)}(u_n - 4) \leq 0$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4}|u_n - 4|$

ب) نبين أن. $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 4| \leq \dfrac{1}{4^n}$

لدينا : $|u_0 - 4| \leq \dfrac{1}{4^0}$

نفترض أن. $|u_n - 4| \leq \dfrac{1}{4^n}$

نبرهن أن. $|u_{n+1} - 4| \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}$

لدينا حسب افتراض الترجع: $|u_n - 4| \leq \dfrac{1}{4^n}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{4}|u_n - 4| \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}$

وحسب السؤال السابق لدينا.

$|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{4}|u_n - 4|$

إذن $|u_{n+1} - 4| \leq \dfrac{1}{4^{n+1}}$

وبما أن: $\lim \frac{1}{4^n} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim (u_n - 4) = 0$

إذن $\lim u_n = 4$

تمرين رقم 52

$u_0 = \frac{3}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n}$

1) لدينا $\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 2$

نفرض أن $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

نبرهن أن $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا حسب افتراض الترجع: $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq 1 + \frac{1}{u_n} \leq \frac{5}{3}$

وبما أن $\frac{5}{3} \leq 2$ فإن $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 2$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [\frac{3}{2}, 2]$ بما يلي

$f(x) = \frac{x+1}{x}$

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5,\quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in I,\quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \notin I$

إذن $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3) مبرهنة التزايدات المنتهية

إذا كانت f دالة متصلة على المجال $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$ فإنه يوجد c من المجال $]a,b[$ بحيث

$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

لدينا f دالة متصلة على $[\frac{3}{2}, 2]$ وقابلة للاشتقاق على $]\frac{3}{2}, 2[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد c_n من $]\frac{3}{2}, 2[$ حيث

$|f(u_n) - \ell| = |u_n - \ell|\,|f'(c_n)|$

وبما أن $|f'(c_n)| \leq |f'(\frac{3}{2})|$

يعني $|f'(c_n)| \leq \frac{4}{9}$

فإن: $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}|u_n - \ell|$

وباستعمال البرهان بالترجع نبين أن

$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq (\frac{4}{9})^n |u_0 - \ell|$

وبما أن: $\lim (\frac{4}{9})^n = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب: $\lim (u_n - \ell) = 0$

إذن $\lim u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

تمرين رقم 53

1) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{3-n}$

لدينا: $u_0 = 8 = 2^{3-0}$

نفترض أن $u_n = 2^{3-n}$

نبين أن: $u_{n+1} = 2^{3-(n+1)}$

بما أن طول ضلع المربع c_n هو: $u_n = 2^{3-n}$

فإن طول ضلع المربع c_{n+1} المنشأ خارج المربع c_n هو:

$u_{n+1} = \frac{2^{3-n}}{2} = 2^{3-(n+1)}$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n = 2^{3-n}$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = (2^{3-n})^2$

2) $AA_1 = u_0 = 8$

$AA_2 = u_0 + u_1 = 12$

$AA_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 14$

3) $AA_n = u_0 + u_1 + \text{———} + u_{n-1}$

$= 2^3 + 2^2 + \text{———} + 2^{3-(n-1)}$

$= 8\,\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 16\left(1 - (\frac{1}{2})^n\right)$

4) بما أن $\lim (\frac{1}{2})^n = 0$ فإن: $\lim AA_n = 16$

تمرين رقم 54

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = u_{n+1} - u_n$

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$

$= 3u_{n+1} - 2u_n - u_{n+1}$

$= 2(u_{n+1} - u_n) = 2v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = v_0 + v_1 + \text{———} + v_{n-1}$

أ) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1 + 2 + 2^2 + \text{———}\ 2^{n-1}$

$= \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \text{———} + v_{n-1}$

$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \text{———} + (u_n - u_{n-1})$

$= u_n - u_0 = u_n$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n - 1$

ب) $\lim u_n = +\infty$

تمرين رقم 55

$u_1 = \frac{1}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_{n+1} = \frac{n u_n}{n+1} + \frac{1}{n+1}$

1) أ) لدينا: $u_1 < 1$

نفرض أن. $u_n < 1$

نبرهن أن $u_{n+1} < 1$

$u_{n+1} - 1 = \frac{n u_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} - 1$

$= \frac{n u_n + 1 - n - 1}{n+1} = \frac{n(u_n - 1)}{n+1} < 0$

لأنه حسب افتراض الترجع لدينا $u_n < 1$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n < 1$

ب) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{n u_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n$

$= \frac{(n-(n+1))u_n + 1}{n+1} = -\frac{u_n - 1}{n+1} > 0$

لأنه حسب السؤال السابق $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < 1$

إذن (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1

إذن (u_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

2) أ) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = (n+1)u_{n+1} - n u_n$

$= n u_n + 1 - n u_n = 1$

اذن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول $v_1 = \frac{1}{2}$

ب) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_1 + (n-1)$

$= n - \frac{1}{2}$

اذن: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \frac{1}{n} v_n = 1 - \frac{1}{2n}$

اذن $\lim u_n = 1$

3) لدينا $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \frac{n u_n + 1}{n+1}$

اذا كان $u_n = 1$ فان $u_{n+1} = 1$

ومنه اذا كان $u_1 = 1$

فان $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$

اذن اذا كان $u_1 = 1$ فان (u_n) متتالية ثابتة.

تمرين رقم 56

$\forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1) $\forall n \in \mathbb{N};\ \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1} = \frac{2(a+b)n + (a-b)}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

اذن $\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

2) $\forall n \in \mathbb{N};\ S_n = u_0 + u_1 + \text{———} + u_n$

لدينا:

$u_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$

$|\quad\quad |\quad\quad |$

$u_{n-2} = \frac{1}{2(2n-5)} - \frac{1}{2(2n-3)}$

$u_{n-1} = \frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)}$

$u_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$

$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$

اذن $\lim S_n = -\frac{1}{2}$

تمرين رقم 57

$\begin{cases} u_0 = -1,\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$

1) $u_3 = 1 \quad ; \quad u_2 = \frac{5}{4}$

2) $\forall n \in \mathbb{N};\ a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

$\forall n \in \mathbb{N};\ b_n = 2^n u_n$

أ) $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$

$= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$

اذن (a_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a_0 = \frac{3}{2}$

اذن لدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب) $\forall n \in \mathbb{N};\ b_{n+1} - b_n = 2^{n+1}u_{n+1} - 2^n u_n$

$= 2^{n+1}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) = 2^{n+1}a_n$

$= 2^{n+1}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$

اذن (b_n) متتالية حسابية اساسها 3 وحدها الأول $b_0 = -1$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = -1 + 3n$

ج) لدينا: $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n = \frac{b_n}{2^n}$

$= \frac{-1+3n}{2^n} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{n}{2^n}\right)$

3) أ) لدينا: $\left(\frac{3}{2}\right)^0 \geq 0$

ولدينا: $\left(\frac{3}{2}\right)^1 \geq 1$

ونبرهن بالترجع أن: $\forall n \geq 2;\ \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$

لدينا: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \geq 2$

نفترض أن $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$

نبرهن أن: $\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq n+1$

لدينا حسب افتراض الترجع: $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \geq \frac{3}{2}n \geq n+1$

لأن: $\frac{3}{2}n - n - 1 = \frac{n-2}{2} \geq 0$

اذن: $\forall n \in \mathbb{N};\ \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$

ب) لدينا: $\forall n \in \mathbb{N};\ 0 \leq n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{n}{2^n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

بما أن $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ فانه حسب مصاديق التقارب

$\lim \frac{n}{2^n} = 0$

اذن: $\lim u_n = \lim\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) = 0$

تمرين رقم 58

$u_0 = 0$

$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3$

1) $u_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \quad ; \quad u_1 = \frac{1}{8}$

2) لدينا $0 \leq u_0 < 1$

نفرض ان $0 \leq u_n < 1$

نبرهن ان $0 \leq u_{n+1} < 1$

لدينا حسب افتراض الترجع $0 \leq u_n < 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt[3]{u_n} < 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \sqrt[3]{u_n} < 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq \left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3 < 8$

$\Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt[3]{u_n}\right)^3 < 1$

اذن $0 \leq u_{n+1} < 1$

اذن: $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$

3) $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}-U_n=\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^3-U_n$

$=\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{U_n}\right)^3$

$=\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}-\sqrt[3]{U_n}\right)\left(\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^2+\sqrt[3]{U_n}\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)+\sqrt[3]{U_n^2}\right)$

$=\frac{1-\sqrt[3]{U_n}}{2}\left(\left(\frac{1-\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^2+\sqrt[3]{U_n}\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)+\sqrt[3]{U_n^2}\right)$

$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^2+\sqrt[3]{U_n}\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)+\sqrt[3]{U_n^2}}{2\left(1+\sqrt[3]{U_n}+\sqrt[3]{U_n^2}\right)}(1+U_n)>0$

إذن (U_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1

4) إذن (U_n) متتالية متقاربة

5) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\sqrt[3]{U_n}-1$

أ) $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=\sqrt[3]{U_{n+1}}-1$

$=\sqrt[3]{\left(\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^3}-1=\frac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}-1$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{U_n}-1\right)=\frac{1}{2}a_n$

إذن (a_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $a_0=-1$

ب) لدينا: $\forall n\in\mathbb{N};\ a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ \sqrt[3]{U_n}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ U_n=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3$

وبما أن $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن $\lim U_n=1$

ج) $\forall n\in\mathbb{N};\ S_n=\sqrt[3]{U_0}+\sqrt[3]{U_1}+\cdots+\sqrt[3]{U_n}$

$=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^0\right)+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)\right)+\cdots+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$=(n+1)-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$=(n+1)-\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$

$=(n+1)-2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

إذن $\lim S_n=+\infty$

تمرين رقم 59

$f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$

1) $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{3+x^2}}>0$

إذن f دالة تزايدية على $\mathbb{R}^+$

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x)=x \Leftrightarrow \sqrt{3+x^2}=2x$

$\Leftrightarrow x^2=1$

$\Leftrightarrow x=1$ أو $x=-1$

$S=\{1,-1\}$

3) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,1[$ بما يلي:

$g(x)=f(x)-x$

لدينا: $\forall x\in[0,1[,\ g'(x)=f'(x)-1$

$=\frac{x-2\sqrt{3+x^2}}{2\sqrt{3+x^2}}$

$=\frac{-(12+3x^2)}{2\sqrt{3+x^2}\left(x+2\sqrt{3+x^2}\right)}<0$

x	0		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-1$	$\searrow$	0

بما أن القيمة الدنوية للدالة g على المجال $[0,1[$ هي 0

فإن $\forall x\in[0,1[;\ g(x)>0$

$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1[,\ f(x)>0$

II
$\begin{cases} U_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N};\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

1) لدينا $0\leq U_0<1$

نفترض أن $0\leq U_n<1$

نبرهن أن $0\leq U_{n+1}<1$

لدينا حسب افتراض الترجع: $0\leq U_n<1$

وبما أن f دالة تزايدية على المجال $[0,1[$

فإن $f(0)\leq f(U_n)<f(1)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\leq U_{n+1}<1$

إذن $0\leq U_{n+1}<1$

إذن $\forall n\in\mathbb{N};\ 0\leq U_n<1$

2) بما أن: $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n\in[0,1[$

فإن $\forall n\in\mathbb{N},\ f(U_n)>U_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}>U_n$

إذن (U_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1

إذن (U_n) متقاربة نهايتها ℓ

نحدد $\lim U_n$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0,1[$

لدينا * f دالة متصلة على I

* $f(I)\subset I$
* $\forall n\in\mathbb{N};\ U_n\in I$
* (U_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

إذن ℓ هو حل المعادلة $f(x)=x$ في المجال I

إذن $\lim U_n=1$

III
$\forall n\in\mathbb{N};\ V_n=U_n^2-1$

1) $\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1}=(U_{n+1})^2-1$

$=\frac{1}{4}\left(3+U_n^2\right)-1$

$=\frac{1}{4}\left(U_n^2-1\right)=\frac{1}{4}V_n$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $V_0=-1$

2) لدينا $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n=-\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=U_n^2-1$

$\forall n\in\mathbb{N};\ U_n^2=1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ U_n=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

3) بما أن $\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ (لأن $-1<\frac{1}{4}<1$)

فإن $\lim U_n=1$

تمرين رقم 60

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{3}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \ v_n = \frac{3}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-1} \end{cases}$$

$\forall n\in\mathbb{N}, \ a_n = u_n + v_n$ و $\forall n\in\mathbb{N}, \ b_n = u_n - v_n$

1) $\forall n\in\mathbb{N}, \ b_n = u_n - v_n$

$= \frac{3}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1} - \frac{3}{2}v_{n-1} - \frac{1}{2}u_{n-1}$

$= u_{n-1} - v_{n-1} = b_{n-1}$

اذن $\forall n\in\mathbb{N}, \ b_n = b_{n-1} = b_0 = -1$

2) أ) $\forall n\in\mathbb{N}, \ a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$

$= \frac{3}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}v_{n-1} + \frac{3}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-1}$

$= 2(u_{n-1} + v_{n-1}) = 2a_n$

اذن (a_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول $a_0 = 3$

ب) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}, \ a_n = 3\cdot 2^n$

اذن $\lim a_n = +\infty$ ولدينا (a_n) غير متقاربة

3) أ) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_n + v_n = 3\cdot 2^n \\ u_n - v_n = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{1}{2}(3\cdot 2^n - 1) \\ v_n = \frac{1}{2}(3\cdot 2^n + 1) \end{cases}$

ج) $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$

تمرين رقم 61

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$$

1) أ) $x\in D_f \Leftrightarrow x \geq 0$ و $\sqrt{x} - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x \geq 0$ و $x \neq 1$

اذن $D_f = [0,1[\cup]1, +\infty[$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = -1$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0

ج) $\forall x\in D_f; \ f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x}-1}\right)' =$

$= \frac{\sqrt{x} - 1 - x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	-1	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

د) $\forall x\in D_f, \ f(x) - x = \frac{x}{\sqrt{x}-1} - x$

$= \frac{x - x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} - 1} = \frac{x(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x} - 1}$

x	0		1		4		$+\infty$
$2-\sqrt{x}$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

2) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ) لدينا $u_0 \geq 4$

نفترض أن $u_n \geq 4$

نبرهن أن $u_{n+1} \geq 4$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n \geq 4$

بما أن f دالة تزايدية على المجال $[4, +\infty[$ فإن

$f(u_n) \geq f(4) \Leftrightarrow u_{n+1} \geq 4$

اذن: $\forall n\in\mathbb{N}, \ u_n \geq 4$

ب) لدينا $\forall x\in[4,+\infty[, \ f(x) \leq x$

فإن $\forall n\in\mathbb{N}, \ u_n \in [4, +\infty[$

فإن $f(u_n) \leq u_n$

اذن $\forall n\in\mathbb{N}, \ u_{n+1} \leq u_n$

اذن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 4

ج) اذن (u_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

نعتبر الدالة f معرفة على المجال $I = [4, +\infty[$

لدينا * f دالة متصلة على I

* $f(I) = I$

* $\forall n\in\mathbb{N}, \ u_n \in I$

* (u_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

اذن ℓ هو حل للمعادلة $f(x) = x$ في المجال I

$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-1} = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0 \notin I, \ x_2 = 4 \in I$

اذن $\lim u_n = 4$

تمرين رقم 62

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}; \ u_{n+1} = 1 + 4u_n + \sqrt{1+4u_n} \end{cases}$$

1) أ) لدينا $u_0 > 0$

نفترض أن $u_n > 0$

نبرهن أن $u_{n+1} > 0$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n > 0$

اذن $u_{n+1} = 1 + 4u_n + \sqrt{1+4u_n} > 0$

اذن $\forall n\in\mathbb{N}, \ u_n > 0$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n = (1 + 3u_n + \sqrt{1+4u_n}) > 0$

اذن (u_n) متتالية تزايدية قطعا

2) $\forall n\in\mathbb{N}, \ v_n = \sqrt{1+4u_n}$

أ) $\forall n\in\mathbb{N}; \ v_n = \sqrt{1+4u_n}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}; \ v_n^2 = 1 + 4u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}; \ u_n = \frac{1}{4}(v_n^2 - 1)$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}; \ v_{n+1} = \sqrt{1+4u_{n+1}} =$

$= \sqrt{1+4(1+4u_n+\sqrt{1+4u_n})}$

$= \sqrt{1+4(v_n^2+v_n)}$

$= \sqrt{4v_n^2+4v_n+1} = \sqrt{(2v_n+1)^2}$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}^2 = (2v_n+1)^2$

$= 4(v_n+\frac{1}{2})^2$

وبما أن $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$

فإن $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n>1>\frac{1}{2}$

إذن $v_{n+1} = 2v_n+1$

3) $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=v_n+1$

أ) $\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}=v_{n+1}+1 =$

$= 2v_n+1+1 = 2(v_n+1) = 2w_n$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأول: $w_0=4$

ب) $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=2^{n+2}$

4) أ) $\forall n\in\mathbb{N},\ w_n=v_n+1$

$= \sqrt{1+4u_n}+1$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ (w_n-1)^2=1+4u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ u_n=\frac{1}{4}(w_n^2-2w_n)$

ب) $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n=\frac{1}{4}(w_n^2-2w_n)$

$= \frac{1}{4}((2^{n+2})^2-2.2^{n+2})$

$= 2^{2n+2}-2^{n+1}$

$= 2^{n+1}(2^{n+1}-1)$

بما أن $\lim 2^{n+1}=+\infty$

فإن $\lim u_n=+\infty$

ج) $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$

$=(2^2+2^4+2^6+\dots+2^{2n+2})-(2+2^2+2^3+\dots+2^{n+1})$

$= 2^2\frac{1-(2^2)^{n+1}}{1-2^2} - 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$

$= -\frac{4}{3}(1-2^{2n+2})+2(1-2^{n+1})$

تمرين رقم 63

$$\begin{cases} u_1=\frac{3}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n}) \end{cases}$$

1) لدينا $u_1>0$

نفترض أن $u_n>0$

نبرهن أن $u_{n+1}>0$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n>0$

إذن $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})>0$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}(u_n+\frac{2}{u_n})-\sqrt{2}$

$= \frac{1}{2}\frac{u_n^2-2\sqrt{2}u_n+2}{u_n} = \frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{u_n}$

وبما أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$

فإن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n-\sqrt{2}>0$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>\sqrt{2}$

3) لدينا $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{u_n}$

$= \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})\frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n}$

$= \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})(1-\frac{\sqrt{2}}{u_n})$

$= \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n})$

$= \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{u_n}$

$= \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

بما أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}}<0$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})+(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{\sqrt{2}})<\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})$

نبرهن أن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2^n}$

لدينا $u_1-\sqrt{2}<\frac{1}{2^1}$

نفترض أن $u_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2^n}$

نبرهن أن $u_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2^{n+1}}$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2^n}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})<\frac{1}{2^{n+1}}$

ولدينا حسب السؤال السابق.

$u_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{2})$

إذن $u_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{1}{2^{n+1}}$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<u_n-\sqrt{2}<\frac{1}{2^n}$

وبما أن $\lim\frac{1}{2^n}=0$ فإنه حسب مصاديق التقارب

$\lim(u_n-\sqrt{2})=0$

إذن $\lim u_n=\sqrt{2}$

تمرين رقم 64

1) $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

نحدد a وb بحيث: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}$$

اذن $\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

ومنه $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

اذن $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

وبما أن $\lim \frac{1}{n+1} = 0$

فإن $\lim u_n = 1$

2) $V_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

نحدد a و b و c بحيث $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$
$$= \frac{a(k+1)(k+2) + b\,k(k+2) + c\,k(k+1)}{k(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}$$

$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 3a+2b+c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1/2}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1/2}{k+2}$$

$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}$

$\frac{1}{3.4.5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$

$\frac{1}{4.5.6} = \frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12}$

$\vdots$

$\frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{2n}$

$\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$

$$V_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

فإن $\lim \frac{1}{2(n+1)} = \lim \frac{1}{2(n+2)} = 0$

وأن $\lim V_n = \frac{1}{4}$

تمرين (رقم 65)

$\forall n \geq 2, \quad u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

1) $\lim u_n = +\infty$

2) $\forall n \geq 2; \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$

اذن $(u_n)_{n\geq 2}$ متتالية تزايدية

3) $\forall p \geq 2, \quad \sqrt{p} - \sqrt{p-1} < \frac{1}{2\sqrt{p-1}}$

$\iff \forall p \geq 2, \quad \frac{1}{\sqrt{p-1}} > 2\sqrt{p} - 2\sqrt{p-1}$

اذن $1 = \frac{1}{\sqrt{2-1}} > 2\sqrt{2} - 2$

$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$\vdots$

$\frac{1}{\sqrt{n-1}} > 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$

اذن $\forall n \geq 2; \quad u_n > 2(\sqrt{n} - 1)$

4) بما أن $\lim(2(\sqrt{n}-1)) = +\infty$ فإن $\lim u_n = +\infty$

تمرين (رقم 66)

$u_0 = 3, \quad v_0 = 5$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

1) نبين أن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ و $v_n > 0$

لدينا $u_0 > 0$ و $v_0 > 0$

نفترض أن $u_n > 0$ و $v_n > 0$

نبرهن أن $u_{n+1} > 0$ و $v_{n+1} > 0$

لدينا حسب افتراض الترجع $u_n > 0$ و $v_n > 0$

إذن: $u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} > 0$ و $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} > 0$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ و $v_n > 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} - \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$

$= \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{2(u_n+v_n)} = \frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} \geq 0$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n > u_n$

ندرس رتابة (u_n)

$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n} - u_n$

$= \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n+v_n} > 0$

اذن (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة ب v_n

ندرس رتابة (v_n)

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n$

$$= \frac{u_n - v_n}{2} < 0$$

اذن (v_n) متتالية تناقصية ومصغورة ب u_n

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = v_n - u_n$

أ) لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n > u_n$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \geq 0$

ولدينا من جهة أخرى $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - \frac{1}{2} w_n =$

$$= \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} - \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{-2u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \leq 0$$

اذن: $\forall n \in \mathbb{N} ; \; 0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n$

ب) لدينا $0 \leq w_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

نفترض أن . $0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

نبرهن أن $0 \leq w_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

لدينا حسب افتراض الترجع: $0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$\Leftrightarrow \; 0 \leq \frac{1}{2} w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

وحسب السؤال السابق $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

اذن: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ج) لدينا. $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

فانه حسب مصاديق التقارب (w_n) متتالية متقاربة

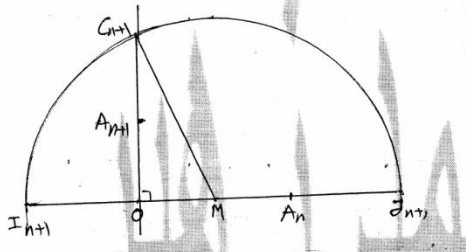
ولدينا. $\lim w_n = 0$

4) لدينا حسب السؤال ② (u_n) و (v_n) متتاليات متقاربتان

ولدينا. $\lim w_n = \lim (v_n - u_n) = \lim v_n - \lim u_n = 0$

اذن $\lim u_n = \lim v_n$

تمرين رقم 67



نعتبر القطعة $[O, A_n]$ طولها u_n

نمدد كل طرف من القطعة $[O, A_n]$ بقطعتين طولهما 1

وهما: $[O\, I_{n+1}]$ و $[A_n\, J_{n+1}]$ بـ O و A_n و I_{n+1} و J_{n+1} نقطا مستقيمية

العمودي على حامل القطعة $[O, A_n]$ المار من O يقطع نصف الدائرة التي أحد أقطارها $[I_{n+1}, J_{n+1}]$ في النقطة C_{n+1}

لتكن A_{n+1} منتصف $[O, C_{n+1}]$.

لدينا $OA_{n+1} = u_{n+1}$

لدينا $OM^2 + (OC_{n+1})^2 = (MC_{n+1})^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{2}\right)^2 + (2u_{n+1})^2 = \left(1 + \frac{u_n}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{2}\right)^2 + (2u_{n+1})^2 = 1 + u_n + \left(\frac{u_n}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (u_{n+1})^2 = \frac{1 + u_n}{4}$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{4}}$

ومنه لدينا $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{4}} \end{cases}$

2) أ) $u_0 = 1$

$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$u_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}}$

ب) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$

لدينا. $u_1 < u_0$

نفرض أن $u_n < u_{n-1}$

نبرهن أن $u_{n+1} < u_n$

لدينا حسب افتراض الترجع:

$u_n < u_{n-1}$

$\Leftrightarrow \; 1 + u_n < 1 + u_{n-1}$

$\Leftrightarrow \; \frac{1+u_n}{4} < \frac{1+u_{n-1}}{4}$

$\Leftrightarrow \; \sqrt{\frac{1+u_n}{4}} < \sqrt{\frac{1+u_{n-1}}{4}}$

$\Leftrightarrow \; u_{n+1} < u_n$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} < u_n$

اذن (u_n) متتالية تناقصية

نبين أن $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n > 0$

لدينا. $u_0 > 0$

نفرض أن $u_n > 0$

نبرهن أن $u_{n+1} > 0$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n > 0$

وحيث أن. $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{4}} > 0$

فإن $u_{n+1} > 0$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n > 0$

اذن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

اذن (u_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

4) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0,1]$ كمايلي

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{4}}$$

لدينا. $\forall x \in [0,1], \; f'(x) = \frac{1}{8\sqrt{\frac{1+x}{4}}} > 0$

اذن f دالة تزايدية قطعا على المجال I

ومنه . $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \subset I$

بما أن * f دالة متصلة على I

* $f(I) \subset I$

* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I$

* (u_n) متتالية متقاربة نهايتها l

فإن l هو حل المعادلة $f(x)=x$ في المجال I.

$f(x) = x \iff \sqrt{\frac{1+x}{4}} = x$

$\iff 1 + x = 4x^2$

$\iff 4x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 17 \quad , \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{8} \notin I$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \in I$

إذن : $\lim u_n = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$

تمرين رقم 68

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \\ \forall n \in \mathbb{N}; \ u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}} \end{cases}$$

1) أ) لدينا $u_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

نفترض أن $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

نبين أن $u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

لدينا حسب افتراض الترجع : $u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

$\iff u_n^3 > \frac{1}{7} \iff 1 + u_n^3 > \frac{8}{7}$

$\iff \frac{1+u_n^3}{8} > \frac{1}{7}$

$\iff \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

إذن $u_{n+1} > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}; \ u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

ب) $\forall n \in \mathbb{N}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}}}{u_n} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8u_n^3}}$

وبما أن $\frac{1+u_n^3}{8u_n^3} - 1 = \frac{1-7u_n^3}{8u_n^3} = \frac{7}{8u_n^3}\left(\frac{1}{7} - u_n^3\right)$

فإن $\forall n \in \mathbb{N}; \ \frac{1+u_n^3}{8u_n^3} < 1$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8u_n^3}} < 1$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}; \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$

ج) حسب السؤال السابق $\forall n \in \mathbb{N}: \ u_{n+1} - u_n < 0$

إذن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$

إذن (u_n) متتالية متقاربة

3) $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_{n+1} = \frac{7}{8}u_{n+1}^3 - \frac{1}{8}$

$= \frac{7}{8} \cdot \frac{1+u_n^3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left(\frac{7+7u_n^3}{8} - 1\right)$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{8}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{8}$

4) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$

$= \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}; \quad \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1}$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n^3 = \frac{1}{7}\left(\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1\right)$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = \sqrt[3]{\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^n + 1}$

بما أن $\lim \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$

فإن $\lim u_n = 1$

4 الأعداد العقدية (الجزء الأول)

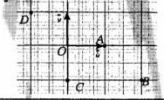
1

مثل في المستوى العقدي النقط A و B و C و D ذات الألحاق z_1 و z_2 و z_3 و z_4 حيث:

$z_1=4-3i$ ، $z_2=-5i$ ، $z_3=\frac{1}{2}$ و $z_4=\frac{3}{2}+i$

2

حدد لحق كل من النقط A و B و C و D الواردة في التمثيل أسفله



3

نعتبر النقطتين A و B و z_A و z_B لحقيهما في المستوى العقدي بحيث: $z_A=2-i$ و $z_B=3+4i$.

1) حدد z_I، لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

2) حدد لحق النقطة C بحيث يكون الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

4

نعتبر النقط $A(1;-3)$ و $B(4;5)$ و $C(-3;2)$

1- أ) حدد لحق كل من النقط A و B و C.

ب) حدد لحق كل من المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$.

2- نعتبر النقطتين D و E بحيث:

$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}$.

حدد لحق كل من النقطتين D و E.

5

اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

1) $5+(3-i)$ (2 $1+i(2+i)$ (3 $7(i-2)$ (4 $2i(1-i)+3i$

6

اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

1) $(1+2i)^2$ (2 $(1+2i)(7-4i)$

3) $(\sqrt{3}-i)^2$ (4 $2i(1+3i)^2$

7

اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

1) $(1-i)^3$ (2 $(1+2i)^3$ (3 $(i)^7$ (4 $(1+i)^4$

8

اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

1) $\frac{4+i}{i}$ (2 $\frac{2}{\sqrt{3}+i}$ (3 $-\frac{1}{7i}$

4) $\frac{4-i}{3+5i}$ (5 $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ (6 $\frac{(1-2i)^2}{(3+i)^2}$

9

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1) $2iz+3=z-i$ (2 $3z(z-i)=iz$

3) $2z+5-iz=2i-3z+4iz$ (4 $\frac{iz+3}{z-1}=-4i$

10

حل في المجموعة $\mathbb{C}$، النظمتين التاليتين ذات المجهولين z_1 و z_2:

1) $\begin{cases}2z_1-z_2=i\\2z_1-3iz_2=17\end{cases}$ (2 $\begin{cases}z_1-z_2=i\\iz_1+z_2=1\end{cases}$

11

ليكن $z=2-3i$ و $z'=1+4i$

اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية:

1) $z+z'$ و $z\times z'$ و $\frac{1}{z}$ و z^2 (2 $2iz+4z'$

3) $(z-z')^3$ (4 $\frac{z+2i}{z-1}$

12

حدد العددين الحقيقيين x و y بحيث يكون لدينا:

1) $4x+y+i(x-2y)=5-i$ (2 $2y+i(x-y+5)=4+7i$

13

حدد قيمة (أو قيم) العدد الحقيقي x التي من أجلها يكون العدد العقدي $z=x+3+i(x^2-4x)$

1) عددا حقيقيا.

2) عددا تخيليا صرفا.

3) يساوي العدد العقدي $4-3i$.

14

هل توجد قيمة (أو قيم) للعدد الحقيقي x التي من أجلها يكون العدد العقدي: $z=(x^2+x-2)+i(x^2-1)$

1) $z=0$؟ (2 $Re(z)=4$؟ (3 $Im(z)=-5$؟

15

لكل عدد عقدي z غير منعدم، نضع: $Z=\frac{1+3i}{z}$

1) نضع: $z=x+iy$ مع $(x;y)\in \mathrm{IR}^2$ و $(x;y)\neq(0;0)$.

حدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة x و y.

2) حدد ومثل، في المستوى العقدي، مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا.

16

لكل عدد عقدي z يخالف العدد1، نضع: $Z=\frac{z-2i}{z-1}$

1) نضع $z=x+iy$، مع $(x;y)\in \mathrm{IR}^2$

حدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة x و y.

2) حدد ومثل، في المستوى العقدي، مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا حقيقيا.

3) حدد ومثل، في المستوى العقدي، مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا.

17

حدد، بطريقتين مختلفتين، الشكل الجبري لمرافق العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية:

1) $z=(1-i)(5+2i)$ (2 $z=(3-2i)^2$

3) $z=\frac{3+4i}{2+i}$ (4 $z=\frac{(3+i)(4-i)}{2+3i}$

18

ليكن z عددا غير منعدم.

159

بسط التعبير التالي: $\overline{\left(\frac{iz+1}{z}\right)}-\frac{\overline{1-z}}{\bar{z}}$

19

نضع: $z_1=\frac{1-i}{3+5i}$ و $z_2=\frac{1+i}{3-5i}$

بدون حساب z_1+z_2 و z_1-z_2

بَيّنْ أن z_1+z_2 عدد حقيقي، وأن z_1-z_2 عدد تخيلي صرف

20

نضع $z=x+iy$ (x و y عددان حقيقيان)

1) حدد الشكل الجبري للعدد العقدي $5\bar{z}+3iz$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $5\bar{z}+3iz=2+i$

21

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

1) $2\bar{z}=5-2i$ (2 $(3+i)\bar{z}-5+7i=0$

22

لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ نضع: $f(z)=z^2+2z-4$

1) بَيّنْ أن لكل z من $\mathbb{C}$ لدينا: $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$

2) احسب $f(2-i)$ ثم استنتج $f(2+i)$

23

حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط M ذات اللحق z الذي يحقق:

$3z=4+\bar{z}$

24

حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط M ذات اللحق z الذي يحقق:

$z+5\bar{z}=6+8i$

25

حدد في المستوى العقدي مجموعة النقط M ذات اللحق z الذي يحقق:

$z\bar{z}=z+\bar{z}$

26

احسب معيار الأعداد العقدية التالية: -4 ، $\frac{1}{2}i$ ، $3+4i$ ، $-3i$

27

احسب معيار العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية:

1) $z=(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2$ (2 $z=(3-2i)^3$

3) $z=\frac{3-\sqrt{3}i}{5+5i}$ (4 $z=(1+i\sqrt{3})(4-i)$

5) $z=\left(\frac{1+i}{2i}\right)^6$

28

ليكن $z=a+ib$ عددا عقديا حيث a و b عددان حقيقيان.

احسب بدلالة a و b معيار الأعداد العقدية التالية:

1) z^2 (2 $z+2i$

3) $4z-3$ (4 $(z+2i)(4z-3)$

29

نعتبر في المستوى العقدي، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $a=-1+i$ و $b=2i$ و $c=2-2i$

1) احسب $|a-b|$ و $|a-c|$ و $|c-b|$

2) استنتج طبيعة المثلث ABC

30

حدد ثم مثل مجموعة النقط M ذات اللحق z الذي يحقق:

1) $|z-i|=4$ (2 $|z|=2\sqrt{3}$

3) $|z-2i|=|z+i|$ (4 $|z+1|=|z-2+3i|$

31

حدد ثم مثل مجموعة النقط M ذات اللحق z الذي يحقق:

1) $|\bar{z}+i|=4$ (2 $|z-3+4i|=|\bar{z}+2i|$

3) $|2iz^2|=8$ (4 $|z|=2$ و $Im(z)=1$

32

نعتبر في المستوى العقدي، النقطتين B و C ذات اللحقين: $z_B=2+2i\sqrt{3}$ و $z_C=2-2i\sqrt{3}$ على التوالي.

1) تحقق من أن النقطتين B و C تنتميان إلى الدائرة (C) التي مركزها O وشعاعها 4.

2) نعتبر النقطة A ذات اللحق z_A بحيث: $z_A=\frac{z_C-z_B}{2}$

احسب z_A ثم $|z_B-z_A|$ و $|z_C-z_A|$ و $|z_B-z_C|$

3) حدد طبيعة المثلث ABC.

33

ليكن a عددا عقديا غير منعدم.

حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=9a\bar{a}$

34

ليكن z عددا عقديا يخالف i.

بَيّنْ أن معيار العدد العقدي $\frac{z+i}{z-i}$ يساوي 1 إذا وفقط إذا كان z عددا حقيقيا.

35

ليكن z عددا عقديا يخالف 1 بحيث $|z|=1$

بَيّنْ أن: $i\frac{1+z}{1-z}\in \mathrm{IR}$

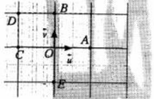
36

ليكن z عددا عقديا يخالف $-\frac{i}{2}$. نضع: $u=\frac{z+2i}{2z+i}$

بَيّنْ أن: $|z|=1 \Longleftrightarrow |u|=1$

37

انطلاقا من التمثيل أسفله حدد عمدة لحق كل من النقط A و B و C و D و E



38

أنشئ النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C و z_D تحقق:

1) $|z_A|=3$ و $\arg(z_A)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) $|z_B|=2$ و $\arg(z_B)\equiv\frac{7\pi}{6}[2\pi]$

3) $|z_C|=\frac{1}{2}$ و $\arg(z_C)\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

4) $|z_D|=4$ و $\arg(z_D)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

39

حدد عمدة للعدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية:

1) $z_1=1-i$ (3 $z_3=-1-i\sqrt{3}$

2) $z_2=-\sqrt{3}+i$ (4 $z_4=-1+i$

160

40

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية :

1) $z_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ 3) $z_3 = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$

2) $z_2 = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$ 4) $z_4 = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$

41

ليكن $z=2(-1+i)$ و $z' = -2 + 2i\sqrt{3}$. حدد على الشكل المثلثي

$z\times z'$ و $\frac{1}{z'}$ و $\frac{z}{z'}$ و $\frac{z'}{z}$ و z^2 و z^3 و z'^4

42

حدد عمدة للعدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية :

1) $z=(1-i)^2$ 4) $z = \frac{\sqrt{3}-i}{2i}$

2) $z = (1-i)(-\sqrt{3}+i)$ 5) $z = \frac{2}{-2+2i}$

3) $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ 6) $z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$

43

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية :

1) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ 2) $\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^8$

3) $(1-i)^3$ 4) $\frac{\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}}{-\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$

44

حدد الشكل المثلثي ثم الشكل الجبري للأعداد العقدية التالية :

1) $z = (\sqrt{3}-i)^7$ 3) $z = \frac{(1-i\sqrt{3})^{12}}{(1+i\sqrt{3})^7}$

2) $z = (2\sqrt{3}-2i)^4$ 4) $z=(1+i)^{2007}$

45

حدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية :

1) $z_1 = \tan\frac{\pi}{9} + i$ 2) $z_2 = 1 - i\tan\frac{\pi}{9}$

3) $z_3 = 1 + \cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}$

46

حدد الشكل المثلثي ثم الشكل الجبري للعدد العقدي z الذي يحقق الشرطين التاليين في كل حالة من الحالات التالية :

1) $|z| = 1$ و $\arg(iz) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

2) $|z| = 3$ و $\arg\left(\frac{z}{1-i}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

3) $|z| = 2$ و $\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{z}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

47

حدد ومثل مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $\arg(\bar{z}) \equiv \arg(-z)[2\pi]$

2) $\arg(\bar{z}+2) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ و $|z| = 2$

48

نعتبر النقط A و B و C ألحاقها على التوالي:

$a = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $b = -4 + 4i\sqrt{3}$ و $c = -1 + i\sqrt{3}$

1) حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{b-c}{a-c}$

2) استنتج أن المستقيمين (AC) و (BC) متعامدان.

49

نعتبر النقط A و B و C ألحاقها على التوالي:

$a = \sqrt{3} - i$ و $b = -\sqrt{3} + i$ و $c = 1 + i\sqrt{3}$

1) أنشئ النقط A و B و C.

2) حدد عمدة للعدد $\frac{b-c}{a-c}$

3) استنتج طبيعة المثلث ABC.

50

نعتبر النقط A و B و C و D و E ألحاقها على التوالي:

$a=3+2i$ و $b = -\frac{1}{2}$ و $c=-1-4i$ و $d = \frac{5}{2} - 2i$ و $e=1-i$

1) بَيِّنْ أن المثلث ABE قائم الزاوية في E.

2) بَيِّنْ أن الرباعي $ABCD$ معين.

52

ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

اكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية :

1) $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$ 2) $z_2 = 1 + i\tan\theta$

3) $z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ 4) $z_4 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$

53

ليكن $z_1=1+i$ و $z_2 = \sqrt{3} - i$

1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي

2) اكتب $z_1\times z_2$ على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي

3) استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

54

لكل عدد عقدي z، نضع : $Z = 5z^2 + 3z\bar{z} + 20i$

حدد مجموعة النقط $M(z)$ في الحالتين التاليتين:

1) Z عدد حقيقي   2) Z عدد تخيلي صرف

55

نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي:

$a = i\sqrt{3}$ و $b = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $c = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1– أ) حدد لحق كل من المتجهتين $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AB}$

ب) استنتج طبيعة الرباعي $OABC$

2– حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $|z - i\sqrt{3}| = \left|z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

56

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي، ألحاقها على التوالي هي: $z_A=-1-i$ و $z_B=2+i$ و $z_C=4i$

1) حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

2) استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في النقطة B.

3) حدد لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

57

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقاهما على التوالي هما: $z_A=-3-i$ و $z_B=1+3i$ و (C) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$.

1) حدد لحق النقطة Ω، مركز الدائرة (C).

2) حدد شعاع الدائرة (C).

3) استنتج أن لكل $M(z)$ من المستوى:

$M(z) \in (C) \Leftrightarrow |z + 1 - i| = 2\sqrt{2}$

58

نعتبر في المستوى العقدي، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $a=1$ و $b=5+2i$ و $c=-1+4i$

1) تحقق من أن: $\frac{c-1}{b-1} = i$

2) استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A.

3) حدد (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $|z - b| = |z - a|$

59

نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_C=8$

1) اكتب على الشكل المثلثي الأعداد z_A و z_B و z_C.

2) مثل النقط A و B و C.

3) نضع: $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

أ) حدد $|Z|$ و $\arg Z$ ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

60

ليكن z عددا عقديا بحيث $z=x+iy$ مع x و y عددان حقيقيان

نضع: $Z = (1-2i)z - \bar{z}$

1) حدد الجزء التخيلي والجزء الحقيقي للعدد العقدي Z.

2) حدد ثم أنشئ (E)، مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون Z عددا حقيقيا.

3) حدد ثم أنشئ (F)، مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا.

61

ليكن z عددا عقديا يخالف -1 و M صورته في المستوى العقدي.

نضع: $Z = \frac{1-2z}{iz+i}$

1) بوضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان، حدد $Re(Z)$ و $Im(Z)$ بدلالة x و y.

2) حدد ثم أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون Z عددا حقيقيا.

3) حدد ثم أنشئ مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون Z عددا تخيليا صرفا.

62

ليكن z عددا عقديا يخالف -1 و M صورته في المستوى العقدي.

نضع: $Z = \frac{z+2i}{z+1}$

1) نضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.

أ) حدد بدلالة x و y كلا من $Re(Z)$ و $Im(Z)$

ب) حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون Z عددا حقيقيا

ج) حدد مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون Z عددا تخيليا صرفا.

2) نعتبر في المستوى العقدي، النقطتين $A(-2i)$ و $B(-1)$

حدد هندسيا، (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون: $|Z| = 1$

63

نعتبر في المستوى العقدي، النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي: $z_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_2=-z_1$ و $z_3 = \sqrt{3} + 3i$ و $z_4 = \bar{z_3}$

1) احسب $\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}$ ثم استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية.

2) تحقق من أن: $\frac{z_3 - z_2}{z_3 + z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ثم حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}}\right)$

3) بَيِّنْ أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

64

نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $a=2i$ و $b = -\sqrt{3} - i$ و $c = \sqrt{3} - i$

1– أ) تحقق من أن النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها O وشعاعها 2.

ب) أنشئ الدائرة (Γ) والنقط A و B و C

2– أ) حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

ب) بَيِّنْ أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

65

1) نعتبر الأعداد العقدية z_0 و z_1 و z_2 بحيث :

$z_0=1-i$ و $z_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ و $z_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

أ) بَيِّنْ أن: $\frac{z_2}{z_0} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ وأن: $z_1 = i\bar{z_2}$

ب) حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{z_2}{z_0}$ ثم استنتج عمدة كل من العددين العقديين: z_2 و z_1

ج) تحقق من أن $z_2=z_1-z_0$

2) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي z_0 و z_1 و z_2.

أ) بَيِّنْ أن الرباعي $OABC$ معين.

ب) حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)$

66

ليكن z عددا عقديا، نعتبر في المستوى العقدي، النقط $M(z)$ و $M'(z+i)$ و $M''(iz)$

1–أ) حدد قيمة z التي من أجلها يكون: $M'=O$

ب) حدد قيمة z التي من أجلها يكون: $M''=O$

ج) حدد قيمة z التي من أجلها يكون: $M'=M''$

2) في هذا السؤال نفترض أن: $z \neq 0$ و $z \neq -i$

أ) بَيِّنْ أن النقط O و M' و M'' مستقيمية إذا وفقط إذا كان $\frac{z+i}{iz} \in \mathbb{R}^*$

ب) نضع : $z=x+iy$، حيث x و y عددان حقيقيان.

حدد الجزء التخيلي للعدد العقدي $\frac{z+i}{iz}$ بدلالة x و y

3) حدد (E) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون النقط O و M' و M'' مستقيمية.

67

ليكن a عددا عقديا غير منعدم. نضع: $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

نعتبر في المستوى العقدي النقط E و F و G التي ألحاقها على التوالي هي: a و ja و $\bar{j}a$ (تحقق من أن $j^3=1$ و $j^2 = \bar{j}$)

بَيِّنْ أن المثلث EFG متساوي الأضلاع.

68

في المتسوى العقدي نعتبر النقط التالية :

- النقطة A ذات اللحق $z_A=i$
- النقطة B ذات اللحق $z_B=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
- النقطة C ذات اللحق z_C، هي مماثلة النقطة B بالنسبة لمحور الأفاصيل.

1) مثل النقط A و B و C.

2- أ) حدد معيار وعمدة العدد العقدي: $Z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

ب) استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$، ثم طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن M نقطة من المستوى العقدي ذات اللحق z.

أ) حدد (D)، مجموعة النقط M التي تحقق: $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right|=1$ بطريقتين مختلفتين.

ب) مثل المجموعة (D).

69

نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي: $z_A=1+2i$ و $z_B=1+\sqrt{3}+i$ و $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$

1) مثل النقط A و B و C و D، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

2- أ) تحقق من أن: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=i\sqrt{3}$

ب) ماذا نستنتج بالنسبة للمستقيمين (AB) و (BD)؟

3) بَيّنْ أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ) محددا مركزها وشعاعها ثم أنشئ الدائرة (Γ) .

70

نعتبر في المستوى العقدي النقط $A(-\sqrt{2})$ و $B(1+i)$ و $C(1-i)$.

1) مثل النقط A و B و C.

2) حدد معيار وعمدة العدد العقدي $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ثم استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$

3) بَيّنْ أن (AO) هو واسط القطعة $[BC]$، ثم استنتج أن:

$$(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB})\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$$

4- أ) اكتب العدد العقدي $\frac{z_A-z_B}{z_A}$ على الشكلين المثلثي والجبري.

ب) استنتج $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$

71

نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=1+i\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}+i$ و $c=m+mi$ حيث m عدد حقيقي موجب قطعا.

1- أ) اكتب $\frac{c}{b}$ على الشكل الجبري

ب) بَيّنْ أن: $\frac{c}{b}=\frac{m\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

ج) استنتج قيمة العدد $\cos\frac{\pi}{12}$

2- نفترض أن: $m=2$. بَيّنْ أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

72

لكل z من $\mathbb{C}^*-\{-i\}$ نضع: $f(z)=\frac{z+1}{-i(z+i)}$

1) اكتب $f(i)$ على الشكل المثلثي.

2) حدد وأنشئ في المستوى العقدي المجموعتين التاليتين:

$$(C)=\{M(z)/f(z)\in \mathrm{IR}\}$$

$$(D)=\{M(z)/f(z)\in i\,\mathrm{IR}\}$$

3) نعتبر النقطتين A و B لحقاهما على التوالى -1 و $-i$.

أ) أعط تأويلا هندسيا للعدد $|f(z)|$.

ب) حدد معادلة ديكارتية للمجموعة (Δ)، مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق: $|f(z)|=1$

73

لكل z من $\mathbb{C}^*$ نضع: $f(z)=\frac{\sqrt{3}+i}{z}$

1) اكتب على الشكل المثلثي الأعداد العقدية التالية :

$f(1)$ و $f(-1)$ و $f(\sqrt{3}-i)$

2) حدد وأنشئ في المستوى العقدي المجموعات التالية :

أ) $(D_1)=\{M(z)/|f(z)|=1\}$

ب) $(D_2)=\{M(z)/f(z)\in i\,\mathrm{IR}\}$

ج) $(D_3)=\left\{M(z)/\arg(f(z))\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$

74

نعتبر في المستوى العقدي الدائرة (C) التي مركزها $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$ وشعاعها $\frac{1}{2}$.

لتكن M نقطة من (C) لحقها z يخالف 0 و -1.

1) بَيّنْ أن: $2z\bar{z}+z+\bar{z}=0$

2- أ) بَيّنْ أن العدد $1+\frac{1}{z}$ عدد تخيلي صرف.

ب) لتكن A و N النقطتين اللتين لحقاهما 1 و z^2 على التوالي.

بَيّنْ أن المثلث AMN قائم الزاوية في N.

75

1) حدد الأعداد العقدية z بحيث تكون النقط M و M' و M'' ذات الألحاق على التوالي z و $\frac{1}{z}$ و $z+1$، تنتمي إلى دائرة مركزها O.

2) مثل النقط M و M' و M''

76

حدد الأعداد العقدية z بحيث تكون النقط M و M' و M'' ذات الألحاق على التوالي 1 و z^2 و $\frac{1}{z^2}$ مستقيمية

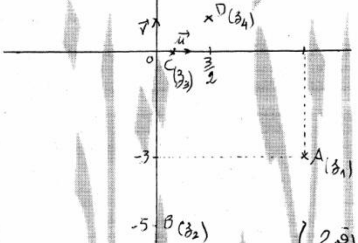
77

حدد الأعداد العقدية z بحيث النقط M و M' و M'' التي ألحاقها على التوالي 1 و z و z^2، تُكَوّنُ مثلثا متساوي الساقين وقائم الزاوية.

78

حدد الأعداد العقدية z، بحيث النقط M و M' و M'' التي ألحاقها على التوالي z و i و iz، تُكَوّنُ مثلثا متساوي الأضلاع.

تمرين رقم 1



تمرين رقم 2

$A(1)$ ، $B(2-i)$ ، $C(-i)$ ، $D(-1+i)$

تمرين رقم 3

1) $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$

2) $(OABC)$ متوازي أضلاع

يعني: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$

يعني: $z_C=z_B-z_A$

$=1+5i$

تمرين رقم 4

1) أ) $A(1-3i)$ ، $B(4+5i)$ ، $C(-3+2i)$

ب) لحق $\overrightarrow{AB}$: $z_B-z_A=3+8i$

لحق $\overrightarrow{AC}$: $z_C-z_A=-4+5i$

لحق $\overrightarrow{BC}$: $z_C-z_B=-7-3i$

2) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow z_D-z_A=2(z_B-z_A)+z_C-z_A$

$\Leftrightarrow z_D=3+18i$

$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BE}\Leftrightarrow z_C-z_B=3(z_E-z_B)$

$\Leftrightarrow z_E=\frac{5}{3}+4i$

تمرين رقم 5

1) $5+(3-i)=8-i$

2) $1+i(2+i)=2i$

3) $7(i-2)=-14+7i$

4) $2i(1-i)+3i=2+5i$

تمرين رقم 6

1) $(1+2i)^2=-3+4i$

2) $(1+2i)(7-4i)=15+10i$

3) $(\sqrt{3}-i)^2=2-2\sqrt{3}i$

4) $2i(1+3i)^2=-12-4i$

تمرين رقم 7

1) $(1-i)^3=-2-4i$

2) $(i)^7=-i$

3) $(1+2i)^3=-11-2i$

4) $(1+i)^4=-4$

تمرين رقم 8

1) $\frac{4+i}{i}=1-4i$

2) $-\frac{1}{7i}=\frac{1}{7}i$

3) $\frac{2}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

4) $\frac{4-i}{3+5i}=\frac{(4-i)(3-5i)}{34}=\frac{7}{34}-\frac{23}{34}i$

5) $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(-1+i)(1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$

6) $\frac{(1-2i)^2}{(3+i)^2} = \left(\frac{(1-2i)(3-i)}{10}\right)^2 = \left(\frac{1-7i}{10}\right)^2 = \frac{-12}{25} - \frac{7}{50}i$

تمرين رقم 9

1) $2iz+3 = z-i \Leftrightarrow z = \frac{-3-i}{-1+2i} = \frac{3+i}{1-2i}$

$= \frac{(3+i)(1+2i)}{5} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

$S = \left\{\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i\right\}$

2) $3z(z-i) = iz \Leftrightarrow z(3z-3i-i) = 0$

$\Leftrightarrow z(3z-2i) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ أو $z = \frac{2}{3}i$

$S = \left\{0, \frac{2}{3}i\right\}$

3) $2z+5-iz = 2i-3z+4iz$

$\Leftrightarrow z(5-5i) = -5+2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{-5+2i}{5(1-i)} = \frac{(-5+2i)(1+i)}{10}$

$= \frac{-7}{10} - \frac{3}{10}i$

$S = \left\{-\frac{7}{10} - \frac{3}{10}i\right\}$

4) $\frac{iz+3}{z-1} = -4i \Leftrightarrow iz+3 = -4zi+4i$

$\Leftrightarrow (5i)z = -3+4i$

$\Leftrightarrow z = \frac{-3+4i}{5i} = \frac{-4+3i}{-5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

$S = \left\{\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$

تمرين رقم 10

1) $\begin{cases} 2z_1 - z_2 = i \\ 2z_1 - 3iz_2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-3i)z_1 = 17-i \\ 2z_1 - z_2 = i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2+5i \\ z_2 = 4+5i \end{cases}$ ، $S = \{(z_1, z_2) = (2+5i, 4+5i)\}$

2) $\begin{cases} z_1 - z_2 = i \\ iz_1 + z_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 - z_2 = i \\ (1+i)z_1 = 1+i \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = -1+i \end{cases}$ ، $S = \{(z_1, z_2) = (1, -1+i)\}$

تمرين رقم 11

1) $zz' = 14+5i$ $\qquad z+z' = 3+i$

$z^2 = -5-12i$ $\qquad \frac{1}{z} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

2) $2iz+4z' = 10+20i$

3) $(z-z')^3 = 146-364i$

4) $\frac{z+2i}{z-1} = \frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

تمرين رقم 12

1) $(4x+y) + i(x+2y) = 5-i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+y = 5 \\ x-2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

2) $2y + i(x-y+5) = 4+7i \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4 \\ x-y+5 = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

تمرين رقم 13

$z = (x+3) + i(x^2-4x)$

1) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-4x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ أو $x = 4$

2) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

3) $z = 4-3i \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4 \\ x^2-4x = -3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4 \\ x^2-4x+3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

تمرين رقم 14

$z = (x^2+x-2) + i(x^2-1)$

1) $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 = 0 \\ x^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

2) $Re(z) = 4 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2+x-6 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ أو $x = 2$

3) $Im(z) = -5 \Leftrightarrow x^2-1 = -5 \Leftrightarrow x^2 = -4$

وهذا غير ممكن

تمرين رقم 15

$Z = \frac{1+3i}{z}$

1) $Z = \frac{1+3i}{z} = \frac{1+3i}{x+yi} = \frac{(1+3i)(x-yi)}{x^2+y^2}$

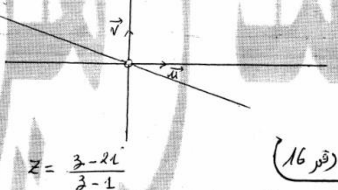
$= \frac{x+3y}{x^2+y^2} + \frac{3x-y}{x^2+y^2}i$

إذن $Re(Z) = \frac{x+3y}{x^2+y^2}$ ، $Im(Z) = \frac{3x-y}{x^2+y^2}$

2) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0$

$\Leftrightarrow x+3y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x$

إن مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا هو المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{3}x$ محروم من النقطة $O(0,0)$



تمرين رقم 16

$Z = \frac{z-2i}{z-1}$

نضع $z = x+yi$

1) $Z = \frac{(x+yi)-2i}{(x+yi)-1} = \frac{x+(y-2)i}{(x-1)+yi}$

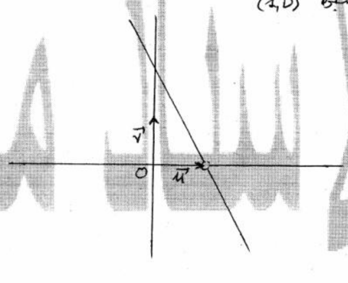
$$= \frac{(x+(y-2)i)(x-1-yi)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}\, i$$

إذن : $Re(Z) = \frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}$, $Im(Z) = \frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}$

2) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow 2x+y-2=0$

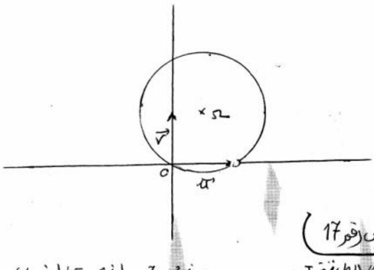
إذن مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا حقيقيا هي المستقيم الذي معادلته $2x+y-2=0$ محروما من النقطة التي إحداثيتها $(1,0)$



3) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=0$

$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2 = (\frac{\sqrt{5}}{2})^2$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا هي الدائرة $\mathcal{C}(\Omega(\frac{1}{2},1), \frac{\sqrt{5}}{2})$ محرومة من النقطة التي إحداثيتها $(1,0)$



تمرين رقم 17

1) الطريقة I

$z = (1-i)(5+2i) = 7-3i$

$\bar{z} = 7+3i$

الطريقة II

$\bar{z} = \overline{(1-i)(5+2i)}$

$= (1+i)(5-2i) = 7+3i$

2) الطريقة I

$z = (3-2i)^2 = 5-12i$

$\bar{z} = 5+12i$

الطريقة II

$\bar{z} = \overline{(3-2i)^2} = (\overline{3-2i})^2$

$= (3+2i)^2 = 5+12i$

3) الطريقة I

$z = \frac{3+4i}{2+i} = \frac{(3+4i)(2-i)}{5} = 2+i$

$\bar{z} = 2-i$

الطريقة II

$\bar{z} = \overline{\left(\frac{3+4i}{2+i}\right)} = \frac{\overline{3+4i}}{\overline{2+i}} = \frac{3-4i}{2-i}$

$= \frac{(3-4i)(2+i)}{5} = 2-i$

4) الطريقة I

$z = \frac{(3+i)(4-i)}{2+3i} = \frac{13+i}{2+3i}$

$= \frac{(13+i)(2-3i)}{13} = \frac{29}{13} - \frac{37}{13} i$

$\bar{z} = \frac{29}{13} + \frac{37}{13} i$

الطريقة II

$\bar{z} = \overline{\left(\frac{(3+i)(4-i)}{2+3i}\right)} = \frac{(3-i)(4+i)}{2-3i}$

$= \frac{(13-i)(2+3i)}{13} = \frac{29}{13} + \frac{37}{13} i$

تمرين رقم 18

$\overline{\left(\frac{iz+1}{z}\right)} - \frac{1-\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\overline{iz+1}}{\bar{z}} - \frac{1-\bar{z}}{\bar{z}}$

$= \frac{\bar{i}\,\bar{z}+\bar{1}}{\bar{z}} - \frac{1-\bar{z}}{\bar{z}}$

$= \frac{-i\bar{z}+1-1+\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}(1-i)}{\bar{z}} = 1-i$

تمرين رقم 19

نلاحظ أن $\bar{z}_2 = z_1$ و $\bar{z}_1 = z_2$

بما أن : $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2 = z_2+z_1$

فإن $z_1+z_2 \in \mathbb{R}$

بما أن : $\overline{z_1-z_2} = \bar{z}_1-\bar{z}_2 = z_2-z_1 = -(z_1-z_2)$

فإن $z_1-z_2 \in i\mathbb{R}$

تمرين رقم 20

1) $5\bar{z}+3iz = 5(x-yi)+3i(x+yi)$

$= (5x-3y)+(3x-5y)i$

2) $5\bar{z}+3iz = 2+i$

$\Leftrightarrow (5x-3y)+(3x-5y)i = 2+i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y=2 \\ 3x-5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{16} \\ y=\frac{1}{16} \end{cases}$

$S = \left\{\frac{7}{16}+\frac{1}{16}i\right\}$

تمرين رقم 21

1) $2\bar{z} = 5-2i \Leftrightarrow x-yi = \frac{5}{2}-i$

$\Leftrightarrow z = \frac{5}{2}+i$

$S = \left\{\frac{5}{2}+i\right\}$

2) $(3+i)\bar{z}-5+7i=0 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{5-7i}{3+i}$

$\Leftrightarrow z = \frac{5+7i}{3-i} = \frac{(5+7i)(3+i)}{10} = \frac{4}{5}+\frac{13}{5}i$

$S = \left\{\frac{4}{5}+\frac{13}{5}i\right\}$

تمرين رقم 22

1) $f(z) = z^2+2z-4$

$\overline{f(z)} = \overline{z^2+2z-4} = \bar{z}^2+2\bar{z}-4$

$= (\bar{z})^2+2\bar{z}-4 = f(\bar{z})$

2) $f(2-i) = (2-i)^2 + 2(2-i) - 4 = 3-6i$

$f(2+i) = f(\overline{2+i}) = \overline{f(2-i)} = \overline{3-6i} = 3+6i$

تمرين رقم 23

$3z = 4 + \bar{z}$

نضع $z = x+yi$

$3z = 4+\bar{z} \Leftrightarrow 3(x+yi) = 4 + x - yi$

$\Leftrightarrow (2x-4) + 4yi = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

$S = \{M(2,0)\}$

تمرين رقم 24

$z + 5\bar{z} = 6+8i$

نضع $z = x+yi$

$z+5\bar{z} = 6+8i \Leftrightarrow x+yi+5(x-yi) = 6+8i$

$\Leftrightarrow 6x - 4yi = 6+8i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ $\quad S = \{M(1,-2)\}$

تمرين رقم 25

$z\bar{z} = z + \bar{z}$

نضع $z = x+yi$

$z\bar{z} = z+\bar{z} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2x$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1) + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة : $\mathcal{C}(\Omega(1,0), 1)$

تمرين رقم 26

$|-4| = 4 \quad , \quad \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$

$|3+4i| = \sqrt{9+16} = 5 \quad , \quad |-3i| = 3$

تمرين رقم 27

1) $z = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2$

$|z| = |(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2| = |\sqrt{2}+i\sqrt{2}|^2 = 4$

2) $z = (3-2i)^3$

$|z| = |(3-2i)^3| = |3-2i|^3 = (\sqrt{13})^3 = 13\sqrt{13}$

3) $z = \frac{3-\sqrt{3}i}{5+5i}$

$|z| = \left|\frac{3-\sqrt{3}i}{5+5i}\right| = \frac{|3-\sqrt{3}i|}{|5+5i|} = \frac{\sqrt{12}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$

4) $z = (1+i\sqrt{3})(4-i)$

$|z| = |1+i\sqrt{3}||4-i| = 2\sqrt{17}$

5) $z = \left(\frac{1+i}{2i}\right)^6$

$|z| = \left|\frac{1+i}{2i}\right|^6 = \left(\frac{|1+i|}{|2i|}\right)^6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$

تمرين رقم 28

$z = a+bi$

1) $|z^2| = |z|^2 = (\sqrt{a^2+b^2})^2 = a^2+b^2$

2) $z+2i = a+(b+2)i$

$|z+2i| = \sqrt{a^2+(b+2)^2}$

3) $4z-3 = (4a-3)+4bi$

$|4z-3| = \sqrt{(4a-3)^2+(4b)^2}$

4) $(z+2i)(4z-3)$

$|(z+2i)(4z-3)| = |z+2i||4z-3|$

$= \sqrt{(a^2+(b+2)^2)((4a-3)^2+(4b)^2)}$

تمرين رقم 29

1) $A(-1+i) \quad , \quad B(2i) \quad , \quad C(2-2i)$

لدينا $a-b = -1-i$

إذن $|a-b| = \sqrt{2}$

لدينا $a-c = -3-3i$

إذن $|a-c| = 3\sqrt{2}$

لدينا $c-b = 2-4i$

إذن $|c-b| = 2\sqrt{5}$

2) لدينا $AB = |b-a| = \sqrt{2}$

$AC = |c-a| = 3\sqrt{2}$

$BC = |c-b| = 2\sqrt{5}$

المثلث ABC قائم الزاوية في A

لأن : $BC^2 = AC^2 + AB^2$

تمرين رقم 30

1) الطريقة I

$|z-i| = 4$

نضع $z = x+yi$

$|z-i| = 4 \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = 4$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 4^2$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة : $\mathcal{C}(A(0,1),4)$

الطريقة II نعتبر النقطة $A(i)$

$|z-i| = AM = 4$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة : $\mathcal{C}(A,4)$

2) $|z| = 2\sqrt{3}$

الطريقة I نضع $z = x+yi$

$|z| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = (2\sqrt{3})^2$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة : $\mathcal{C}(O(0,0), 2\sqrt{3})$

الطريقة II. $|z| = OM = 2\sqrt{3}$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة : $\mathcal{C}(O, 2\sqrt{3})$

3) $|z-2i| = |z+i|$

الطريقة I نضع $z = x+yi$

$|z-2i| = |z+i| \Leftrightarrow |x+(y-2)i| = |x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2 = x^2+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow -4y+4 = 2y+1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{2}$

الطريقة II نعتبر النقطتين $A(2i)$ و $B(-i)$

$|z-2i|=|z+i| \Leftrightarrow AM=BM$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي واسط القطعة $[A,B]$

4) $|z+1|=|z-2+3i|$

الطريقة I نضع $z=x+yi$

$|z+1|=|z-2+3i| \Leftrightarrow |(x+1)+yi|=|(x-2)+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2=(x-2)^2+(y+3)^2$

$\Leftrightarrow 3x-3y-4=0$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم الذي معادلته $3x-3y-4=0$

الطريقة II نعتبر النقطتين $A(-1)$ و $B(2-3i)$

$|z+1|=|z-2+3i| \Leftrightarrow AM=BM$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي واسط القطعة $[AB]$

تمرين رقم 31

$|\bar{z}+i|=4$

الطريقة I نضع $z=x+yi$

$|\bar{z}+i|=4 \Leftrightarrow |x-(y-1)i|=4$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4^2$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة $\mathcal{C}(A(0,1),4)$

الطريقة II $|\bar{z}+i|=4 \Leftrightarrow |\overline{z-i}|=4$

$\Leftrightarrow |z-i|=4 \Leftrightarrow AM=4$

حيث $M(z)$ و $A(i)$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة $\mathcal{C}(A,4)$

2) $|z-3+4i|=|\bar{z}+2i|$

الطريقة I نضع $z=x+yi$

$|z-3+4i|=|\bar{z}+2i| \Leftrightarrow |(x-3)+(y+4)i|=|x+(2-y)i|$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=x^2+(2-y)^2$

$\Leftrightarrow -6x+4y+21=0$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم الذي معادلته

$-6x+4y+21=0$

الطريقة II. $|z-(3-4i)|=|\bar{z}+2i|$

$\Leftrightarrow |z-(3-4i)|=|\overline{z-2i}|$

$\Leftrightarrow |z-(3-4i)|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow AM=BM$

حيث $M(z)$ و $A(3-4i)$ و $B(2i)$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي واسط القطعة $[AB]$

3) $|2iz^2|=8$

الطريقة I نضع $z=x+yi$

$|2iz^2|=8 \Leftrightarrow |2i(x^2-y^2+2xyi)|=8$

$\Leftrightarrow |-4xy+2(x^2-y^2)i|=8$

$\Leftrightarrow 16x^2y^2+4(x^2-y^2)^2-64$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2=16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=4$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة $\mathcal{C}(O(0),2)$

الطريقة II $|2iz^2|=8 \Leftrightarrow |2i||z^2|=8$

$\Leftrightarrow 2|z|^2=8$

$\Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة : $\mathcal{C}(O(0),2)$

4) $\begin{cases}|z|=2\\ Im(z)=1\end{cases}$

نضع $z=x+yi$

$\begin{cases}|z|=2\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow |x+i|=2$

$\Leftrightarrow x^2+1=4$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

$S=\{M_1(\sqrt{3}+i),\ M_2(-\sqrt{3}+i)\}$

تمرين رقم 32

$z_B=2+2i\sqrt{3}$. $z_C=2-2i\sqrt{3}$

1) لدينا $|z_B|=|z_C|=\sqrt{4+12}=4$

إذن النقطتين B و C تنتميان إلى الدائرة $\mathcal{C}(O,4)$

2) $z_A=\frac{z_C-z_B}{2}=\frac{2-2i\sqrt{3}-2-2i\sqrt{3}}{2}$

$=-2i\sqrt{3}$

$|z_B-z_A|=|2+4i\sqrt{3}|=\sqrt{4+48}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

$|z_C-z_A|=2$

$|z_B-z_C|=|4i\sqrt{3}|=4\sqrt{3}$

3) لدينا $|z_B-z_A|=AB$ و $|z_C-z_A|=AC$

و $|z_B-z_C|=BC$

وبما أن $AC^2+BC^2=AB^2$

فإن المثلث ABC قائم في C

تمرين رقم 33

نعتبر النقطة $A(a)$

$(z-a)(\bar{z}-\bar{a})=9a\bar{a}$

$\Leftrightarrow (z-a)(\overline{z-a})=9|a|^2$

$\Leftrightarrow |z-a|^2=(3|a|)^2$

$\Leftrightarrow |z-a|=3|a|$

$\Leftrightarrow AM=3|a|$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة $\mathcal{C}(A,3|a|)$

تمرين رقم 34

نضع $z=x+yi$ حيث $(x,y)\neq(0,1)$

$\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=1 \Leftrightarrow \frac{|z+i|}{|z-i|}=1$

$\Leftrightarrow |z+i|=|z-i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2$

$\Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$

تمرين رقم 35

$$\overline{\left(i\,\frac{1+z}{1-z}\right)} = \bar{i}\,\overline{\frac{1+z}{1-z}} = -i\,\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}$$
$$= -i\,\frac{z(1+\bar{z})}{z(1-\bar{z})} = -i\,\frac{z+z\bar{z}}{z-z\bar{z}}$$
$$= -i\,\frac{z+1}{z-1} = i\,\frac{1+z}{1-z}$$

إذن $i\,\dfrac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}$

تمرين رقم 36

$$|u|^2 = \left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)\overline{\left(\frac{z+2i}{2z+i}\right)}$$
$$= \frac{z+2i}{2z+i}\cdot\frac{\bar{z}-2i}{2\bar{z}-i} = \frac{(z+2i)(\bar{z}-2i)}{(2z+i)(2\bar{z}-i)}$$
$$= \frac{z\bar{z}+2i(\bar{z}-z)+4}{4z\bar{z}+2i(\bar{z}-z)+1}$$
$$= \frac{5+2i(\bar{z}-z)}{5+2i(\bar{z}-z)} = 1 \qquad (|z|=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1)$$
$$\Leftrightarrow |u|^2=2 \quad \Leftrightarrow |u|=1$$

تمرين رقم 37

$A(z_A)$ ، $B(z_B)$ ، $C(z_C)$ ، $D(z_D)$

$|z_A| = OA = 1 \quad , \quad \arg(z_A) \equiv 0 \ [2\pi]$

$|z_B| = 1 \quad , \quad \arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

$|z_C| = 1 \quad , \quad \arg(z_C) \equiv \pi \ [2\pi]$

$|z_D| = \sqrt{2} \quad , \quad \arg(z_D) \equiv \frac{3\pi}{4} \ [2\pi]$

$|z_E| = 1 \quad , \quad \arg(z_E) \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

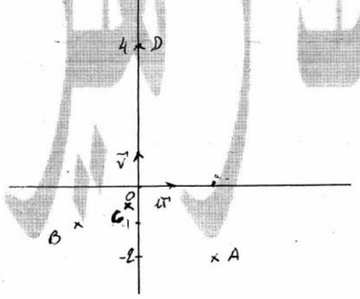
تمرين رقم 38

(1
$$z_A = \left[3, -\frac{\pi}{4}\right] = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2
$$z_B = \left[2, \frac{7\pi}{6}\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

(3
$$z_C = \left[\frac{1}{2}, -\frac{2\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(4
$$z_D = \left[4, \frac{\pi}{2}\right] = 4i$$



تمرين رقم 39

(1 $z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right) = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

(2 $z_2 = -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[2, \frac{5\pi}{6}\right]$

(3 $z_3 = -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)i\right) = \left[2, \frac{7\pi}{6}\right]$

(4 $z_4 = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

تمرين رقم 40

(1
$$z_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$
$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)\right)$$

(2
$$z_2 = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$

(3
$$z_3 = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)$$
$$= \cos\frac{5\pi}{14} + i\sin\frac{5\pi}{14}$$

(4
$$z_4 = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$
$$= \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}$$

تمرين رقم 41

لدينا :

$$z = 2(-1+i) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \left[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

$$z' = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left[4, \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$zz' = \left[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]\cdot\left[4, \frac{2\pi}{3}\right] = \left[8\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right]$$
$$= \left[8\sqrt{2}, \frac{17\pi}{12}\right] = \left[8\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$\frac{1}{z'} = \frac{[1, 0]}{\left[4, \frac{2\pi}{3}\right]} = \left[\frac{1}{4}, -\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\left[2\sqrt{3}, \frac{3\pi}{4}\right]}{\left[4, \frac{2\pi}{3}\right]} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{12}\right]$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{[1, 0]}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{12}\right]} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\pi}{12}\right]$$

$$z^2 = \left[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]^2 = \left[8, 2\,\frac{3\pi}{4}\right] = \left[8, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$z^3 = \left[2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]^3 = \left[24\sqrt{3}, \frac{9\pi}{4}\right] = \left[24\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z'^4 = \left[4, \frac{2\pi}{3}\right]^4 = \left[256, \frac{8\pi}{3}\right] = \left[256, \frac{2\pi}{3}\right]$$

تمرين رقم 42

1) $z=(1-i)^2=[2,\frac{\pi}{4}]^2=[4,\frac{\pi}{2}]$

2) $z=(1-i)(-\sqrt{3}+i)=[\sqrt{2},\frac{-\pi}{4}][2,\frac{5\pi}{6}]$

$=[2\sqrt{2},\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}]=[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}]$

3) $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{[2,\frac{\pi}{3}]}{[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]}=[\sqrt{2},\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}]=[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}]$

4) $z=\frac{\sqrt{3}-i}{2i}=\frac{[2,-\frac{\pi}{3}]}{[2,\frac{\pi}{2}]}=[1,\frac{-\pi}{3}-\frac{\pi}{2}]=[1,-\frac{5\pi}{6}]$

5) $z=\frac{2}{-2+2i}=\frac{[2,0]}{[2\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}]}=[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\pi}{4}]$

6) $z=\left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^4=\left(\frac{[1,\frac{\pi}{2}]}{[2,-\frac{\pi}{6}]}\right)^4=[\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}]^4$

$=[\frac{1}{16},\frac{8\pi}{3}]=[\frac{1}{16},\frac{2\pi}{3}]$

تمرين رقم 43

1) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\frac{[2,\frac{\pi}{3}]}{[2,-\frac{\pi}{4}]}=[1,\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}]=[1,\frac{7\pi}{12}]$

2) $(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})^8=[1,\frac{\pi}{12}]^8=[1,\frac{2\pi}{3}]$

3) $(1-i)^3=([1,\frac{-\pi}{4}])^3=[1,\frac{-3\pi}{4}]$

4) $\frac{\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}}{-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12})}{\cos(\pi-\frac{\pi}{12})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{12})}$

$=\frac{[1,-\frac{\pi}{12}]}{[1,\frac{11\pi}{12}]}=[1,-\pi]=[1,\pi]$

تمرين رقم 44

1) $z=(\sqrt{3}-i)^7=[2,-\frac{\pi}{6}]^7=[2^7,-\frac{7\pi}{6}]$

$=[2^7,\frac{5\pi}{6}]=-2^6\sqrt{3}+2^6 i$

2) $z=(2\sqrt{3}-2i)^4=[4,\frac{-\pi}{6}]^4$

$=[4^4,\frac{-2\pi}{3}]=-2^7-2^7\sqrt{3}\,i$

3) $z=\frac{(1-i\sqrt{3})^{12}}{(1+i\sqrt{3})^7}=\frac{[2,-\frac{\pi}{3}]^{12}}{[2,\frac{\pi}{3}]^7}$

$=\frac{[2^{12},-4\pi]}{[2^7,\frac{7\pi}{3}]}=\frac{[2^{12},0]}{[2^7,\frac{\pi}{3}]}$

$=[2^5,-\frac{\pi}{3}]=2^4-2^4\sqrt{3}\,i$

4) $z=(1+i)^{2007}=[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}]^{2007}$

$=[(\sqrt{2})^{2007},\frac{2007\pi}{4}]=[(\sqrt{2})^{2007},\frac{-\pi}{4}]$

$=(\sqrt{2})^{2006}-i(\sqrt{2})^{2006}$

تمرين رقم 45

1) $z_1=\tan\frac{\pi}{9}+i=\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{\cos\frac{\pi}{9}}+i=$

$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}(\sin\frac{\pi}{9}+i\cos\frac{\pi}{9})=$

$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}))$

$=[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}},\frac{7\pi}{18}]$

2) $z_2=1-i\tan\frac{\pi}{9}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}(\cos\frac{\pi}{9}-i\sin\frac{\pi}{9})$

$=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{9}}(\cos(-\frac{\pi}{9})+i\sin(-\frac{\pi}{9}))$

3) $z_3=(1+\cos\frac{2\pi}{9})+i\sin\frac{2\pi}{9}=$

$=2\cos^2\frac{\pi}{9}+i\,2\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$

$=(2\cos\frac{\pi}{9})(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9})$

تمرين رقم 46

1) لدينا. $\arg(iz)\equiv\arg i+\arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{2}+\arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

اذن $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\begin{cases}|z|=1\\ \arg(iz)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}$

$\Leftrightarrow z=[1,-\frac{\pi}{4}]=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) لدينا: $\arg(\frac{z}{1-i})\equiv\arg(z)-\arg(1-i)\ [2\pi]$

$\equiv\arg(z)+\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

اذن: $\arg(z)\equiv 0\ [2\pi]$

$\begin{cases}|z|=3\\ \arg(\frac{z}{1-i})\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=3\\ \arg(z)\equiv 0\ [2\pi]\end{cases}$

$\Leftrightarrow z=3$

3) لدينا: $\arg(\frac{1+i\sqrt{3}}{z})\equiv\arg(1+i\sqrt{3})-\arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv\frac{\pi}{3}-\arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

اذن: $\arg(z)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

$\begin{cases}|z|=2\\ \arg(\frac{1+i\sqrt{3}}{z})\equiv-\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2\\ \arg(z)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}$

$\Leftrightarrow z = [2, \frac{2\pi}{3}] = -1 + i\sqrt{3}$

تمرين رقم 47

1)

$\arg(\bar{z}) \equiv \arg(-z) \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow -\arg(z) \equiv \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

نحدد z بحيث $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

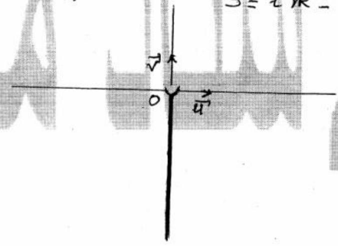
نضع : $z = x + yi = [2, -\frac{\pi}{2}]$

لدينا $x + yi = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$

$\Leftrightarrow x + yi = -2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y < 0 \end{cases}$

$S = i\mathbb{R}^*_-$



2) نحدد z بحيث $\arg(\bar{z} + 2) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

نضع $z = x + yi$

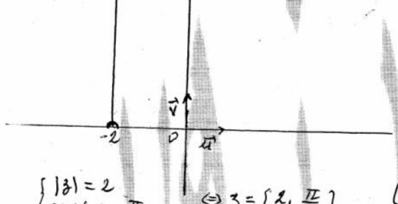
لدينا $\bar{z} + 2 = (x+2) - yi = [2, -\frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow (x+2) - yi = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$

$\Leftrightarrow (x+2) - yi = -2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y > 0 \end{cases}$

$S = \{ z = -2 + yi \ / \ y \in \mathbb{R}^*_+ \}$

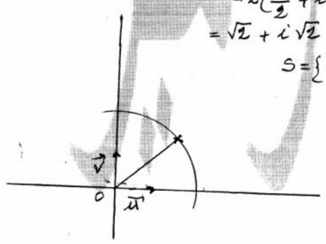


3) $\begin{cases} |z| = 2 \\ \arg(z) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z = [2, \frac{\pi}{4}]$

$= 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

$S = \{ \sqrt{2} + i\sqrt{2} \}$



تمرين رقم 48

1)

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{(-4+4i\sqrt{3}) - (-1+i\sqrt{3})}{(2+2i\sqrt{3}) - (-1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-3+3i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = \frac{6(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)}{2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)}$$

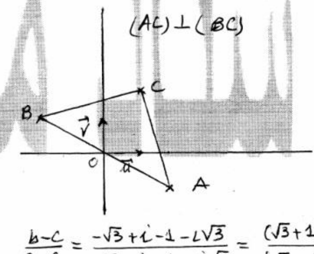
$$= \frac{[6, \frac{2\pi}{3}]}{[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}]} = [\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}] = [\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}]$$

2) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg(\frac{b-c}{a-c}) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

إذن $(AC) \perp (BC)$

تمرين رقم 49



$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-\sqrt{3}+i-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i-1-i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)-(1-\sqrt{3})i}{(\sqrt{3}-1)-(1+\sqrt{3})i}$$

$$= \frac{[(\sqrt{3}+1)-(1-\sqrt{3})i][(\sqrt{3}-1)+(1+\sqrt{3})i]}{[(\sqrt{3}-1)-(1+\sqrt{3})i][(\sqrt{3}-1)+(1+\sqrt{3})i]}$$

$= i = [1, \frac{\pi}{2}]$

3) لدينا: $|\frac{b-c}{a-c}| = \frac{|b-c|}{|a-c|} = \frac{CB}{CA} = 1$

إذن $CA = CB$

ولدينا: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg(\frac{b-c}{a-c}) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في C

تمرين رقم 50

1)

$$\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E} = \frac{-\frac{1}{2} - 1 + i}{3 + 2i - 1 + i} = \frac{-\frac{3}{2} + i}{2 + 3i} =$$

$$= \frac{(-\frac{3}{2} + i)(2 - 3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{1}{2}i = [\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv \arg(\frac{z_B - z_E}{z_A - z_E}) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

إذن المثلث ABE قائم الزاوية في E

2) لدينا:

$$\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} = \frac{-1 - 4i - \frac{5}{2} + 2i}{-\frac{1}{2} - 3 - 2i} =$$

$$= \frac{-\frac{7}{2} - 2i}{-\frac{7}{2} - 2i} = 1 = [1, 0]$$

إذن $\left|\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right| = \frac{|z_C - z_D|}{|z_B - z_A|} = \frac{DC}{AB} = 1$

يعني أن $DC = AB$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv 0 \quad [2\pi]$

يعني أن $(DC) \parallel (AB)$

إذن $ABCD$ معين

تمرين رقم 52

1) $z_1 = \sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$= \left[1, \frac{\pi}{2} - \theta\right]$

2) $z_2 = 1 + i\tan\theta = 1 + i\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = \left[\dfrac{1}{\cos\theta}, \theta\right]$

3) $z_3 = \dfrac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} =$

$= \dfrac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)} = \dfrac{[1, \theta]}{[1, -\theta]} = [1; 2\theta]$

$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta$

4) $z_4 = (1 + \cos\theta) + i\sin\theta$

$= 2\cos^2\frac{\theta}{2} + i\, 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = \left[2\cos\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right]$

تمرين رقم 53

1) $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

$z_2 = \sqrt{3} - i = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)i\right) = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]$

2) $z_1 \cdot z_2 = (1+i)(\sqrt{3} - i) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$

$= \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]\left[2, -\frac{\pi}{6}\right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right]$

$= \left[2\sqrt{2}, \frac{\pi}{12}\right]$

3) لدينا: $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

إذن: $\cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ، $\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

تمرين رقم 54

نعتبر $z = x + yi$

$Z = 5z^2 + 3z\bar{z} + 20i$

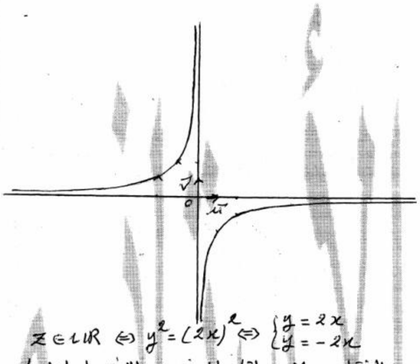
$= 5(x^2 - y^2 + 2xyi) + 3(x^2 + y^2) + 20i$

$= 2(4x^2 - y^2) + 10(xy + 2)i$

1) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xy = -2$

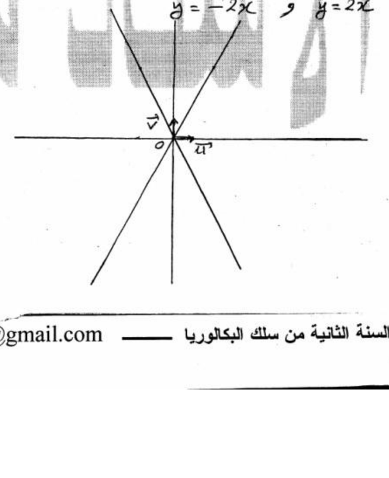
$\Leftrightarrow y = \frac{-2}{x}$; $(z = 0 \Leftrightarrow Z \in i\mathbb{R})$

$S = \left\{ M\left(x, \frac{-2}{x}\right) / x \in \mathbb{R}^* \right\}$



2) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow y^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = -2x \end{cases}$

مجموعة النقط $M(z)$ هي اتحاد المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = -2x$ و $y = 2x$



تمرين رقم 55

1) أ) $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ، $\overrightarrow{OC}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ب) لدينا: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

يعني أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع

2) $\left|z - i\sqrt{3}\right| = \left|z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \Leftrightarrow AM = BM$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي واسط القطعة $[A, B]$

تمرين رقم 56

1) $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{3 + 2i}{2 - 3i} = \dfrac{(3+2i)(2+3i)}{13} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

2) $\left|\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = \dfrac{|z_A - z_B|}{|z_C - z_B|} = \dfrac{BA}{BC} = 1$

إذن $BA = BC$

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في B

3) $(ABCD)$ مربع $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow z_C - z_D = z_B - z_A$

$\Leftrightarrow z_D = -z_B + z_A + z_C$

$= -3 + 2i$

تمرين رقم 57

1) $z_\Omega = \dfrac{z_A + z_B}{2} = -1 + i$

2) $R = |z_B - z_\Omega| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$

3) $M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z + 1 - i| = 2\sqrt{2}$

تمرين رقم 58

1) $\dfrac{c-1}{b-1} = \dfrac{-2+4i}{4+2i} = \dfrac{(-2+4i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}$

$= \dfrac{20i}{20} = i = [1, \frac{\pi}{2}]$

2) لدينا $\left|\dfrac{c-1}{b-1}\right| = \dfrac{|c-1|}{|b-1|} = \dfrac{AC}{AB} = 1$

يعني $AC = AB$

ولدينا $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\dfrac{c-1}{b-1}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

ادن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A

3) $|z - b| = |z - a| \Leftrightarrow BM = AM$

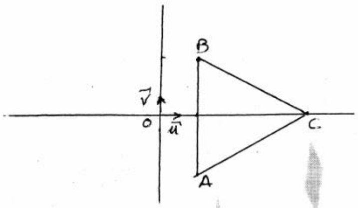
ادن (Δ) هو واسط القطعة $[AB]$

تمرين رقم 59

1) $z_A = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = [4, -\frac{\pi}{3}]$

$z_B = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = [4, \frac{\pi}{3}]$

$z_C = 8(1 + 0i) = [8, 0]$



3) أ) $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{-6 - 2i\sqrt{3}}{-6 + 2i\sqrt{3}} = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(3 + i\sqrt{3})^2}{12} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = [1, \frac{\pi}{3}]$

ب) لدينا $|Z| = \left|\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right| = \dfrac{|z_A - z_C|}{|z_B - z_C|} = \dfrac{CA}{CB} = 1$

يعني: $CA = CB$

$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

ادن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين رقم 60

$z = x + yi$

$Z = (1 - 2i)z - \bar{z} = (1 - 2i)(x + yi) - (x - yi)$

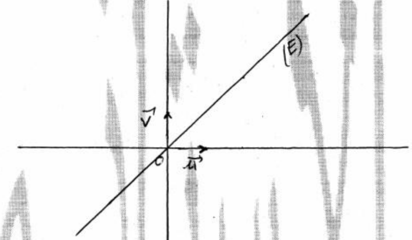
$= 2y + 2(y - x)i$

ادن $Re(Z) = 2y$ ، $Im(Z) = 2(y - x)$

2) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0$

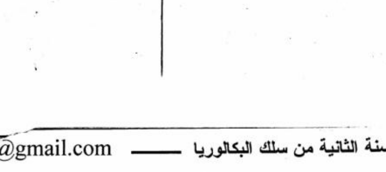
$\Leftrightarrow y = x$

$\Leftrightarrow (E) : \; y = x$



3) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$\Leftrightarrow (F) : \; y = 0$



تمرين رقم 61

1) $z = x + yi$

$Z = \dfrac{1 - 2z}{iz + i} = \dfrac{1 - 2(x + yi)}{i(x + yi) + i} = \dfrac{(1 - 2x) - 2yi}{-y + (x + 1)i}$

$= \dfrac{[(1 - 2x) - 2yi][-y - (x + 1)i]}{y^2 + (x + 1)^2}$

$= \dfrac{-3y}{y^2 + (x + 1)^2} + \dfrac{2x^2 + x - 1 + 2y^2}{y^2 + (x + 1)^2}i$

ادن $Re(Z) = \dfrac{-3y}{y^2 + (x + 1)^2}$ ، $Im(Z) = \dfrac{2x^2 + x - 1 + 2y^2}{y^2 + (x + 1)^2}$

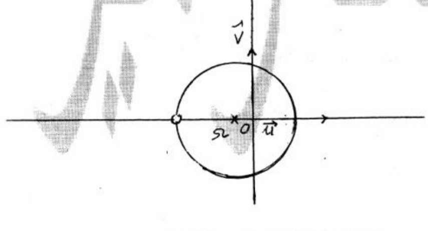
2) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 + 2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$

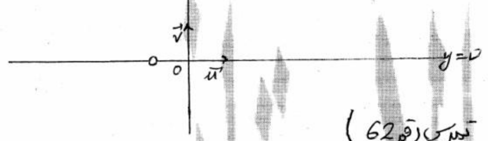
ادن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة: $\mathcal{C}\left(\Omega\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \frac{3}{4}\right)$

محرومة من النقطة التي احداثيتيها $(-1, 0)$



3) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z)=0 \Leftrightarrow y=0$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم الذي معادلته $y=0$ محروم من النقطة التي إحداثيتها $(-1,0)$



تمرين رقم 62

1) أ) $z = x+yi$

$$Z = \frac{z+2i}{z+1} = \frac{(x+yi)+2i}{x+yi+1} = \frac{x+(y+2)i}{(x+1)+yi}$$

$$= \frac{(x+(y+2)i)((x+1)-yi)}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{x^2+x+y^2+2y}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2x+y+2}{(x+1)^2+y^2}\, i$$

إذن: $Re(Z)=\frac{x^2+x+y^2+2y}{(x+1)^2+y^2}$ ، $Im(Z)=\frac{2x+y+2}{(x+1)^2+y^2}$

ب) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z)=0 \Leftrightarrow 2x+y+2=0$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم الذي معادلته: $2x+y+2=0$ محروم من النقطة التي إحداثيتها $(-1,0)$

ج) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z)=0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2+2y=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة $\mathcal{C}\left(\Omega\left(-\frac{1}{2},-1\right),\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ محرومة من النقطة التي إحداثيتها $(-1,0)$

2) $A(-2i)$ ، $B(-1)$

$$|Z| = \left|\frac{z+2i}{z+1}\right| = \frac{|z-(-2i)|}{|z-(-1)|} = \frac{AM}{BM} = 1$$

يعني أن $AM = BM$

إذن مجموعة النقط $M(z)$ هي (Δ) واسط القطعة $[AB]$

تمرين رقم 63

1) $$\frac{z_A-z_D}{z_A-z_C} = \frac{z_1-z_4}{z_1-z_3} = \frac{(\sqrt{3}-i)-(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}-i)-(\sqrt{3}+3i)} = \frac{2i}{-4i} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

إذن النقط A وC وD مستقيمية

2) $$\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B} = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{\sqrt{3}+3i-\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i} = \frac{4i}{2\sqrt{3}+2i} = \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{4}$$

$$= \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1,\frac{\pi}{3}\right]$$

$$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ج) لدينا: $$\left|\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}\right| = \frac{|z_C-z_A|}{|z_C-z_B|} = \frac{AC}{BC} = 1$$

إذن: $AC = BC$

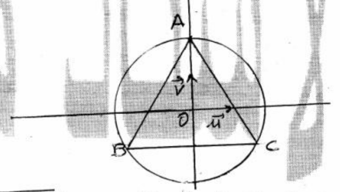
ومنه فإن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين رقم 64

1) أ) لدينا $OA = |z_A| = 2$ و $OB = |z_B| = 2$ و $OC = |z_C| = 2$

إذن النقط A وB وC تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها O وشعاعها 2

ب)



2) أ) $$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

ب) لدينا $$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1,\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن: $$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right| = \frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|} = \frac{AC}{AB} = 1$$

إذن $AC = AB$

إذن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين رقم 65

1) أ) $$\frac{z_2}{z_0} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{1-i}$$

$$= \frac{1}{4}\left((\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1)\right)(1+i)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-2+2\sqrt{3}i\right) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$i\bar{z}_2 = i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2} = z_1$$

ب) لدينا: $$\arg\left(\frac{z_2}{z_0}\right) \equiv \arg\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

ولدينا $$\arg(z_0) \equiv \arg(1-i)\ [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

اذن ؛ $\arg\left(\frac{z_2}{z_0}\right) \equiv \arg(z_2) - \arg(z_0) \quad [2\pi]$

$\equiv \arg(z_2) + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(z_2) \equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$

$\arg(z_1) \equiv \arg(i) + \arg(\overline{z_2}) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{12} \quad [2\pi]$

ج) $z_1 - z_0 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} - 1 + i$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2} = z_2$

2) أ) لدينا : $z_2 = z_1 - z_0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

ولدينا : $\left|\frac{z_2}{z_0}\right| = \left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$

يعني أن : $\frac{|z_2|}{|z_0|} = \frac{OC}{OA} = 1$

يعني أن $OC = OA$

اذن الرباعي $OABC$ معين

ب) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \quad [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_0}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

تمرين رقم 66

1) أ) $\Omega' = O \Leftrightarrow z + i = 0 \Leftrightarrow z = -i$

ب) $\Omega'' = O \Leftrightarrow iz = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ج) $\Omega' = \Omega'' \Leftrightarrow z + i = iz$

$\Leftrightarrow (-1+i)z = i$

$\Leftrightarrow z = \frac{i}{-1+i} = \frac{1-i}{2}$

2) أ) $\frac{z+i}{iz} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z_{\Omega'} - z_O}{z_{\Omega''} - z_O} \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow$ O و Ω' و Ω'' نقط مستقيمية

ب) $z = x + yi$

$\frac{z+i}{iz} = \frac{x+yi+i}{i(x+yi)} = \frac{x+(y+1)i}{-y+xi}$

$= \frac{(x+(y+1)i)(-y-xi)}{x^2+y^2}$

$= \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-(x^2+y^2+y)}{x^2+y^2}i$

اذن : $\operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{iz}\right) = -\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$

3) O و Ω' و Ω'' نقط مستقيمية

$\Leftrightarrow \frac{z+i}{iz} \in \mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{iz}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

اذن (E) هي الدائرة $\mathcal{C}\left(\Omega\left(0, -\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2}\right)$ محرومة من النقطتين $O(0,0)$ و $A(0,-1)$

تمرين رقم 67

$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا : $j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{j}$

$j^3 = j \cdot j^2 = j\overline{j} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

ولدينا : $\frac{z_G - z_F}{z_E - z_F} = \frac{\overline{j}a - ja}{a - ja} = \frac{j^2 a - ja}{a - ja}$

$= \frac{ja(j-1)}{a(1-j)} = -j$

اذن : $\left|\frac{z_G - z_F}{z_E - z_F}\right| = \frac{|z_G - z_F|}{|z_E - z_F|} = \frac{GF}{EF} = 1$

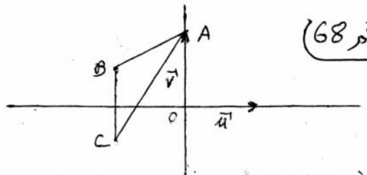
يعني ان $EF = GF$

$(\overrightarrow{FE}; \overrightarrow{FG}) \equiv \arg\left(\frac{z_G - z_F}{z_E - z_F}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

إذن المثلث EFG متساوي الأضلاع

تمرين رقم 68



2) أ) $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = -\frac{1}{2}i(\sqrt{3} - i)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1, -\frac{2\pi}{3}\right]$

ب) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv -\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

$\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = \frac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = \frac{BC}{BA} = 1$

يعني أن : $BC = BA$

اذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

3) أ) $\left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right| = 1$

الطريقة الاولى

$\left|\frac{z - z_A}{z - z_B}\right| = \frac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = \frac{A\Omega}{B\Omega} = 1$

يعني أن : $A\Omega = B\Omega$

اذن (Δ) هي المستقيم واسط القطعة $[AB]$

الطريقة الثالثة

$$\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = \frac{|z-z_A|}{|z-z_B|} = 1 \iff |z-z_A| = |z-z_B|$$

$$\iff |x+yi-i| = \left|x+yi+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|$$

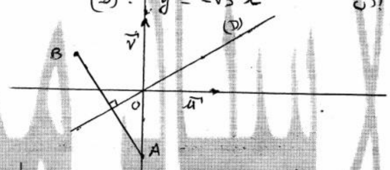
$$\iff |x+(y-1)i| = \left|\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)i\right|$$

$$\iff \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$$

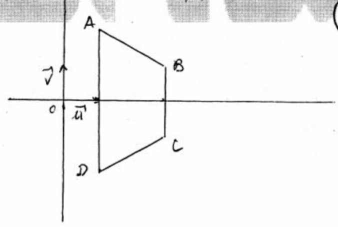
$$\iff -2y = \sqrt{3}\,x - y$$

$$\iff y = -\sqrt{3}\,x$$

إذن $(D) : y = -\sqrt{3}\,x$



تمرين رقم 69



بما أن المحور الحقيقي هو محور تماثل الرباعي ABCD فإن الرباعي ABCD شبه منحرف متساوي الساقين

2) أ)
$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} = \frac{1-2i-1-\sqrt{3}-i}{1+2i-1-\sqrt{3}-i}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3}i)}{\sqrt{3}-i} = \sqrt{3}i$$

$$= \left[\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ب)
$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}\right) \; [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$$

اذن $(AB) \perp (BD)$

3) لدينا:
$$\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C} = \frac{1-2i-1-\sqrt{3}+i}{1+2i-1-\sqrt{3}+i}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-3i} = \frac{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+3i)}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}i = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

اذن
$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}\right) \; [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}\right) [2\pi] \iff$$

$$\iff \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}\right) - \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_A-z_C}\right) \equiv 0 \; [2\pi]$$

$$\iff \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} \cdot \frac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right) \equiv 0 \; [2\pi]$$

$$\iff \frac{z_D-z_B}{z_A-z_B} \cdot \frac{z_A-z_C}{z_D-z_C} \in \mathbb{R}$$

اذن النقط A وB وC وD تنتمي إلى نفس الدائرة (Γ)
بما أن المثلث ABD قائم الزاوية في B فإنه محاط بنصف دائرة قطرها [AD]

اذن $(\Gamma) = \mathcal{C}(I, R)$

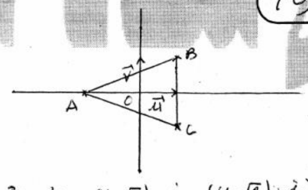
حيث $z_I = \frac{1}{2}(z_A+z_D) = 1$

و $R = \frac{AD}{2} = \frac{|z_D-z_A|}{2}$

$= 2$

تمرين رقم 70

1)



2)
$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = \frac{(1+\sqrt{2})+i}{(1+\sqrt{2})-i} = \frac{((1+\sqrt{2})+i)^2}{(1+\sqrt{2})^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \left[1, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) \; [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} \; [2\pi]$$

3) لدينا
$$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = \frac{|z_B-z_A|}{|z_C-z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1$$

يعني أن $AB = AC$

إذن A نقطة تنتمي إلى واسط القطعة [BC]

ولدينا: $|z_B| = |z_C| = \sqrt{2} \iff OB = OC$

اذن O نقطة تنتمي إلى واسط القطعة [BC]

اذن (OA) هو واسط القطعة [BC]

وبما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

فإن (OA) هو منصف الزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$

اذن $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} \; [2\pi]$

4) أ)
$$\frac{z_A-z_B}{z_A} = \frac{(\sqrt{2}+1)+i}{\sqrt{2}} = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\left|\frac{z_A-z_B}{z_A}\right| = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \; [2\pi]$$

إذن $\frac{z_A - z_B}{z_A} = [\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{\pi}{8}]$

ب) نستنتج من ذلك أن

$$(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} i = \sqrt{2+\sqrt{2}} (\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8})$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} i$$

إذن: $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ ، $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

تمرين (رقم 71)

1) أ) $\frac{c}{b} = \frac{m(1+i)}{\sqrt{3}+i} = \frac{m(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4}$

$$= \frac{m(\sqrt{3}+1)}{4} + \frac{m(\sqrt{3}-1)}{4} i$$

ب) $\frac{c}{b} = \frac{m(1+i)}{\sqrt{3}+i} = \frac{m\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i)}{2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)}$

$$= \frac{m\sqrt{2}}{2} \frac{[1, \frac{\pi}{4}]}{[1, \frac{\pi}{6}]} = \frac{m\sqrt{2}}{2} [1, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}]$$

$$= [\frac{m\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{12}]$$

$$= \frac{m\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{2})$$

ج) $\frac{m\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{m(\sqrt{3}+1)}{4} + \frac{m(\sqrt{3}-1)}{4} i$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} i$$

إذن $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

2) $z_C = 2+2i$ و $z_B = \sqrt{3}+i$ و $z_A = 1+i\sqrt{3}$

لدينا:

$$AC = |z_C - z_A| = |1+(2-\sqrt{3})i|$$
$$= \sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{2(4-2\sqrt{3})} = \sqrt{2}\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$$
$$= \sqrt{2}|1-\sqrt{3}| = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$BC = |z_C - z_B| = |(2-\sqrt{3})+i|$$
$$= \sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$AB = |z_B - z_A| = |(\sqrt{3}-1)+(1-\sqrt{3})i|$$
$$= (\sqrt{3}-1)|1-i| = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

إذن المثلث ABC متساوي الأضلاع

تمرين (رقم 72)

نعتبر $f\begin{bmatrix} \mathbb{C}^*-\{i\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = \frac{z+1}{-i(z+i)} \end{bmatrix}$

1) $f(i) = \frac{i+1}{-i(i+i)} = \frac{1}{2}(1+i) = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}]$

2) $f(z) = \frac{z+i}{-i(z+i)} = \frac{x+yi+1}{-i(x+yi+i)}$

$$= \frac{(x+1)+yi}{(y+1)-ix} = \frac{((x+1)+yi)((y+1)+xi)}{(y+1)^2+x^2}$$

$$= \frac{x+y+1}{(y+1)^2+x^2} = \frac{x^2+x+y^2+y}{(y+1)^2+x^2} i$$

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(f(z)) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+x+y^2+y = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

إذن $(\mathcal{C})$ هي الدائرة $\mathcal{C}(\Omega(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \frac{\sqrt{2}}{2})$ محروم من النقطة التي إحداثيتها $(0,-1)$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0$$
$$\Leftrightarrow x+y+1 = 0$$

إذن (D) هي المستقيم الذي معادلته $x+y+1=0$ محروم من النقطة التي إحداثيتها $(0,-1)$

3) أ) $|f(z)| = \left|\frac{z+1}{-i(z+i)}\right| = \frac{|z+1|}{|-i||z+i|}$

$$= \frac{|z-(-1)|}{|z-(-i)|} = \frac{AM}{BM}$$

ب) $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow AM = BM$

إذن المجموعة (Δ) هي واسط القطعة $[AB]$ محروم

من النقطة $O(0,0)$

تمرين (رقم 73)

نعتبر $f\begin{bmatrix} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto f(z) = \frac{\sqrt{3}+i}{z} \end{bmatrix}$

1) $f(1) = \sqrt{3}+i = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = [2, \frac{\pi}{6}]$

$f(-1) = -\sqrt{3}-i = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2})i) = [2, -\frac{5\pi}{6}]$

$f(\sqrt{3}-i) = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = [1, \frac{\pi}{3}]$

2) أ) $|f(z)| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{z}\right| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{|z|} = \frac{2}{|z|} = 1$

$$\Leftrightarrow |z| = 2 \Leftrightarrow OM = 2$$

إذن (D_1) هي الدائرة $\mathcal{C}(O, 2)$

ب) $f(z) = \frac{\sqrt{3}+i}{z} = \frac{\sqrt{3}+i}{x+yi} = \frac{(\sqrt{3}+i)(x-yi)}{x^2+y^2}$

$$= \frac{\sqrt{3}x+y}{x^2+y^2} + \frac{x-\sqrt{3}y}{x^2+y^2} i$$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y = 0$$

إذن (D_2) هي المستقيم الذي معادلته: $\sqrt{3}x+y=0$ محروم من النقطة $O(0,0)$

ج) $arg(f(z)) \equiv arg(\sqrt{3}+i) - arg(z) \quad [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{6} - arg(z) \quad [2\pi]$$
$$\equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

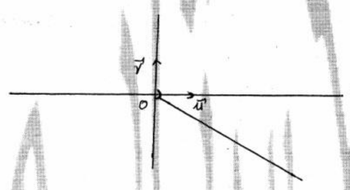
$\Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

نضع $z = x + yi$

$z = x + yi = [r, -\frac{\pi}{6}]$

$= \frac{\sqrt{3}r}{2} - \frac{r}{2}i$

اذن : $(D_z) : \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ x + \sqrt{3}\,y = 0 \end{cases}$



تمرين رقم 74

1) $M_{(z)} \in \mathcal{C}(I, \frac{1}{2}) \Leftrightarrow IM = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |z + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |z + \frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (z + \frac{1}{2})\overline{(z + \frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (z + \frac{1}{2})(\bar{z} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$

2) أ) $2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z\bar{z} + z) + (z\bar{z} + \bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow z(\bar{z} + 1) + \bar{z}(z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z(\bar{z} + 1) = -\bar{z}(z + 1)$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{z} + 1}{\bar{z}} = -\frac{z + 1}{z}$

$\Leftrightarrow \overline{\left(1 + \frac{1}{z}\right)} = -\left(1 + \frac{1}{z}\right)$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{z} \in i\mathbb{R}$

ب) لدينا :

$\frac{1 - z^2}{z - z^2} = \frac{(1 - z)(1 + z)}{z(1 - z)} = \frac{1 + z}{z} = 1 + \frac{1}{z} \in i\mathbb{R}$

وبما أن

$(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NA}) \equiv \arg\left(1 + \frac{1}{z}\right) \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

فان المثلث AMN قائم الزاوية في N

تمرين رقم 75

1) نضع $z = x + yi$

النقط M و M' و M'' تنتمي إلى دائرة مركزها O

$\Leftrightarrow OM = OM' = OM''$

$\Leftrightarrow |z| = |\frac{1}{z}| = |z + 1|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |\frac{1}{z}| = |z| \\ |z + 1| = |z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{|z|} = |z| \\ |z + 1| = |z| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z + 1|^2 = |z|^2 \end{cases}$

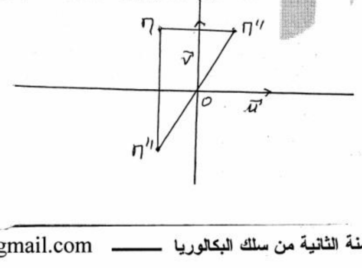
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x + 1)^2 + y^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

اذن : $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

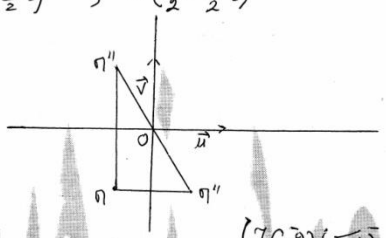
2) اذا كان : $M\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

فان $M'\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ و $M''\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$



اذا كان : $M\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

فان $M'\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ و $M''\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$



تمرين رقم 76

يجب أن تكون $z \neq 0$

ولكي تكون النقط M و M' و M'' مختلفة مثنى مثنى يجب أن تكون $z \neq 1$ و $z \neq i$

تكون النقط M و M' و M'' مستقيمية اذا وفقط اذا كان

$\frac{z_{M''} - z_M}{z_{M'} - z_M} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{z^2 - 1}{\frac{1}{z^2} - 1} = -z^2 \in \mathbb{R}$

نضع $z = x + yi$

لدينا $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xy\,i$

$-\ z^2 \in \mathbb{R} \iff xy = 0$

$\iff x = 0$ أو $y = 0$

$\iff z \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ أو $z \in i\mathbb{R}^* - \{i\}$

تمرين رقم 77

لكي تكون النقط Ω و Ω' و Ω'' مختلفة مثنى مثنى يجب أن تكون: $z \neq 1$ و $z \neq -1$ و $z \neq 0$

$\Omega\Omega'\Omega''$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω

$$\iff \begin{cases} \Omega\Omega' = \Omega\Omega'' \\ (\overrightarrow{\Omega\Omega'}, \overrightarrow{\Omega\Omega''}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z-1| = |z^2-1| \\ \arg\left(\frac{z^2-1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z+1| = 1 \\ \arg(z+2) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$\iff z+1 = [1, \frac{\pi}{2}]$ أو $z+1 = [1, -\frac{\pi}{2}]$

إذن $z_1 = -1 + i$ ، $z_2 = -1 - i$

$\Omega\Omega'\Omega''$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω'

$$\iff \begin{cases} \Omega'\Omega = \Omega'\Omega'' \\ (\overrightarrow{\Omega'\Omega}, \overrightarrow{\Omega'\Omega''}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z-1| = |z^2-z| \\ \arg\left(\frac{z^2-z}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$\iff z = [1, \frac{\pi}{2}]$ أو $z = [1, -\frac{\pi}{2}]$

إذن $z_3 = i$ ، $z_4 = -i$

$\Omega\Omega'\Omega''$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في Ω''

$$\iff \begin{cases} \Omega''\Omega = \Omega''\Omega' \\ (\overrightarrow{\Omega''\Omega}, \overrightarrow{\Omega''\Omega'}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z^2-1| = |z^2-z| \\ \arg\left(\frac{z^2-z}{z^2-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z+1| = |z| \\ \arg\left(\frac{z}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\frac{z}{z+1}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

$\iff \frac{z}{z+1} = i$ أو $\frac{z}{z+1} = -i$

إذن $z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن $S = \{(-1+i), (-1-i), i, -i, (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i), (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)\}$

تمرين رقم 78

لكي تكون النقط Ω و Ω' و Ω'' مختلفة مثنى مثنى يجب أن تكون: $z \neq i$ و $z \neq 1$ و $z \neq 0$

المثلث $\Omega\Omega'\Omega''$ متساوي الأضلاع.

$$\iff \begin{cases} \Omega'\Omega = \Omega'\Omega'' \\ (\overrightarrow{\Omega'\Omega}, \overrightarrow{\Omega'\Omega''}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} \Omega'\Omega = \Omega'\Omega'' \\ (\overrightarrow{\Omega'\Omega}, \overrightarrow{\Omega'\Omega''}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega'\Omega = \Omega'\Omega'' \\ (\overrightarrow{\Omega'\Omega}, \overrightarrow{\Omega'\Omega''}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z-i| = |zi-i| \\ \arg\left(\frac{zi-i}{z-i}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\frac{zi-i}{z-i}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{zi-i}{z-i}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$\iff \frac{zi-i}{z-i} = [1, \frac{\pi}{3}] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\iff z = \frac{1-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}(1+i)$

$$\begin{cases} \Omega'\Omega = \Omega'\Omega'' \\ (\overrightarrow{\Omega'\Omega}, \overrightarrow{\Omega'\Omega''}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z-i| = |zi-i| \\ \arg\left(\frac{zi-i}{z-i}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left|\frac{zi-i}{z-i}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{zi-i}{z-i}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

$\iff \frac{zi-i}{z-i} = [1, -\frac{\pi}{3}] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\iff z = \frac{1+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}(1+i)$

إذن $S = \left\{\frac{1-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}(1+i), \frac{1+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}(1+i)\right\}$

5 الدوال اللوغاريتمية

1

بسط التعابير التالية :

1) $\ln\sqrt{3} + \ln 6 - \ln 9$ 2) $\ln 8 + \ln\sqrt[3]{2} - \ln 16$

3) $\ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{7} + \ln\frac{7}{9}$ 4) $\ln\frac{35}{12} + \ln\frac{6}{7} + \ln\frac{4}{5}$

2

بسط التعابير التالية :

1) $\ln(\sqrt{2}+1)^{2007} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2007}$

2) $\ln^2(2-\sqrt{3}) - \ln^2(2+\sqrt{3})$

3) $\ln\sqrt{e} - 3\ln(e^2) + \ln(2e) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

4) $2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) + \ln\sqrt{e}$

3

اكتب بدلالة $\ln 3$ كل عدد من الأعداد التالية :

1) $\frac{1}{4}\ln 81 + \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27}$

2) $\ln 6 + \ln 18 - \ln\frac{2}{3}$

3) $\ln 12 + \ln 8 - \ln 4^{\frac{1}{3}}$

4) $\ln(9\sqrt{3}) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right) - \ln(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

4

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعاً. اكتب بدلالة $\ln a$ و $\ln b$ مايلي:

1) $\frac{1}{3}\ln(a^2\sqrt{b})$ 2) $\ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right)$

3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)$ 4) $\ln\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right)^2$

5

x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا. بَيِّنْ أن:

1) $\ln\sqrt{xy} = \frac{\ln x + \ln y}{2}$ 2) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

3) $\ln(\sqrt[3]{xy}) - \frac{1}{3}\ln(x^2) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

4) $\ln x + \ln y \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{xy} \geq e$

8

حدد مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

1) $x \mapsto \ln(2x)$ 2) $x \mapsto \ln(-x)$

3) $x \mapsto \ln(1+x)$ 4) $x \mapsto \ln(1-|x|)$

5) $x \mapsto \ln(|x|-3)$ 6) $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$

9

حدد مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

1) $x \mapsto \frac{1}{x}\ln(x+2)$ 2) $x \mapsto \frac{1}{1-\ln x}$

3) $x \mapsto \ln(x^2-4)$ 4) $x \mapsto \ln((1+3x)(x+2))$

5) $x \mapsto \ln(1+3x) + \ln(x+2)$

6) $x \mapsto \frac{\ln(2x-1)}{\ln(x+1)}$ 7) $x \mapsto \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

10

حل في IR المعادلات التالية :

1) $\ln x=1$ 2) $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln 5$

3) $\ln x=3$ 4) $\ln x=-2$ 5) $x\ln x=0$

11

حل في IR المعادلات التالية :

1) $\ln(3x)=\ln(x-1)$ 2) $\ln(x-2) = 2\ln 3 + \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

3) $\ln(x^2+x-2) = \ln(4)$ 4) $\ln(2x-1) - \ln(x+1) = 0$

12

حل في IR المعادلات التالية :

1) $2\ln(x-3)-\ln(x+3)=0$ 2) $\ln(x-3)^2-\ln(x+3)=0$

3) $\ln|-x+1| - \ln|8x-1| = 0$ 4) $\ln\sqrt[3]{2x-1} - \frac{1}{3}\ln(x+5) = 0$

13

1) حل في IR المعادلة : $2X^2-3X+1=0$

2) استنتج مجموعة حلول كل معادلة من المعادلات التالية :

أ) $2\ln^2(x)-3\ln(x)+1=0$

ب) $2\ln(x+1) - 3 = -\frac{1}{\ln(x+1)}$

ج) $\ln(x^2) + \frac{1}{\ln|x|} = 3$ د) $2\ln^3(x)=3\ln^2(x)-\ln(x)$

14

حل في IR المعادلات التالية :

1) $3\ln^2(x)-5\ln(x)-2=0$ 2) $\ln^2(x) + 2\sqrt{2}\ln(x) + 2 = 0$

3) $-2\ln^2(x)+3\ln(x)+5=0$ 4) $\ln^2(x^2-1)-\ln(x^2-1)-2=0$

5) $\ln^4(x)-\ln^2(x)-2=0$

15

حل في IR^2 النظمتين التاليتين:

1) $\begin{cases} x+y=5 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$

16

حل في IR^2 النظمتين التاليتين:

1) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ \frac{\ln x}{\ln y} = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

17

حل في IR المتراجحات التالية :

1) $\ln x<2\ln 3$ 2) $1 - \ln x \geq 0$

3) $5 + 3\ln x \leq 0$ 4) $3+5\ln(2x)>0$

18

حل في IR المتراجحات التالية :

1) $\ln(x+2)-\ln(-3x+1)<0$ 2) $\ln(3x-2) \geq -3\ln 2$

3) $\ln(x-1) + \ln(x+1) \leq 2 - \ln 3$

4) $\ln(x-1)+\ln(x-4)>\ln(x+4)$

19

حل في IR المتراجحات التالية :

1) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \geq 0$ 2) $\ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) < 1$

3) $\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \geq 0$ 4) $\ln(x^2+2x+2)>0$

20

حل في IR المتراجحات التالية :

1) $(\ln x)(1-2\ln x)<0$ 2) $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 \geq 0$

3) $\frac{3+\ln^2(x)}{1-\ln x} \leq 2$ 4) $\frac{\ln x - 1}{1+\ln x} > \frac{1}{\ln x}$

21 البرهان على متساويات

بَيِّنْ أن:

1) $(\forall x \in]0;+\infty[); \ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

2) $(\forall x \in]0;+\infty[); \ln(x^2+1) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

3) $(\forall x \in]2;+\infty[)\ ;\ \ln(x-2\sqrt{x-1}) = 2\ln(\sqrt{x-1}-1)$

4) $(\forall x \in]0;+\infty[)\ ;\ \ln^2(x+1) - \ln^2(x) = \ln(x^2+x) \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

22

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}(x+2)\ln x$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x + 1}{x}$

3) $\lim_{x\to-\infty}x^2 + 2\ln(-x)$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x + 5}{x^2}$

23

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 0^+}(2x+\ln x)$ 2) $\lim_{x\to 0^+}(1+x^2+3x\ln x)$

3) $\lim_{x\to 0^+}(2x - x^2\ln x)$ 4) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$

24

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}(x^4 - \ln x)$ 2) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{x^3} + \ln x\right)$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x^3}$ 4) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-x}$

25

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ 2) $\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2}$

3) $\lim_{x\to e}\frac{\ln x - 1}{x-e}$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

26

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2x+\ln x}{x}$ 2) $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\frac{\ln x}{x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3+\ln(x+1)}{x+1}$ 4) $\lim_{x\to+\infty}(\ln^2(x) - \ln x)$

27

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)$ 2) $\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)\ln(x-1)$

3) $\lim_{x\to 0^+}(x^3-x)\ln x$ 4) $\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x+1} + \ln(1+x)\right)$

28

احسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{3+2x^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^3-2}{x}\right)$

3) $\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\ln\left(\frac{x+1}{-x+2}\right)$ 4) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)$

29

أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I =]0;+\infty[\ ;\ f(x) = x^2 - \ln x$

2) $I =]0;+\infty[\ ;\ f(x) = x\ln x$

3) $I =]0;+\infty[\ ;\ f(x) = \frac{\ln x}{x}$

4) $I =]1;+\infty[\ ;\ f(x) = \frac{x-2}{\ln x}$

30 المشتقة اللوغاريتمية

حدد المشتقة اللوغاريتمية للدوال العددية f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I = IR\ ;\ f: x \mapsto 3x^4 - 5x - 1$

2) $I = \left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\ ;\ f: x \mapsto \cos x - \tan(2x)$

3) $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\ ;\ f: x \mapsto \sqrt{2x-1}$

4) $I =]0;+\infty[\ ;\ f: x \mapsto \ln x$

31 مشتقة الدالة $\ln|u(x)|$

ادرس قابلية اشتقاق الدالة العددية f على المجال I، ثم احسب $f'(x)$ لكل x من I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I =]-\infty;0[\ ;\ f(x) = 3x^4 + 2\ln(-x)$

2) $I = \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[\ ;\ f(x) = \ln(1+3x)$

3) $I =]-1;1[\ ;\ f(x) = \ln(1-x^2)$

4) $I =]0,+\infty[\ ;\ f(x) = \ln(x^3)$

32

ادرس قابلية اشتقاق الدالة العددية f على المجال I، ثم احسب $f'(x)$ لكل x من I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I =]-\infty;-3[\ ;\ f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$

2) $I =]-\infty;2[\ ,\ f(x) = \ln\sqrt{2-x}$

3) $I =]0;1[\ ;\ f(x) = \ln|\ln x|$ 4) $I =]0;\pi[\ ;\ f(x) = \ln(\sin x)$

33

ادرس تغيرات الدالة العددية f على مجموعة تعريفها في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=(\ln x)^3$ 2) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

3) $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)$ 4) $f(x)=x(1+\ln x)$

34

ادرس تغيرات الدالة العددية f على مجموعة تعريفها في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\ln^2(x)-\ln(x)$ 2) $f(x) = 2 + \frac{x}{\ln x}$

3) $f(x) = \sqrt{1-\ln^2(x)}$ 4) $f(x) = \frac{2\ln x}{1-\ln x}$

35

ادرس الدالة العددية f ومثل منحناها في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x) = \ln x - 2x$ 2) $f(x) = \ln|x|$

3) $f(x) = \ln(x-2)$ 4) $f(x) = x\ln x$

36

حدد الدوال الأصلية للدالة العددية f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

1) $I =]0;+\infty[\ ;\ f(x) = -\frac{5}{x}$ 2) $I =]-\infty;0[\ ;\ f(x) = \frac{2}{x}$

3) $I = IR\ ;\ f(x) = \frac{-6x-3}{x^2+x+2}$

4) $I =]3;+\infty[\ ;\ f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+1}$

37

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2) حدد عددين حقيقيين a و b بحيث: $(\forall x \in D): f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$

3) استنتج الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-\infty;-2[$

4) حدد الدالة الأصلية F للدالة f على $]-\infty;-2[$ بحيث $F(-3)=\ln 2$.

38

بسط التعابير التالية :

1) $\log_2(8) - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2(9) - \log_2(3)$

2) $\log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_3\left(\frac{1}{27}\right) + \log_3\left(\frac{4}{5}\right)$

3) $\log 100 - \log(10^{2007}) + \log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$

4) $\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \log\left(\frac{99}{100}\right)$

39

1) بَيِّنْ أن: لكل a و b من $]1;+\infty[$

أ) $\log_b(a)=\frac{1}{\log_a(b)}$ ب) $\log_a(b)=\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right)$

2) لتكن a و b و c أعدادا حقيقية موجبة قطعا. بسط التعابير التالية

أ) $\log_{\frac12}\left(\frac{a^2}{b}\right)+3\log_{\frac12}\left(\sqrt[3]{c}\,\frac{b}{a}\right)-\log_{\frac12}\left(\frac{a}{b^2}\right)$

ب) $\log(ab^3)-\log(100b^2a)-\log\sqrt{10b}$

40

حل في IR المعادلات التالية:

1) $\log(x+2)+\log x=1$

2) $\log_{\sqrt{2}}(x-1)-\log_{\sqrt{2}}(2x+1)=\log_{\sqrt{2}}\left(\frac13\right)$

3) $\log_2(2x)\times(\log_2(x)-1)=0$

4) $(\log x)^2+\log x-3=0$

41

حل في IR المتراجحات التالية:

1) $\log_5(x+3)<\log_3(2x)$ 2) $\log_{\frac13}(3x-1)\geq\log_{\frac13}(x+1)$

3) $\log(-x+3)<1$ 4) $\log(x+2)-3\geq 0$

42

حل في IR المتراجحات التالية:

1) $\frac{\log_2(x)-1}{2-\log(x)}\geq 0$ 2) $x\log_{\frac13}(0,3)<2$

3) $2\log_5(x+4)+3\log_{25}(6)>\log_{25}(12)$

4) $(\log(x+2))^2-\log(x+2)-2\geq 0$

43

حل في IR^2 النظمات التالية:

1) $\begin{cases}\log\left(\frac{x}{y}\right)=\frac23\\ \log x+\log y=\frac13\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_x(e)+\log_y(e)=\frac73\\ \ln(xy)=\frac72\end{cases}$

3) $\begin{cases}\log_3(x^3)-\log_3(y^2)=-4\\ \log_3(x)+\log_3(y^4)=1\end{cases}$

44

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

ادرس كل دالة من الدوال التالية ومثل منحنى كل واحدة منها في معلم:

1) $x\mapsto\log(x)$ 2) $x\mapsto\log_{\frac13}(x)$

3) $x\mapsto-\log_5(x)$ 4) $x\mapsto\log_{0,2}(-x)$

5) $x\mapsto\log_2(1+x^2)$ 6) $x\mapsto 3-\log(x+2)$

45

1) بَيِّنْ أن الدالة: $x\mapsto\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ دالة فردية.

2) بَيِّنْ أن الدالة: $x\mapsto\ln(x^2-x+1)+\ln(x^2+x+1)$ دالة زوجية

3) بَيِّنْ أن النقطة $I\left(-\frac12;0\right)$ مركز تماثل منحنى الدالة: $x\mapsto\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

4) بَيِّنْ أن المستقيم الذي معادلته: $x=1$ محور تماثل منحنى الدالة: $x\mapsto\ln(x^2-2x+2)$

46

احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-3x+1-\ln x)$

2) $\lim_{x\to+\infty}(-x+\ln(x^2-x+2))$

3) $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-1-\ln(x^3+2x^2-1))$

4) $\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x-1+\ln(1-x^3))$

47

احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)$

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{\ln(x^2-x+2)}{x-1}\right)$

3) $\lim_{x\to-\infty}(x^2-1-\ln(1-x^3))$

48

احسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x+2}{x+\ln x}$ 3) $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{3\ln x+2}{x+\ln x}$

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln^2(x)}{\ln(x)-\ln^3(x)}$ 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+\ln x}{2+\ln x}$

49

1) احسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x^3}$

لاحظ أن: $\frac{\ln^2(x)}{x^3}=\left(\frac{\ln x}{x^{\frac32}}\right)^2=\left(\frac23\,\frac{\ln(x^{\frac32})}{x^{\frac32}}\right)^2$ وبوضع $X=x^{\frac32}$

تحقق من أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x^3}=\lim_{X\to+\infty}\left(\frac23\,\frac{\ln X}{X}\right)^2$، ثم استنتج النهاية المطلوبة

2) احسب النهايات التالية مستعملا نفس الطريقة:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3(x)}{x^2}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{\sqrt[3]{x}}$ ، $\lim_{x\to0^+}x^2\ln^3(x)$ ، $\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln^2(x)$

50

احسب النهايات التالية

1) $\lim_{x\to0^+}x^3\ln^2x$ 2) $\lim_{x\to0}x^{\frac32}\ln^3x$ (ضع $X=x^{\frac32}$)

3) $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x$ (ضع $X=\sqrt{x}$) 4) $\lim_{x\to0^+}\sqrt[3]{x}\ln^2x$ (ضع $X=\sqrt[3]{x}$)

51

بَيِّنْ أن: $(\forall x\in]0;+\infty[)\ x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

يمكن دراسة تغيرات كل من:

$f:x\mapsto\ln(1+x)-x$ و $g:x\mapsto x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)$

52

بَيِّنْ أن: لكل x و y من $]0;+\infty[$ $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{\ln x+\ln y}{2}$

53

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً بحيث $a+b=1$

الهدف من هذا التمرين هو البرهان على المتفاوتة:

$(*)\quad a\ln\left(\frac1a\right)+b\ln\left(\frac1b\right)\leq\ln 2$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي:

$\begin{cases}f(x)=-x\ln x-(1-x)\ln(1-x);0<x\\ f(0)=f(1)=0\end{cases}$

1) احسب $f'(x)$ لكل x من $]0;1[$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.

2) استنتج أن: $f(x)\leq\ln 2$ ، $\forall x\in[0;1]$

3) استنتج المتفاوتة $(*)$.

54

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي:

$\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=2.\sqrt{u_n};n\in IN^*\end{cases}$

1) احسب u_2 و u_3 و u_4 و u_5، اكتب النتائج على الشكل 2^r حيث $r\in Q$

2) نعتبر المتتالية العددية $(V_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي:

$V_n=\ln(u_n)-\ln 4$

أ) بَيِّنْ أن $(V_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية.

ج) احسب $\lim V_n$ واستنتج $\lim u_n$

55

وضع مبلغ من المال في بنك بنسبة 13% سنويا.

بعد كم سنة سيتضاعف هذا المبلغ؟

56

لتكن $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية، حدها الأول $u_1=2$، وأساسها $q=\frac13$.

لكل n من IN^*، نضع $v_n=\ln(u_n)$

1) بَيِّنْ أن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية حسابية محدداً أساسها وحدها الأول.

2) بَيِّنْ أن لكل n من IN^*:

$\frac1n(v_1+v_2+....+v_n)=\ln 2-\frac{(n-1)\ln 3}{2}$

57

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي: $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

1) احسب u_1 و u_2

2) احسب $u_{n+1}-u_n$ واستنتج رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

3) لكل n من IN^*، نضع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

أ) احسب S_n بدلالة n. ب) استنتج $\lim_{n\to+\infty}S_n$

58

أجريت دراسة على مجموعة من البكتيريات، لوحظ خلالها أن عدد البكتيريات ينخفض بنسبة 5% كل ساعة.

بعد كم ساعة يكون عدد البكتيريات أقل من ربع عددها الأصلي؟

59

في الكيمياء، مفهوم pH يعني "جُهْد الهيدروجين".

pH يمكن من معرفة الطبيعة الحمضية أو القاعدية لمحلول معين.

يُعَرَّفُ pH المحلول المائي بالعلاقة $pH=-\log[H^+]$ حيث $\log$ هو اللوغاريتم العشري.

حيث $[H^+]$ يمثل تركيز إيونات الهيدروجين في المحلول.

1) عند $25°C$، بالنسبة لمحلول حمضي $1<pH<7$ أما بالنسبة لمحلول قاعدي فإن $7<pH<14$ أطر $[H^+]$ في هاتين الحالتين.

2) في بول اللواحم، معدل $[H^+]$ هو: $[H^+]=3,16\times10^{-6}\ mol/l$

احسب pH هذا البول ثم استنتج طبيعته.

3) في الدم، $[H^+]=3,98\times10^{-8}mol/l$ بَيِّنْ أن الدم قاعدي.

60

يقول القانون الثالث لكيبلر أن مربع الدور T لحركة جرم حول الشمس يتناسب مع مكعب المسافة d الفاصلة بين الجرم والشمس، يعني: $T^2=k.d^3$

1) اكتب علاقة بين $\ln T$ و $\ln d$ (حيث ln هي الدالة اللوغاريتمية النبيرية).

2) بَيِّنْ أن النقط $M(\ln T;\ln d)$ (في معلم) هي نقط مستقيمية.

3) تحقق من العلاقة السابقة بالنسبة للأجرام التالية، حيث تم اعتبار المسافة بين الأرض والشمس "وحدة المسافة".

الكوكب	المسافة d	T (بالسنوات)
الأرض	1	1
عطارد	0,387	0,241
الزهرة	0,723	0,615
زحل	9,541	29,457
بلوتون	39,507	248,350

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

61

I– لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$f(x)=x-2\sqrt{x-1}$ حيث $x\in[1;+\infty[$

1) بَيِّنْ أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 1

2) بَيِّنْ أن $f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$ وب) استنتج أن f تناقصية على $[1;2]$ وتزايدية على المجال $]2;+\infty[$، ثم أعط جدول التغيرات.

3) بَيِّنْ أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ وحدد الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f.

4) أ– بَيِّنْ أن f_1 تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده (حيث f_1 قصور الدالة f على المجال $[2;+\infty[$)، ثم عرف دالتها العكسية f_1^{-1} (لاحظ أن $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2$)

ب– أعط معادلة المماس لمنحنى الدالة f_1^{-1} في النقطة $A(1;5)$

5) أنشئ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ منحنى f ومنحنى f_1^{-1}

II– نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي $g(x)=\ln(x-2\sqrt{x-1})$

1) حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g، ثم احسب النهايات عند محدات D_g

2) ادرس تغيرات الدالة g (يمكنك استعمال النتائج السابقة)

3) حدد الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة g

(لاحظ أن $\frac{\ln(f(x))}{x}=\frac{\ln(f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}$)

4) أنشئ منحنى الدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

62

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR^+ بما يلي:

$\begin{cases}f(x)=x(\ln x-1)^2\ ;x\neq0\\ f(0)=0\end{cases}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$

1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ– بَيِّنْ أن: $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x(\ln x)^2=0$ ، ثم استنتج أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر.

ب– ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين في الصفر، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

3) أ– بَيِّنْ أن: $f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)$ لكل x من IR^{+*}

ب– أعط جدول تغيرات الدالة f

4) أ– حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C).

ب– ارسم المنحنى (C) (نأخذ: $\frac1e=0,4$ و $e=2,7$)

63

I– نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$g(x)=2x^2+1-\ln x$$

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x)$.

بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2) لتكن g' الدالة المشتقة للدالة g.

أ– احسب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$

ب– ضع جدول تغيرات الدالة g.

ج– استنتج أن لكل x من $]0;+\infty[$: $g(x)>0$

II– نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=2x-2+\frac{\ln x}{x}$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) حدد مقاربي المنحنى (C).

3) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f

بيّن أن لكل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1}{x^2}g(x)$

4) ضع جدول تغيرات الدالة f

5) لتكن f'' الدالة المشتقة الثانية للدالة f.

أ– احسب $f''(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب– حدد نقطة انعطاف المنحنى (C).

6) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$ و $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4,5$ و $f(e^{\frac{3}{2}})\simeq 7,3$.

64

I– لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي

$$g(x)=x-\ln x$$

1) حدد D_g مجموعة تعريف الدالة g.

2) احسب نهايات g عند محدات D_g.

3) احسب $g'(x)$ وأعط جدول تغيرات الدالة g.

4) استنتج أن: $x>\ln x$ لكل x من IR^*_+.

II– لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x-\ln x}, x>0\\ f(0)=-1\end{cases}$$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) بيّن أن مجموعة تعريف الدالة f هي: $D=[0;+\infty[$

2) أ– بيّن أن f متصلة على اليمين في الصفر.

ب– احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ– بيّن أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

ب– بيّن أن $f'(x)=\frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$ لكل x من $D-\{0\}$

وأعط جدول تغيرات f.

4) أ– حدد تقاطع المنحنى (C) والمستقيم $(\Delta): y=1$

ب– بيّن أن (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

ج– أنشئ (C) (خذ $e\approx 2,7$ ، $\ln 2\approx 0,7$ ، $\|\vec{i}\|=1cm$).

65

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي:

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

1) نضع: $(\forall x\in IR); u(x)=\sqrt{1+x^2}+x$

أ) بيّن أن: $(\forall x\in IR); u(x)u(-x)=1$

ب) استنتج أن f معرفة على IR وأنها فردية.

2) أ– بيّن أن f قابلة للاشتقاق على IR، ثم احسب $f'(x)$

ب– استنتج الدوال الأصلية للدالة: $g: x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ على IR

II) نعتبر الدالة العددية F المعرفة بمايلي:

$$F(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$$

1) بيّن أن: $(\forall x\in IR); F(2x)=\ln 2+f(x)$

2) ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

بيّن أن النقطة $I(0;\ln 2)$ مركز تماثل للمنحنى (C).

66

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $D=[0;1[\cup]1;+\infty[$ بما يلي:

$f(0)=0$ و $f(x)=x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2$ إذا كان $x\neq 0$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ– بيّن أن f متصلة على اليمين في النقطة 0.

ب– بيّن أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0.

2) احسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ– تحقق من أن لكل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$ ، لدينا

$$f(x)-x=\frac{x}{\ln x}\left(\frac{1}{\ln x}-2\right)$$

ب– ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

ج– حدد تقاطع المنحنى (C) والمستقيم الذي معادلته $y=x$.

4) أ– بيّن أن: $f'(x)=\left(\frac{\ln x-1}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln^2 x-\ln x+2}{\ln^2 x}\right)$

لكل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$

ب– أعط جدول تغيرات الدالة f.

د– ارسم المنحنى (C).

67

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=\ln|x^2-x| \; ; \; x<0\\ f(x)=x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}} \; ; \; x>0\end{cases}$$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

2) ليكن C_f منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

3) أ– بيّن أن

$$(\forall x\in]0;+\infty[) \; ; \; f'(x)=\left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$$

ب– احسب $f'(x)$ لكل x من $]-\infty;0[$.

ج– ادرس تغيرات f.

4) ادرس وضع منحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ على $]0;+\infty[$.

5) أنشئ منحنى f.

68

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$g(x)=\ln(1+x)-x$$

1) أ– احسب $g'(x)$ لكل x من $[0,+\infty[$، ثم بيّن أن الدالة g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$.

ب– استنتج أن: $g(x)\leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

2) بيّن أن: $0<\ln(1+x)<x$ لكل x من $]0,+\infty[$.

II/ نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

وليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة $1cm$).

1) بيّن أن حيز تعريف الدالة f هو: $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

2) أ– بيّن أن f دالة فردية.

ب– احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)$.

3) أ– بيّن أن: $(\forall x\in D) \; ; \; f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2-1}$.

ب– استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]1,+\infty[$.

4) أ– تحقق من أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C).

ب– ادرس إشارة $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(يمكن ملاحظة أن: $(\forall x\in D) \; ; \; \frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$).

ج– استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ).

5) أنشئ (C) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ (نأخذ $\sqrt{3}\simeq 1,7$ و $f(\sqrt{3})\simeq 3$).

69

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بمايلي:

$$f(x)=\frac{x}{2}-\ln\left(1+\frac{|x|}{2}\right)$$

1) أ– بيّن أنه لكل x من IR^*:

$$f(x)=x\left(\frac{1}{2}-\frac{\ln|x|}{x}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|x|}\right)$$

ب– استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ– ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0.

ب– ادرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

3) أ– ادرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى الدالة f

ب– بيّن أن: $f(x)\leq\frac{x}{2}$ لكل x من IR.

4) ارسم منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) نعتبر الدالة F المعرفة على $]-\infty;0[$ بمايلي:

$$F(x)=(x-2)\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-x$$

أ– احسب $F'(x)$ لكل x من $]-\infty;2[$.

ب– استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

70

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases}f(0)=0\\ f(x)=x\sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)} & ;0<x\leq 1\\ f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}-x+1 & ;x\geq 1\end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ– بيّن أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر.

ب– ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر.

ج– ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في 1.

3) أ– احسب $f'(x)$ من أجل x ينتمي إلى كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]0;1[$

ب– أعط جدول تغيرات الدالة f

4) أ– احسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)$، ثم أعط التأويل الهندسي للنتيجة.

ب– ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم ذي المعادلة: $y=-x+1$ على المجال $]1,+\infty[$

5) ارسم المنحنى (C).

71

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=(\ln x)\times\ln(1-x) \; ; \; x\in]0;1[\\ f(0)=0 \;\text{ و }\; f(1)=0\end{cases}$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=6cm$.

1) أ– احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)}{x}$، ثم استنتج أن f متصلة على اليمين في الصفر.

ب– ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر.

2) أ– بيّن أن: $(\forall x\in[0;1]); f(1-x)=f(x)$.

ب– أوّل هندسياً هذه النتيجة.

3) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;1[$ بما يلي:

$$g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$$

أ– احسب $g'(x)$ لكل x من $]0;1[$ ثم بيّن أن: $(\forall x\in]0;1[) \; ; \; g''(x)=\frac{2x-1}{x(1-x)}$.

استنتج أن المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلين بالضبط α و β في المجال $]0;1[$. ثم استنتج إشارة $g'(x)$ لكل x من $]0;1[$.

ج– احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$.

د– احسب $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

4) أ– احسب $f'(x)$ لكل x من $]0;1[$ ثم تحقق من أن إشارة $f'(x)$ مرتبطة بإشارة $g(x)$.

ب– أعط جدول تغيرات الدالة f

ج– بيّن أن $(\forall x\in]0;1[); 0<(\ln x)\times(\ln(1-x))\leq(\ln 2)^2$.

72

I) بَيِّنْ أن: (1) $(\forall x \in]0;+\infty[); x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right); n \in IN^* \end{cases}$$

1) بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN^*);\ u_n > 0$

2) بَيِّنْ أن:

$$(\forall n \in IN^*); \ln(u_n) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3) لكل n من IN^*، نضع:

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \quad \text{و} \quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

أ- بَيِّنْ باستعمال العلاقة (1) أن:

$$(2)\quad (\forall n \in IN^*); S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$$

ب- احسب S_n و T_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

4) بَيِّنْ أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا، ثم استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

نضع $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5) بَيِّنْ أن: $\frac{5}{6} \leq \ln \ell \leq 1$ واستنتج تأطيرا للعدد ℓ.

73 ثابتة أولير

الهدف من هذا التمرين هو أن نبرهن على تقارب المتتالية العددية $(c_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بمايلي: $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \ln(n)$

1) برهن على أن:

$$(\forall x \in [1;+\infty[); \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$$

وذلك بدراسة دالتين مناسبتين

2) لكل n من IN^*، نضع: $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

أ- بَيِّنْ أن: $(\forall n \in [1;+\infty[); u_{n+1} - 1 \leq \ln(1+n) \leq u_n$

ب- استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بمايلي:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

أ- استنتج من التأطير المحصل عليه في السؤال 1) أن:

$$(\forall n \in [1;+\infty[); 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ب- تحقق من أن:

$$(\forall n \in IN^* - \{1\}); c_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1)$$

استنتج أن المتتالية $(c_n)_{n\geq 2}$ تزايدية

وأن: $(\forall n \in IN^* - \{1\}); f(1) < c_n < 1 - \frac{1}{n}$

ج- استنتج أن المتتالية $(c_n)_{n\geq 2}$ متقاربة.

العدد λ نهاية المتتالية $(c_n)_{n\geq 2}$ تسمى ثابتة أولر. العالم الرياضي أولير أعطى قيمة مقربة لهذا العدد ما بين 1734م و1735م، ولا نعلم لحد الآن ما إذا كان هذا العدد عدداً جذرياً أم لا جذري.

74

لكل m من IR، نعتبر الدالة العددية f_m المعرفة بمايلي:

$f_m(x) = \ln(x^2 - mx + 1)$.

(C_m) منحنى f_m في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- حدد، حسب قيم m، عدد حلول المعادلة $x^2 - mx + 1 = 0$.

ب- حدد قيم m التي من أجلها تكون الدالة f_m معرفة على IR.

2) نفترض في كل ما تبقى من التمرين أن $-1 < m < 1$.

أ- بَيِّنْ أن جميع المنحنيات (C_m) تمر من نقطة ثابتة يتم تحديد زوج إحداثيتيها.

ب- ادرس تغيرات الدالة f_m وأعط جدول تغيراتها.

ج- أعط معادلة مماس (C_m) في النقطة التي أفصولها 0.

د- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_m) و(C_{m+1}) حسب قيم x.

هـ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_m).

و- أنشئ في نفس المعلم (C_0) و $(C_{\frac{1}{2}})$ و $(C_{-\frac{1}{2}})$.

75

لكل n من IN، f_n هي الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بمايلي:

$$\begin{cases} f_n(x) = nx - x\ln x \ ;\ x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن (C_n) منحنى الدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الأول: دراسة الدالة f_0 (حالة $n=0$).

1) ادرس اتصال الدالة f_0 على اليمين في 0.

2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_0 على اليمين في 0 وأول مبيانيا هذه النتيجة.

3) ادرس تغيرات الدالة f_0 وأعط جدول تغيراتها.

4) حدد الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f_0

5) أنشئ (C_0).

الجزء الثاني: دراسة الدالة f_n

1) احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

2) ادرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر وأول مبيانيا هذه النتيجة.

3) ادرس تغيرات الدالة f_n وأعط جدول تغيراتها.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}).

5) بَيِّنْ أن (C_n) صورة (C_0) بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته e^n.

6) ليكن (T_n) مماس (C_n) في النقطة التي أفصولها e.

بَيِّنْ أن جميع المماسات (T_n) تقطع محور الأراتيب في نقطة ثابتة A يتم تحديدها.

7) أنشئ (T_1) ثم (C_1) في معلم الجزء الأول.

تمرين رقم 1

1) $\ln\sqrt{3} + \ln 6 - \ln 9 = \frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 + \ln 3 - 2\ln 3$
$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$

2) $\ln 8 + \ln\sqrt{2} - \ln 16 = 3\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - 4\ln 2$
$= -\frac{1}{2}\ln 2$

3) $\ln\frac{1}{3} + \ln\frac{3}{5} + \ln\frac{5}{7} + \ln\frac{7}{9} = \ln\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}$
$= -2\ln 3$

4) $\ln\frac{35}{12} + \ln\frac{6}{7} + \ln\frac{4}{5} = \ln\frac{35}{12}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}$
$= \ln 2$

تمرين رقم 2

1) $\ln(\sqrt{2}+1)^{2007} + \ln(\sqrt{2}-1)^{2007} = 2007\left(\ln(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)$
$= 2007 \cdot \ln 1 = 0$

2) $\ln(2-\sqrt{3}) - \ln(2+\sqrt{3}) = \ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
$= \ln(2-\sqrt{3})^2 = 2\ln(2-\sqrt{3})$

3) $\ln\sqrt{e} - 3\ln e^2 + \ln(2e) + \ln\frac{1}{e} =$
$= \frac{1}{2}\ln e - 6\ln e + \ln 2 + \ln e - \ln e$
$= \frac{1}{2} - 6 + \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 - \frac{11}{2}$

4) $2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) + \ln\sqrt{e} =$
$= 2(\ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2}) - (\ln e - \ln 2) + \frac{1}{2}\ln e$
$= 2\left(\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2\right) - 1 + \ln 2 + \frac{1}{2} = \ln 3 - \frac{1}{2}$

تمرين رقم 3

1) $\frac{1}{4}\ln 81 - \ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{27} = \frac{1}{4}\ln 3^4 + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3^3$
$= \ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 - 3\ln 3 = -\frac{3}{2}\ln 3$

2) $\ln 6 + \ln 18 - \ln\frac{2}{3} = \ln 2 + \ln 3 + \ln 2 + 2\ln 3 - \ln 2 + \ln 3$
$= 4\ln 3 + \ln 2$

3) $\ln 12 + \ln 8 - \ln 4^{5/2} = 2\ln 2 + \ln 3 + 3\ln 2 - \frac{5}{2}\cdot 2\ln 2$
$= 5\ln 2 + \ln 3 - 5\ln 2 = \ln 3$

4) $\ln(9\sqrt{3}) + \ln\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - \ln(\sqrt{5}+\sqrt{2}) =$
$= \ln 9 + \ln\sqrt{3} - \ln\left((\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})\right)$
$= 2\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 = \frac{3}{2}\ln 3$

تمرين رقم 4

1) $\frac{1}{3}\ln(a^2\sqrt{b}) = \frac{1}{3}(\ln a^2 + \ln\sqrt{b})$
$= \frac{1}{3}\left(2\ln a + \frac{1}{2}\ln b\right) = \frac{2}{3}\ln a + \frac{1}{6}\ln b$

2) $\ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right) = \ln a^5 - \ln b^3 = 5\ln a - 3\ln b$

3) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right) = \ln a - \ln b - \ln\sqrt{a} + \ln b$
$= \ln a - \frac{1}{2}\ln a = \frac{1}{2}\ln a$

4) $\ln\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{1}{3}(\ln a-\ln b)+2(\ln a-\ln b)$

$=\left(\frac{1}{3}+2\right)(\ln a-\ln b)=\frac{7}{3}(\ln a-\ln b)$

تمرين رقم 5

1) $\ln\sqrt{xy}=\frac{1}{2}\ln(xy)=\frac{1}{2}(\ln x+\ln y)$

2) $\ln\frac{x}{y}+\ln\frac{y}{x}=\ln\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=\ln 1=0$

3) $\ln\sqrt[3]{xy}-\frac{1}{3}\ln x^2=\frac{1}{3}\ln xy+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{x^2}$

$=\frac{1}{3}\left(\ln\left(xy\cdot\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$

4) $\ln x+\ln y\geq 2 \Leftrightarrow \frac{\ln xy}{2}\geq 1$

$\Leftrightarrow \ln\sqrt{xy}\geq \ln e$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}\geq e$

تمرين رقم 8

1) $x\mapsto \ln(2x)$

$x\in D \Leftrightarrow x>0$

اذن $D=]0,+\infty[$

2) $x\mapsto \ln(-x)$

$x\in D \Leftrightarrow (-x)>0 \Leftrightarrow x<0$

اذن $D=]-\infty,0[$

3) $x\mapsto \ln(1+x)$

$x\in D \Leftrightarrow 1+x>0 \Leftrightarrow x>-1$

اذن $D=]-1,+\infty[$

4) $x\mapsto \ln(1-|x|)$

$x\in D \Leftrightarrow 1-|x|>0 \Leftrightarrow |x|<1$

$\Leftrightarrow -1<x<1$

اذن $D=]-1,1[$

5) $x\mapsto \ln(|x|-3)$

$x\in D \Leftrightarrow |x|-3>0 \Leftrightarrow |x|>3$

$\Leftrightarrow x>3$ أو $x<-3$

اذن $D=]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$

6) $x\mapsto \frac{1}{\ln x}$

$x\in D \Leftrightarrow x>0$ و $\ln x\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq 1$

اذن $D=]0,1[\cup]1,+\infty[$

تمرين رقم 9

1) $x\mapsto \frac{1}{x}\ln(x+2)$

$x\in D \Leftrightarrow x+2>0$ و $x\neq 0$

$\Leftrightarrow x>-2$ و $x\neq 0$

اذن $D=]-2,0[\cup]0,+\infty[$

2) $x\mapsto \frac{1}{1-\ln x}$

$x\in D \Leftrightarrow x>0$ و $\ln x\neq 1$

$\Leftrightarrow x>0$ و $x\neq e$

اذن $D=]0,e[\cup]e,+\infty[$

3) $x\mapsto \ln(x^2-4)$

$x\in D \Leftrightarrow x^2-4>0$

$\Leftrightarrow x>2$ أو $x<-2$

اذن $D=]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

4) $x\mapsto \ln((1+3x)(x+2))$

$x\in D \Leftrightarrow (1+3x)(x+2)>0$

x	$-\infty$	-2	$-1/3$	$+\infty$
$1+3x$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$(1+3x)(x+2)$	$+$	0	$-$	0 $+$

اذن $D=]-\infty,-2[\cup]-\frac{1}{3},+\infty[$

5) $x\mapsto \ln(1+3x)+\ln(x+2)$

$x\in D \Leftrightarrow 1+3x>0$ و $x+2>0$

$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$ و $x>-2$

اذن $D=]-\frac{1}{3},+\infty[$

6) $x\mapsto \frac{\ln(2x-1)}{\ln(x+1)}$

$x\in D \Leftrightarrow 2x-1>0$ و $x+1>0$

و $\ln(x+1)\neq 0$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ و $x>-1$ و $x\neq 0$

اذن $D=]\frac{1}{2},+\infty[$

7) $x\mapsto \ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

$x\in D \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1}>0$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{2x-1}{x+1}$	$+$	‖	$-$	0 $+$

اذن $D=]-\infty,-1[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$

تمرين رقم 10

1) $\ln x=1$

$D=]0,+\infty[$

$\ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \Leftrightarrow x=e$

$S=\{e\}$

2) $\ln\frac{x}{2}=\ln 5$

$D=]0,+\infty[$

$\ln\frac{x}{2}=\ln 5 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=5 \Leftrightarrow x=10$

$S=\{10\}$

3) $\ln x=3$

$D=]0,+\infty[$

$\ln x=3 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^3 \Leftrightarrow x=e^3$

$S=\{e^3\}$

4) $\ln x=-2$

$D=]0,+\infty[$

$\ln x=-2 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}$

$S=\{e^{-2}\}$

5) $x\ln x = 0$

$D =]0,+\infty[$

$x\ln x = 0 \iff \ln x = 0 \iff x=1$

$S=\{1\}$

تمرين رقم 11

1) $\ln(3x) = \ln(x-1)$

$x\in D \iff x>0$ و $x-1>0$

إذن $D=]1,+\infty[$

$\ln(3x)=\ln(x-1) \iff 3x = x-1 \iff x = \frac{1}{2}$

$S=\emptyset$

2) $\ln(x-2) = 2\ln 3 + \ln\frac{1}{5}$

$x\in D \iff x-2>0 \iff x>2$

$D=]2,+\infty[$

$\ln(x-2)=2\ln3+\ln\frac{1}{5} \iff \ln(x-2)=\ln\frac{9}{5}$

$\iff x-2=\frac{9}{5} \iff x=\frac{19}{5}$

$S=\{\frac{19}{5}\}$

3) $\ln(x^2+x-2)=\ln 4$

$x\in D \iff x^2+x-2>0$

$D=]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$

$\ln(x^2+x-2)=\ln4 \iff x^2+x-2=4$

$\iff x^2+x-6=0$

$\Delta=25$, $x_1=-3$; $x_2=2$

$S=\{-3,2\}$

4) $\ln(2x-1)-\ln(x+1)=0$

$x\in D \iff 2x-1>0$ و $x+1>0$

$\iff x>\frac{1}{2}$ و $x>-1$

$D=]\frac{1}{2},+\infty[$

$\ln(2x-1)-\ln(x+1)=0 \iff \ln(2x-1)=\ln(x+1)$

$\iff 2x-1=x+1$

$\iff x=2$

$S=\{2\}$

تمرين رقم 12

1) $2\ln(x-3)-\ln(x+3)=0$

$D=]3,+\infty[$

$2\ln(x-3)-\ln(x+3)=0 \iff \ln(x-3)^2=\ln(x+3)$

$\iff (x-3)^2=x+3$

$\iff x^2-7x+6=0$

$\Delta=25$; $x_1=1$; $x_2=6$

$S=\{6\}$

2) $\ln(x-3)^2-\ln|x+3|=0$

$D=]-3,3[\cup]3,+\infty[$

$\ln(x-3)^2-\ln(x+3)=0 \iff \ln(x-3)^2=\ln(x+3)$

$\iff (x-3)^2=x+3$

$\iff x^2-7x+6=0$

$\Delta=25$; $x_1=1$; $x_2=6$

$S=\{1,6\}$

3) $\ln|-x+1|-\ln|8x-1|=0$

$D=\mathbb{R}-\{1,\frac{1}{8}\}$

$\ln|-x+1|-\ln|8x-1|=0 \iff \ln|-x+1|=\ln|8x-1|$

$\iff |-x+1|=|8x-1|$

$\iff -x+1=8x-1$ أو $-x+1=-8x+1$

$\iff x=\frac{2}{9}$ أو $x=0$

$S=\{0,\frac{2}{9}\}$

4) $\ln\sqrt[3]{2x-1}-\frac{1}{3}\ln(x+5)=0$

$D=]\frac{1}{2},+\infty[$

$\ln\sqrt[3]{2x-1}-\frac{1}{3}\ln(x+5)=0 \iff \frac{1}{3}\ln(2x-1)=\frac{1}{3}\ln(x+5)$

$\iff 2x-1=x+5$

$\iff x=6$

$S=\{6\}$

تمرين رقم 13

1) $2X^2-3X+1=0$

$\Delta=1$; $X_1=\frac{1}{2}$; $X_2=1$

2) أ) $2\ln^2x-3\ln x+1=0$

$D=]0,+\infty[$

$\ln x=\frac{1}{2} \iff \ln x=\ln\sqrt{e} \iff x=\sqrt{e}$

$\ln x=1 \iff \ln x=\ln e \iff x=e$

$S=\{e,\sqrt{e}\}$

ب) $2\ln(x+1)-3=-\frac{1}{\ln(x+1)}$

$D=]-1,0[\cup]0,+\infty[$

$2\ln(x+1)-3=\frac{-1}{\ln(x+1)} \iff 2\ln^2(x+1)-3\ln(x+1)+1=0$

$\ln(x+1)=\frac{1}{2} \iff x+1=\sqrt{e} \iff x=\sqrt{e}-1$

$\ln(x+1)=1 \iff x+1=e \iff x=e-1$

$S=\{\sqrt{e}-1,\ e-1\}$

ج) $\ln(x^2)+\frac{1}{\ln|x|}=3$

$D=\mathbb{R}-\{1\}$

$\ln(x^2)+\frac{1}{\ln|x|}=3 \iff 2\ln^2|x|-3\ln|x|+1=0$

$\ln|x|=\frac{1}{2} \iff |x|=\sqrt{e} \iff x_1=\sqrt{e}$; $x_2=-\sqrt{e}$

$\ln|x|=1 \iff |x|=1 \iff x_3=e$, $x_4=-e$

$S=\{e,-e,\sqrt{e},-\sqrt{e}\}$

د) $2\ln^3(x)=3\ln^2(x)-\ln(x)$

$D=]0,+\infty[$

$2\ln^3(x) = 3\ln^2(x) - \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)\left(2\ln^2(x) - 3\ln(x) + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0$ أو $\ln(x) = \frac{1}{2}$ أو $\ln(x) = 1$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$S = \{1, \sqrt{e}, e\}$

تمرين رقم 14

1) $3(\ln x)^2 - 5\ln x - 2 = 0$

$D =]0, +\infty[$

$\Delta = 49$; $\ln x = -1$ أو $\ln x = 6$

$\ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$\ln x = 6 \Leftrightarrow x = e^6$

$S = \{\frac{1}{e}, e^6\}$

2) $(\ln x)^2 + 2\sqrt{2}\ln x + 2 = 0$

$D =]0, +\infty[$

$(\ln x)^2 + 2\sqrt{2}\ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow (\ln x + \sqrt{2})^2 = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{-\sqrt{2}}$

$S = \{e^{-\sqrt{2}}\}$

3) $-2(\ln x)^2 + 3\ln x + 5 = 0$

$D =]0, +\infty[$

$\Delta = 49$; $\ln x = \frac{5}{2}$ أو $\ln x = -1$

$\ln x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = e^{5/2}$

$\ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$S = \{e^{5/2}, \frac{1}{e}\}$

4) $(\ln(x^2-1))^2 - \ln(x^2-1) - 2 = 0$

$D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$\Delta = 9$, $\ln(x^2-1) = -1$ أو $\ln(x^2-1) = 2$

$\ln(x^2-1) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{1+\frac{1}{e}}$, $x_2 = -\sqrt{1+\frac{1}{e}}$

$\ln(x^2-1) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = e^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 + e^2$

$\Leftrightarrow x_3 = \sqrt{1+e^2}$, $x_4 = -\sqrt{1+e^2}$

$S = \left\{\sqrt{1+\frac{1}{e}}, -\sqrt{1+\frac{1}{e}}, \sqrt{1+e^2}, -\sqrt{1+e^2}\right\}$

5) $(\ln x)^4 - (\ln x)^2 - 2 = 0$

$D =]0, +\infty[$

نضع $X = (\ln x)^2$

$(\ln x)^4 - (\ln x)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 2 = 0$

$\Delta = 9$

$X_1 = -1$ هذا غير ممكن

$X_2 = 2 \Leftrightarrow (\ln x)^2 = 2$

$\Leftrightarrow \ln x = \sqrt{2}$ أو $\ln x = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{\sqrt{2}}$ أو $x = e^{-\sqrt{2}}$

$S = \{e^{\sqrt{2}}, e^{-\sqrt{2}}\}$

تمرين رقم 15

1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$

حلي هذه النظمة هما حلي المعادلة

$X^2 - 5X + 6 = 0$

$\Delta = 1$, $X_1 = 2$; $X_2 = 3$

إذن $S = \{(2,3), (3,2)\}$

2) $\begin{cases} 2\ln x - \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$

$\ln x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{7}{11}$, $\ln y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{11}$

$\ln x = \frac{7}{11} \Leftrightarrow x = e^{7/11}$, $\ln y = \frac{3}{11} \Leftrightarrow e^{3/11}$

$S = \{(e^{7/11}, e^{3/11})\}$

تمرين رقم 16

1) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ \frac{\ln x}{\ln y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ \ln x = 2\ln y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 2 \\ \ln y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ y = e \end{cases}$

$S = \{(e^2, e)\}$

2) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln x + \ln y = -2 \end{cases}$

حلي هذه النظمة هما حلي المعادلة

$X^2 + 2X - 15 = 0$

$\Delta = 64$, $X_1 = -5$, $X_2 = 3$

إذا كان : $\ln x = -5$ فإن $\ln y = 3$

إذن $x = e^{-5}$ و $y = e^3$

إذا كان : $\ln x = 3$ فإن $\ln y = -5$

إذن $x = e^3$ و $y = e^{-5}$

إذن $S = \{(e^3, e^{-5}), (e^{-5}, e^3)\}$

تمرين رقم 17

1) $\ln x < 2\ln 3$

$D =]0, +\infty[$

$\ln x < 2\ln 3 \Leftrightarrow \ln x < \ln 9$

$\Leftrightarrow x < 9$

$S =]0, 9[$

2) $1 - \ln x \geq 0$

$D =]0, +\infty[$

$1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$

$S =]0, e]$

3) $5 + 3\ln x \leq 0$

$D =]0, +\infty[$

$5 + 3\ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -\frac{5}{3} \Leftrightarrow x \leq e^{-5/3}$

$S =]0, \frac{1}{e^{5/3}}]$

4) $3+5\ln(2x)$

$D=]0,+\infty[$

$3+5\ln(2x)>0 \Leftrightarrow \ln(2x)>-\frac{3}{5} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}e^{-3/5}$

$S=]\frac{1}{2e^{3/5}},+\infty[$

تمرين رقم 18

1) $\ln(x+2)-\ln(-3x+1)<0$

$D=]-2,\frac{1}{3}[$

$\ln(x+2)-\ln(-3x+1)<0 \Leftrightarrow \ln(x+2)<\ln(-3x+1)$

$\Leftrightarrow x+2<-3x+1$

$\Leftrightarrow x<-\frac{1}{4}$

$S=]-2,-\frac{1}{4}[$

2) $\ln(3x-2)\geqslant -3\ln 2$

$D=]\frac{2}{3},+\infty[$

$\ln(3x-2)\geqslant -3\ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x-2)\geqslant \ln\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 3x-2\geqslant \frac{1}{8} \Leftrightarrow x\geqslant \frac{17}{24}$

$S=[\frac{17}{24},+\infty[$

3) $\ln(x-1)+\ln(x+1)\leqslant 2-\ln 3$

$D=]1,+\infty[$

$\ln(x-1)+\ln(x+1)\leqslant 2-\ln 3 \Leftrightarrow \ln(x^2-1)\leqslant \ln\frac{e^2}{3}$

$\Leftrightarrow x^2-(1+\frac{e^2}{3})\leqslant 0$

$S=]1,\sqrt{1+\frac{e^2}{3}}]$

4) $\ln(x-1)+\ln(x-4)>\ln(x+4)$

$D=]4,+\infty[$

$\ln(x-1)+\ln(x-4)>\ln(x+4) \Leftrightarrow (x-1)(x-4)>x+4$

$\Leftrightarrow x(x-6)>0$

$S=]6,+\infty[$

تمرين رقم 19

1) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\geqslant 0$

$D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}\geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1}\leqslant 0$

$S=]-\infty,-1[$

2) $\ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)<1$

$D=]-\infty,\frac{1}{2}[\cup]3,+\infty[$

$\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)<1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-3}<e \Leftrightarrow \frac{(2-e)x+(3e-1)}{x-3}<0$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1-3e}{2-e}$	$+\infty$
$(2-e)x+(3e-1)$	$-$		$-$	0	$+$
$x-3$	$-$		$+$		$+$
$\frac{(2-e)x+(3e-1)}{x-3}$	$+$		$-$	0	$+$

$S=]3,\frac{1-3e}{2-e}[$

3) $\frac{\ln x-1}{\ln x+1}\geqslant 0$

$\ln x-1=0 \Leftrightarrow x=e \quad , \quad \ln x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}.$

x	0	$1/e$		e	$+\infty$
$\ln x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\ln x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{\ln x-1}{\ln x+1}$	$+$		$-$	0	$+$

$S=]0,\frac{1}{e}[\cup[e,+\infty[$

4) $\ln(x^2+2x+2)>0$

$D=\mathbb{R}$

$\ln(x^2+2x+2)>0 \Leftrightarrow x^2+2x+2>1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2>0$

$S=\mathbb{R}-\{-1\}$

تمرين رقم 20

1) $(\ln x)(1-2\ln x)<0$

$D=]0,+\infty[$

$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1 \quad ; 1-2\ln x=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$

x	0	1		$\sqrt{e}$	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$		$+$
$1-2\ln x$	$+$		$+$	0	$-$
$(\ln x)(1-2\ln x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$S=]0,1[\cup]\sqrt{e},+\infty[$

2) $(\ln x)^2-\ln x-2\geqslant 0$

$D=]0,+\infty[$

$(\ln x)^2-\ln x-2\geqslant 0 \Leftrightarrow (\ln x+1)(\ln x-2)\geqslant 0$

x	0	$1/e$		e^2	$+\infty$
$\ln x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\ln x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$(\ln x+1)(\ln x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$S=]0,\frac{1}{e}]\cup[e^2,+\infty[$

3) $\frac{3+(\ln x)^2}{1-\ln x}\leqslant 2$

$x\in D \Leftrightarrow x>0 \text{ و } 1-\ln x\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ و } x\neq e$

$D=]0,e[\cup]e,+\infty[$

$\frac{3+(\ln x)^2}{1-\ln x}\leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{3+(\ln x)^2}{1-\ln x}-2\leqslant 0$

$\Leftrightarrow \frac{(\ln x+1)^2}{1-\ln x}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow 1-\ln x<0 \text{ و } \ln x+1=0$

$\Leftrightarrow \ln x>1 \text{ و } \ln x=-1$

$\Leftrightarrow x>e \text{ و } x=\frac{1}{e}$

$S=]e,+\infty[\cup\{\frac{1}{e}\}$

4) $\frac{\ln x-1}{1+\ln x}>\frac{1}{\ln x}$

$x\in D \Leftrightarrow x>0 \text{ و } 1+\ln x\neq 0 \text{ و } \ln x\neq 0$

$\Leftrightarrow x>0 \text{ و } x\neq \frac{1}{e} \text{ و } x\neq 1$

$D=]0,+\infty[-\{1,\frac{1}{e}\}$

$$\frac{\ln x - 1}{1+\ln x} > \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 2\ln x - 1}{(\ln x)(1+\ln x)} > 0$$

$$\ln^2 x - 2\ln x - 1 = 0$$

$$\Delta = 8 \ , \ \ln x = 1+\sqrt{2} \ , \ \ln x = 1-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{1+\sqrt{2}} \ , \ x = e^{1-\sqrt{2}}$$

x	0		$1/e$		$e^{1-\sqrt{2}}$		1		$e^{1+\sqrt{2}}$		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+\ln x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\ln^2 x - 2\ln x - 1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{\ln^2 x - 2\ln x - 1}{(\ln x)(1+\ln x)}$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$$S = \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]e^{1-\sqrt{2}}, 1\right[\cup \left]e^{1+\sqrt{2}}, +\infty\right[$$

تمرين رقم 21

1) $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \ln \frac{x+1}{x}$

$$= \ln x + \ln(x+1) - \ln x$$
$$= \ln(x+1)$$

2) $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= \ln x^2 + \ln \frac{x^2+1}{x^2}$$
$$= \ln x^2 + \ln(x^2+1) - \ln x^2 = \ln(x^2+1)$$

3) $\forall x \in]2,+\infty[\ ; \ 2\ln(\sqrt{x-1}-1) = \ln(\sqrt{x-1}-1)^2$

$$= \ln((x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1)$$

$$= \ln(x - 2\sqrt{x-1})$$

4) $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ (\ln(x+1))^2 - (\ln x)^2 =$

$$= (\ln(x+1) + \ln x)(\ln(x+1) - \ln x)$$
$$= \ln(x(x+1)) \cdot \ln \frac{x+1}{x}$$
$$= \ln(x^2+x) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

تمرين رقم 22

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)\ln x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\ln x + 1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$)

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + 2\ln(-x)) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x + 5}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln x}{x^2} + \frac{5}{x^2}\right) = 0$

(لأن : بوضع $X = x^2$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{X}}{X} = \frac{1}{2}\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$)

تمرين رقم 23

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x + \ln x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x^2 + 3x\ln x) = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x - x^3\ln x) = 0$

(لأن : بوضع $X = x^3$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^3\ln x = \lim\limits_{X\to 0^+} X\ln\sqrt[3]{X} = \frac{1}{3}\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln X = 0$)

4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = +\infty$

تمرين رقم 24

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^4 - \ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x^3 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

(لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^7} + \ln x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^6} + x\ln x\right) = +\infty$

(لأن : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$)

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right) = +\infty$

(لأن ; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$)

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1$

(لأن $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$)

تمرين رقم 25

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 3\left(\frac{\ln(1+(3x))}{(3x)}\right) = 3$

(لأن : بوضع $X = 3x$:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+(3x))}{(3x)} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$)

2) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}-1} = \frac{1}{2}$

(لأن بوضع $X = \frac{x}{2}$:

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}-1} = \lim\limits_{X\to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$)

3) بما أن الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق في e فإن

$$\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \frac{1}{e}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x}\right)$

$$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+(-x))}{(-x)}\right) = 1 + 1 = 2$$

تمرين رقم 26

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1 + 2x + \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + 2 + \frac{\ln x}{x}\right) = 2$

(لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x + 3 + \ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 2$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+1}=2 \quad \text{لأن}\right.$$

ونضع $X=x+1$

$$\left.\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0\right)$$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left((\ln x)^2-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)(\ln x-1)=+\infty$

تمرين رقم 27

1) نضع $X=2-x$

$$\lim_{x\to 2^-}\ln(2-x)=\lim_{X\to 0^+}\ln X=-\infty$$

2) نضع $X=x-1$

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)\ln(x-1)=\lim_{X\to 0^+}(X+2)(X\ln X)=0$$

3) $\lim_{x\to 0^+}(x^3-x)\ln x=\lim_{x\to 0^+}(x^2-1)(x\ln x)=0$

4) نضع : $X=1+x$

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x+1}+\ln(1+x)\right)=\lim_{X\to 0^+}\frac{1+X\ln X}{X}=+\infty$$

تمرين رقم 28

1) $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{3+2x^2}\right)=\ln\frac{1}{2}$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+1}{3+2x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{لأن}\right)$$

2) $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^3-2}{x}\right)=+\infty$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2}{x}=+\infty \quad \text{لأن}\right)$$

3) $\lim_{x\to 2^-}\ln\left(\frac{x+1}{-x+2}\right)=+\infty\ ;\ \left(\lim_{x\to 2^-}\frac{x+1}{-x+2}=+\infty : \text{لأن}\right)$

4) $\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)=-\infty\ ;\ \left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)=0^+ : \text{لأن}\right)$

تمرين رقم 29

1) $I=]0,+\infty[\ ;\ f'(x)=2x-\frac{1}{x}$

2) $I=]0,+\infty[\ ;\ f'(x)=\ln x+1$

3) $I=]0,+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

4) $I=]1,+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{(\ln x)+x-2}{x(\ln x)^2}$

تمرين رقم 30

1) $I=\mathbb{R}\ ;\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{12x^3-5}{3x^4-5x-1}$

2) $I=]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[\ ;\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-(\sin x+2(1+\tan^2(2x)))}{\cos x-\tan(2x)}$

3) $I=]\frac{1}{2},+\infty[\ ;\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2x-1}$

4) $I=]0,+\infty[\ ;\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x\ln x}$

تمرين رقم 31

1) $I=]-\infty,0[\ ;\ f(x)=3x^4+2\ln(-x)$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على I ولدينا

$$\forall x\in I;\ f'(x)=12x+\frac{2}{x}$$

2) $I=]-\frac{1}{3},+\infty[\ ;\ f(x)=\ln(1+3x)$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين بمايلي.

$$g\begin{bmatrix}]-\frac{1}{3},+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x\longmapsto 1+3x \end{bmatrix},\ h\begin{bmatrix} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto \ln x \end{bmatrix}$$

لدينا :

$$\begin{array}{ccccc}]-\frac{1}{3},+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \xmapsto{g} & 1+3x & \xmapsto{h} & \ln(1+3x) \end{array}$$

$$f=h\circ g$$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ولدينا :

$$\forall x\in I;\ f'(x)=\frac{3}{1+3x}$$

3) $I=]-1,1[\ ;\ f(x)=\ln(1-x^2)$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين بمايلي

$$g\begin{bmatrix}]-1,1[\longrightarrow]0,1] \\ x\longmapsto 1-x^2 \end{bmatrix},\ h\begin{bmatrix}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto \ln x \end{bmatrix}$$

لدينا

$$\begin{array}{ccccc}]-1,1[& \xrightarrow{g} &]0,1] & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-x^2 & \longmapsto & \ln(1-x^2) \end{array}$$

$$f=h\circ g$$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ولدينا

$$\forall x\in I;\ f'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$$

4) $I=]0,+\infty[\ ;\ f(x)=\ln(x^3)$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين بمايلي :

$$g\begin{bmatrix}]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\\ x\longmapsto x^3 \end{bmatrix},\ h\begin{bmatrix} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto \ln x \end{bmatrix}$$

لدينا

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[& \xrightarrow{g} &]0,+\infty[& \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 & \longmapsto & \ln(x^3) \end{array}$$

$$f=h\circ g$$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ولدينا،

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{3x^2}{x^3}=\frac{3}{x}$$

تمرين رقم 32

1) $I=]-\infty,-3[\ ;\ f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين بمايلي

$$g\begin{bmatrix}]-\infty,-3[\longrightarrow]\frac{5}{6},1[\\ x\longmapsto \frac{x-2}{x-3} \end{bmatrix},\ h\begin{bmatrix}]\frac{5}{6},1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto \ln x \end{bmatrix}$$

لدينا

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty,-3[& \xrightarrow{g} &]\frac{5}{6},1[& \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-2}{x-3} & \longmapsto & \ln\left(\frac{x-2}{x-3}\right) \end{array}$$

$$f=h\circ g$$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ولدينا :

$$\forall x\in I\ ;\quad f'(x)=\frac{\left(\frac{x-2}{x-3}\right)'}{\left(\frac{x-2}{x-3}\right)}=\frac{-1}{(x-2)(x-3)}$$

2) $I=]-\infty,2[\ ;\quad f(x)=\ln\sqrt{2-x}$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين كمايلي :

$$g\begin{bmatrix}]-\infty,2[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x\longmapsto \sqrt{2-x}\end{bmatrix},\ h\begin{bmatrix} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto \ln x\end{bmatrix}$$

لدينا :

$$]-\infty,2[\ \xrightarrow{g}\ ]0,+\infty[\ \xrightarrow{h}\ \mathbb{R}$$
$$x\longmapsto \sqrt{2-x}\longmapsto \ln\sqrt{2-x}$$
$$f=h\circ g$$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق . ولدينا :

$$\forall x\in I\ ;\ f'(x)=\frac{(\sqrt{2-x})'}{\sqrt{2-x}}=\frac{1}{2(x-2)}$$

3) $I=]0,1[\ ;\quad f(x)=\ln|\ln x|$

نعتبر الدوال العددية g_1 ، g_2 ، h المعرفة كمايلي :

$$g_1\begin{bmatrix}]0,1[\longrightarrow]-\infty,0[\\ x\longmapsto \ln x\end{bmatrix},\ g_2\begin{bmatrix} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto \ln x\end{bmatrix},\ h\begin{bmatrix}]-\infty,0[\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x\longmapsto |x|\end{bmatrix}$$

لدينا :

$$]0,1[\ \xrightarrow{g_1}\ ]-\infty,0[\ \xrightarrow{h}\ \mathbb{R}_+^*\ \xrightarrow{g_2}\ \mathbb{R}$$
$$x\longmapsto \ln x\longmapsto |\ln x|\longmapsto \ln|\ln x|$$
$$f=g_2\circ h\circ g_1$$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب دوال قابلة للاشتقاق ولدينا :

$$\forall x\in]0,1[\ ;\ f'(x)=\frac{(\ln x)'}{\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$$

4) $I=]0,\pi[\ ;\quad f(x)=\ln(\sin x)$

نعتبر الدالتين العدديتين g و h المعرفتين كمايلي

$$g\begin{bmatrix}]0,\pi[\longrightarrow]0,1] \\ x\longmapsto \sin x\end{bmatrix},\ h\begin{bmatrix}]0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x\longmapsto \ln x\end{bmatrix}$$

لدينا :

$$]0,\pi[\ \xrightarrow{g}\ ]0,1]\ \xrightarrow{h}\ \mathbb{R}$$
$$x\longmapsto \sin x\longmapsto \ln(\sin x)$$
$$f=h\circ g$$

f دالة قابلة للاشتقاق على I لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق ولدينا :

$$\forall x\in I\ ;\ f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$$

تمرين رقم 33

1) $f(x)=(\ln x)^3$

$D_f=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

اذن منحنى f مقارب هو محور الأراتيب

* لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}=0$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

الرتابة : $\forall x\in D_f\ ,\quad f'(x)=\frac{3(\ln x)^2}{x}$

$f'(x)=0 \iff x=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$

$D_f=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

اذن منحنى f مقارب هو محور الأراتيب

* لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

الرتابة $\forall x\in D_f\ ;\quad f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(x)=\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)$

$x\in D_f \iff \frac{3x}{x+2}>0$

إذن : $D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ln 3$$

(لأن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x+2}=3$)

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ، (لأن : $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x}{x+2}=0^+$)

$\lim_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ ؛ (لأن : $\lim_{x\to -2^-}\frac{3x}{x+2}=+\infty$)

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا . $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ln 3$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ مقاربا معادلته : $y=\ln 3$

* لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

اذن منحنى f مقاربا هو محور الأراتيب

* لدينا : $\lim_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$

اذن منحنى f مقاربا معادلته $x=-2$

الرتابة : $\forall x\in D_f\ ;\quad f'(x)=\frac{2}{x(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$				$+$	
$f(x)$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$		$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$

4) $f(x)=x(1+\ln x)$

$D_f=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+x\ln x)=0$$

(لأن $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

دراسة الفرع اللانهائي

* لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

إذن منحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

الرتابة

$$\forall x \in D_f \; ; \; f'(x) = 2 + \ln x$$

لدينا: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$

x	0		$1/e^2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

تمرين رقم 34

1) $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

$$D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\ln x)(\ln x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

دراسة الفرعين اللانهائيين

* لدينا: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

إذن منحنى C_f مقاربا هو محور الأراتيب

* لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

إذن منحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

الرتابة

$$\forall x \in D_f \; ; \; f'(x) = \frac{2\ln x - 1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x) = 2 + \frac{x}{\ln x}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 , x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2 + x \cdot \frac{1}{\ln x}\right) = 2$$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ (لأن: $\lim_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$)

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ (لأن: $\lim_{x \to 1^-} \ln x = 0^-$)

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

إذن منحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

* لدينا: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

إذن منحنى C_f مقاربا معادلته $x = 1$

الرتابة

$$\forall x \in D_f \; ; \; f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$2+e$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f(x) = \sqrt{1 - (\ln x)^2}$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$1 - \ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1 + \ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - (\ln x)^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$D_f = \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

دراسة قابلية اشتقاق f على يمين $\frac{1}{e}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{x - \frac{1}{e}} = \lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \sqrt{\left(\frac{1 - \ln x}{x - \frac{1}{e}}\right)\left(\frac{\ln x - (-1)}{x - \frac{1}{e}}\right)} = +\infty$$

لأن، $\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \frac{\ln x - (-1)}{x - \frac{1}{e}} = 1$

و $\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \frac{1 - \ln x}{x - \frac{1}{e}} = +\infty$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين $\frac{1}{e}$

دراسة قابلية اشتقاق f على يسار e

$$\lim_{x \to e^-} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \to e^-} -\sqrt{\left(\frac{\ln x - 1}{x - e}\right)\left(\frac{1 + \ln x}{e - x}\right)}$$

$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{x \to e^-} \frac{1 + \ln x}{e - x} = +\infty$ و $\lim_{x \to e^-} \frac{\ln x - 1}{x - e} = 1$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يسار e

$$\forall x \in \left]\frac{1}{e}, e\right[\; ; \; f'(x) = \frac{-\ln x}{x\sqrt{1 - (\ln x)^2}}$$

x	$1/e$		1		e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

4) $f(x) = \frac{2\ln x}{1 - \ln x}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ و } \ln x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ و } x \neq e$$

إذن $D_f =]0, e[\cup]e, +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\frac{1}{\ln x} - 1}$$

$$= -2$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{\frac{1}{\ln x} - 1} = -2$$

$\lim\limits_{x \to e^{>}} f(x) = -\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x \to e^{>}} (1-\ln x) = 0^-$)

$\lim\limits_{x \to e^{<}} f(x) = +\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x \to e^{<}} (1-\ln x) = 0^+$)

دراسة الفروع اللانهائية :

* لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

اذن لمنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$ مقاربا معادلته $y=-2$

* لدينا : $\lim\limits_{x \to e^{>}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to e^{<}} f(x) = +\infty$

اذن لمنحنى $\mathcal{C}_f$ مقاربا معادلته $x=e$

الرتابة :

$\forall x \in D_f \; ; \quad f'(x) = \dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	2

تمرين رقم 35

1) $f(x) = \ln x - 2x$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^{>}} (\ln x - 2x) = -\infty$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا : $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$

اذن لمنحنى $\mathcal{C}_f$ مقاربا معادلته $x=0$ (محور الاراتيب)

* لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

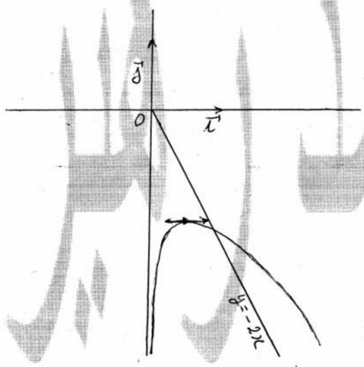
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right) = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

اذن لمنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم : $y = -2x$

الرتابة : $\forall x \in D_f : \; f'(x) = \dfrac{1-2x}{x}$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-(1+\ln 2)$	$\searrow$	$-\infty$



2) $f(x) = \ln|x|$

$D_f = \mathbb{R}^*$

لدينا f دالة زوجية لأن :

لكل x من D_f لدينا $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f \; ; \quad f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$

اذن نكتفي بدراسة f على $\mathbb{R}_+^*$

ولدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; f(x) = \ln x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \; ; \quad \lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$

دراسة الفروع اللانهائية

* بما أن : $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$

فان لمنحنى $\mathcal{C}_f$ مقاربا هو محور الاراتيب

* لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

اذن لمنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

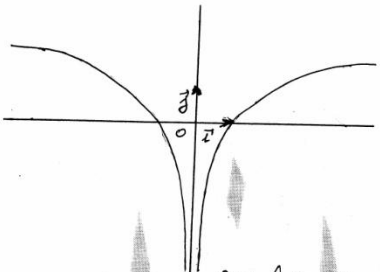
الرتابة : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

تقاطع $\mathcal{C}_f$ ومحور الافاصيل

$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$

اذن $\mathcal{C}_f$ يقطع محور الافاصيل من النقطة $A(1,0)$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



3) $f(x) = \ln(x-2)$

$x \in D_f \iff x-2 > 0 \iff x > 2$

$D_f =]2, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^{>}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^{>}} \ln(x-2) = -\infty$

دراسة الفرعين اللانهائيين

* لدينا : $\lim\limits_{x \to 2^{>}} f(x) = -\infty$

اذن لمنحنى $\mathcal{C}_f$ مقاربا معادلته $x=2$

* لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-2) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x-2)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}\right)\cdot\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$

$= 0$

لأن. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}=1$

و بوضع: $X=x-2$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{x-2}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الافاصيل

الرتابة:

$\forall x\in D_f\ ;\ f'(x)=\frac{1}{x-2}$

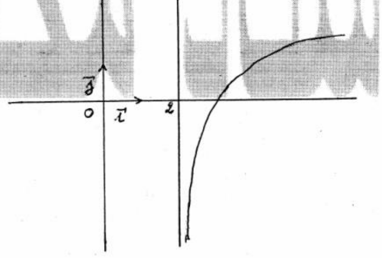
x	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

تقاطع C_f ومحور الافاصيل

$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x-2)=0 \Leftrightarrow x-2=1$

$\Leftrightarrow x=3$

اذن منحنى f يقطع محور الافاصيل في النقطة التي احداثيتها $(3,0)$



(4

$f(x)=x\ln x$

$D_f=]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\ln x=+\infty$

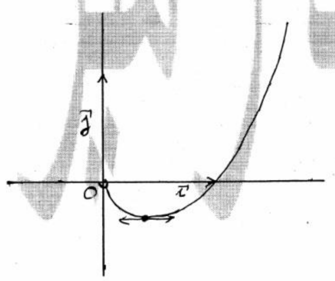
$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

إذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا إتجاهه محور الأراتيب

$\forall x\in D_f\ ;\ f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$



تمرين رقم 36

(1 $I=]0,+\infty[\ ;\ F(x)=-5\ln x+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

(2 $I=]-\infty,0[\ ;\ F(x)=2\ln(-x)+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

(3 $I=\mathbb{R}\ ;\ F(x)=-3\ln(x^2+x+2)+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

(4 $I=]3,+\infty[\ ;\ F(x)=\ln(x-3)-2\ln(x+1)+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

تمرين رقم 37

$f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

(1 $x\in D \Leftrightarrow x^2+x-2\neq 0$

$\Delta=9\ ;\ x_1=-2\ ,\ x_2=1$

اذن، $D=\mathbb{R}-\{-2,1\}$

(2 $\forall x\in D;\ \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}$

$\Leftrightarrow \forall x\in D;\ \frac{(a+b)x+(2a-b)}{x^2+x-2}=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

ومنه:

$\begin{cases}a+b=5\\2a-b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$

(3 لدينا: $\forall x\in D;\ f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

اذن $\forall x\in]-\infty,-2[\ ;\ f(x)=\frac{-2}{1-x}+\frac{-3}{-2-x}$

$F(x)=-2\ln(1-x)-3\ln(-2-x)+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

(4 $F(-3)=-2\ln 4-3\ln 1=-4\ln 2$

اذن $F(x)=-2\ln(1-x)-3\ln(-2-x)-4\ln 2$

تمرين رقم 38

(1 $\log_2 8-\log_2\sqrt[3]{32}+\log_2 9-\log_2 3=$

$=3\log_2 2-\frac{5}{3}\log_2 2+2\log_2 3-\log_2 3$

$=3-\frac{5}{3}+\log_2 3\quad=\frac{4}{3}+\log_2 3$

(2 $\log_3\frac{15}{4}+\log_2\frac{1}{27}+\log_3\frac{4}{5}=$

$=\log_3 15-\log_3 4-\log_2 27+\log_3 4-\log_3 5$

$=\log_3 5+\log_3 3-3\log_2 3-\log_3 5$

$=1-3\log_2 3$

(3 $\log 100-\log 10^{2007}+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)=$

$=2\log 10-2007\log 10-100\log 10$

$=-2105$

(4 $\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\cdots\cdots+\log\frac{99}{100}=$

$=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{99}{100}\right)$

$=\log\frac{1}{100}\quad=-2\log 10\quad=-2$

تمرين رقم 39

(1 أ)

$\log_b a=\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{1}{\left(\frac{\ln b}{\ln a}\right)}=\frac{1}{\log_a b}$

ب)
$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{-\ln b}{-\ln a} = \frac{\ln \frac{1}{b}}{\ln \frac{1}{a}} = \log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{b}\right)$$

2) أ)
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{b}\right) + 3\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[3]{c}\,\frac{b}{a}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{b^2}\right) =$$
$$= \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(\frac{a^2}{b}\right)\left(\sqrt[3]{c}\,\frac{b}{a}\right)^3}{\frac{a}{b^2}}\right)$$
$$= \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{a^2}{b}\cdot c\cdot\frac{b^3}{a}}{\frac{a}{b^2}}\right)$$
$$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{a^2.c.b^3.b^2}{b.a.a} = \log_{\frac{1}{2}}(c.b^4)$$

ب)
$$\log(a b^3) - \log(100 b^2 a) - \log\sqrt{10 b} =$$
$$= \log \frac{a b^3}{100 b^2 a.\sqrt{10 b}} = \log\left(\frac{\sqrt{b}}{100\sqrt{10}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\log b) - \frac{5}{2}$$

تمرين رقم 40

1)
$$\log(x+2) + \log x = 1$$
$$D =]0, +\infty[$$
$$\log(x+2) + \log x = 1 \Leftrightarrow \log(x+2)x = \log 10$$
$$\Leftrightarrow x(x+2) = 10$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0$$
$\Delta = 44$; $x_1 = -1 - \sqrt{11} \notin D$; $x_2 = -1 + \sqrt{11} \in D$

اذن $S = \{-1 + \sqrt{11}\}$

2)
$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) - \log_{\sqrt{2}}(2x+1) = \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{3}$$
$$D =]1, +\infty[$$
$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) - \log_{\sqrt{2}}(2x+1) = \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}\frac{x-1}{2x+1} = \log_{\sqrt{2}}\frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 4$$
$S = \{4\}$

3)
$$\log_3(2x)\cdot(\log_5(x) - 1) = 0$$
$$D =]0, +\infty[$$
$\log_3(2x)\cdot(\log_5(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_3(2x) = 0$ أو $\log_5(x) = 1$

$\Leftrightarrow \log_3(2x) = \log_3(1)$ أو $\log_5(x) = \log_5$

$\Leftrightarrow 2x = 1$ أو $x = 5$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ أو $x = 5$

$S = \{\frac{1}{2}, 5\}$

4)
$$(\log x)^2 + \log x - 3 = 0$$
$$D =]0, +\infty[$$
$\Delta = 13$; $\log x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ أو $\log x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

اذن $x = 10^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}$ أو $x = 10^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$

$$S = \left\{10^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}, 10^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}\right\}$$

تمرين رقم 41

1)
$$\log_5(x+3) < \log_3(2x)$$
$$D =]0, +\infty[$$
$$\log_5(x+3) < \log_3(2x) \Leftrightarrow x+3 < 2x$$
$$\Leftrightarrow x > 3$$
$S =]3, +\infty[$

2)
$$\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$$
$$D =]\tfrac{1}{3}, +\infty[$$
$$\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \Leftrightarrow 3x - 1 \geq x + 1$$
$$\Leftrightarrow x \geq 1$$
$S = [1, +\infty[$

3)
$$\log(-x+3) < 1$$
$$D =]-\infty, 3[$$
$$\log(-x+3) < 1 \Leftrightarrow \log(-x+3) < \log 10$$
$$\Leftrightarrow -x+3 < 10$$
$$\Leftrightarrow x > -7$$
$S =]-7, 3[$

4)
$$\log(x+3) - 3 \geq 0$$
$$D =]-3, +\infty[$$
$$\log(x+3) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \log(x+3) \geq \log 10^3$$
$$\Leftrightarrow x+3 \geq 10^3$$
$$\Leftrightarrow x \geq 997$$
$S = [997, +\infty[$

تمرين رقم 42

1)
$$\frac{\log_2(x) - 1}{2 - \log x} \geq 0$$
$x \in D \Leftrightarrow x > 0$ و $\log x \neq 2$

$\Leftrightarrow x > 0$ و $x \neq 100$

اذن $D =]0, 100[\cup]100, +\infty[$

x	0		2		100		$+\infty$
$\log_2 x - 1$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2 - \log x$	‖	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{\log_2 x - 1}{2 - \log x}$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$S = [2, 100[$

2)
$$x \log_{\frac{1}{2}}(0,3) < 2$$
$\Leftrightarrow x < \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}}(0,3)}$; (لأن $\log_{\frac{1}{2}}(0,3) > 0$;)

$S =]-\infty, \frac{2}{\log_{\frac{1}{2}}(0,3)}[$

3)
$$2\log_5(x+4) + 3\log_{26}(6) > \log_{25}(12)$$
$$D =]-4, +\infty[$$

$2\log_5(x+4) + 3\log_{26}(6) > \log_{25}(12) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5(x+4) > \frac{1}{2}\left(\log_{25}(12) - 3\log_{26}(6)\right)$

$\Leftrightarrow \log_5(x+4) > \log_5 5^{\left[\frac{1}{2}\left(\log_{25}(12) - 3\log_{26}(6)\right)\right]}$

$\Leftrightarrow x > 5^{\left[\frac{1}{2}\left(\log_{25}(12) - 3\log_{26}(6)\right)\right]} - 4$

$S = \left]5^{\left[\frac{1}{2}\left(\log_{25}(12) - 3\log_{26}(6)\right)\right]} - 4, +\infty\right[$

4) $(\log(x+2))^2 - \log(x+2) - 2 \geq 0$

$D =]-2, +\infty[$

$\Delta = 9$; $\log(x+2) = -1$ أو $\log(x+2) = 2$

$\log(x+2) = -1 = \log\frac{1}{10} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10} - 2 = -\frac{19}{10}$

$\log(x+2) = 2 = \log 100 \Leftrightarrow x = 98$

$S = \left\{-\frac{19}{10}, 98\right\}$

تمرين رقم 43

1) $\begin{cases} \log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2}{3} \\ \log x + \log y = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x - \log y = \frac{2}{3} \\ \log x + \log y = \frac{1}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \frac{1}{2} \\ \log y = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = \log\sqrt{10} \\ \log y = \log 10^{-1/6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{10} \\ y = 10^{-1/6} \end{cases}$ $S = \left\{\left(\sqrt{10}, 10^{-1/6}\right)\right\}$

2) $\begin{cases} \log_x(e) + \log_y(e) = \frac{7}{3} \\ \ln(xy) = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln e}{\ln x} + \frac{\ln e}{\ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln x + \ln y = \frac{7}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln x + \ln y = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln x + \ln y}{\ln x \cdot \ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln x + \ln y = \frac{7}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7/2}{\ln x \cdot \ln y} = \frac{7}{3} \\ \ln x + \ln y = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \cdot \ln y = \frac{3}{2} \\ \ln x + \ln y = \frac{7}{2} \end{cases}$

حلي هذه النظمة هما حلي المعادلة:

$X^2 - \frac{7}{2}X + \frac{3}{2} = 0$

$\Delta = \left(\frac{25}{4}\right)$, $X_1 = \frac{1}{2}$, $X_2 = 3$

اذا كان: $\ln x = \frac{1}{2}$ و $\ln y = 3$

فان $x = \sqrt{e}$ و $y = e^3$

اذا كان: $\ln x = 3$ و $\ln y = \frac{1}{2}$

فان $x = e^3$ و $y = \sqrt{e}$

اذن: $S = \left\{(e^3, \sqrt{e}), (\sqrt{e}, e^3)\right\}$

3) $\begin{cases} \log_3(x^3) - \log_3(y^2) = -4 \\ \log_3(x) + \log_3(y^4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_3(x) + 2\log_3(y) = -4 \\ \log_3(x) + 4\log_3(y) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 = \log_3\frac{1}{3} \\ \log_3 y = \frac{1}{2} = \log_3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

$S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right)\right\}$

تمرين رقم 44

1) $f: x \mapsto \log x$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

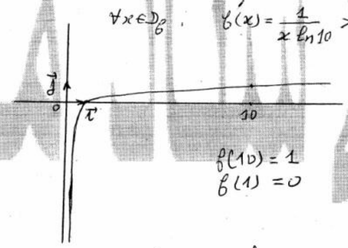
اذن لمنحنى f مقاربا هو محور الأراتيب

* لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

اذن لمنحنى f بجوار +∞ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

الرتابة

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{1}{x\ln 10} > 0$



$f(10) = 1$

$f(1) = 0$

2) $f: x \mapsto \log_{\frac{1}{3}} x$

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

اذن لمنحنى f مقاربا هو محور الأراتيب

* لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

اذن لمنحنى f بجوار +∞ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

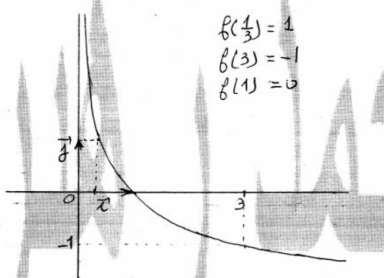
الرتابة

$\forall x \in D_f$; $f'(x) = \frac{-1}{x\ln 3} < 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$

$f(3) = -1$

$f(1) = 0$



3) $f: x \mapsto -\log_5 x$

$D =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

اذن منحنى f مقاربا هو محور الأراتيب

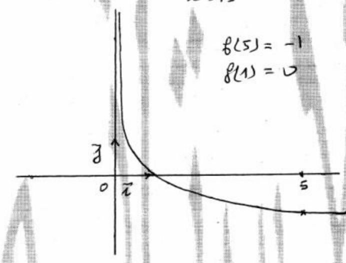
* لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الافاصيل

الرتابة: $\forall x \in D_f \; ; \quad f'(x) = \frac{-1}{x \ln 5} < 0$

$f(5) = -1$

$f(1) = 0$



(4 $f : x \mapsto \log_{0,2}(-x)$

$D_f =]-\infty, 0[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$

اذن منحنى f مقاربا هو محور الأراتيب

* لدينا $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

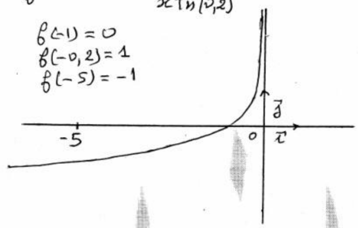
اذن منحنى f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

الرتابة. $\forall x \in D_f \; ; \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln(0,2)} > 0$

$f(-1) = 0$

$f(-0,2) = 1$

$f(-5) = -1$



(5 $f : x \mapsto \log_2(1+x^2)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(لأن: $\lim_{x \to -\infty} (1+x^2) = \lim_{x \to +\infty} (1+x^2) = +\infty$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2(1+x^2)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_2\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2\left(\frac{\log_2 x}{x}\right) + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log_2\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\log_2\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\log_2(x^2)}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \log_2\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ فرعين شلجميين اتجاههما محور الافاصيل.

البرتابة: $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

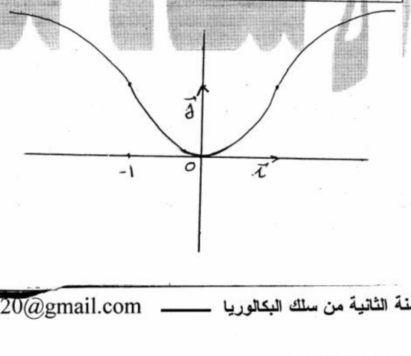
دراسة التقعر

$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad f''(x) = \frac{2(1-x^2)\ln 2}{(1+x^2)^2(\ln 2)^2}$

$f''(x) = 0 \iff x = 1$ او $x = -1$

اذن منحنى f نقطتي انعطاف احداثيتهما على التوالي $(1, 1)$ و $(-1, 1)$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$		$\searrow$		0		$\nearrow$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



(6 $f : x \mapsto 3 - \log(x+2)$

$D_f =]-2, +\infty[$

$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$ (لأن: $\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} (x+2) = 0^+$)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

دراسة الفروع اللانهائية

* لدينا: $\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty$

اذن منحنى f مقاربا معادلته $x = -2$

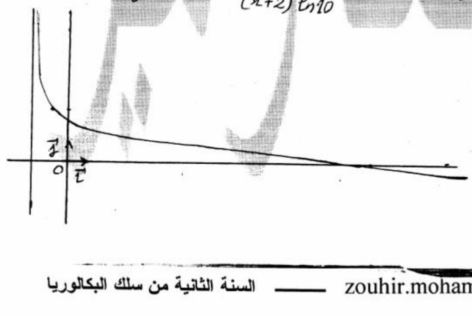
* لدينا، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{x} - \frac{\ln(x+2)}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x}\right) = 0$$

(لأن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x} = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} = 0$)

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الافاصيل

الرتابة: $\forall x \in D_f . \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+2)\ln 10} < 0$



تمرين رقم 45

1)

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} > 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-x}{1+x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$$D_f =]-1,1[$$

لدينا

$$x \in D_f \Leftrightarrow -1 < x < 1$$
$$\Leftrightarrow -1 < -x < 1$$
$$\Leftrightarrow -x \in D_f$$

$$\forall x \in D_f \ ; \ f(-x) = \ln\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right)$$
$$= \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$
$$= -\ln\frac{1-x}{1+x} = -f(x)$$

اذن f دالة فردية

2)

$$f: x \mapsto \ln(x^2-x+1) + \ln(x^2+x+1)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2-x+1>0 \text{ و } x^2+x+1>0$$

وبما أن: $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ x^2-x+1>0$ و $x^2+x+1>0$

لأن $\Delta = -3 < 0$

فإن: $D_f = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ f(-x) = \ln((-x)^2-(-x)+1) + \ln((-x)^2+(-x)+1)$$
$$= \ln(x^2+x+1) + \ln(x^2-x+1) = f(x)$$

اذن f دالة زوجية

3)

$$f: x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}\right) > 0$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x}{x+1}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$$D_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$$

لدينا:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x>0 \text{ او } x<-1$$
$$\Leftrightarrow -x<0 \text{ او } -x>1$$
$$\Leftrightarrow (-1-x)<-1 \text{ او } (-1-x)>0$$
$$\Leftrightarrow (-1-x) \in D_f$$

$$\forall x \in D_f \ ; \ f(-1-x) = \ln\frac{-1-x}{-1-x+1} = \ln\frac{1+x}{x}$$
$$= \ln\left(\frac{1}{\frac{x}{1+x}}\right) = -\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = -f(x)$$

اذن النقطة $I\left(-\frac{1}{2},0\right)$ مركز تماثل منحنى f

4)

$$f: x \mapsto \ln(x^2-2x+2)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2-2x+2>0$$

بما أن $\Delta = -4$

فإن $D_f = \mathbb{R}$

ومنه فإن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $(2-x) \in D_f$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ f(2-x) = \ln((2-x)^2-2(2-x)+2)$$
$$= \ln(4-4x+x^2-4+2x+2)$$
$$= \ln(x^2-2x+2) = f(x)$$

اذن المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تماثل منحنى f

تمرين رقم 46

1)

$$\lim_{x \to +\infty}(2x^3-3x+1-\ln x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(2x-3+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$= +\infty$$

(لأن: $\lim_{x \to +\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$)

2)

$$\lim_{x \to +\infty}(-x+\ln(x^2-x+2)) = \lim_{x \to +\infty}\left(-x+\ln x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty}\left(-x+2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-1+2\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right) = -\infty$$

3)

$$\lim_{x \to +\infty}(3x^2-1-\ln(x^3+2x^2-1)) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty}\left(3x^2-1-\ln x^3\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty}\left(3x^2-1-3\ln x-\ln\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(3x-\frac{1}{x}-3\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right)$$
$$= +\infty$$

4)

$$\lim_{x \to -\infty}(x^3+2x-1+\ln(1-x^3)) =$$
$$= \lim_{x \to -\infty}(1-x^3)\left(\frac{x^3+2x-1}{1-x^3}+\frac{\ln(1-x^3)}{1-x^3}\right)$$
$$= +\infty$$

لأن: $\lim_{x \to -\infty}\frac{x^3+2x-1}{1-x^3} = -1$

وبوضع $X = 1-x^3$:

$$\lim_{x \to -\infty}\frac{\ln(1-x^3)}{1-x^3} = \lim_{X \to +\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$$

تمرين رقم 47

1)

$$\lim_{x \to +\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$$

نضع $x = \frac{1}{X}$.

لدينا: $X \underset{>}{\to} 0 \Leftrightarrow x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x(\ln(x+1)-\ln x) = \lim_{X \underset{>}{\to} 0}\frac{1}{X}\left(\ln\left(\frac{1+X}{X}\right)+\ln X\right)$$
$$= \lim_{X \underset{>}{\to} 0}\frac{1}{X}(\ln(1+X)-\ln X+\ln X)$$
$$= \lim_{X \underset{>}{\to} 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

2)

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x+\frac{\ln(x^2-x+2)}{x-1}\right) =$$
$$= \lim_{x \to +\infty}\left(x+\frac{\ln x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\mapsto+\infty}\left(x + \frac{\ln(x^2) + \ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\mapsto+\infty}\left(x + 2\frac{\ln x}{x-1} + \left(\frac{1}{x-1}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\mapsto+\infty}\left(x + 2\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x}{x-1} + \left(\frac{1}{x-1}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\right)$$

$$= +\infty$$

(3 نضع $x = -\frac{1}{X}$

$$X \to 0^+ \Leftrightarrow x \mapsto -\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left(x^2-1-\ln(1-x^3)\right) =$$

$$= \lim_{X\underset{>}{\to}0}\left(\frac{1}{X^2}-1-\ln\left(1+\frac{1}{X^3}\right)\right)$$

$$= \lim_{X\underset{>}{\to}0}\left(\frac{1}{X^2}-1-\ln\left(\frac{1+X^3}{X^3}\right)\right)$$

$$= \lim_{X\underset{>}{\to}0}\left(\frac{1}{X^2}-1-\ln(1+X^3)+\ln X^3\right)$$

$$= \lim_{X\underset{>}{\to}0}\left(\frac{1}{X^2}-1-\ln(1+X^3)+3\ln X\right)$$

$$= \lim_{X\underset{>}{\to}0}\frac{1}{X}\left(\frac{1}{X}-X-X\ln(1+X^3)+3X\ln X\right) = +\infty$$

تمرين (رقم 48)

(1

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3\ln x+2}{x+\ln x} = \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{(\ln x)\left(3+\frac{2}{\ln x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\left(\frac{3+\frac{2}{\ln x}}{1+\frac{\ln x}{x}}\right) = 0$$

$$\left(\text{لأن } \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{\ln x} = 0 \;\text{،}\; \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0\right)$$

(2

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1+\ln^2 x}{\ln x-\ln^3 x} = \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln^2(x)\left(\frac{1}{\ln^2 x}+1\right)}{\ln^3(x)\left(\frac{1}{\ln^2 x}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{\frac{1}{\ln^2 x}+1}{\frac{1}{\ln^2 x}-1}\right) = 0$$

(3

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{3\ln x+2}{x+\ln x} = \lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{\ln(x)\left(3+\frac{2}{\ln x}\right)}{\ln(x)\left(x\cdot\frac{1}{\ln x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{3+\frac{2}{\ln x}}{x\cdot\frac{1}{\ln x}+1} = 3$$

$$\left(\text{لأن: } \lim_{x\underset{>}{\to}0}x\cdot\frac{1}{\ln x} = 0 \;\text{،}\; \lim_{x\underset{>}{\to}0}\frac{2}{\ln x} = 0\right)$$

(4

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-x^2+\ln x}{2+\ln x} = \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x\left(-x+\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln(x)\left(\frac{2}{\ln x}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)\left(\frac{-x+\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\frac{2}{\ln x}+1}\right) = -\infty$$

$$\left(\text{لأن: } \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{\ln x} = +\infty\right)$$

تمرين (رقم 49)

(1 نحسب: $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}$

نضع: $X^2 = x^3 \Leftrightarrow x = X^{2/3}$

$$X \mapsto +\infty \Leftrightarrow x \mapsto +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\left(\ln X^{2/3}\right)^2}{X^2}$$

$$= \frac{4}{9}\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2 = 0$$

(2 نحسب: $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln^3 x}{x^2}$

نضع: $X^3 = x^2 \Leftrightarrow x = X^{3/2}$

$$X \to +\infty \Leftrightarrow x \mapsto +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln^3 x}{x^2} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\left(\ln X^{3/2}\right)^3}{X^3} =$$

$$= \frac{27}{8}\lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln X}{X}\right)^3 = 0$$

نحسب: $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

نضع $X = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = X^3$

$$X \mapsto +\infty \Leftrightarrow x \mapsto +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X^3}{X} =$$

$$= 3\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X} = 0$$

نحسب: $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$

نضع $X^2 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = X^6$

$$X \mapsto +\infty \Leftrightarrow x \mapsto +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{\left(\ln X^6\right)^2}{X^2} =$$

$$= \lim_{X\to+\infty}36\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2 = 0$$

نحسب: $\lim_{x\underset{>}{\to}0}x^2\ln^3 x$

نضع: $X^3 = x^2 \Leftrightarrow x = X^{3/2}$

$$X \to 0^+ \Leftrightarrow x \mapsto 0^+$$

$$\lim_{x\underset{>}{\to}0}x^2\ln^3 x = \lim_{X\underset{>}{\to}0}X^3\left(\ln X^{3/2}\right)^3 =$$

$$= \frac{27}{8} \lim_{X \to 0^+} (X \ln X)^3 = 0$$

نحسب : $\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} \ln^2 x$

نضع : $X^2 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = X^6$

$x \mapsto 0^+ \Leftrightarrow X \mapsto 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} \ln^2 x = \lim_{X \to 0^+} X^2 (\ln X^6)^2 =$$

$$= 36 \lim_{X \to 0^+} (X \ln X)^2 = 0$$

تمرين رقم 50

1) نحسب $\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln^2 x$

نضع $X^2 = x^3 \Leftrightarrow x = X^{2/3}$

$x \mapsto 0^+ \Leftrightarrow X \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln^2 x = \lim_{X \to 0^+} X^2 (\ln X^{2/3})^2$$

$$= \frac{4}{9} \lim_{X \to 0^+} (X \ln X)^2 = 0$$

2) نحسب : $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln^3 x$

نضع $X^3 = x^2 \Leftrightarrow x = X^{3/2}$

$x \mapsto 0^+ \Leftrightarrow X \mapsto 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln^3 x = \lim_{X \to 0^+} X^3 (\ln X^{3/2})^3$$

$$= \frac{27}{8} \left(\lim_{X \to 0^+} (X \ln X)^3 \right) = 0$$

3) نحسب $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

نضع $X = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = X^2$

$x \mapsto 0^+ \Leftrightarrow X \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{X \to 0^+} X \ln X^2$$

$$= \lim_{X \to 0^+} 2(X \ln X) = 0$$

4) نحسب : $\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} \ln^2 x$

نضع $X^2 = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = X^6$

$x \mapsto 0^+ \Leftrightarrow X \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} \ln^2 x = \lim_{X \to 0^+} X^2 (\ln X^6)^2$$

$$= \lim_{X \to 0^+} 36 (X \ln X)^2 = 0$$

تمرين رقم 51

$$f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln(1+x) - x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1+x) \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x} - \frac{x}{1+x} \right) = -\infty$$

(لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$).

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{-x}{1+x}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

اذن : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[\; ; \; \ln(1+x) \leq x$$

$$g : x \longmapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - x^2}{2} - \ln(1+x) \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1+x) \left(\frac{2x - x^2}{2(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{1+x} \right) = -\infty$$

(لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - x^2}{2(1+x)} = -\infty$)

$$\forall x \in]0, +\infty[\; ; \; g'(x) = \frac{-x^2}{1+x}$$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

إذن : $\forall x \in]0, +\infty[\; ; \quad g(x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]0, +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

إذن : $\forall x \in]0, +\infty[\; ; \; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

تمرين رقم 52

لدينا :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 , \quad (x-y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \; ; \; x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \; ; \; x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \; ; \; \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \; ; \; \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \geq xy$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \; ; \; \ln \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \geq \ln xy$$

(لأن الدالة : $x \mapsto \ln x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$)

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \; ; \; 2 \ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \ln x + \ln y$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 , \; \ln \left(\frac{x+y}{2} \right) \geq \frac{\ln x + \ln y}{2}$$

تمرين رقم 53

$$\begin{cases} f(x) = -x \ln x - (1-x) \ln(1-x) \; ; \; x > 0 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

1) $\forall x \in]0,1[\; ; \; f'(x) = -\ln x - 1 + \ln(1-x) + 1$

$= -\ln x + \ln(1-x)$

$= \ln \frac{1-x}{x}$

$f'(x) = 0 \iff \frac{1-x}{x} = 1 \iff \frac{1-2x}{x} = 0$

$\iff 1-2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2$

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0

2) بما أن القيمة القصوية للدالة f على $[0,1]$ هي $\ln 2$

فإن $\forall x \in [0,1] \; , \; f(x) \leq \ln 2$

3) لدينا: $a > 0$

و $b = 1 - a > 0$

يعني $a < 1$

إذن $0 < a < 1$

بما أن $a \in]0,1[$ فإن: $f(a) \leq \ln 2$

$f(a) \leq \ln 2 \iff -a\ln a - (1-a)\ln(1-a) \leq \ln 2$

$\iff -a\ln a - b\ln b \leq \ln 2$

$\iff a\ln\frac{1}{a} + b\ln\frac{1}{b} \leq \ln 2$

تمرين رقم 54

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$$

1) $u_2 = 2 \; ; \; u_3 = 2^{3/2} \; ; \; u_4 = 2^{7/4} \; ; \; u_5 = 2^{15/8}$

ملاحظة: نبين بالترجع أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; ; \; u_n = 2^{\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}\right)}$$

لدينا: $u_1 = 2^{\left(\frac{2^0-1}{2^{-1}}\right)} = 1$

نفترض أن: $u_n = 2^{\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}\right)}$

نبين أن: $u_{n+1} = 2^{\left(\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)}$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n = 2^{\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}\right)}$

إذن: $u_{n+1} = 2\left(2^{\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right)+1} = 2^{\frac{2\cdot 2^{n-1}-1}{2^{n-1}}}$

$= 2^{\left(\frac{2^n-1}{2^{n-1}}\right)}$

إذن: $\forall n \geq 1 \; , \; u_n = 2^{\left(\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}}\right)}$

2) أ) $\forall n \geq 1 \; ; \; v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln 4$

$= \ln\frac{2\sqrt{u_n}}{4} = \ln\frac{\sqrt{u_n}}{2}$

$= \frac{1}{2}\ln u_n - \ln 2$

$= \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 4) = \frac{1}{2}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول: $v_1 = -\ln 4$

ب) لدينا: $\forall n \geq 1 \; ; \; v_n = (-\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\forall n \geq 1, \; \ln u_{n+1} - \ln u_n = (\ln u_{n+1} - \ln 4) - (\ln u_n - \ln 4)$

$= v_{n+1} - v_n$

$= (-\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n - (-\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= (-\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$= (\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$

إذن: $\forall n \geq 1 \; \ln\frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$

إذن: $\forall n \geq 1 \; , \; \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

إذن: $\forall n \geq 1 \; ; \; u_{n+1} > u_n$

إذن: (u_n) متتالية تزايدية

ج) لدينا: $\forall n \geq 1 \; ; \; v_n = (-\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

إذن: $\lim v_n = \lim (-\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 0$

إذن: $\lim u_n = 4$

تمرين رقم 55

نعتبر x_0 المبلغ المالي الأصلي الموضوع في البنك ونعتبر x_n المبلغ المالي بعد نهاية السنة n

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$x_{n+1} = x_n + 0{,}13\,x_n = (1{,}13)\,x_n$

إذن (x_n) متتالية هندسية أساسها $1{,}13$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; x_n = (1{,}13)^n x_0$

نحدد n بحيث

$2x_0 = (1{,}13)^n x_0$

$\iff (1{,}13)^n = 2$

$\iff \ln(1{,}13)^n = \ln 2$

$\iff n\ln(1{,}13) = \ln 2$

$\iff n = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}13)} = 5{,}7$

ومنه فإن المبلغ سيتضاعف عند نهاية السنة الخامسة

تمرين رقم 56

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$

$= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

$= \ln\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}} = -\ln 3$

إذن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها $(-\ln 3)$ وحدها الأول: $v_1 = \ln 2$

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \frac{1}{n}(v_1+v_2+\dots+v_n)=$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{2}(v_1+v_n)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln 2-\ln 3^{(n-1)}\right)$$

$$=\ln 2-\frac{(n-1)\ln 3}{2}$$

تمرين رقم 57

1) $u_1=\ln 2$ ، $u_2=\ln\frac{3}{2}$

2) $\forall n\geq 1;\ u_{n+1}-u_n=\ln\frac{n+2}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}$

$$=\ln\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}=\ln\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$

لدينا : $\forall n\geq 1;\ n^2+2n<n^2+2n+1$

$$\Leftrightarrow \forall n\geq 1;\ n^2+2n<(n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \forall n\geq 1;\ 0<\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}<1$$

$$\Leftrightarrow \forall n\geq 1;\ \ln\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)<0$$

اذن $\forall n\geq 1;\ u_{n+1}-u_n<0$

اذن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية

3) أ) $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$

$$=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\dots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\dots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$$

ب) $\lim S_n=\lim \ln(n+1)=+\infty$

تمرين رقم 58

نعتبر u_0 العدد الأصلي للبكتريا في الساعة 0

لكل n من $\mathbb{N}$:

نعتبر u_n عدد البكتريا المتبقي في الساعة n

لدينا : $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=u_n-u_n\cdot 0{,}05$

$$=(0{,}95)\,u_n$$

إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها 0,95 وحدها الأول u_0

اذن : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=u_0(0{,}95)^n$

نحدد n بحيث $u_n<\frac{1}{4}u_0$

$$u_n<\frac{1}{4}u_0 \Leftrightarrow (0{,}95)^n u_0<\frac{1}{4}u_0$$

$$\Leftrightarrow (0{,}95)^n<\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow n\ln(0{,}95)<-2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow n>-\frac{2\ln 2}{\ln(0{,}95)}$$

$$\Leftrightarrow n>27$$

اذن بعد 27 ساعة يكون عدد البكتريا أقل من ربع عددها الأصلي .

تمرين رقم 59

1) $pH=-\log[H^+]$

* $1<pH<7 \Leftrightarrow 1<-\log[H^+]<7$

$$\Leftrightarrow -7<\log[H^+]<-1$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{1}{10^7}<\log[H^+]<\log\frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10^7}<[H^+]<\frac{1}{10}$$

* $7<pH<14 \Leftrightarrow 7<-\log[H^+]<14$

$$\Leftrightarrow -14<\log[H^+]<-7$$

$$\Leftrightarrow \log\frac{1}{10^{14}}<\log[H^+]<\log\frac{1}{10^7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10^{14}}<[H^+]<\frac{1}{10^7}$$

2) $[H^+]=3{,}16\cdot 10^{-6}\ mol/l$

$$pH=-\log[H^+]=-\log(3{,}16\cdot 10^{-6})$$

$$=-\log(3{,}16)+6=5{,}5$$

بما أن $1<pH<7$

فان هذا المحلول حمضي .

3) $[H^+]=3{,}98\cdot 10^{-8}$

$$pH=-\log[H^+]=-\log(3{,}98\cdot 10^{-8})$$

$$=-\log 3{,}98+8=7{,}4$$

بما أن $7<pH<14$

فان هذا المحلول قاعدي .

تمرين رقم 60

قانون كيبلر: $T^2=kd^3$

1) $\ln(T^2)=\ln(kd^3)$

$$\Leftrightarrow 2\ln T=\ln k+3\ln d$$

2) لدينا : $\ln d=\frac{2}{3}\ln T+\frac{1}{3}\ln k$

بما أن العلاقة بين $\ln T$ و $\ln d$ خطية فان النقط $M(\ln T,\ln d)$ مستقيمية

3) باعتبار المسافة بين الأرض والشمس هي وحدة المسافة فإن $k=1$

الكوكب	$\ln d$	$\ln T$	
عطارد	$-0{,}9$	$-1{,}4$	$-0{,}9=\frac{2}{3}(-1{,}4)$
الزهرة	$-0{,}3$	$-0{,}4$	$-0{,}3=\frac{2}{3}(-0{,}4)$
زحل	$2{,}2$	$3{,}3$	$2{,}2=\frac{2}{3}(3{,}3)$
بلوتون	$3{,}6$	$5{,}5$	$3{,}5=\frac{2}{3}(5{,}5)$

تمرين رقم 61

$$f(x)=x-2\,\ln 2\sqrt{x-1}$$

I 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-2\sqrt{x-1}-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)-2\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \left(1-2\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right) = -\infty.$$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1
والمنحنى $\mathcal{C}_f$ على يمين النقطة $(1,1)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

ج) $\forall x \in]1,+\infty[\ ;\ f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}$

$$= \frac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

وإشارة $f'(x)$ هي إشارة: $(x-2)$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - 2\frac{\sqrt{x-1}}{x}\right) =$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1-2\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)-x) = \lim_{x \to +\infty} -2\sqrt{x-1} = -\infty$$

اذن المنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي
معادلته $y = x$

4) أ) بما ان f_1 دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[2,+\infty[$ فإنها
تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $J = f([2,+\infty[) = \mathbb{R}^+$

لدينا:
$$\begin{cases} x = f_1(y) \\ y \in [2,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f_1^{-1}(x) \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$x = f_1(y) \Leftrightarrow x = y - 2\sqrt{y-1} = \left(\sqrt{y-1}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} - 1 = \sqrt{x}$$

$$\left(\forall y \in [2,+\infty[\ ,\ \sqrt{y-1}-1 \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-1} = \sqrt{x}+1$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\sqrt{x}+1\right)^2+1$$

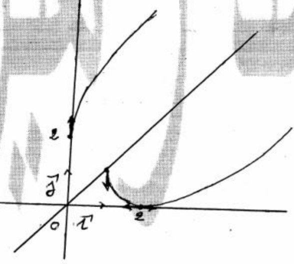
اذن، $f_1^{-1}(x) = \left(\sqrt{x}+1\right)^2+1$

ب) $(T_A) : y = \left[\left(f_1^{-1}\right)'(1)\right](x-1) + f_1^{-1}(1)$

لدينا: $f_1^{-1}(1) = 5$

و: $\left(f_1^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

اذن، $(T_A) : y = 2x+3$



II $g(x) = \ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)$

1) $x \in D_g \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} > 0$ و $x \geq 1$

ولدينا حسب الفقرة السابقة

$$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ x-2\sqrt{x-1} \geq 0$$

اذن: $x \in D_g \Leftrightarrow x \geq 1$ و $x \neq 2$

اذن $D_g = [1,2[\cup]2,+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right) = +\infty$$

(لأن: $\lim_{x \to +\infty} \left(x-2\sqrt{x-1}\right) = +\infty$)

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right) = -\infty$$

(لأن: $\lim_{x \to 2} \left(x-2\sqrt{x-1}\right) = 0^+$)

ج) ندرس قابلية اشتقاق g على يمين 1

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)-1} \cdot \frac{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)-1} \cdot \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)-2\sqrt{x-1}}{x-1}$$

نضع $X = x-2\sqrt{x-1}$

$$X \to 1^+ \Leftrightarrow x \to 1^+$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)-1} = \lim_{X \to 1} \frac{\ln X}{X-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)-2\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \left(1-2\sqrt{\frac{1}{x-1}}\right) = -\infty$$

اذن $\lim_{x \to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\infty$

g دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 1.
والمنحنى $\mathcal{C}_g$ على يمين النقطة $(1,0)$ نصف مماس يوازي محور الأراتيب

$$\forall x \in]1,2[\cup]2,+\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{\left(x-2\sqrt{x-1}\right)'}{x-2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}}{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}$$

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

3) لدينا: $\lim_{x \to 2} g(x) = -\infty$

اذن المنحنى $\mathcal{C}_f$ مقارب معادلته $x = 2$

لدينا: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{x-2\sqrt{x-1}} \cdot \frac{x-2\sqrt{x-1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{x-2\sqrt{x-1}} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2\sqrt{x-1}}{x}$$

نضع $X = x-2\sqrt{x-1}$

$$X \to +\infty \Leftrightarrow x \to +\infty$$

إذن: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}{x-2\sqrt{x-1}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

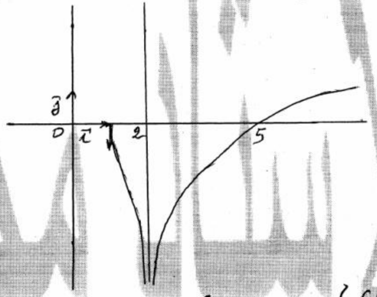
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2\sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right) = 1$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

إذن المنحنى C_g بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

$g(x)=0 \iff x-2\sqrt{x-1} = 1 \iff \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$

$\iff x=1$ أو $x=5$



تمرين رقم 62

$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x - 1)^2 ; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^+$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(\ln x-1)^2 = +\infty$

2) أ) نحسب $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2$

نضع $x = X^2$

$X \to 0^+ \iff x \to 0^+$

$$\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{X\to0^+} X^2(\ln X^2)^2 = 4\left(\lim_{X\to0^+} X\ln X\right)^2 = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(x(\ln x)^2 - 2x\ln x + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2 - 2\lim_{x\to0^+} x\ln x + \lim_{x\to0^+} x = 0 = f(0)$$

إذن f دالة متصلة على اليمين في 0

ب) $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}(\ln x-1)^2$

$$= \lim_{x\to0^+}(\ln x)^2 - 2\lim_{x\to0^+}\ln x + 1 = +\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0
والمنحنى C_f على يمين النقطة $(0,0)$ نصف مماس عمودي

3) أ) $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ;\ f'(x) = (\ln x-1)^2 + 2(\ln x-1)$

$= (\ln x - 1)(\ln x + 1)$

$f'(x) = 0 \iff \ln x = 1$ أو $\ln x = -1$

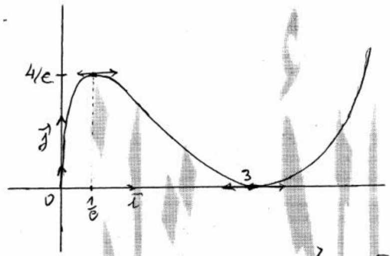
$\iff \ln x = \ln e$ أو $\ln x = \ln\frac{1}{e}$

$\iff x = e$ أو $x = \frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}(\ln x-1)^2 = +\infty$

إذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب



تمرين رقم 63

$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

$D_g = \mathbb{R}_+^*$

1) $\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}(2x^2+1-\ln x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(2x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

2) أ) $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ;\ g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x}$

x	0		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2 > 0$

ج) بما أن القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}_+^*$ هي: $\frac{3}{2}+\ln 2 > 0$

فإن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ,\ g(x) > 0$

II $f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln x}{x}$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(2x-2+\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$

(لأن: $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right) = -\infty$)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x-2+\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

2) لدينا: $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

إذن المنحنى C_f مقاربا عموديا هو محور الأراتيب

لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (2x-2)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+$

إذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = 2x-2$
و C_f فوق المقارب المائل بجوار $+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ,\ f'(x) = \left(2x-2+\frac{\ln x}{x}\right)'$

$= 2 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = 2 + \frac{1-\ln x}{x^2}$

$= \frac{2x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

4)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) أ) $\forall x\in\mathbb{R}_+^* ;\ f''(x) = \left(\frac{g(x)}{x^2}\right)' = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$

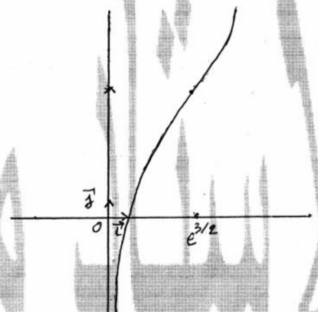
ب) $f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = e^{3/2}$

اذن نقطة انعطاف C_f هي النقطة التي احداثيتها

$\left(e^{3/2} , 2e^{3/2}-2+\frac{3}{2e^{3/2}}\right)$

لدينا: $f(1)=0$



تمرين رقم 64

$g(x)=x-\ln x$

I 1) $x\in D_g \Leftrightarrow x>0$

اذن $D_g=]0,+\infty[$

2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$

$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$

3) $\forall x\in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x)=\frac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) بما ان القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}_+^*$ هي 1

فان $\forall x\in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x)\geq 1>0$

اذن $\forall x\in \mathbb{R}_+^*, \quad x-\ln x>0$

$\Leftrightarrow \forall x\in \mathbb{R}_+^*, \quad x>\ln x$

II $\begin{cases} f(x)=\frac{x+\ln x}{x-\ln x}, & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\geq 0$ و $x-\ln x\neq 0$

وبما انه حسب السؤال I(4):

$\forall x\in \mathbb{R}_+^*, \quad x>\ln x$

فان $\forall x\in \mathbb{R}_+^*, \quad x-\ln x\neq 0$

اذن $D_f=[0,+\infty[$

2) أ) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{x}{\ln x}-1\right)}$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{\ln x}+1}{\frac{x}{\ln x}-1}=-1=f(0)$

(لأن: $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}(x)\left(\frac{1}{\ln x}\right)=0$)

اذن f دالة متصلة على اليمين في 0

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}=1$

اذن C_f يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا معادلته $y=2$

3) أ) $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x-\ln x}=0=f'_d(0)$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0

ب) $\forall x\in D-\{0\}, \quad f'(x)=\left(\frac{x+\ln x}{x-\ln x}\right)'=$

$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)(x-\ln x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+\ln x)}{(x-\ln x)^2}$

$=\frac{2(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$\frac{e+1}{e-1}$	$\searrow$	1

4) أ) $f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x+\ln x}{x-\ln x}=1$

$\Leftrightarrow x+\ln x=x-\ln x$

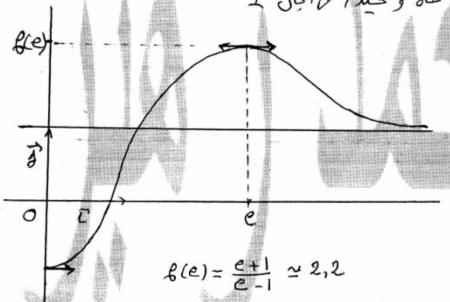
$\Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

ب) لدينا f دالة متصلة على $I=]\frac{1}{2},1[$ وتزايدية قطعا

و: $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\ln 2}{\frac{1}{2}+\ln 2}<0$

$f(1)=1>0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال I



$f(e)=\frac{e+1}{e-1}\simeq 2,2$

تمرين (رقم 65)

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

نبين أن : $\forall x\in\mathbb{R};\quad x+\sqrt{1+x^2}>0$

إذا كان: $x\geq 0$ فإن $\sqrt{1+x^2}\geq 1$

$$\Rightarrow\quad x+\sqrt{1+x^2}\geq 1+x>0$$

إذا كان: $x\leq 0$ فإن: $x+\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}>0$

إذن $D_f=\mathbb{R}$

1) أ) $\forall x\in\mathbb{R};\quad u(x).u(-x)=$

$$=(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)$$
$$=1+x^2-x^2=1$$

ب) لدينا لكل x من D_f . $(-x)\in D_f$

$$\forall x\in D_f,\quad f(-x)=\ln(u(-x))$$
$$=\ln\left(\frac{1}{u(x)}\right)$$
$$=-\ln(u(x))=-f(x)$$

إذن f دالة فردية

ج) f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين قابلتين للاشتقاق

$$\forall x\in\mathbb{R};\quad f'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ب) إذن : $G(x)=f(x)+\lambda\quad/\ \lambda\in\mathbb{R}$

II $\quad F(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$

1) $\forall x\in\mathbb{R};\quad F(2x)=\ln(2x+\sqrt{4x^2+4})$

$$=\ln\left(2(x+\sqrt{x^2+1})\right)=\ln 2+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=\ln 2+f(x)$$

ج) $\forall x\in\mathbb{R};\quad F(-x)+F(x)=$

$$=\ln(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)$$
$$=\ln 4=2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow\ \forall x\in\mathbb{R};\quad F(0-x)=2\ln 2-F(x)$$

إذن النقطة $I(0,\ln 2)$ مركز تماثل C_F

تمرين (رقم 66)

$$\begin{cases} f(x)=x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2, & x\neq 0\\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=0=f(0)$

إذن f دالة متصلة على يمين 0

ب) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2=1=f'_d(0)$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\ ,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

3) أ) $\forall x\in D_f-\{0\},\quad f(x)-x=x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2-x$

$$=x\left[\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2-1\right]$$
$$=x\left(1-\frac{1}{\ln x}-1\right)\left(1-\frac{1}{\ln x}+1\right)$$
$$=-\frac{x}{\ln x}\left(2-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{x}{\ln x}\left(\frac{1}{\ln x}-2\right)$$

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

للمنحنى C_f مقاربا معادلته $x=1$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\left(\frac{1}{\ln x}-2\right)=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=+\infty$

إذن للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y=x$

ج) لدينا $f(0)=0$

إذن C_f يقطع المستقيم $y=x$ في 0

ولدينا : لكل $x>0$:

$$f(x)=x\Leftrightarrow x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2=x$$
$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2=1$$

$\Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{\ln x}=1$ أو $1-\frac{1}{\ln x}=-1$

$\Leftrightarrow\ \frac{1}{\ln x}=0$ أو $\frac{1}{\ln x}=2$

لا يمكن . $\qquad x=\sqrt{e}$

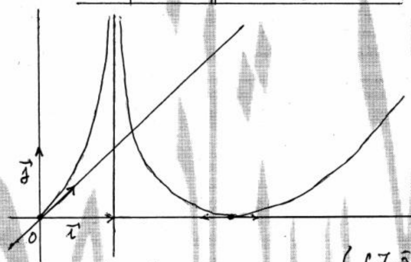
إذن C_f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=x$ في النقطتين $(0,0)$ و $(\sqrt{e},\sqrt{e})$

4) أ) $\forall x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,;$

$$f'(x)=\left(x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2\right)'$$
$$=\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)^2+2x\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{1}{x\ln^2 x}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)\left(1-\frac{1}{\ln x}+\frac{2}{(\ln x)^2}\right)$$
$$=\left(\frac{\ln x-1}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln^2 x-\ln x+2}{\ln^2 x}\right)$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة: $\frac{\ln x-1}{\ln x}$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\ln x - 1$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	1	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



تمرين رقم 67

$$\begin{cases} f(x) = \ln|x^2 - x| \ , & x<0 \\ f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ , & x>0 \end{cases}$$

نلاحظ أن

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $\forall x<0 \ , \ |x^2-x| = x^2 - x$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln|x||x-1|$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\ln|x| + \ln|x-1|\right) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} |x(x-1)| = -\infty$

(لأن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} x(x-1) = 0^+$)

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$

إذن للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = x$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln|x(x-1)|}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)(1-x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1-x)}{1-x}\right)\left(\frac{1-x}{x}\right) = 0$

إذن للمنحنى C_f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

3) أ) $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ f'(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$

$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x} - x - 1}{2x\sqrt{x}}$

وبما أن : $(2x + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = 2x\sqrt{x} - x - 1$

فإن $\forall x \in]0,+\infty[\ ;$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(2x+\sqrt{x}+1)}{2x\sqrt{x}}$$

ب) $\forall x \in]-\infty,0[\ , \ f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$

ج)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) $\forall x \in]0,+\infty[\ ; \ f(x) - x = -\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$= \frac{-x+1}{\sqrt{x}}$

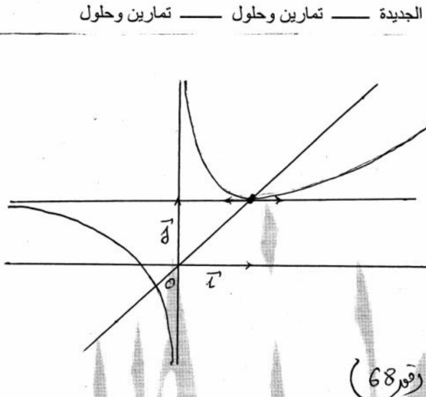
x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
		C_f فوق		C_f تحت	

لكل $x<0$ لدينا : $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x^2 - x| = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 1$ أو $x^2 - x = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ أو $x^2 - x + 1 = 0$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ , \ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، $\Delta < 0$



تمرين رقم 68

I.

$g(x) = \ln(1+x) - x$

$D_g =]-1,+\infty[$

1) أ) $\forall x \in [0,+\infty[\ , \ g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1$

$= \frac{-x}{1+x} < 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	

بما أن القيمة القصوية للدالة g على $\mathbb{R}^+$ هي 0

فإن $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ g(x) \leqslant 0$

ج) لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ g(x) < 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1+x) < x$

ومن جهة أخرى:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 1+x > 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(1+x) > 0$

إذن: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 < \ln(1+x) < x$

II $\quad f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1) $x \in D_f \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

$D_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

2) أ) لكل x من D_f لدينا: $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$

$= -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$= -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right) = -x - \ln\frac{x+1}{x-1}$

$= -f(x)$

إذن f دالة فردية

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ (لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$)

3) أ) $\forall x \in D, \quad f'(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$

$= 1 + \frac{-2}{x^2-1} = \frac{x^2-3}{x^2-1}$

ب)

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		$-$	0	$+$	
x^2-1	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

4) أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$

إذن المستقيم $(\Delta): y = x$ مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $+\infty$

ب) لكل x من $]1, +\infty[$ لدينا:

$x > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0$

إذن $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} > 1$

ومنه $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$

لكل x من $]-\infty, -1[$ لدينا:

$x < -1 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x+1} > 0$

إذن $\frac{x-1}{x+1} = 1 + \frac{-2}{x+1} > 0$

إذن $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$

إذن $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$

ج) $\forall x > 1, \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$

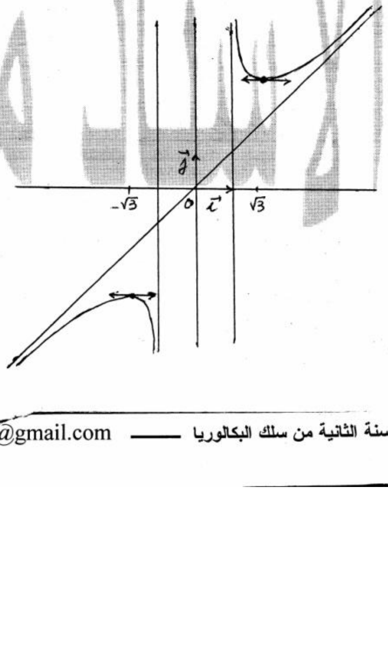
$\Leftrightarrow \forall x > 1, \quad x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > x$

إذن C_f فوق المستقيم (Δ)

$\forall x < 1, \quad \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$

$\Leftrightarrow \forall x < 1, \quad x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < x$

إذن C_f تحت المستقيم (Δ)



تمرين رقم 69

$f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right)$

$D_f = \mathbb{R}$

1) أ) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right)$

$= \frac{x}{2} - \ln\left(|x|\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{x}{2} - \ln|x| - \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|}\right)$

$= x\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln|x|}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x|}\right)$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right)\right)$

$= +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\left(\frac{1}{2} + \frac{\ln(-x)}{(-x)}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right)\right)$

$= -\infty$

2) أ) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x}\ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right)\right)$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = 0 = f'_d(0)$

(لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$)

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x}\ln\left(1 + \left(\frac{-x}{2}\right)\right)\right)$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\left(\frac{-x}{2}\right)\right)}{\left(\frac{-x}{2}\right)}\right) = 1 = f'_g(0)$$

$$\left(\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\ln\left(1+\left(\frac{-x}{2}\right)\right)}{\left(\frac{-x}{2}\right)} = 1 \quad \text{: لأن}\right)$$

بما أن: $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق في 0

ب) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+ , \quad f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{x}{2(2+x)} > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*_- , \quad f(x) = \frac{x}{2} - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{4-x}{2(2-x)} > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|0$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) لدينا: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) = -\infty$$

إذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\left(\frac{-x}{2}\right)\right)}{\left(\frac{-x}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(-\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right) = -\infty$$

إذن المنحنى C_f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$

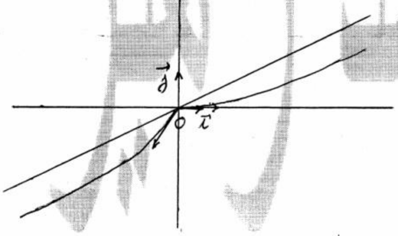
ب) لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ 1 + \frac{|x|}{2} \geq 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} , \ \ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} , \ -\ln\left(1 + \frac{|x|}{2}\right) \leq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) - \frac{x}{2} \leq 0$

إذن C_f تحت المستقيم الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$



تمرين رقم 70

$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} & ; \ 0 < x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1 , & x \geq 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1\right) = +\infty$

لأن: بوضع $X = \sqrt{x}$;
$x \to +\infty \Leftrightarrow X \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X^2}{X} = 2\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

2) أ) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\sqrt{\ln \frac{1}{x}} =$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}} =$$

$$= \lim_{X \to +\infty} \sqrt{\frac{\ln X}{X}} = 0 = f(0)$$

إذن f دالة متصلة على اليمين في 0

ب) $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{\ln \frac{1}{x}} = +\infty$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0

والمنحنى C_f على يمين 0 نصف مماس يوازي محور الأراتيب

ج) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1}{x - 1} =$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1\right) = 0 = f'_d(1)$$

لأن: $\left(\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \ , \ \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1\right)$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}{x-1} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -x\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}} = -\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x\sqrt{\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)\left(\frac{-1}{x-1}\right)} = -\infty$$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق في 1

3) أ) $\forall x \in]0,1[, \quad f'(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{x}} + x\frac{\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{2\sqrt{\ln \frac{1}{x}}}$

$$= \sqrt{\ln \frac{1}{x}} + x\frac{-\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} = \frac{2\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= -\frac{1 + 2\ln x}{2\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

$\forall x>1,\ f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}-1$

$=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}-1=\dfrac{2-2x\sqrt{x}-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

ب) ندرس إشارة : $(2-2x\sqrt{x}-\ln x)$ في $]1,+\infty[$

لأجل ذلك نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]1,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2-2x\sqrt{x}-\ln x$

لدينا : $\forall x\in]1,+\infty[\ ;\ g'(x)=-(4\sqrt{x}+\frac{1}{x})<0$

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	

بما أن القيمة القصوية للدالة g في المجال $]1,+\infty[$ هي 0 فإن $\forall x\in]1,+\infty[\ ,\ g(x)\leq 0$

x	0		$1/e$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty \| 0$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

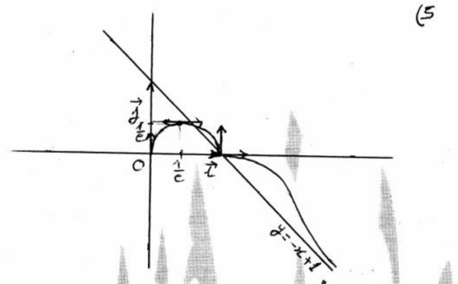
4) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1\right)=1$

اذن للمنحنى $\mathcal{C}_f$ بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته : $y=-x+1$

ب) $\forall x>1,\ f(x)-(-x+1)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}>0$

اذن $\mathcal{C}_f$ فوق المستقيم الذي معادلته $y=-x+1$ في $]1,+\infty[$

5)



(تمرين رقم 71)

$\begin{cases} f(x)=(\ln x)(\ln(1-x)) & ,\ x\in]0,1[\\ f(0)=f(1)=0 \end{cases}$

1) أ) نضع $u(x)=\ln(1-x)$ ، $D_u=]-\infty,1[$

u دالة قابلة للاشتقاق في 0

يعني : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{u(x)-u(0)}{x-0}$

$=u'(0)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)(\ln(1-x))=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)=0=f(0)$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في 0

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)=+\infty$

اذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0

للمنحنى $\mathcal{C}_f$ على يمين 0 نصف مماس يوازي محور الأراتيب

2) أ) $\forall x\in]0,1[\ ,\ f(1-x)=(\ln(1-x))\ln(1-(1-x))$

$=(\ln(1-x))(\ln x)=f(x)$

اذا كان $x=0$ أو $x=1$

فان $f(1)=f(0)$

اذن $\forall x\in[0,1]\ ,\ f(1-x)=f(x)$

ب) للمنحنى $\mathcal{C}_f$ محور تماثل هو المستقيم الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$

3) $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$

أ) $\forall x\in]0,1[\ ,\ g'(x)=-(\ln(1-x)+\ln x+2)$

$\forall x\in]0,1[\ ,\ g''(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$

نستنتج رتابة g' :

x	0		$1/2$		1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(-2\ln 2+2)<0$	$\nearrow$	$+\infty$

حسب مبرهنة القيم الوسيطية نستنتج ان المعادلة : $g'(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha\in]0,\frac{1}{2}[$ و $\beta\in]\frac{1}{2},1[$

نستنتج من ذلك اشارة $g'(x)$ على $]0,1[$

x	0		α		β		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}((1-x)\ln(1-x)-x\ln x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}((1-x)\ln(1-x)-x\ln x)=0$

د) $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=0$

x	0		α		$1/2$		β		1
$g'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$	0

نستنتج من ذلك اشارة $g(x)$ على $[0,1]$

x	0		$1/2$		1
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	0

4) أ) $\forall x\in]0,1[\ ,\ f'(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1-x)-\dfrac{1}{1-x}\ln x$

$=\dfrac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}$

$=\dfrac{g(x)}{x(1-x)}$

بما أن : $\forall x\in]0,1[\ ,\ x(1-x)>0$

فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

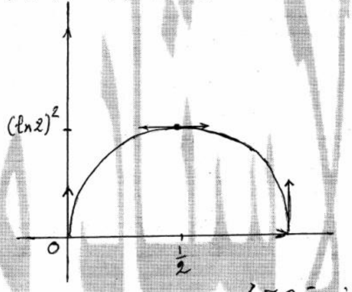
ب)

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(\ln 2)^2$	$\searrow$	0

ج) من جدول تغيرات f يتضح ان للدالة f على $]0,1[$ قيمة قصوية هي $(\ln 2)^2$ وقيمة دنوية هي 0

اذن $\forall x \in]0,1[\; ; \; 0 < f(x) \leq (\ln 2)^2$

5)



تمرين رقم 72

I نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بما يلي

$$f(x) = x - \ln(1+x)$$
$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$$

لدينا :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ ; \quad f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

بما أن القيمة الدنوية للدالة f على $\mathbb{R}^+$ هي 0

فان $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[\; ; \; \ln(1+x) \leq x$

ولدينا : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; , \; g'(x) = \frac{-x^2}{1+x}$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	

بما ان القيمة القصوية للدالة g على $\mathbb{R}^+$ هي 0

فان $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; g(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[\; , \; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$

ومنه فان : $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

II

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* ; \; u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

1) نبين بالترجع ان : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; , \; u_n > 0$

لدينا $u_1 > 0$

نفترض أن $u_n > 0$

نبرهن أن $u_{n+1} > 0$

لدينا حسب افتراض الترجع : $u_n > 0$

وبما أن $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \; 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

فان $u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$

اذن $u_{n+1} > 0$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \; u_n > 0$

2) نبين بالترجع أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \; u_n = \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots \left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

لدينا : $u_1 = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

نفترض أن : $u_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \cdots\cdots \left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

نبرهن أن : $u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

لدينا : $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \; u_n = \left(1+\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots \left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* , \; \ln u_n = \ln\left(\left(1+\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \cdots\cdots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

3) أ) لدينا حسب السؤال (I) :

$$\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$$

وبما أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* , \; \frac{1}{2^n} \in]0,+\infty[$

فان : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \; \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* ; \; \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

لاجل $n=1$ لدينا : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$

لاجل $n=2$ لدينا : $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{4^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

لاجل n لدينا $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$

نجمع طرفا بطرف نحصل على $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

ب) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

S_n هي مجموع n حد متتابع من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

وبما أن : $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

فان $\lim S_n = 1$

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}$$

T_n هي مجموع n حد متتابع من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

$$T_n = \frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

بما أن $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

فإن $\lim T_n = \frac{1}{3}$

4) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n$

$= u_n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} > 0$

(لأن : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_n > 0$ و $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$)

إذن، $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية تزايدية قطعا

نبين أن $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ مكبورة :

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n < 1$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln u_n \leq S_n < 1$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n < e$

إذن $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية تزايدية قطعا ومكبورة بالعدد e

إذن : $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة نهايتها ℓ

5) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n$

إذن : $\lim (S_n - \frac{1}{2}T_n) \leq \lim(\ln(u_n)) \leq \lim S_n$

$\Leftrightarrow \lim S_n - \frac{1}{2}\lim T_n \leq \lim(\ln(u_n)) \leq \lim S_n$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{6} \leq \lim(\ln(u_n)) \leq 1$

$\Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq \ln(\ell) \leq 1$

$\Leftrightarrow e^{5/6} \leq \ell < e$

تمرين رقم 73

1) نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين على $]0,+\infty[$ بما يلي

$f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$

$g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = 0$

(لأن : $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln 1 = 0$)

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x\ln(x+1) + x\ln x\right) = +\infty$

$\forall x \in]0,+\infty[;\quad f'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

إذن : $\forall x \in [1,+\infty[,\quad f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1,+\infty[,\quad \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$ ①

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + \ln x\right) = -\infty$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

إذن : $\forall x \in [1,+\infty[,\quad g(x) \leq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1,+\infty[;\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x$ ②

تمارين وحلول ـــــ تمارين وحلول ـــــ الأستاذ محمد زهير الثانوية التقنية الرازي الجديدة ـــــ تمارين وحلول ـــــ تمارين وحلول

من العلاقتين ① و② نحصل على :

$\forall x \in [1,+\infty[;\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

أ) لدينا حسب السؤال ① :

$\forall x \in [1,+\infty[;\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

بوضع $x = 1$ نحصل على : $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$

بوضع $x = 2$ نحصل على : $\frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$

بوضع $x = 3$ نحصل على : $\frac{1}{4} \leq \ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3}$

$\vdots$

بوضع $x = n$ نحصل على : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

نجمع طرفا بطرف نحصل على : $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$

ب) : لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n+1) \leq u_n$

وبما أن : $\lim \ln(n+1) = +\infty$

فإنه حسب مصاديق التقارب :

$\lim u_n = +\infty$

3) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

أ) لدينا حسب السؤال ①.

$\forall x \in [1,+\infty[,\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [1,+\infty[,\quad \frac{1}{x+1} \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

إذن : $\forall n \in [1,+\infty[;\quad \frac{1}{n+1} \leq \ln\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in [1,+\infty[;\ -\frac{1}{n} \leq -\ln\frac{n+1}{n} \leq -\frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in [1,+\infty[,\ 0 \leq \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \forall n \in [1,+\infty[,\ 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ب) لدينا : $\forall x \in [1,+\infty[;\ f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$

بوضع $x = 2$ نحصل على : $f(2) = \frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2$

بوضع $x = 3$ نحصل على : $f(3) = \frac{1}{3} - \ln 4 + \ln 3$

$\vdots$

بوضع $x = n-1$ نحصل على $f(n-1) = \frac{1}{n-1} - \ln n - \ln(n-1)$

نجمع طرفا بطرف نحصل على :

$\forall n \geq 2;\ f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n\right) - \ln 2$

$= (C_n - 1) + \ln 2$

$= C_n - (1 - \ln 2)$

$= C_n - f(1)$

إذن $\forall n \geq 2;\ C_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$

نبين أن $(C_n)_{n\geq 2}$ تزايدية.

لدينا : $\forall n \geq 2 \quad C_{n+1} - C_n = f(n)$

وحسب السؤال (3) أ : $\forall n \geq 1,\quad f(n) \geq 0$

إذن. $\forall n \geq 2;\ C_{n+1} - C_n \geq 0$

اذن $(C_n)_{n\geq 2}$ متتالية تزايدية

ولدينا حسب السؤال (3) أ :

$\forall n \in [1,+\infty[\,,\quad 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

لدينا لأجل $n=2$: $\quad 0 \leq f(2) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

لأجل $n=3$: $\quad 0 \leq f(3) \leq \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

$\vdots$

$0 \leq f(n-1) \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

نجمع طرفا بطرف نحصل على: $\forall n \geq 2\ ;\ 0 \leq C_n - f(1) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \forall n \geq 2;\ f(1) \leq C_n \leq \left(f(1) + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{n}$

وبما أن : $f(1) \leq 1 - \frac{1}{2}$ فإن $f(1) + \frac{1}{2} \leq 1$

اذن : $\forall n \geq 2\ ;\ f(1) \leq C_n \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$

اذن : $(C_n)_{n\geq 2}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1

إذن : $(C_n)_{n\geq 2}$ متتالية متقاربة نهايتها λ (ثابتة أولير)

تمرين رقم 74

$\forall m \in \mathbb{R}\ ;\ f_m(x) = \ln(x^2 - mx + 1)$

1) أ) $x^2 - mx + 1 = 0$

$\Delta = m^2 - 4$

m	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	
عدد حلول المعادلة		2	1	0	1	2	

ب) لكي تكون $f_m(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$

يجب أن يكون : $\forall x \in \mathbb{R};\ x^2 - mx + 1 > 0$

يعني يجب أن يكون : $\Delta < 0$

يعني يجب أن تكون : $m \in]-2, 2[$

ج) نعتبر $m \in]-1,1[$ يعني $\Delta < 0$

اذن $D_{f_m} = \mathbb{R}$

أ) نعتبر $M\binom{a}{b}$ نقطة من المستوى P.

لدا a و b بحيث $\forall m \in]-1,1[\ : M \in C_m$

$\Leftrightarrow \forall m \in]-1,1[\ ,\ M \in C_m$

$\Leftrightarrow \forall m \in]-1,1[\ ,\ b = f_m(a) = \ln(a^2 - ma + 1)$

$\Leftrightarrow \forall m \in]-1,1[\ ;\ \ln e^b = \ln(a^2 - ma + 1)$

$\Leftrightarrow \forall m \in]-1,1[\ ;\ a^2 - ma + 1 = e^b$

$\Leftrightarrow \forall m \in]-1,1[\ ,\ am + (e^b - a^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^b - a^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^b = 1 = e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

اذن جميع المنحنيات C_m تمر من النقطة $O(0,0)$

ب) $\forall x \in \mathbb{R};\quad f'_m(x) = \frac{2x - m}{x^2 - mx + 1}$

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$

x	$-\infty$		$m/2$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$f_m(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(1 - \frac{m^2}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

ج) $(T_0) : y = (f'_m(0))x + f_m(0) = -mx$

د) C_{m+1} فوق $C_m \Leftrightarrow f_{m+1}(x) > f_m(x)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 - (m+1)x + 1) > \ln(x^2 - mx + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 > x^2 - mx + 1$

$\Leftrightarrow \quad x < 0$

اذن في المجال $]-\infty, 0[$ C_{m+1} فوق C_m

وفي المجال $]0, +\infty[$ C_{m+1} تحت C_m

هـ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2 - mx + 1)}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1 + \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}$

$= 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

اذن للمنحنى C_m بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2 - mx + 1)}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1 - \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right)}{x}$

$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln x^2}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty} -2\frac{\ln|x|}{|x|} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

اذن للمنحنى C_m بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

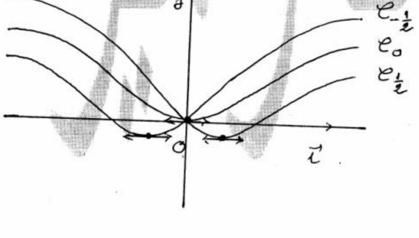
و)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_0(x)$		$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
$f'_{\frac{1}{2}}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{\frac{1}{2}}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(15/16)$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-1/4$		$+\infty$
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$		$-$	0	$+$	
$f_{-\frac{1}{2}}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(15/16)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\ln\left(\frac{15}{16}\right) \approx -0{,}06$



تمرين رقم 75

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \begin{cases} f_n(x) = nx - x\ln x \ , \ x>0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

I -
$$\begin{cases} f_0(x) = -x\ln x \ , \ x>0 \\ f_0(0) = 0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f_0(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -x\ln x = 0 = f_0(0)$

اذن f_0 دالة متصلة على يمين 0

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x\ln x}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} -\ln x = +\infty$

اذن f_0 دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0
والمنحنى $\mathcal{C}_{f_0}$ على يمين النقطة $O(0,0)$ نصف مماس عمودي

3) $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ f_0'(x) = -(1+\ln x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1+\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f_0'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	$-\infty$

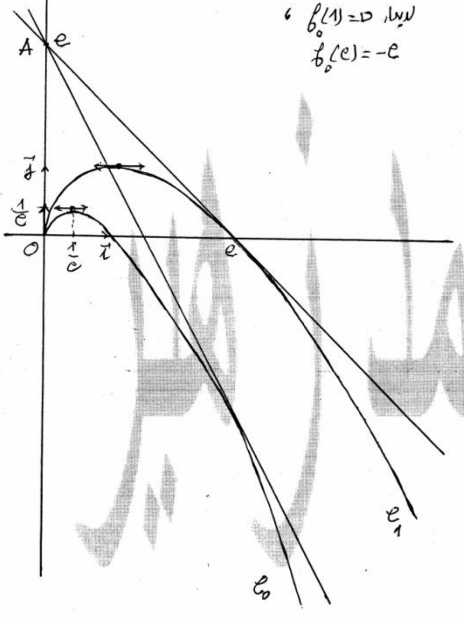
$\frac{1}{e} \approx 0,4$

4) لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\ln x = -\infty$

اذن لمنحنى الدالة f_0 بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

لدينا $f_0(1) = 0$ ، $f_0(e) = -e$



II نعتبر $n \in \mathbb{N}^*$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (nx - x\ln x) = 0 = f_n(0)$

اذن f_n دالة متصلة على يمين 0

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (nx - x\ln x)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x(n - \ln x) = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} (n - \ln x) = +\infty$

اذن الدالة f_n غير قابلة للاشتقاق على يمين 0
والمنحنى $\mathcal{C}_{f_n}$ على يمين النقطة $O(0,0)$ نصف مماس عمودي

3) $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ f_n'(x) = n - 1 - \ln x$

$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = n-1$

$\Leftrightarrow x = e^{n-1}$

$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < n-1 \Leftrightarrow 0 < x < e^{n-1}$

x	0		e^{n-1}		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	e^{n-1}	$\searrow$	$-\infty$

4) $f_{n+1}(x) > f_n(x) \Leftrightarrow \mathcal{C}_{n+1}$ فوق $\mathcal{C}_n$

$\Leftrightarrow (n+1)x - x\ln x > nx - x\ln x$

$\Leftrightarrow x > 0$

اذن لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا $\mathcal{C}_{n+1}$ فوق $\mathcal{C}_n$

5) نعتبر $M\binom{x}{y}$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

$M \in \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow y = f_0(x) \Leftrightarrow M\binom{x}{-x\ln x}$

نعتبر $M'\binom{x'}{y'}$ صورة M بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته e^n

لدينا: $\overrightarrow{OM'} = e^n\,\overrightarrow{OM}$

$\Leftrightarrow \binom{x'}{y'} = \binom{e^n x}{-e^n x\ln x}$

نبين أن $M' \in \mathcal{C}_n$

يعني نبين أن: $f_n(e^n x) = -e^n x\ln x$

$f_n(e^n x) = ne^n x - e^n x\ln e^n x$

$= ne^n x - e^n x(\ln e^n + \ln x)$

$= ne^n x - ne^n x - e^n x\ln x$

$= -e^n x\ln x$

اذن $\mathcal{C}_n$ هي صورة $\mathcal{C}_0$ بالتحاكي الذي مركزه O ونسبته e^n

6) $(T_n):\ y = (f_n'(e))(x-e) + f_n(e)$

لدينا: $f_n(e) = ne - e$ و $f_n'(e) = n-2$

اذن: $(T_n):\ y = (n-2)x + e$

نعتبر $A\binom{a}{b}$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$

$\forall n \in \mathbb{N};\ A \in (T_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ (n-2)a + e = b$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N};\ an + (-2a + e - b) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -2a + e - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = e \end{cases}$

اذن $A\binom{0}{e}$

6 الدوال الأسية

1
بسط مايلي:
$a=e^{-x}\times e^{2x}$; $b=(e^{2-x})^2\times e^{3x-4}$
$c=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}$; $d=\dfrac{e^{2x}\times e^{3x}}{(e^x)^4}$

2
بسط مايلي:
$a=\dfrac{e^{2x}-e^x}{e^x}$; $b=\dfrac{e^{-x}(1+e^x)}{e^x(e^{-2x}+e^{-x})}$
$c=\sqrt{e^x+\dfrac{1}{e^x}+2}$; $d=\dfrac{e^{-2x}+2e^{-x}}{(e^{2x})^{-1}}$

3
بسط مايلي:
$a=(e^x-e^{-x})^2-e^{-x}(e^{3x}+e^{-x})$
$b=e^{2x}((e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2)$

4
ليكن x عددا حقيقيا. بيّن أن:
1) $e^x-e^{-x}=e^x(1-e^{-2x})=e^{-x}(e^{2x}-1)$
2) $\left(\dfrac{e^{x+1}}{e^{1-x}}\right)^2=e^{4x}=\dfrac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}}$
3) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$
4) $\dfrac{e^x-1}{e^{2x}}=e^{-x}-e^{-2x}$

5
ليكن x عددا حقيقيا بين أن:
1) $\dfrac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x}=1+e^{-x}$
2) $\dfrac{(e^x+1)^2-(e^x-1)^2}{4e^x}=1$
3) $\dfrac{e^x}{e^x-x}=\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$
4) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

8
حل في IR المعادلات الآتية:
1) $e^{2x}=1$ (2 $e^{3x}=e^{x+5}$ (3 $e^{2x-1}=e^x$ (4 $e^{x^2}=e^{2x-1}$

9
حل في IR المعادلات:
1) $e^{x^2+2x-3}=1$ (2 $e^{2x+1}=\dfrac{1}{e^x}$
3) $e^{x^2+3}-e=0$ (4 $e^{x^2-3}-e=0$

10
حل في IR المعادلات الآتية:
1) $e^x=2$ (2 $e^{x+1}=4$ (3 $e^x=-3$ (4 $e^{2x}=4$

11
حل في IR المعادلات الآتية:
1) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e$ (2 $\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\dfrac{1}{2}$
3) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{x-2}}=\dfrac{1}{e}$ (4 $e^{\frac{2x+3}{x-2}}=\dfrac{1}{e}$

12
حل في IR المعادلات الآتية:
1) $e^{2x-2}-(1+e)e^x+e^3=0$ (2 $e^x+e^{-x}=2$ (3 $e^{2x}-5e^x+6=0$

13
حل في IR المعادلات الآتية:
1) $2e^x-3e^{1-x}=2e-3$ (2 $e^{3x}-2e^{2x}-e^x+2=0$
3) $(e^x+1)^3=3e^{2x}-3$

14
حل في IR المتراجحات الآتية:
1) $e^{1-x}\leq e^{3x}$ (2 $e^{2x-3}>e^x$
3) $e^{1-x}-e^{2+x}\geq 0$ (4 $e^{-2x}<e^{1+x^2}$

15
حل في IR المتراجحات الآتية:
1) $1-e^{-x}\leq 0$ (2 $e^x-1\geq 0$
3) $e^{x}\leq 1$ (4 $e^{2x}\geq\dfrac{1}{2}$

16
حل في IR المتراجحات الآتية:
1) $e^x-\dfrac{1}{e^{3x}}<0$ (2 $e^x\leq e^{\frac{1}{x}}$ (3 $e^{2x}-\dfrac{3}{2}>0$ (4 $e^{1-x}-1<0$

17
حل في IR المتراجحات الآتية:
1) $(2e^x-1)(e^x-2)<0$ (2 $\dfrac{2e^x-1}{e^x-2}\leq 0$
3) $1-\dfrac{1}{e^{-x}+1}<\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ (4 $\dfrac{e^x+1}{e^{-x}-e}\leq 0$

18
حل النظمتين التاليتين:
$(S_1)\begin{cases}e^x-\dfrac{1}{e}e^y=1\\2e^x+e^y=4+e\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}x+y=1\\3e^x-e^{y+3}-2e^2=0\end{cases}$

19
حل النظمتين التاليتين:
$(S_1)\begin{cases}e^{4x}\times e^y=\dfrac{1}{e^2}\\xy=-2\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}e^xe^y=10\\\dfrac{e^x}{e^y}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$

20
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+1}$ (3 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}$

21
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-x)e^x$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}$

22
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ (2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{3x}$
1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$ (4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x+1}-e}{2x}$

23
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x+e^{-x}$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x+e^{-x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}3e^{2x}+e^x-1$ (4 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x+2$

263

24
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)^3$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x+\dfrac{1}{e^x}}$

25
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-e^x$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}2x-e^x$
3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{e^x}$ (4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)e^{2x}$

26
بوضع $X=\dfrac{1}{x}$ احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}$ (2 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}$ (3 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ (4 $\lim\limits_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}$

27
1) بوضع $2x=t$ احسب النهايتين:
$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^{2x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$
2) احسب النهايتين:
$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-x+1)e^x$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3+x+1}$

28
احسب $f'(x)$ في الحالات الآتية:
1) $f(x)=2x-e^{-x}$ (2 $f(x)=e^{3x}+e^x$
3) $f(x)=x^2e^{-x}$ (4 $f(x)=(x+2)e^x$

29
احسب $f'(x)$ في الحالات الآتية:
1) $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ (2 $f(x)=(e^x-e^{-x})^2$
3) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ (4 $f(x)=(2x-1)(e^x-1)$

30
احسب $f'(x)$ في الحالات الآتية:
1) $f(x)=(2x-1)(e^{-x}+1)$ (2 $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$
3) $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$ (4 $f(x)=e^{x\sin x}$

31
حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I.
1) $I=IR$; $f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$
2) $I=]0;+\infty[$; $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$
3) $I=IR$; $f(x)=e^x(e^x-1)^3$
4) $I=[0;\pi]$; $f(x)=\sin x\,e^{\cos x}$

32
حدد الدالة الأصلية للدالة f على I التي تحول x_0 إلى y_0
1) $f(x)=xe^{x^2-1}$; $I=IR$; $x_0=0$; $y_0=e$
2) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$; $I=]0;+\infty[$; $x_0=1$; $y_0=1$
3) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; $I=]0;+\infty[$ $\begin{cases}x_0=\ln 3\\y_0=4\sqrt{2}\end{cases}$
4) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}\ln(e^x+1)$; $I=IR$; $\begin{cases}x_0=0\\y_0=\ln^2(3)\end{cases}$

بالنسبة للتمارين من (33) إلى (36) ادرس تغيرات الدالة f ،ثم أعط جدول تغيراتها

33
1) $f(x)=x-1+e^x$ (2 $f(x)=(x-1)e^x$

34
1) $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ (2 $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x+2}$

35
1) $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ (2 $f(x)=x-2+\dfrac{1}{e^x}$

36
1) $f(x)=e^{2x}-2e^x$ (2 $f(x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}$

37
نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بمايلي:
$f(x)=(2-x)e^x-1$
1) ادرس تغيرات الدالة f
2) حدد الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f
3) بيّنْ أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $1<\alpha<2$ ثم حدد إشارة $f(x)$

38
حل في IR المعادلات:
1) $2^x=3$ (2 $4^x=8^x$ (3 $3^x=2$ (4 $10^x=50$

39
حل في IR المعادلات:
1) $16^x-5\times4^x+6=0$ (2 $4^x-2^{x+1}+1=0$
3) $3^x-3^{-x+2}=8$ (4 $9^x+3^{x+1}=4$

40
حل في IR المتراجحات:
1) $9^x>3^{-x+1}$ (2 $5^x>10$ (3 $2^x>3$ (4 $10^x>50$

41
حل في IR المتراجحات:
1) $4^x-3\times2^x+1<0$ (2 $9^x+3^x-2>0$
3) $\dfrac{3^x-1}{2\times3^x-4}\leq 0$ (4 $3^{-x+2}\geq 3^x-8$

42
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to-\infty}x2^x$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}x2^x$
3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x-1}{x}$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x}$

43
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)4^x$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x-2^x$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}10^x-10^{x+2}$ (4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^x-2^x}{x}$

44
احسب النهايات الآتية:
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x-x^2$ (2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$ (4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{2x}}{2^{3x}}$

45
احسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$ في الحالات الآتية:
1) $f(x)=\dfrac{2^x}{x}$ (2 $f(x)=x2^x$
3) $f(x)=4^x-2^x$ (4 $f(x)=10^x-x$

46
نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بمايلي: $g(x)=x^{-1}2^x$ و $f(x)=x2^{-x}$
1) ادرس تغيرات كل من الدالتين f و g، ثم أعط جدول تغيراتهما.
2) حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الأفصول $\dfrac{2}{\ln 2}$.
3) أنشئ كلا من منحنى الدالة f ومنحنى الدالة g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

264

47

حل في IR المتراجحات الآتية:

1) $e^{2x}+2e^{x}-3 \geq 0$ 2) $e^{x}+\frac{1}{e^{x}} \leq e+\frac{1}{e}$

3) $1-\ln(1-e^{-x}) \leq 0$ 4) $\ln\left(e^{x}-\frac{2}{e^{x}}\right)<0$

48

احسب النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^{2x}+e^{x}+2)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{2e^{x}+4}{e^{x}+1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln(e^{x}+1)$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)$

49

احسب النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{x\to 0}$ [illegible] 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{1}{x}}$ [illegible]

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^{3}}}{x^{3}+1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}$

50

احسب $f'(x)$ في الحالات الآتية:

1) $f(x)=2x-\ln(e^{x}+1)$ 2) $f(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)$

3) $f(x)=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}\ln(e^{x}+1)$ 4) $(f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x}))$

51

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بمايلي: $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) ادرس تغيرات الدالة f وأعط جدول تغيراتها.

3) أ) ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f

ب) ادرس وضع منحنى f بالنسبة لمقاربه المائل.

4) بَيِّنْ أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما منعدم والآخر a حيث $2<a<3$.

5) أنشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم.

52

في مدينة من 10000 نسمة، على الساعة الثامنة صباحاً، 100 من السكان تلقوا خبراً في شكل إشاعة.

ليكن $f(t)$ عدد السكان الذين علموا بالإشاعة في اللحظة t ((t بالساعات). أصل التواريخ ($t=0$)، الساعة الثامنة صباحاً)

نقبل أن: $f(t)=\frac{1}{99.e^{-1,15t}+1}$

1) ما عدد الأشخاص الذين علموا بالإشاعة على الساعة 12؟

2) حدد تغيرات الدالة f وأعط جدول تغيراتها.

3) متى يكون 99% من السكان على علم بالإشاعة؟

53

تحتوي عظام الأحياء على عدد N_0 من ذرات الكاربون 14 الذي يتجدد باستمرار. بعد الموت، ينقص عدد ذرات الكاربون 14 في العظام حيث عدد الذرات المتبقية $N(t)$ بعد t سنة من الموت معرف بالعلاقة: $N(t)=N_0.e^{-kt}$ حيث $k=1,245\times10^{-4}$

1) بعد 20.000 سنة من موت شخص، ما نسبة ذرات الكاربون 14 المتبقية في جسمه؟

2) تم تشريح جثة لمعرفة تاريخ وفاتها، إذا علمت أن عظام هذه الجثة تحتوي على 80% من ذرات الكاربون 14 ؛ فحدد تاريخ وفاتها.

3) تم العثور في مغارة على بقايا عظم فقد 30% من ذرات الكاربون 14. ما عمر هذا العظم؟ (المدة الفاصلة بين موته واللحظة التي اكتشف فيها)

4) نسمي دور (أو نصف حياة) الكاربون 14، المدة التي تفقد فيها 50% من ذرات الكاربون 14. احسب دور الكاربون 14.

54

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بمايلي:

$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^{x}+1)^{2}}$.

1) أ- تحقق من أن f دالة زوجية.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم أول هندسيا هذه النتيجة.

2) احسب $f'(x)$ لكل x من IR ثم استنتج تغيرات f

3) أ- بَيِّنْ أنه لكل x من IR: $f''(x)=\frac{-2e^{x}(e^{2x}-4e^{x}+1)}{(e^{x}+1)^{4}}$.

ب- استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يجب تحديدهما.

4) ارسم (C_f).

(نأخذ: $\ln(2+\sqrt{3})=1,3$ و $\ln(2-\sqrt{3})=-1,3$).

55

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$f(x)=x-1+\frac{3}{e^{x}+1}$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f واحسب النهايات عند محدات D_f.

2) حدد تغيرات f وأعط جدول التغيرات.

3) أ- تحقق من أن: $(\forall x \in IR)\ ;\ f(x)=x+2-\frac{3e^{x}}{e^{x}+1}$.

ب- حدد معادلة المقاربين المائلين لمنحنى f (مع تحديد الوضع النسبي).

4) أ- حدد تقعر (C_f) ونقطة انعطافه.

ب- اكتب معادلة مماس (C_f) في نقطة الانعطاف.

5) بَيِّنْ أن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها α وأن: $-\frac{3}{2}<\alpha<-1$.

6) أنشئ منحنى الدالة f

56 حل المعادلة $a^{x}=x^{a}$

1) ليكن α عدداً حقيقياً غير منعدم وليكن a من $IR^{*+}-\{1\}$.

بَيِّنْ أن: $a^{x}=x^{a} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{\alpha}$

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

ليكن (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ- ادرس تغيرات الدالة f.

ب- حدد الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f.

ج- أنشئ منحنى الدالة f.

3) أ- حدد مبيانياً عدد حلول المعادلة $f(x)=m$؛ ناقش حسب قيم البارمتر الحقيقي m.

ب- استنتج عدد حلول المعادلة $a^{x}=x^{a}$.

57

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR^{+} بمايلي:

$f(x)=(e^{x}-4)\sqrt{e^{x}-1}$.

و (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ- بَيِّنْ أن لكل x من IR^{*}_{+}: $\frac{f(x)}{x}=\frac{e^{x}-4}{\sqrt{e^{x}-1}}.\frac{e^{x}-1}{x}$

ب- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 ثم أعط

تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

3) أ- بَيِّنْ أن لكل x من IR^{*}_{+}: $f'(x)=\frac{3e^{x}(e^{x}-2)}{2\sqrt{e^{x}-1}}$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

5) احسب $f(2\ln2)$ ثم أنشئ المنحنى (C).

58

I/ نعتبر الدالة العددية h المعرفة على IR بما يلي: $h(x)=(2-x)e^{-x}+1$.

1) ادرس تغيرات الدالة h.

2) استنتج أن $h(x)>0$ لكل x من IR.

II/ نعتبر الدالة f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=(x-1)e^{-x}+x$

1) بَيِّنْ أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2) ادرس تغيرات الدالة f.

3) ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

أ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C).

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$.

ج- أنشئ المنحنى (C).

59

I/ لتكن u الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي: $u(x)=e^{x}-(x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة u.

2) استنتج أنه لكل x من IR^{*}: $u(x)>0$.

II/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=e^{2x}-2xe^{x}-1$

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\mathcal{C}$ الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) بَيِّنْ أنه لكل x من IR: $f'(x)=2u(x)e^{x}$.

4) أعط جدول تغيرات الدالة f

5) ارسم المنحنى $\mathcal{C}$. (دراسة تقعر $\mathcal{C}$ غير مطلوبة).

60

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR^{*} بما يلي:

$f(x)=\frac{xe^{x}-1}{e^{x}-1}$

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند محدات IR^{*}.

2) أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها.

ب- ادرس إشارة $f(x)-x$ على IR^{*+} واستنتج الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومقاربه المائل.

3) أ- نضع: $g(x)=e^{x}-x$ لكل x من IR.

احسب $g'(x)$ لكل x من IR وادرس إشارتها ثم استنتج إشارة $g(x)$.

ب- احسب $f'(x)$ لكل x من IR^{*}.

ج- ضع جدول تغيرات f. ثم أنشئ $(\mathcal{C}_f)$.

61

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1]$ بما يلي:

$f(x)=\frac{2}{(x-1)^{2}}e^{\frac{x+1}{x-1}}$ و $f(1)=0$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- بَيِّنْ أن f متصلة على اليسار في 1.

2) بَيِّنْ أن: $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^{4}}e^{\frac{x+1}{x-1}}$ لكل x من المجال $]-\infty;1[$.

استنتج تغيرات f وأعط جدول تغيراتها.

3) ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1. أوّل مبيانياً هذه النتيجة.

4) أنشئ منحنى f.

62

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي: $g(x)=1-e^{2x}-2xe^{2x}$

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم أعط جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=x+3-xe^{2x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها.

(لاحظ أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$).

2) حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) بَيِّنْ أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة A أفصولها α حيث: $0<\alpha<1$.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم الذي معادلته $(D): y=x-3$.

5) أنشئ المنحنى (C).

63

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_n=\frac{e^{n}}{3^{n}}$

1) تحقق من أن: $u_n=e^{n(1-\ln3)}$ ، $(\forall n \in IN)$

2) بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) هندسية محدداً أساسها وحدها الأول.

3) احسب نهاية المتتالية (S_n) حيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

64

ليكن a عدداً حقيقياً موجباً.

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=e^{au_n} \ ;\ n \in IN \end{cases}$

1) بَيِّنْ بالترجع أن المتتالية (u_n) تزايدية.

2) نفترض أن: $a \leq \frac{1}{e}$

أ- بَيِّنْ بالترجع أن: $(\forall n \in IN)\ ;\ u_n \leq e$.

ب- ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n)؟

65

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$\begin{cases} u_{n+1}=e^{n}-u_n \ ;\ n \in IN \\ u_0=1 \end{cases}$

بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) متباعدة.

66

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=u_n.e^{-u_n} \ ;\ n \in IN \end{cases}$

1) بَيِّنْ أن: $u_n>0$ ؛ $(\forall n \in IN)$.

2) بَيِّنْ أن المتتالية (u_n) محدودة.

67

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = (x-1)^3.e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)}$.

(C_f) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حدد حيز تعريف f ثم بيّنْ أن النقطة $\Omega(1;0)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f).

2) أ- تحقق من أن: $f(x) = e^{\frac{3}{2}}.(x-1)^3.e^{-\frac{3}{2}(x-1)^2}$; $(\forall x \geq 1)$.

ب- احسب $\lim\limits_{u \to +\infty} u.e^{-\frac{u^2}{2}}$ ثم $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) ادرس تغيرات الدالة f وأنشئ المنحنى (C_f).

4) نعتبر الدالة g المعرفة على IR بما يلي: $g(x) = |x-1|^3.e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)}$.

ارسم المنحنى (C_g) في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) حدد تبعاً لقيم البارامتر الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$x \in IR$; $m.e^{\frac{3}{2}(x-1)^2} = \left(\sqrt{e}|x-1|\right)^3$.

68

لتكن g الدالة العددية المعرفة بما يلي: $g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \; ; \; n \in IN \end{cases}$

بيّنْ أن المتتالية (u_n) محدودة.

69

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR^* بما يلي:

$f(x) = \frac{x-1}{x}e^x$ و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- احسب النهايات $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتائج المحصل عليها.

ب- احسب النهايتين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

(لاحظ أن $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{e^x}{x}$) ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

2) أ- بيّنْ أن: $f'(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2}e^x$ لكل x من IR^*.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) نقبل أن $I(1;0)$ هي نقطة انعطاف المنحنى (C). اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة I.

4) أ- احسب $f(-1)$ و $f(2)$

ب- أنشئ المستقيم (T) والمنحنى (C).

(نأخذ $e \approx 2,7$ و $\frac{2}{e} \approx 0,7$ و $\frac{e^2}{2} \approx 3,7$).

5) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]0;+\infty[$.

أ- بيّنْ أن g تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده.

ب- لتكن g^{-1} الدالة العكسية للدالة g. أنشئ التمثيل المبياني للدالة g^{-1} في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

70 تقريب للعدد e

بيّنْ أن: $(\forall x \in IR)$; $1 + x \leq e^x$

(يمكن دراسة تغيرات الدالة: $u : x \longmapsto e^x - x - 1$)

2) بوضع $X=-x$، بيّن أن $(\forall X \in]-\infty;1[)$; $e^x \leq \frac{1}{1-X}$

3) استنتج أن: $(\forall n \in IN^*)$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

4) نضع $(\forall n \in IN^*)$; $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

أ- بيّنْ أن: $(\forall n \in IN^*)$; $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$

ب- استنتج تقريبا للعدد e إلى 3.10^{-4}

71

I/ لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$g(x)=e^x-2x+2$

1) احسب $g'(x)$ لكل x من IR.

2) أ- ادرس إشارة $g'(x)$ لكل x من IR واستنتج تغيرات الدالة g (حساب نهايتي g عند $-\infty$ و $+\infty$ غير مطلوب).

ب- استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من IR.

II/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{x}{e^x}$ وليكن (C) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- احسب النهايتين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

ب- احسب النهايتين $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x + 1$.

2) بيّنْ أن $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$ لكل x من IR وضع جدول تغيرات الدالة f

3) أ- بيّنْ أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1;0[$ بحيث $f(\alpha) = 0$.

ب- حدد معادلة (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة التي أفصولها 0.

ج- بيّنْ أن $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$ لكل x من IR، ثم حدد زوج إحداثيتي نقطة انعطاف المنحنى (C).

د- أنشئ المنحنى (C) (نأخذ $\frac{2}{e^2} \approx 0,27$).

72

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على IR^* بما يلي

لكل x من IR^*: $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$

1) احسب النهايات: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$، $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x)$، $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x)$، $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

2) احسب $g'(x)$ لكل x من IR^*.

3) ضع جدول تغيرات الدالة g واستنتج أن لكل x من IR^*: $g(x)>0$

II/ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \quad \text{إذا كان } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$

ليكن $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّنْ أن الدالة f متصلة في 0.

2) احسب: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3) أ- بيّنْ أن: $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[f(x) - \frac{x}{2}\right] = \frac{-1}{4}$

ب- استنتج أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يقبل مقاربا مائلا وحدد معادلته.

4) أ- ادرس قابلية الاشتقاق على اليمين ثم على اليسار للدالة f في النقطة O وأعط تأويلا هندسيا للنتيجتين.

ب- بيّنْ أن لكل x من IR^*: $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

5) ضع جدول تغيرات الدالة f

6) أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ (نأخذ: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$).

(نقبل أن المنحنى $(\mathscr{C})$ لا يقبل أية نقطة انعطاف).

73

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$f(x) = x + \ln|e^x - 2|$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ- حدد مجموعة التعريف D للدالة f

ب- حدد نهايات f عند محدات D.

2) حدد معادلة المقارب المائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

3) أ- بيّنْ أنه لكل x من $]\ln 2;+\infty[$: $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)$

ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

4) أ- بيّنْ أنه لكل x من D لدينا: $f'(x) = \frac{2(e^x-1)}{e^x-2}$

ب أعط جدول تغيرات الدالة f.

5) حل في المجال $]\ln 2;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$.

6) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها $\ln 3$.

ب ارسم (T) والمنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(نأخذ $\ln(1+\sqrt{2}) \approx 0,8$)

74

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$f(x) = \ln\left(e^x + \frac{1}{4}e^{-x}\right)$

و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب النهايتين: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) أ- بيّنْ أن $\forall x \in IR$; $f'(x) = \frac{(2e^x-1)(2e^x+1)}{4e^{2x}+1}$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

3) أ- بيّنْ أن المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- بيّنْ أن $\forall x \in IR$; $f(x) = \ln(1+4e^{2x}) - (x+\ln 2)$

ج- استنتج معادلة مقارب (C_f) بجوار $-\infty$.

4) حدد نقطة، تقاطع (C_f) ومحور الأراتيب في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

ثم أنشئ (C). $\left(\ln\frac{5}{4} \simeq 0,2 \; ; \; \ln 2 \simeq 0,7\right)$.

5) نعتبر المعادلة (E): $f(x) = m$; $m \in IR$

أ- ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

ب- حل جبريا المعادلة (E).

75

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$.

و (C) هو التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$

1) بيّنْ أن $D_g =]1;+\infty[$ واحسب $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

2) أ- حل في $]1;+\infty[$ المتراجحة $1-\ln(x-1)>0$

ب- حدد تغيرات الدالة g وأعط جدول التغيرات.

ت- بيّنْ أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $[e+1;e^3+1]$.

ث- حدد إشارة الدالة g على كل من المجالين: $]1;a]$ و $]a;+\infty[$

3) بيّنْ أن: $D_f =]0;+\infty[$ واحسب نهايات f عند محدات D_f

4) أ- حدد تغيرات الدالة f وبيّن أن f تقبل قيمة قصوى عند $\ln(\sqrt{a})$

ب- بيّنْ أن $f(x) \leq \frac{2\sqrt{a}}{a-1}$ لكل x من D_f

5) أنشئ منحنى الدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

76

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي:

$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(-x)} ; x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{-x} + x - 1 ; x \in]0,+\infty[\end{cases}$

و (C) هو التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّنْ أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=0$.

2) بيّنْ أن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=0$.

3) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأعط تأويلا هندسيا.

4) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وبيّنْ أن (C) تقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$.

5) ادرس تغيرات الدالة f على حيز تعريفها.

6) أنشئ (C).

77

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بمايلي:

$\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{x-1} \; ; \; x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(1) = 1 \\ f(x) = x^2e^{-x} \; ; \; x \in]-\infty,0] \end{cases}$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) بيّنْ أن f متصلة في 0 وفي 1.

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في الصفر. نقبل أن:

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

4) بيّنْ أن: $\begin{cases} f'(x) = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \; ; \; x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f'(x) = x(2-x)e^{-x} \; ; \; x \in]-\infty,0[\end{cases}$

5) لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR_+^* بمايلي: $g(x)=x-1-\ln x$

أ- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x)$

ب- ادرس تغيرات الدالة g، واستنتج إشارة $g(x)$ لكل x من IR_+^*.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f

6) ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)، ثم أنشئ (C).

78

لتكن f الدالة المعرفة على IR بمايلي:

$\begin{cases} f(x) = x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \; ; x > 0 \\ f(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2} \; ; x \leq 0 \end{cases}$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = 1cm)$

1) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$

2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

79

I لتكن g الدالة العددية المعرفة بمايلي: $g(x)=x+1+\ln(-x)$

1) حدد D مجموعة تعريف الدالة g

2) حدد تغيرات الدالة g (حساب النهايات غير مطلوب)

3) استنتج إشارة الدالة g على D.

II لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x\ln(-x) ; x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} ; x > 0 \end{cases}$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f واحسب نهايات f عند محدات D_f.

2) ادرس اتصال الدالة f في الصفر.

3) أ- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في الصفر.

ب- احسب $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} \times f(x)\right)$.

ج- استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر ثم أوّل النتيجة هندسياً.

4) احسب $f'(x)$ لكل x من IR^{*-} و IR^{*+} ثم حدد تغيرات الدالة f.

5) حدد الفروع اللانهائية لمنحنى f

6) بيّن أن منحنى f يقبل نقطة انعطاف أفصولها سالب.

7) حدد معادلة مماس منحنى f عند النقطة التي أفصولها 1.

8) انشئ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

80

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} ; x < 1 \\ f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x} ; x \geq 1 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- احسب: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب- بيّن أن الدالة f متصلة في 1 و ادرس قابلية اشتقاق f في 1.

2) بيّن أنه لكل x من $]-\infty;1[$: $f'(x) = \frac{x-2}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$

3) تحقق من أن f تزايدية قطعا على المجال $]1;+\infty[$

4) اتمم دراسة الدالة f و أنشئ المنحنى (C).

نقبل أن (C) يوجد تحت مقاربه على $]-\infty;1[$

81

لكل n من IN^* نضع: $f_n(x) = 1 - \frac{2n}{x+n} - e^{-x}$; $(x \in [0;+\infty[)$

1) أ- ادرس تغيرات الدالة f_n

ب- احسب $f_n(n)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

2) أ- احسب $f_n(0)$ وحدد إشارته.

ب- بيّن بالترجع أن: $e^{n+1} > 2n+1$; $(\forall n \in IN^*)$.

ج- استنتج إشارة $f_n(n+1)$

3) بيّن أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً u_n وأن: $n<u_n<n+1$.

82

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي: $f(x)=\ln(1+e^{-x})$

ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I 1) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) أ- بيّن أن: $f(x) = -x + \ln(1+e^x)$; $(\forall x \in IR)$.

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل مقارباً (Δ) بجوار $-\infty$.

ج- حدد وضع المنحنى (C) والمقارب (Δ).

4) أنشئ (Δ) و (C).

III 1) لتكن u و v الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$u(t)=\ln(1+t)-t$ و $v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2$

أ- ادرس تغيرات كل من u و v.

ب- استنتج أن: $t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$; $(\forall t \in IR^+)$.

2) ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم.

نعتبر المتتالية $S_n=f(1)+f(2)+...+f(n)$

أ- بيّن أن: $\frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leq S_n \leq \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

ب- بيّن أن المتتالية (S_n) متقاربة، لتكن ℓ نهايتها.

ج- بيّن أن: $\left|\ell - \frac{1}{e-1}\right| \leq \frac{1}{2(e^2-1)}$.

3) بيّن أن: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x)+1}{x} = 0$، ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f وبالنسبة للمنحنى (C)؟

4) أ- احسب $f'(x)$ لكل x من IR^* وادرس إشارتها.

ب- أعط جدول تغيرات f

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ وأن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ (نأخذ $ln2=0,7$ و $ln3=1,1$)

ب- ادرس، على المجال $]0,+\infty[$، الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$.

ج- ارسم المنحنى (C) والمستقيم (Δ).

تمرين رقم 1

1) $a = e^{-x}.e^{2x} = e^{2x-x} = e^x$

2) $b = (e^{2-x})^2 . e^{3x-4}$
$= e^{4-2x+3x-4} = e^x$

3) $c = \sqrt{e^{2x}} . e^{-x} = e^x . e^{-x}$
$= e^{x-x} = e^0 = 1$

4) $d = \frac{e^{2x}.e^{3x}}{(e^x)^4} = e^{(2x+3x-4x)} = e^x$

تمرين رقم 2

$a = \frac{e^{2x}-e^x}{e^x} = \frac{e^x(e^x-1)}{e^x} = e^x - 1$

$b = \frac{e^{-x}(1+e^x)}{e^x(e^{-2x}+e^{-x})} = \frac{e^{-x}+e^{-x}.e^x}{e^x.e^{-2x}+e^x.e^{-x}}$
$= \frac{e^{-x}+1}{e^{-x}+1} = 1$

$c = \sqrt{e^x + \frac{1}{e^x} + 2} = \sqrt{\frac{(e^x)^2+2e^x+1}{e^x}}$
$= \sqrt{\frac{(e^x+1)^2}{e^x}} = \frac{e^x+1}{\sqrt{e^x}}$

$d = \frac{e^{-2x}+2e^{-x}}{(e^{2x})^{-1}} = \frac{e^{-x}(e^{-x}+2)}{(e^{-x})^2}$
$= \frac{e^{-x}+2}{e^{-x}} = \frac{\frac{1+2e^x}{e^x}}{\frac{1}{e^x}} = 1 + 2e^x$

تمرين رقم 3

$a = (e^x - e^{-x})^2 - e^{-x}(e^{3x}+e^{-x})$
$= e^{2x} + e^{-2x} - 2 - e^{2x} - e^{-2x} = -2$

$b = e^{2x}((e^x+e^{-x})^2 + (e^x-e^{-x})^2)$
$= e^{2x}(e^{2x}+e^{-2x}+2+e^{2x}+e^{-2x}-2)$
$= e^{2x}(2e^{2x}+2e^{-2x}) = 2(e^{4x}+1)$

تمرين رقم 4

1) $e^x - e^{-x} = e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x}-1}{e^x} = e^{-x}(e^{2x}-1)$

$e^x - e^{-x} = \frac{1}{e^{-x}} - e^{-x} = \frac{1-e^{-2x}}{e^{-x}} = e^x(1-e^{-2x})$

2) $\left(\frac{e^{x+1}}{e^{1-x}}\right)^2 = \left(\frac{e.e^x}{e.e^{-x}}\right)^2 = (e^{2x})^2 = e^{4x}$

$\left(\frac{e^{x+1}}{e^{1-x}}\right)^2 = \frac{e^{2+2x}}{e^{2-2x}} = \frac{e.e^{1+2x}}{e.e^{1-2x}} = \frac{e^{1+2x}.e^{x^2}}{e^{1-2x}.e^{x^2}}$
$= \frac{e^{(x^2+2x+1)}}{e^{(x^2-2x+1)}} = \frac{e^{(x+1)^2}}{e^{(x-1)^2}}$

3) $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{\frac{1}{e^{-x}}-1}{\frac{1}{e^{-x}}+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)-2}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{2}{e^x+1} = 1 - \frac{2}{e^x+1}$

4) $\frac{e^x-1}{e^{2x}} = \frac{e^x}{(e^x)^2} - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}} = e^{-x} - e^{-2x}$

تمرين رقم 5

1) $\frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^{2x}+e^x} = \frac{(e^x+1)^2}{e^x(e^x+1)} = \frac{e^x+1}{e^x} = \frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$

$= 1+e^{-x}$

2) $\frac{(e^x+1)^2-(e^x-1)^2}{4e^x} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-e^{2x}+2e^x-1}{4e^x} = 1$

3) $\frac{e^x}{e^x-x} = \frac{e^x}{e^x(1-xe^{-x})} = \frac{1}{1-xe^{-x}}$

4) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{e^x}\right)} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

تمرين رقم 8

1) $e^{2x}=1 \Leftrightarrow \ln(e^{2x})=\ln 1$

$\Leftrightarrow 2x=0$

$\Leftrightarrow x=0$ $\quad S=\{0\}$

2) $e^{3x}=e^{x+5} \Leftrightarrow 3x=x+5$

$\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$, $S=\{\frac{5}{2}\}$

3) $e^{2x-1}=e^x \Leftrightarrow 2x-1=x$

$\Leftrightarrow x=1$, $S=\{1\}$

4) $e^{x^2}=e^{2x-1} \Leftrightarrow x^2=2x-1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1$, $S=\{1\}$

تمرين رقم 9

1) $e^{x^2+2x-3}=1 \Leftrightarrow \ln(e^{x^2+2x-3})=\ln 1$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$

$\Delta=16$, $x_1=-3$, $x_2=1$

$S=\{-3,1\}$

2) $e^{2x+1}=\frac{1}{e^x}=e^{-x} \Leftrightarrow 2x+1=-x$

$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ $\quad S=\{-\frac{1}{3}\}$

3) $e^{x^2+3}-e=0 \Leftrightarrow e^{x^2+3}=e$

$\Leftrightarrow x^2+3=1$

$\Leftrightarrow x^2+2=0$ $\quad S=\emptyset$

4) $e^{x^2-3}-e=0 \Leftrightarrow e^{x^2-3}=e$

$\Leftrightarrow x^2-3=1$

$\Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

$S=\{-2,2\}$

تمرين رقم 10

1) $e^x=2 \Leftrightarrow \ln(e^x)=\ln 2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

$S=\{\ln 2\}$

2) $e^{x+1}=4 \Leftrightarrow \ln(e^{x+1})=\ln 4$

$\Leftrightarrow x+1=\ln 4 \Leftrightarrow x=(\ln 4)-1$

$S=\{(\ln 4)-1\}$

3) $e^x=-3$; $S=\emptyset$

4) $e^{2x}=4 \Leftrightarrow \ln(e^{2x})=\ln 4=2\ln 2$

$\Leftrightarrow 2x=2\ln 2$

$\Leftrightarrow x=\ln 2$ $\quad S=\{\ln 2\}$

تمرين رقم 11

1) $\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}=e \Leftrightarrow e^{2x+1-x+3}=e$

$\Leftrightarrow e^{x+4}=e$

$\Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3$

$S=\{-3\}$

2) $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(e^{2x}+1)=e^{2x}-1$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}+2=e^{2x}-1$

$\Leftrightarrow e^{2x}=-3$, $S=\emptyset$

3) $\frac{e^{2x+3}}{e^{x-2}}=\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{2x+3-x+2}=e^{-1}$

$\Leftrightarrow e^{x+5}=e^{-1}$

$\Leftrightarrow x+5=-1 \Leftrightarrow x=-6$

$S=\{-6\}$

4) $e^{\frac{2x+3}{x-2}}=\frac{1}{e}=e^{-1} \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x-2}=-1$

$\Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

$S=\{-\frac{1}{3}\}$

تمرين رقم 12

1) $e^{2x-2}-(1+e)e^x+e^3=0 \Leftrightarrow e^{-2}(e^x)^2-(1+e)e^x+e^3=0$

$\Delta=(1+e)^2-4e^{-2}\cdot e^3=(1+e)^2-4e=(1-e)^2$

$e^x=e^2$ أو $e^x=e^3$

$x=2$ أو $x=3$

$S=\{2,3\}$

2) $e^x+e^{-x}=2 \Leftrightarrow e^x+\frac{1}{e^x}-2=0$

$\Leftrightarrow \frac{(e^x)^2-2e^x+1}{e^x}=0$

$\Leftrightarrow \frac{(e^x-1)^2}{e^x}=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$S=\{0\}$

3) $e^{2x}-5e^x+6=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-5e^x+6=0$

$\Delta=1$

$e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

أو

$e^x=3 \Leftrightarrow x=\ln 3$

$S=\{\ln 2, \ln 3\}$

تمرين رقم 13

1) $2e^x-3e^{1-x}=2e-3 \Leftrightarrow 2e^x-\frac{3e}{e^x}-(2e-3)=0$

$\Leftrightarrow 2(e^x)^2-(2e-3)e^x-3e=0$

$\Delta=(2e-3)^2+24e=(2e+3)^2$

$e^x=e \Leftrightarrow x=1$

$e^x=-\frac{3}{2}$ لا يمكن

$S=\{1\}$

2) $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^{x}-2)-(e^{x}-2)=0$

$\Leftrightarrow (e^{2x}-1)(e^{x}-2)=0$

$\Leftrightarrow (e^{x}-1)(e^{x}+1)(e^{x}-2)=0$

$\Leftrightarrow e^{x}=1$ أو $e^{x}=-1$ أو $e^{x}=2$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=\ln 2$

$S=\{0, \ln 2\}$

3) $(e^{x}+1)^3=3e^{2x}-3 \Leftrightarrow (e^{x}+1)^3-3(e^{x}-1)(e^{x}+1)=0$

$\Leftrightarrow (e^{x}+1)\left((e^{x}+1)^2-3(e^{x}-1)\right)=0$

$\Leftrightarrow (e^{x}+1)(e^{2x}+2e^{x}+1-3e^{x}+3)=0$

$\Leftrightarrow (e^{x}+1)(e^{2x}-e^{x}+4)=0$

$\Leftrightarrow e^{x}+1=0$ (لا يمكن)

أو $e^{2x}-e^{x}+4=0$ (لا يمكن)

$S=\emptyset$

تمرين رقم 14

1) $e^{1-x}\leq e^{3x} \Leftrightarrow \ln(e^{1-x})\leq \ln(e^{3x})$

$\Leftrightarrow 1-x\leq 3x$

$\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{4}$, $S=[\frac{1}{4},+\infty[$

2) $e^{2x-3}>e^{x} \Leftrightarrow 2x-3>x$

$\Leftrightarrow x>3$ $S=]3,+\infty[$

3) $e^{1-x}\geq e^{2+x} \Leftrightarrow 1-x\geq 2+x$

$\Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2}$ $S=]-\infty, -\frac{1}{2}]$

4) $e^{-2x}<e^{1+x^2} \Leftrightarrow -2x<1+x^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1>0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2>0$

$\Leftrightarrow x\neq -1$

$S=\mathbb{R}-\{-1\}$

تمرين رقم 15

1) $1-e^{-x}\leq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\geq 1$

$\Leftrightarrow x\leq 0$

$S=\mathbb{R}^-$

2) $e^{x}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{x}\geq 1$

$\Leftrightarrow x\geq 0$ $S=\mathbb{R}^+$

3) $e^{3-x}\leq 1 \Leftrightarrow 3-x\leq 0$

$\Leftrightarrow x\geq 3$ $S=[3,+\infty[$

4) $e^{2x}\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\geq \ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}\ln 2$ $S=[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty[$

تمرين رقم 16

1) $e^{x}-\frac{1}{e^{3x}}<0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-1}{e^{3x}}<0$

$\Leftrightarrow e^{4x}-1<0$

$\Leftrightarrow e^{4x}<1$

$\Leftrightarrow x<0$, $S=]-\infty, 0[$

2) $e^{x}\leq e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}\leq 0$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

$S=]-\infty,-1]\cup]0,1]$

3) $e^{2x}-\frac{3}{2}>0 \Leftrightarrow e^{2x}>\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2x>\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

$S=]\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}, +\infty[$

4) $e^{1-x}-1<0 \Leftrightarrow e^{1-x}<1$

$\Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1$

$S=]1,+\infty[$

تمرين رقم 17

1) $(2e^{x}-1)(e^{x}-2)<0$

لدينا: $e^{x}-2=0 \Leftrightarrow e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$

$e^{x}-2>0 \Leftrightarrow e^{x}>2 \Leftrightarrow x>\ln 2$

ولدينا: $2e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln 2$

$2e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>-\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2e^{x}-1)(e^{x}-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=]-\ln 2, \ln 2[$

2) $\frac{2e^{x}-1}{e^{x}-2}\leq 0$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$2e^{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{2e^{x}-1}{e^{x}-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$S=[-\ln 2, \ln 2[$

3) $1-\frac{1}{e^{-x}+1}<\frac{2e^{x}}{e^{x}+1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}+1}<\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{e^{x}}{e^{x}+1}<\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{x}+1}-\frac{2e^{x}}{e^{x}+1}<0$

$\Leftrightarrow \frac{1-2e^{x}}{e^{x}+1}<0$

لدينا: $1-2e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-\ln 2$

$1-2e^{x}>0 \Leftrightarrow e^{x}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<-\ln 2$

ولدينا: $e^{x}+1=0 \Leftrightarrow e^{x}=-1$ لا يمكن

ولدينا: $\forall x\in\mathbb{R};\ e^{x}+1>0$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$1-2e^{x}$		$+$	0	$-$	
$e^{x}+1$		$+$		$+$	
$\frac{1-2e^{x}}{e^{x}+1}$		$+$	0	$-$	

$S=]-\ln 2, +\infty[$

4) $\frac{e^{x}+1}{e^{-x}-e}\leq 0$

لدينا: $e^{-x} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$

و $e^{-x} - e > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > e \Leftrightarrow -x > 1 \Leftrightarrow x < -1$

ولدينا: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x} + 1 > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$e^{x}+1$		$+$		$+$	
$e^{-x}-e$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{e^{x}+1}{e^{-x}-e}$		$+$	$\|$	$-$	

$$S =]-1, +\infty[$$

تمرين رقم 18

$$(S_1) : \begin{cases} e^{x} - \frac{1}{e} e^{y} = 1 \\ 2e^{x} + e^{y} = 4 + e \end{cases}$$

$$e^{x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{e} \\ 4+e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{e} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1 + \frac{1}{e}(4+e)}{1 + \frac{2}{e}} = \frac{2(1+\frac{2}{e})}{1+\frac{2}{e}} = 2$$

$$e^{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4+e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{e} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2+e}{1+\frac{2}{e}} = \frac{e(1+\frac{2}{e})}{1+\frac{2}{e}} = e$$

$e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$e^{y} = e \Leftrightarrow y = 1 \qquad S = \{(\ln 2, 1)\}$

$$(S_2) \begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^{x} - e^{y+3} - 2e^{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3e^{x} - e^{4-x} - 2e^{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3e^{x} - \frac{e^{4}}{e^{x}} - 2e^{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3(e^{x})^{2} - 2e^{2}e^{x} - e^{4} = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 16e^{4} = (4e^{2})^{2}$$

$e^{x} = \frac{2e^{2} - 4e^{2}}{6} = -\frac{e^{2}}{3}$ لا يمكن

$e^{x} = \frac{2e^{2} + 4e^{2}}{6} = e^{2} \Leftrightarrow x = 2$

اذن $y = -1$

$$S = \{(2, -1)\}$$

تمرين رقم 19

$$(S_1) : \begin{cases} e^{4x} \cdot e^{y} = \frac{1}{e^{2}} \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{4x+y} = e^{-2} \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x) + y = -2 \\ (4x)y = -8 \end{cases}$$

بوضع: $X = 4x$ و $Y = y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = -2 \\ XY = -8 \end{cases}$$

حلي هذه النظمة هما حلي المعادلة:

$$X^{2} + 2X - 8 = 0$$

$$\Delta = 36$$

$X = -4$ او $X = 2$

اذا كان: $X = -4$ فان $x = -1$ و $y = 2$

اذا كان: $X = 2$ فان $x = \frac{1}{2}$ و $y = -4$

اذن $S = \{(-1, 2) ; (\frac{1}{2}, -4)\}$

$$(S_2) : \begin{cases} e^{x} \cdot e^{y} = 10 \\ \frac{e^{x}}{e^{y}} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \ln 10 = \ln 2 + \ln 5 \\ x - y = \ln \frac{2}{5} = \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 \\ y = \ln 5 \end{cases}$$

$$S = \{(\ln 2, \ln 5)\}$$

تمرين رقم 20

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x+1} = +\infty$ (لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x+1) = +\infty$)

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e}{e^{x}} = 0$

(لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$)

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{x}$

نضع $X = -x \Leftrightarrow x = -X$

$x \to -\infty \Leftrightarrow X \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^{-X}}{-X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{Xe^{X}} = 0$$

(لأن $\lim\limits_{X \to +\infty} Xe^{X} = +\infty$)

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^{x}}{x}\right)} = 0$

(لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$)

تمرين رقم 21

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3\left(\frac{e^{3x}}{3x}\right)$

$= \lim\limits_{X \to +\infty} 3\left(\frac{e^{X}}{X}\right) = +\infty$ (بوضع $X = 3x$)

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^{x} - e^{x}) = 0$

(لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$)

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^{2} - x)e^{x} = 2\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2}e^{x} - \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x}$

لدينا: $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$

نحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{2}e^{x}$

نضع: $X^{2} = e^{-x} = \frac{1}{e^{x}} \Leftrightarrow e^{x} = \frac{1}{X^{2}}$

$\Leftrightarrow x = -2\ln X$

$x \to -\infty \Leftrightarrow X \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{2}e^{x} = \lim_{X \to +\infty} (-2\ln X)^{2} \frac{1}{X^{2}}$$

$$= 4 \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{\ln X}{X}\right)^{2} = 0$$

اذن: $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^{2} - x)e^{x} = 0$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x} - 1}{x^{2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{2}} - \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{2}}$

نحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$

نضع $x = 2\ln X \Leftrightarrow X^2 = e^x$

$x\to+\infty \Leftrightarrow X\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{X\to+\infty}\frac{X^2}{4(\ln X)^2} = \lim_{X\to+\infty}\frac14\left(\frac{X}{\ln X}\right)^2 = +\infty$$

إذن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=+\infty$

تمرين رقم 22

1) $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x}\right)\left(-\frac{e^x-1}{x}\right) = -1$

(لأن: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}=1$)

2) $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{3x} = \frac13\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\frac13$

3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\frac23\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=\frac23$

(لأن: $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$)

4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{e(e^x-1)}{2x} = \frac{e}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\frac e2$

تمرين رقم 23

1) $\lim_{x\to-\infty}(e^x+e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty}e^x+\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}e^{+x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$)

2) $\lim_{x\to+\infty}(e^x+e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty}e^x + \lim_{x\to+\infty}e^{-x} = +\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$)

3) $\lim_{x\to+\infty}(3e^{2x}+e^x-1)=+\infty$

4) $\lim_{x\to-\infty}(e^{2x}-e^x+2)=2$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$)

تمرين رقم 24

1) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+1}{e^x+2}=\frac12$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$)

2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-1}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(2-e^{-x})}{e^x(1+e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-e^{-x}}{1+e^{-x}}=2$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$)

3) $\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)^3=-1$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$)

4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^x+\frac{1}{e^x}}=+\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac1{e^x}=0$)

تمرين رقم 25

1) $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-e^x)=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(3\frac{x^2}{e^x}-1\right) = -\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ ، انظر تمرين رقم 21 : (4))

2) $\lim_{x\to+\infty}(2x-e^x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(2-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$)

3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}(x+1)\cdot\frac1{e^x}=-\infty$

(لأن: $\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}\frac1{e^x}=+\infty$)

4) $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}x^3e^{2x}-\lim_{x\to-\infty}(2x)e^{2x}$

نبين أن $\lim_{x\to-\infty}x^3e^{2x}=0$

نضع $x=-\frac32\ln X \Leftrightarrow X^3=\frac1{e^{2x}}$

$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}x^3e^{2x}=\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac32\right)^3\left(\frac{\ln X}{X}\right)^3=0$$

نبين أن: $\lim_{x\to-\infty}(2x)e^{2x}=0$

نضع $2x=-X \Leftrightarrow X=-2x$

$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x)e^{2x}=-\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x)e^{2x}=0$

تمرين رقم 26

1) $\lim_{x\to0^-}e^{\frac1x}=\lim_{X\to-\infty}e^X=0$

2) $\lim_{x\to0^+}e^{\frac1x}=\lim_{X\to+\infty}e^X=+\infty$

3) $\lim_{x\to0^-}\frac1x e^{\frac1x}=\lim_{X\to-\infty}Xe^X=0$

4) $\lim_{x\to0^+}xe^{\frac1x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$

تمرين رقم 27

1) $\lim_{x\to-\infty}x^3e^{2x}=\lim_{t\to-\infty}\frac18t^3e^t$

نحسب $\lim_{t\to-\infty}t^3e^t$

نضع $t = 3\ln x \Leftrightarrow x^3 = e^t$

$x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to -\infty$

$$\lim_{t\to-\infty} t^3 e^t = \lim_{x\to 0} (3\ln x)^3 x^3 = \lim_{x\to 0} 27 (x\ln x)^3 = 0$$

اذن $\lim_{x\to-\infty} x^3 e^{2x} = 0$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = 8\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t^3}$

نحسب $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^3}$

نضع $t = 3\ln x \Leftrightarrow x^3 = e^t$

$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(3\ln x)^3} = \frac{1}{27}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^3 = +\infty$$

اذن: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$

3) $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-x+1)e^x = \lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)(x^2e^x) = 0$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 2$ ، $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x^3}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right) = +\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = 1$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^3} = +\infty$)

تمرين رقم 28

1) $f'(x) = 2 + e^{-x}$

2) $f'(x) = 3e^{3x} + e^{x}$

3) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

4) $f'(x) = e^{x} + (x+2)e^{x} = (x+3)e^{x}$

تمرين رقم 29

1) $f'(x) = \frac{e^x-(x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-xe^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$

2) $f'(x) = 2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})$

3) $f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

4) $f'(x) = 2(e^x - 1) + (2x-1)e^x = (1+2x)e^x - 2$

تمرين رقم 30

1) $f'(x) = 2(e^{-x}+1) + (2x-1)(-e^{-x}) = 2e^{-x} + 2 - 2xe^{-x} + e^{-x} = (3-2x)e^{-x} + 2$

2) $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + (x-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2+x-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

3) $f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{2\sqrt{e^{2x} - e^x}}$

4) $f'(x) = (x\ln x)' e^{x\ln x} = (1+\ln x)e^{x\ln x}$

تمرين رقم 31

1) $F(x) = \frac{2}{3}e^{3x} + e^{-x}$

2) لدينا: $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{1}{2}(e^{2x}-1)^{-2}(e^{2x}-1)'$

اذن $F(x) = -\frac{1}{2}(e^{2x}-1)^{-1} = \frac{-1}{2(e^{2x}-1)}$

3) لدينا: $f(x) = (e^x-1)^3e^x = \left(\frac{1}{4}(e^x-1)^4\right)'$

اذن $F(x) = \frac{1}{4}(e^x-1)^4$

4) لدينا: $f(x) = (\sin x)e^{\cos x} = -(e^{\cos x})'$

اذن $F(x) = -e^{\cos x}$

تمرين رقم 32

1) لدينا: $f(x) = xe^{x^2-1} = \frac{1}{2}(x^2-1)'e^{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(e^{x^2-1}\right)'$

اذن $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + c$

$F(0) = e \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-1} + c = e$

$\Leftrightarrow c = e - \frac{1}{2e}$

اذن: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + e - \frac{1}{2e}$

2) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-x} = \frac{(e^x-x)'}{e^x-x}$

$F(x) = \ln(e^x - x) + c$

$F(1) = 1 \Leftrightarrow \ln(e-1) + c = 1$

$\Leftrightarrow c = 1 - \ln(e-1) = \ln\left(\frac{e}{e-1}\right)$

اذن: $F(x) = \ln(e^x - x) + \ln\frac{e}{e-1}$

3) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}-1}} = \left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)'$

$F(x) = \sqrt{e^{2x}-1} + c$

$F(\ln 3) = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{9-1} + c = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow c = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$F(x) = \sqrt{e^{2x}-1} + 2\sqrt{2}$

4) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}\ln(e^x+1) = \left(\frac{1}{2}(\ln(e^x+1))^2\right)'$

$F(x) = \frac{1}{2}\ln(e^x+1) + c$

$F(0) = (\ln 3)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 + c = (\ln 3)^3$

$$C = (\ln 3)^2 - \frac{1}{2}\ln 2$$

اذن : $F(x) = \frac{1}{2}\ln(e^x + 1) + (\ln 3)^2 - \frac{1}{2}\ln 2$

تمرين رقم 33

(1

$$f(x) = x - 1 + e^x$$

مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - 1 + e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x - 1 + e^x) = -\infty$$

الرتابة : $\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = 1 + e^x$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(2

$$f(x) = (x-1)e^x$$

مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (xe^x - e^x) = 0$$

(لأن : $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$ و $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$)

الرتابة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

تمرين رقم 34

(1

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x) \times \left(\frac{1}{e^x}\right) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$$

الرتابة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$$

$$f'(x) > 0 \iff 1 - x > 0 \iff x < 1$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

(2

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$$

مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = 1$$

(لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 2} = -1$$

(لأن : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$)

الرتابة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2) - e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2}$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

تمرين رقم 35

(1

$$f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$$

مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$$

(لأن : $\lim_{x} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) e^x = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(\frac{1}{x+1}\right) e^x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(\frac{1}{x+1}\right) e^x = -\infty$$

الرتابة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = \frac{e^x(x + 1) - e^x}{(x + 1)^2} = \frac{e^x}{(x+1)^2}$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(2

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{e^x}$$

مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$$

(لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{xe^x}\right) = +\infty$$

(لأن : $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{xe^x} = -\infty$)

الرتابة :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

تمرين رقم 36

(1

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x$$

مجموعة التعريف : $D_f = \mathbb{R}$

النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^{2x} - 2e^x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^x-2) = +\infty$

الرتابة : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x) = 2e^x(e^x-1)$

$f'(x)=0 \iff e^x-1=0 \iff e^x=1 \iff x=0$

$f'(x)>0 \iff e^x-1>0 \iff e^x>1 \iff x>0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x) = \dfrac{e^{-x}+e^x}{2}$

مجموعة التعريف : $D_f=\mathbb{R}$

النهايات : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty$

(لأن : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}+e^x}{2} = +\infty$

(لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$)

الرتابة : $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$

$f'(x)=0 \iff e^{2x}-1=0 \iff e^{2x}=1 \iff x=0$

$f'(x)>0 \iff e^{2x}-1>0 \iff e^{2x}>1 \iff x>0$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

تمرين رقم 37

$f(x) = (2-x)e^x - 1$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ((2-x)e^x - 1) = -\infty$

$\forall x\in[0,+\infty[\ ;\ f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$

$f'(x)=0 \iff 1-x=0 \iff x=1$

$f'(x)>0 \iff 1-x>0 \iff 0\le x<1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\dfrac{2-x}{x}\right)e^x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$

إذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا إتجاهه محور الأراتيب

3) لدينا : f دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $[1,2]$

$f(2) = -1$; و $f(1) = e-1 > 0$; و

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حل وحيد α للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$

إذن $\forall x\in[0,\alpha]\ ,\ f(x)>0$

$\forall x\in[\alpha,+\infty[\ ;\ f(x)<0$

تمرين رقم 38

1) $2^x = 3 \iff \log_2 2^x = \log_2 3$

$\iff x = \log_2 3$

2) $4^x = 8^x \iff \log_4 4^x = \log_4 8^x$

$\iff x = x\log_4 8$

$\iff x(1-\log_4 8)=0 \iff x=0$

3) $3^x=2 \iff \log_3 3^x = \log_3 2 \iff x = \log_3 2$

4) $10^x = 50 \iff \log 10^x = \log 50 \iff x = \log 50$

تمرين رقم 39

1) $16^x - 5\cdot 4^x + 6 = 0 \iff (4^x)^2 - 5(4^x)+6=0$

$\Delta = 1$; $4^x=2$ أو $4^x = 3$

$4^x=2 \iff \log_4 4^x = \log_4 2 \iff x=\dfrac{1}{2}$

$4^x=3 \iff \log_4 4^x = \log_4 3 \iff x = \log_4 3$

$S = \left\{\dfrac{1}{2}, \log_4 3\right\}$

2) $4^x - 2^{x+1} + 1 = 0 \iff (2^x)^2 - 2(2^x)+1=0$

$\iff (2^x-1)^2=0$

$\iff 2^x=1$

$\iff \log_2 2^x = \log_2 1 = 0$

$\iff x=0$

$S=\{0\}$

3) $3^x - 3^{-x+2} = 8 \iff 3^x - \dfrac{9}{3^x} = 8$

$\iff (3^x)^2 - 8(3^x) - 9 = 0$

$\Delta=100$

$3^x = -1$ لا يمكن

$3^x = 9 = 3^2 \iff x=2$

$S=\{2\}$

4) $9^x + 3^{x+1} = 4 \iff (3^x)^2+3(3^x)-4=0$

$\Delta=25$

$3^x=-4$ لا يمكن

$3^x = 1 \iff x=0$

$S=\{0\}$

تمرين رقم 40

1) $9^x > 3^{-x+1} \iff 3^{2x} > 3^{-x+1}$

$\iff \log_3 3^{2x} > \log_3 3^{-x+1}$

$\iff 2x > -x+1$

$\iff x > \dfrac{1}{3}$

$S = \left]\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$

2) $5^x > 10 \iff \log_5 5^x > \log_5 10$

$\Leftrightarrow x > \log_5 10$

$S =]\log_5 10, +\infty[$

3) $2^x > 3 \Leftrightarrow \log_2 2^x > \log_2 3$

$\Leftrightarrow x > \log_2 3$

$S =]\log_2 3, +\infty[$

4) $10^x > 50 \Leftrightarrow \log 10^x > \log 50$

$\Leftrightarrow x > \log 50$

$S =]\log 50, +\infty[$

تمرين رقم 41

1) $4^x - 3.2^x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 3(2^x) + 1 \leq 0$

$\Delta = 5$; $2^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ أو $2^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \left(2^x - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(2^x - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \leq 0$

$2^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

$2^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

x	$-\infty$		$\log_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$		$\log_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$		$+\infty$
$4^x - 3.2^x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left[\log_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), \log_2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

2) $9^x + 3^x - 2 > 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3^x - 2 > 0$

$\Delta = 9$ و $3^x = -2$ أو $3^x = 1$

$\Leftrightarrow (3^x + 2)(3^x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow 3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$S =]0, +\infty[$

3) $\frac{3^x - 1}{2(3^x - 2)} \leq 0$

$3^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$3^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

$3^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$

$3^x - 2 > 0 \Leftrightarrow 3^x > 2 \Leftrightarrow x > \log_3 2$

x	$-\infty$		0		$\log_3 2$		$+\infty$
$3^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3^x-1}{2(3^x-2)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S = [0, \log_3 2[$

4) $3^{-x+2} \geq 3^x - 8 \Leftrightarrow \frac{9}{3^x} - 3^x + 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-(3^x)^2 + 8.3^x + 9}{3^x} \geq 0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 8.(3^x) - 9 \leq 0$

$\Delta = 100$; $3^x = -1$ أو $3^x = 9$

$\Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x - 9) \leq 0$

$\Leftrightarrow 3^x - 9 \leq 0 \Leftrightarrow 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2$

$S =]-\infty, 2]$

تمرين رقم 42

1) $\lim_{x \to -\infty} x 2^x$

نضع $x = -X \Leftrightarrow X = -x$

$X \to +\infty \Leftrightarrow x \to -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x 2^x = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{2^X} = 0$

2) $\lim_{x \to +\infty} x 2^x = +\infty$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

بما أن الدالة $f : x \mapsto 2^x$ قابلة للاشتقاق في 0

فإن $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = f'(0) = \ln 2$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x}$:

نضع $x = \frac{\ln X}{\ln 2} \Leftrightarrow X = 2^x$

$X \to +\infty \Leftrightarrow x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{X}{\ln X}\right) \cdot \ln 2 = +\infty$

تمرين رقم 43

1) $\lim_{x \to -\infty} (x-1) 4^x$

نضع $x = -X \Leftrightarrow X = -x$

$X \to +\infty \Leftrightarrow x \to -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x-1)4^x = \lim_{X \to +\infty} \left(\frac{X}{4^X} + \frac{1}{4^X}\right) = 0$

2) $\lim_{x \to +\infty} 3^x - 2^x = \lim_{x \to +\infty} 3^x\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) = +\infty$

(لأن: $\lim_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$ ، $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$)

3) $\lim_{x \to +\infty} (10^x - 10^{x+2}) = \lim_{x \to +\infty} (10^x - 10^2 . 10^x)$

$= \lim_{x \to +\infty} (-99) 10^x = -\infty$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(2^x)^2 - 2^x}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2^x(2^x - 1)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} 2^x . \left(\frac{2^x - 1}{x}\right) = \ln 2$

(لأن: $\lim_{x \to 0} 2^x = 1$ ، $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2$)

تمرين رقم 44

1) $\lim_{x \to +\infty} (2^x - x^2) = \lim_{x \to +\infty} 2^x\left(1 - \frac{x^2}{2^x}\right)$

نحسب: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2^x}$

لدينا: $\frac{x^2}{2^x} = \frac{x^2}{e^{x\ln 2}} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \frac{(x \ln 2)^2}{e^{x \ln 2}}$

بوضع: $X = x \ln 2$

نحصل على: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x - x^2) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$

(لأن: $\frac{2^x}{x^2} = (\ln 2)^2 \frac{e^{(x\ln 2)}}{(x\ln 2)^2}$)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x} = 0$

(لأن: $\frac{x^2}{2^x} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \frac{(x\ln 2)^2}{e^{(x\ln 2)}}$)

4) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{2x}}{2^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(2x)\ln 3}}{e^{(3x)\ln 2}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{(2x\ln 3 - 3x\ln 2)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln 9 - \ln 8)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\frac{9}{8}} = +\infty$$

تمرين (رقم 45)

* $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = (\ln a)\, a^x$

1) $f(x) = \frac{2^x}{x}$

$$f'(x) = \frac{x\cdot 2^x\ln 2 - 2^x}{x^2} = \frac{(x\ln 2 - 1)2^x}{x^2}$$

2) $f(x) = x2^x$

$$f'(x) = 2^x + x2^x\ln 2 = (1 - x\ln 2)2^x$$

3) $f(x) = 4^x - 2^x$

$$f'(x) = 4^x\cdot\ln 4 - 2^x\ln 2$$

4) $f(x) = 10^x - x$

$$f'(x) = 10^x(\ln 10) - 1$$

تمرين (رقم 46)

1) $f(x) = x2^{-x}$

$D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{x\ln 2}{e^{(x\ln 2)}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x2^{-x} = -\infty$$

(لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} = +\infty$)

$\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x) = 2^{-x} - x(\ln 2)2^{-x}$
$= (1 - x\ln 2)2^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x\ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}2^{-\frac{1}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 2}e^{-\frac{\ln 2}{\ln 2}} = \frac{1}{e\ln 2}$$

x	$-\infty$		$1/\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e\ln 2}$	$\searrow$	0

$g(x) = x^{-1}2^x$

$D_g = \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}2^x = +\infty$$

(لأن: $\frac{2^x}{x} = \frac{e^{x\ln 2}}{x\ln 2}\cdot\ln 2$)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $g'(x) = \left(\frac{2^x}{x}\right)'$
$$= \frac{x2^x\ln 2 - 2^x}{x^2} = \frac{(x\ln 2 - 1)2^x}{x^2}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$

$$g\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = (\ln 2)\,2^{\frac{1}{\ln 2}} = (\ln 2)\,e^{\left(\frac{\ln 2}{\ln 2}\right)} = e\ln 2$$

x	$-\infty$		0		$1/\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$e\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2) لدينا:

$$f'\left(\frac{2}{\ln 2}\right) = (1-2)2^{-\frac{2}{\ln 2}} = -e^{-\frac{2}{\ln 2}\cdot\ln 2} = \frac{-1}{e^2}$$

$$f\left(\frac{2}{\ln 2}\right) = \frac{2}{\ln 2}\cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} = \frac{2}{\ln 2}e^{-\frac{2}{\ln 2}\cdot\ln 2} = \frac{2}{e^2\ln 2}$$

إذن معادلة المماس لمنحنى f في النقطة التي أفصولها $\frac{2}{\ln 2}$ هي:

$$y = -\frac{1}{e^2}\left(x - \frac{2}{\ln 2}\right) + \frac{2}{e^2\ln 2}$$
$$= -\frac{x}{e^2} + \frac{4}{\ln 2}$$

3) ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى f

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

إذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقارب هو محور الأفاصيل

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

إذن لمنحنى f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى g

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

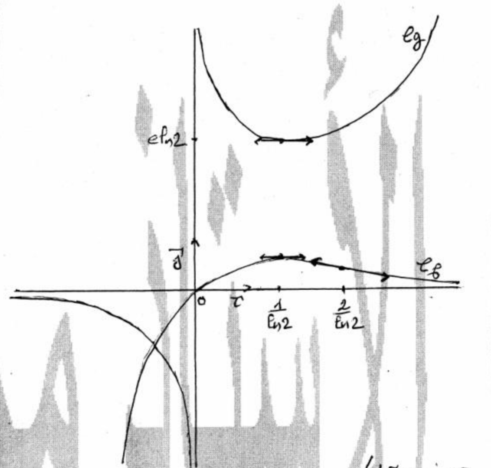
إذن لمنحنى g بجوار $-\infty$ مقارب هو محور الأفاصيل

* $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

إذن لمنحنى g مقاربا هو محور الأراتيب

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

إذن لمنحنى g بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا هو محور الأراتيب



تمرين (رقم 47)

1) $e^{2x}+2e^{x}-3\geqslant 0 \Leftrightarrow (e^{x})^2+2e^{x}-3\geqslant 0$

$\Leftrightarrow (e^{x}+3)(e^{x}-1)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^{x}-1\geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^{x}\geqslant 1 \Leftrightarrow x\geqslant 0$

$S=\mathbb{R}^{+}$

2) $e^{x}+\frac{1}{e^{x}}\leqslant e+\frac{1}{e} \Leftrightarrow (e^{x}-e)+\left(\frac{1}{e^{x}}-\frac{1}{e}\right)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (e^{x}-e)-\frac{e^{x}-e}{e.e^{x}}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (e^{x}-e)\left(1-\frac{1}{e.e^{x}}\right)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow (e^{x}-e)\left(\frac{e.e^{x}-1}{e.e^{x}}\right)\leqslant 0$

$e^{x}-e=0 \Leftrightarrow e^{x}=e \Leftrightarrow x=1$

$e^{x}-e>0 \Leftrightarrow e^{x}>e \Leftrightarrow x>1$

$e.e^{x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x}=e^{-1} \Leftrightarrow x=-1$

$e.e^{x}-1>0 \Leftrightarrow e^{x}>e^{-1} \Leftrightarrow x>-1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$e^{x}-e$		$-$		$-$	0	$+$	
$e.e^{x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(e^{x}-e)\left(\frac{e.e^{x}-1}{e.e^{x}}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=[-1,0]$

3) $1-\ln(1-e^{x})\leqslant 0 \Leftrightarrow 1-e^{x}\geqslant e$

$\Leftrightarrow e^{x}\leqslant 1-e$

$S=\emptyset$ فإن $1-e<0$: بما أن

4) $\ln\left(e^{x}-\frac{2}{e^{x}}\right)<0 \Leftrightarrow e^{x}-\frac{2}{e^{x}}<1$

$\Leftrightarrow (e^{x})^2-e^{x}-2<0$

$\Leftrightarrow (e^{x}+1)(e^{x}-2)<0$

$\Leftrightarrow e^{x}-2<0 \Leftrightarrow x<\ln 2$

$S=]-\infty,\ln 2[$

تمرين (رقم 48)

1) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\ln(e^{2x}+e^{x}+2)=+\infty$

($\lim\limits_{x\mapsto+\infty}(e^{2x}+e^{x}+2)=+\infty$: لأن)

2) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\ln\left(\frac{2e^{x}+4}{e^{x}+1}\right)=\ln 4$

($\lim\limits_{x\mapsto-\infty}e^{x}=0$ لأن)

3) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(x-\ln(e^{x}+1)\right)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(x-\ln\left(e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)\right)\right)$

$=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(x-x-\ln\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)\right)=0$

4) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}-1\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\left(\frac{2}{e^{x}-1}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}\right)\left(\frac{2}{1-\frac{1}{e^{x}}}\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)}{\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)-1}\right)$

لدينا : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{e^{x}}}=2$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=1$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{\ln\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)}{\left(\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}\right)-1}\right)=1$

إذن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\ln\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=0$

تمرين (رقم 49)

1) $\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\frac{\ln(e^{x}-e^{\frac{1}{x}})}{x}=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\frac{\ln e^{x}(1-e^{\frac{1}{x}-x})}{x}$

$=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\frac{x+\ln(1-e^{\frac{1}{x}-x})}{x}$

$=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}-x}}{x}\cdot\frac{\ln(1-e^{\frac{1}{x}-x})}{e^{\frac{1}{x}-x}}\right)$

$=\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\left(1-(e^{-x})\left(\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)\frac{\ln(1+(-e^{\frac{1}{x}-x}))}{(-e^{\frac{1}{x}-x})}\right)=1$

لأن $\lim\limits_{x\mapsto 0^-}e^{-x}=1$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to-\infty}te^{t}=0$

$\lim\limits_{x\mapsto 0^-}\frac{\ln(1+(-e^{\frac{1}{x}-x}))}{(-e^{\frac{1}{x}-x})}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

(نضع : $t=e^{\frac{1}{x}-x}$)

2) نضع $t=\frac{1}{x}$

$x\to-\infty \Leftrightarrow t\to 0^-$

$\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{t\to 0^-}\left((\frac{1}{t}-1)e^t-\frac{1}{t}\right)$

$=\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t}e^t-\frac{1}{t}-e^t\right)$

$=\lim_{t\to 0^-}\left(\frac{e^t-1}{t}-e^t\right)=0$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^3+1}$

لدينا: $\frac{e^{x^2}}{x^3+1}=\frac{e^{x^2}}{e^{\ln(x^3+1)}}=e^{x^2-\ln(x^3+1)}$

ولدينا $x^2-\ln(x^3+1)=x^2-\ln\left(x^3(1+\frac{1}{x^3})\right)$

$=x^2-\ln x^3-\ln(1+\frac{1}{x^3})$

$=x^2-3\ln x-\ln(1+\frac{1}{x^3})$

$=x^2(1-3\frac{\ln x}{x^2})-\ln(1+\frac{1}{x^3})$

وبما أن: $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x^3})=0$

فإن $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\ln(x^3+1)\right)=+\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^3+1}=+\infty$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}(\ln x)\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\right)$

بوضع $t=x\ln x$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$

إذن: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}=-\infty$

تمرين رقم 50

1) $f(x)=2x-\ln(e^x+1)$

$f'(x)=2-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+2}{e^x+1}$

2) $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$

$f'(x)=\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{2x}-e^x+1}$

3) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\ln(e^x+1)$

$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2}\ln(e^x+1)+\frac{e^x}{e^x+1}\cdot\frac{e^x}{e^x+1}$

$=\frac{e^x\ln(e^x+1)+e^{2x}}{(e^x+1)^2}$

4) $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$

$f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

تمرين رقم 51

$f(x)=e^{\frac{x}{2}}-x-1$

1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)-2-\frac{2}{x}\right)=+\infty$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x/2}}{x/2}=+\infty$)

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

(لأن $\lim_{x\to-\infty}e^{x/2}=0$)

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}-1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{x/2}=2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\ln 2 \Leftrightarrow x=2\ln 2$

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^{x/2}>2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}>\ln 2 \Leftrightarrow x>2\ln 2$

x	$-\infty$	$2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$1-2\ln 2$	↗ $+\infty$

3) أ) لدينا: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x/2}}{x/2}\right)-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

إذن منحنى f يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

ولدينا: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x-1)\right)=\lim_{x\to-\infty}e^{x/2}=0^+$

إذن منحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته: $y=-x-1$

و C_f فوق المقارب المائل بجوار $-\infty$

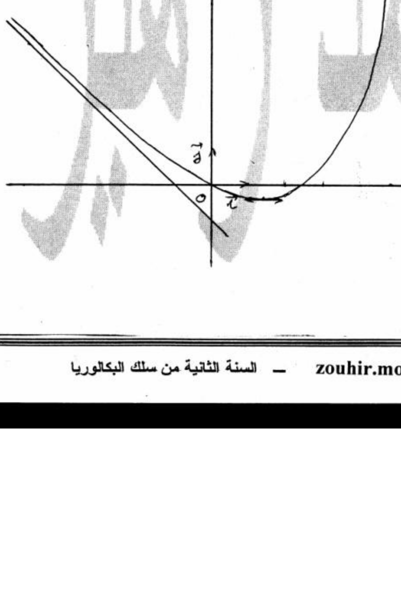
4) لدينا f دالة متصلة على المجال $]2,3[$ وتزايدية قطعا

و $f(3)=e^{3/2}-4>0$ ، $f(2)=e-3<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2<\alpha<3$

ولدينا: $f(0)=0$

5)



تمرين (رقم 52)

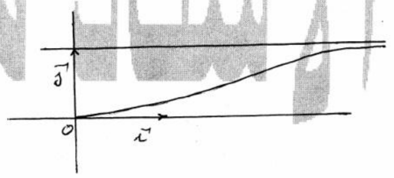
1) عدد الأشخاص الذين علموا بالإشاعة في الساعة 12 هو:

$$f(12)+100=\frac{1}{99\,e^{(-1,15)\cdot 12}+1}+100$$
$$=101$$

2) $$f(t)=\frac{1}{99\cdot e^{-1,15t}+1}$$

$$\forall t\in\mathbb{R}^+ ;\ f'(t)=\frac{113,85\cdot e^{-1,15t}}{(99\cdot e^{-1,15t}+1)^2}$$

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	$0,01$	$+$	
$f(t)$	$0,01$	$\nearrow$	1



3) 99% من السكان يعني 9900 نسمة وإذا احتسبنا 100 من السكان الذين علموا بالإشاعة في اللحظة $t=0$ يكون 100% من السكان علموا بالإشاعة

إذن $f(t)=9900 \Leftrightarrow \frac{1}{99e^{-1,15t}+1}=9900$

$$\Leftrightarrow 99\,e^{-1,15t}+1=\frac{1}{9900}$$
$$\Leftrightarrow e^{-1,15t}=\left(\frac{1}{9900}-1\right)\frac{1}{99}$$
$$=\frac{-9899}{980100}<0$$

وهذا غير ممكن

تمرين (رقم 53)

$$N(t)=N_0\,e^{-kt}$$

1) $$\frac{N(20000)}{N_0}=e^{-20000k\cdot 10^{-4}}$$
$$=e^{-2,44}=0,08$$

إذن نسبة ذرات الكاربون 14 المتبقية بجسمه هي: 8%

2) $$N(t)=N_0\cdot 0,8$$
$$\Leftrightarrow N_0\,e^{-kt}=N_0\cdot 0,8$$
$$\Leftrightarrow e^{-kt}=0,8$$
$$\Leftrightarrow -kt=\ln 0,8$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{\ln 0,8}{-k}=1792,3$$

3) $$N(t)=N_0\cdot 0,7$$
$$\Leftrightarrow e^{-kt}=0,7$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{\ln 0,7}{-k}=2864,8$$

4) $$N(t)=N_0\cdot 0,5$$
$$\Leftrightarrow e^{-kt}=0,5$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{\ln 0,5}{-k}=5567,4$$

تمرين (رقم 54)

$$f(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

1) أ) * لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $(-x)\in\mathbb{R}$

*

$$\forall x\in\mathbb{R} ;\ f(-x)=\frac{e^{-2x}+1}{(e^{-x}+1)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{e^{2x}}+1}{\left(\frac{1}{e^x}+1\right)^2}=\frac{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}{\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$
$$=f(x)$$

إذن f دالة زوجية

ب) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\frac{2}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^{2x}}}{1+\frac{2}{e^x}+\frac{1}{e^{2x}}}=1$$

إذن للمنحنى C_f بجوار $+\infty$ مقارب معادلته $y=1$

2) $$\forall x\in\mathbb{R} ;\ f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x+1)^2-(e^{2x}+1)\cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4}$$
$$=\frac{2e^{2x}(e^x+1)-2e^x(e^{2x}+1)}{(e^x+1)^3}$$
$$=\frac{2e^{2x}-2e^x}{(e^x+1)^3}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^3}(e^x-1)$$

لدراسة إشارة $f'(x)$ نكتفي بدراسة إشارة: e^x-1

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	1

3) أ) $$\forall x\in\mathbb{R} ;\ f''(x)=\left(\frac{2e^{2x}-2e^x}{(e^x+1)^3}\right)'$$
$$=\frac{(4e^{2x}-2e^x)(e^x+1)^3-3(e^x+1)^2e^x(2e^{2x}-2e^x)}{(e^x+1)^6}$$
$$=\frac{(4e^{2x}-2e^x)(e^x+1)-3e^x(2e^{2x}-2e^x)}{(e^x+1)^4}$$
$$=\frac{4e^{3x}+4e^{2x}-2e^{2x}-2e^x-6e^{3x}+6e^{2x}}{(e^x+1)^4}$$
$$=\frac{-2e^{3x}+8e^{2x}-2e^x}{(e^x+1)^4}=\frac{-2e^x(e^{2x}-4e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

إشارة $f''(x)$ هي عكس إشارة: $e^{2x}-4e^x+1$

$$\Delta=12$$

إذن: $e^{2x}-4e^x+1=(e^x-(2-\sqrt3))(e^x-(2+\sqrt3))$

$$e^x-(2-\sqrt3)=0 \Leftrightarrow x=\ln(2-\sqrt3)$$
$$e^x-(2+\sqrt3)=0 \Leftrightarrow x=\ln(2+\sqrt3)$$

x	$-\infty$		$\ln(2-\sqrt{3})$		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

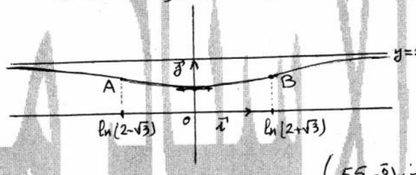
$$f(\ln(2-\sqrt{3})) = \frac{e^{2\ln(2-\sqrt{3})}+1}{(e^{\ln(2-\sqrt{3})}+1)^2} = \frac{(2-\sqrt{3})^2+1}{(2-\sqrt{3}+1)^2} = \frac{2}{3}$$

$$f(\ln(2+\sqrt{3})) = \frac{e^{2\ln(2+\sqrt{3})}+1}{(e^{\ln(2+\sqrt{3})}+1)^2} = \frac{(2+\sqrt{3})^2+1}{(2+\sqrt{3}+1)^2} = \frac{2}{3}$$

اذن لمنحنى f نقطتي إنعطاف هما :

$A\left(\ln(2-\sqrt{3}), \frac{2}{3}\right)$ و $B\left(\ln(2+\sqrt{3}), \frac{2}{3}\right)$

4)



تمرين رقم 55

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x+1}$$

1) بما أن : $\forall x \in \mathbb{R} ; \; e^x > 0$

فإن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{3}{e^x+1}\right) = +\infty$$

$$\left(\text{لأن : } \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{e^x+1} = 0 \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x - 1 + \frac{3}{e^x+1}\right) = -\infty$$

$$\left(\text{لأن : } \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{e^x+1} = 3 \right)$$

2) $\forall x \in \mathbb{R} ; \; f'(x) = 1 + \frac{-3e^x}{(e^x+1)^2}$

$$= \frac{e^{2x} - e^x + 1}{(e^x+1)^2} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) $\forall x \in \mathbb{R} ; \; f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x+1}$

$$= x - 1 + \frac{(3+3e^x) - 3e^x}{e^x+1}$$

$$= x - 1 + 3 - \frac{3e^x}{e^x+1}$$

$$= x + 2 - \frac{3e^x}{e^x+1}$$

ب) لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{e^x+1} = 0^+$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته : $y = x - 1$

و منحنى f فوق المقارب المائل بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (x+2)) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3e^x}{e^x+1} = 0^-$$

اذن لمنحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = x + 2$

ومنحنى f تحت المقارب المائل بجوار $-\infty$

4) أ) $\forall x \in \mathbb{R} ; \; f''(x) = \left(1 + \frac{-3e^x}{(e^x+1)^2}\right)'$

$$= \frac{-3e^x(e^x+1)^2 + 6e^x \cdot e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$= \frac{-3e^x(e^x+1) + 6e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{3e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

ولدينا $f(0) = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

اذن لمنحنى f نقطة إنعطاف إحداثيتيها $(0, \frac{1}{2})$

ب) لدينا : $f(0) = \frac{1}{2}$ و $f'(0) = \frac{1}{4}$

اذن معادلة مماس $\mathcal{C}_f$ في نقطة انعطافه هي :

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

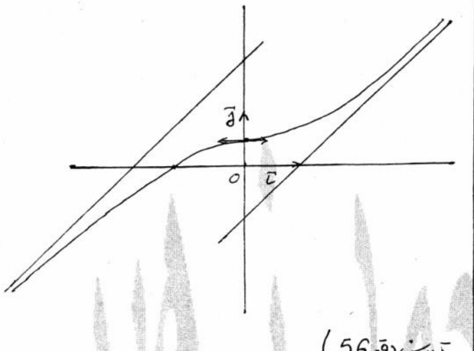
5) لدينا f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $]-\frac{3}{2}, -1[$

و $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2} + \frac{3e^{3/2}}{e^{3/2}+1} < 0$

$$f(-1) = -2 + \frac{3e}{e+1} > 0$$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α حيث $-\frac{3}{2} < \alpha < -1$

اذن $\mathcal{C}_f$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة أفصولها α



تمرين رقم 56

1) $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* ; \; a^x = x^\alpha \Leftrightarrow \ln a^x = \ln x^\alpha$$

$$\Leftrightarrow x \ln a = \alpha \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{\alpha}$$

2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

أ) $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$

$$\Leftrightarrow D_f =]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln x = -\infty$

$\forall x \in D_f \; ; \; f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

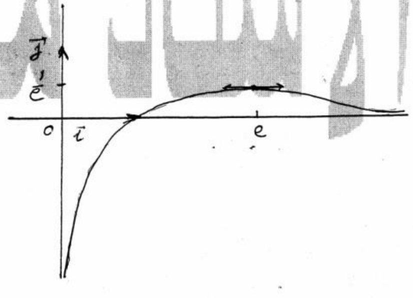
ب) لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

إذن منحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا هو محور الأفاصيل

ولدينا $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

إذن منحنى f مقاربا هو محور الأراتيب

ج)



3) أ) نعتبر المستقيم $(D_m) : y = m$

حلول المعادلة: $f(x) = m$ هي أفاصيل نقط تقاطع (D_m) و (C_f)

* إذا كان: $m \in]-\infty, 0]$ فإن (D_m) يقطع (C_f) في نقطة وحيدة

إذن للمعادلة $f(x) = m$ حلا وحيدا

* إذا كان: $m \in]0, \frac{1}{e}[$ فإن (D_m) يقطع (C_f) في نقطتين

إذن للمعادلة $f(x) = m$ حلين مختلفين

* إذا كان: $m = \frac{1}{e}$ فإن (D_m) يقطع (C_f) في نقطة وحيدة

إذن للمعادلة $f(x) = m$ حلا وحيدا

* إذا كان: $m \in]\frac{1}{e}, +\infty[$ فإن $(D_m) \cap (C_f) = \emptyset$

إذن المعادلة: $f(x) = m$ ليس لها حل

ب) لدينا: $a^x = x^\alpha \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{\alpha}$

$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln a}{\alpha}$

إذن * إذا كان: $\frac{\ln a}{\alpha} \in]-\infty, 0]$

فإن للمعادلة $a^x = x^\alpha$ حلا وحيدا

* إذا كان: $\frac{\ln a}{\alpha} \in]0, \frac{1}{e}[$

فإن للمعادلة: $a^x = x^\alpha$ حلين مختلفين

* إذا كان $\frac{\ln a}{\alpha} = \frac{1}{e}$

فإن للمعادلة: $a^x = x^\alpha$ حلا وحيدا

* إذا كان: $\frac{\ln a}{\alpha} \in]\frac{1}{e}, +\infty[$

فإن المعادلة: $a^x = x^\alpha$ ليس لها حل

تمرين رقم 57

$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

$x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$D_f = [0, +\infty[$

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} = +\infty$

2) أ) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \; ; \; \frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}}{x}$

$= \frac{(e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}\sqrt{e^x - 1}}{x\sqrt{e^x - 1}}$

$= \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

ب) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}}\right) \cdot \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = -\infty$

لأن: $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{e^x - 1} = 0^+$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 والمنحنى C_f يقبل في النقطة O نصف مماس يوازي محور الأراتيب

3) أ) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \; ; \; f'(x) = \left((e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}\right)'$

$= e^x\sqrt{e^x - 1} + (e^x - 4)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

$= \frac{2e^x(e^x - 1) + e^x(e^x - 4)}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$

$= \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

ب) لدينا إشارة $f'(x)$ هي إشارة $e^x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

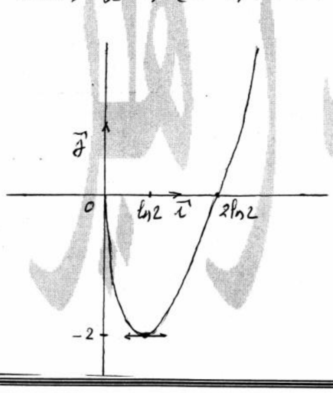
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{4}{x}\right)\sqrt{e^x - 1} = +\infty$

إذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

5) $f(2\ln 2) = f(\ln 4) = (e^{\ln 4} - 4)\sqrt{e^{\ln 4} - 1} = 0$



تمرين رقم 58

I -

$h(x) = (2-x)e^{-x} + 1$

$D_h = \mathbb{R}$

1) $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \left((2-x)e^{-x}+1\right) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1\right) = 1$

$\forall x\in\mathbb{R};\ h'(x) = -e^{-x} - (2-x)e^{-x}$
$= (x-3)e^{-x}$

$h'(x)=0 \iff x=3$

$h'(x)>0 \iff x>3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-e^{-3}$	$\nearrow$	1

2) مادام القيمة الدنوية للدالة h هي $1-e^{-3}>0$
فإن $\forall x\in\mathbb{R};\ h(x)>0$

II

$f(x) = (x-1)e^{-x} + x$

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + x\right) = +\infty$

لأن: $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0\right)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{-x}+1\right) = -\infty$

لأن: $\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = 1,\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\right)$

2) $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x) = e^{-x} - (x-1)e^{-x} + 1$
$= (2-x)e^{-x}+1 = h(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) أ) لدينا: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} = 0^+$

اذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y=x$
ومنحنى C_f بجوار $+\infty$ فوق المقارب المائل

ولدينا: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\left(\frac{x-1}{x}\right)e^{-x}+1\right) = +\infty$

لأن: $\left(\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty\right)$

إذن المنحنى C_f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

ج) ندرس تقعر C_f:

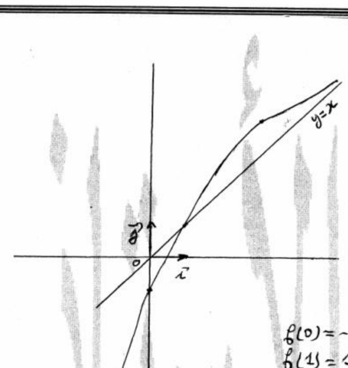
$\forall x\in\mathbb{R};\ f''(x) = h'(x)$
$= (x-3)e^{-x}$

$f''(x)=0 \iff x=3$

$f''(x)>0 \iff x>3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f(3) = 2e^{-3}+3$



$f(0)=-1$

$f(1)=1$

تمرين رقم 59

I

$u(x) = e^x - (x+1)$

$D_u = \mathbb{R}$

1) $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{x+1}{x}\right) = +\infty$

لأن: $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\right)$

$\lim_{x\to-\infty} u(x) = +\infty$

$\forall x\in\mathbb{R};\ u'(x) = e^x - 1$

$u'(x)=0 \iff e^x=1 \iff x=0$

$u'(x)>0 \iff e^x>1 \iff x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) مادام القيمة الدنوية للدالة u على $\mathbb{R}$ هي 0
و $u(0)=0$
فإن $\forall x\in\mathbb{R}^*;\ u(x)>0$

II $f(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{2x}-2xe^x-1\right) = -1$

لأن: $\left(\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0,\ \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1 - 2\cdot\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}}\right) = +\infty$

2) بما أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

فإن المنحنى C_f بجوار $-\infty$ مقاربا معادلته $y=-1$

وبما أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2x - \frac{1}{x}\right)$
$= \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{e^x}{x} - 2\cdot\frac{x}{e^x} - \frac{1}{xe^x}\right) = +\infty$

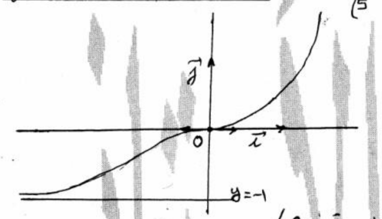
اذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

3) $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x) = 2e^{2x} - (2e^x + 2xe^x)$
$= 2e^x\left(e^x-(x+1)\right)$
$= 2e^x u(x)$

4)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5)



تمرين (رقم 60)

$$f(x)=\frac{xe^x-1}{e^x-1}$$

$$x\in D_f \Leftrightarrow e^x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$$

اذن $D_f=\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(x-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

(لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$)

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ، (لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0^+$)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ ، (لأن: $\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-1)=0^-$)

2) أ)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x-1-xe^x+x}{e^x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right)=0$$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x$

ب) لدينا: $f(x)-x=\dfrac{x-1}{e^x-1}$

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
		C_f فوق (Δ)		C_f تحت (Δ)		C_f فوق (Δ)	

3) أ)

$$\forall x\in\mathbb{R};\quad g(x)=e^x-x$$

$$\forall x\in\mathbb{R};\quad g'(x)=e^x-1$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

بما أن القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي 1

فإن $\forall x\in\mathbb{R};\quad g(x)>0$

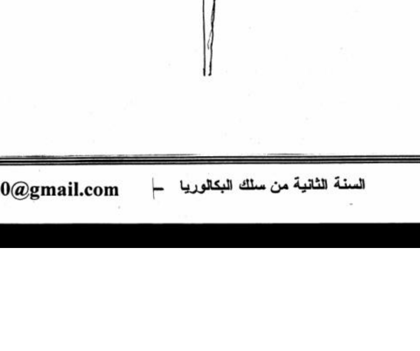
ب)

$$\forall x\in\mathbb{R}^*;\ f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-e^x(xe^x-1)}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{e^x(e^x-x)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x}{(e^x-1)^2}g(x)$$

ج)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$



تمرين (رقم 61)

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}} & ,\ x<1\\ f(1)=0 \end{cases}$$

1) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=0$$

(لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{(x-1)^2}=0$)

ب)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$=2\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x+1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2e^{\frac{x+1}{x-1}}=0=f(1)$$

(لأن: $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2e^{\frac{x+1}{x-1}}=\lim\limits_{t\to-\infty}t^2e^t=0$)

اذن f داله متصلة على اليسار في 1

2)

$$\forall x\in]-\infty,1[;\ f'(x)=\left(\frac{2}{(x-1)^2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$=\frac{-4}{(x-1)^3}e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\,\frac{-2}{(x-1)^2}\,e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

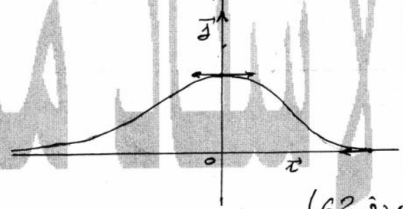
$$=\left(\frac{-4}{(x-1)^3}+\frac{-4}{(x-1)^4}\right)e^{\frac{x+1}{x-1}}=\left(\frac{-4(x-1)-4}{(x-1)^4}\right)e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2/e$	$\searrow$	0

3)
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{2}{(x-1)^3} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{2}{(x+1)^3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0 = f'_g(0)$$
$$\left(\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 e^{\frac{x+1}{x-1}} = \lim_{t\to-\infty} t^3 e^t = 0 \;:\text{لأن}\right)$$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يسار 1
ومنحنى f على يسار النقطة التي احداثيتها $(1,0)$ نصف مماس أفقي



تمرين رقم 62

I -
$$g(x) = 1 - e^{2x} - 2x e^{2x}$$
1)
$$D_g = \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}} - 1 - 2x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$$
$$\left(\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \,,\; \lim_{x\to-\infty} 2x e^{2x} = 0 \;:\text{لأن}\right)$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \;;\; g'(x) = -2e^{2x} - 2\left(e^{2x} + 2x e^{2x}\right)$$
$$= -4e^{2x} - 4x e^{2x}$$
$$= -4(1+x)e^{2x}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty$

2) لدينا : $g(0) = 0$
اذن :
$$\forall x\in]-\infty,0] \;;\; g(x) \geq 0$$
$$\forall x\in [0,+\infty[\;;\; g(x) \leq 0$$

II -
$$f(x) = x + 3 - x e^{2x}$$
1)
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x + 3 - x e^{2x}\right) = -\infty$$
$$\left(\lim_{x\to-\infty} x e^{2x} = 0 \;\text{لأن}\right)$$
$$\forall x\in\mathbb{R} \;;\; f'(x) = 1 - e^{2x} - 2x e^{2x} = g(x)$$

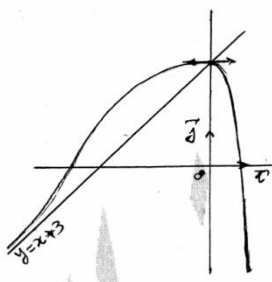
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

2) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}\right) = -\infty$$
اذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب
لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (x+3)\right) = \lim_{x\to-\infty} -x e^{2x} = 0$$
اذن منحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا (D) معادلته $y = x + 3$

3) لدينا : f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $[0,1]$
و $f(0) = 3$ ، $f(1) = 4 - e^2 < 0$
اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية (C) يقطع محور الافاصيل في نقطة وحيدة A أفصولها α حيث $\alpha\in[0,1]$

4)
$$\forall x\in\mathbb{R} \,,\; f(x) - (x+3) = -x e^{2x}$$
$$* \quad \forall x\in]-\infty,0] \;;\; f(x) - (x+3) \geq 0$$
ومنه فإن (C_f) فوق (D) لكل x من $]-\infty,0]$
$$* \quad \forall x\in [0,+\infty[\;;\; f(x) - (x+3) \leq 0$$
ومنه فإن (C_f) تحت (D) لكل x من $[0,+\infty[$

5)



تمرين رقم 63

$$\forall n\in\mathbb{N} \;;\; u_n = \frac{e^n}{3^n}$$

1)
$$\forall n\in\mathbb{N} \;;\; u_n = \frac{e^n}{3^n} = e^{\ln\frac{e^n}{3^n}}$$
$$= e^{(\ln e^n - \ln 3^n)}$$
$$= e^{(n - n\ln 3)} = e^{n(1-\ln 3)}$$

2)
$$\forall n\in\mathbb{N} \;;\; u_{n+1} = e^{(n+1)(1-\ln 3)}$$
$$= e^{n(1-\ln 3)} \cdot e^{(1-\ln 3)}$$
$$= u_n \cdot e^{(1-\ln 3)}$$
اذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $e^{(1-\ln 3)}$
وحدها الأول : $u_0 = 1$

3) $\forall n\in\mathbb{N};\ S_n = u_0+u_1+\dots+u_n$

$= u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-(e^{(1-\ln 3)})^{n+1}}{1-e^{(1-\ln 3)}}$

$= \frac{1-e^{(n+1)(1-\ln 3)}}{1-e^{(1-\ln 3)}}$

وبما أن: $\lim e^{(n+1)(1-\ln 3)} = e^{(1-\ln 3)}\lim \left(e^{(1-\ln 3)}\right)^n = 0$

(لأن $-1 < e^{(1-\ln 3)} < 1$)

فإن: $\lim S_n = \frac{1}{1-e^{(1-\ln 3)}}$

تمرين رقم 64

$\begin{cases} u_0=1\\ u_{n+1}=e^{au_n},\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) نبين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}\ge u_n$

لدينا: $u_1 = e^a \ge 1$ (لأن: $a\ge 0$)

إذن: $u_1\ge u_0$

نفترض أن: $u_n \ge u_{n-1}$

نبرهن أن: $u_{n+1}\ge u_n$

لدينا حسب افتراض الترجع:

$u_n\ge u_{n-1} \Leftrightarrow au_n \ge au_{n-1}$

$\Leftrightarrow e^{au_n}\ge e^{au_{n-1}}$

$\Leftrightarrow u_{n+1}\ge u_n$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}\ge u_n$

إذن (u_n) متتالية تزايدية

2) نفترض أن $a\le \frac{1}{e}$

أ) نبين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\le e$

لدينا: $u_0\le e$

نفترض أن $u_n\le e$

نبرهن أن $u_{n+1}\le e$

لدينا حسب افتراض الترجع:

$u_n\le e \Leftrightarrow au_n\le ae$

$\Leftrightarrow e^{au_n}\le e^{ae}\le e$

لأن: $\left(a\le\frac1e \Leftrightarrow ae\le 1 \Leftrightarrow e^{ae}\le e\right)$

$\Leftrightarrow u_{n+1}\le e$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\le e$

ب) (u_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد e

إذن (u_n) متتالية متقاربة.

تمرين رقم 65

$\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=e^n-u_n;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

نفترض أن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ

بما أن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}+u_n = e^n$

فإن $\lim(u_{n+1}+u_n) = \lim e^n$

إذن: $\lim e^n = 2\ell$

وهذا تناقض لأن $\lim e^n=+\infty$

إذن (u_n) متتالية متباعدة.

تمرين رقم 66

$\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=u_n e^{-u_n},\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1) نبين بالترجع أن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n>0$

لدينا: $u_0>0$

نفترض أن $u_n>0$

نبرهن أن $u_{n+1}>0$

لدينا حسب افتراض الترجع: $u_n>0$ و $e^{-u_n}>0$

إذن: $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}>0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n>0$

2) $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}-u_n = u_ne^{-u_n}-u_n$

$=(e^{-u_n}-1)u_n$

$=\left(\frac{1-e^{u_n}}{e^{u_n}}\right)u_n<0$

لأن: $\left((\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0) \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ e^{u_n}>1\right.$

$\left.\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ (1-e^{u_n})<0\right)$

إذن (u_n) متتالية تناقصية

ومنه فإن: $\forall n\in\mathbb{N};\ 0<u_n\le u_0$

يعني أن: $\forall n\in\mathbb{N};\ 0<u_n\le 1$

إذن (u_n) متتالية محدودة

تمرين رقم 67

$f(x)=(x-1)^3e^{\left(-\frac32x^2+3x\right)}$

1) $D_f=\mathbb{R}$

* لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $(2-x)\in\mathbb{R}$

* $\forall x\in\mathbb{R};\ f(2-x)=(2-x-1)^3e^{\left(-\frac32(2-x)^2+3(2-x)\right)}$

$=(1-x)^3e^{\left(-\frac32(4-4x+x^2)+6-3x\right)}$

$=-(x-1)^3e^{\left(-\frac32x^2+3x\right)} = -f(x)$

إذن النقطة $A(1,0)$ مركز تماثل C_f.

2) أ) $\forall x\ge1;\ e^{\frac32}(x-1)^3e^{-\frac32(x-1)^2} = (x-1)^3e^{-\frac32(x^2-2x+1)+\frac32}$

$=(x-1)^3e^{\left(-\frac32x^2+3x\right)} = f(x)$

ب) $\lim_{u\to+\infty} ue^{-\frac{u^2}{2}} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac2u\right)\left(\frac{\frac{u^2}{2}}{e^{\frac{u^2}{2}}}\right)=0$

لأن: $\left(\lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{u^2}{2}}{e^{\frac{u^2}{2}}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0\right.$

نضع: $\left.t=\frac{u^2}{2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac32}(x-1)^3e^{-\frac32(x-1)^2}$

$= e^{\frac32}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)^3}{e^{\left(\sqrt{\frac32}(x-1)\right)^2}}$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{3/2}\right) \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(x-1)\right)^3}{e^{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(x-1)\right)^2}}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{3/2}\right) \lim_{t \mapsto +\infty} \frac{t^3}{e^{t^2}} = 0$$

نضع: $\left(t = \sqrt{\frac{3}{2}}(x-1) \right.$; $\left. t \mapsto +\infty \Leftrightarrow x \mapsto +\infty \right)$

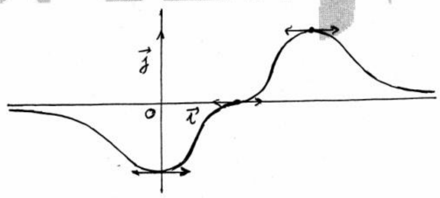
3) $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \left((x-1)^3 e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)}\right)'$

$$= 3(x-1)^2 e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)} + (x-1)^3(-3x+3)e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)}$$

$$= 3(x-1)^2 e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)} - 3(x-1)^4 e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)}$$

$$= 3x(x-1)^2(2-x)\, e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

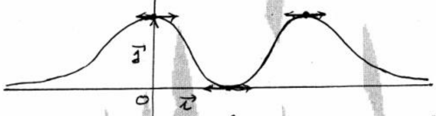


4) $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = |x-1|^3 e^{\left(-\frac{3}{2}x^2+3x\right)}$

$$= e^{3/2} |x-1|^3 e^{-\frac{3}{2}(x-1)^2}$$

$$= |f(x)|$$

إذن: $\begin{cases} g(x) = f(x) & ; x \geq 1 \\ g(x) = -f(x) & ; x \leq 1 \end{cases}$



5) $x \in \mathbb{R}$; $m\, e^{\frac{3}{2}(x-1)^2} = (\sqrt{e}\,|x-1|)^3$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; $m\, e^{\frac{3}{2}(x-1)^2} = e\sqrt{e}\,|x-1|^3$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; $|x-1|^3 e^{-\frac{3}{2}(x-1)^2} = \frac{m}{e\sqrt{e}}$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; $e^{\frac{3}{2}} |x-1|^3 e^{-\frac{3}{2}(x-1)^2} = \frac{m\, e^{3/2}}{e\sqrt{e}} = m$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$; $g(x) = m$

نعتبر المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = m$

حلول المعادلة: $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = m$

هي إحداثيات نقط تقاطع (Δ) و (C_g)

إذن * إذا كان $m < 0$. ليس للمعادلة حل

* إذا كان $m = 0$ للمعادلة حل وحيد

* إذا كان $0 < m < 1$ للمعادلة أربعة حلول

* إذا كان $m = 1$ للمعادلة حلين

* إذا كان $m > 1$ ليس للمعادلة حل

تمرين رقم 68

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ندرس الدالة g :

$D_g = \mathbb{R}$

$\lim_{x \mapsto -\infty} g(x) = 0$ ، $\lim_{x \mapsto +\infty} g(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2}$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

إذن: $\forall x \in \mathbb{R}$; $0 < g(x) < 1$

نبين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq 1$

لدينا: $0 \leq u_0 \leq 1$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 1$

نبرهن أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا حسب افتراض الترجع: $0 \leq u_n \leq 1$

بما أن $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) \leq 1$

فإن $0 \leq g(u_n) \leq 1$

إذن: $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$

إذن (u_n) متتالية محدودة .

تمرين رقم 69

$x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = \frac{x-1}{x} e^x$

1) أ) $\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ <}} \left(\frac{x-1}{x}\right) e^x = +\infty$

$\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} \left(\frac{x-1}{x}\right) e^x = -\infty$

$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) e^x = 0$

بما أن: $\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ >}} f(x) = -\infty$ و $\lim_{\substack{x \mapsto 0 \\ <}} f(x) = +\infty$

فإن منحنى f مقاربا معادلته $x=0$ هو محور الأراتيب

بما أن: $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = 0$

فإن منحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا هو محور الأفاصيل

ب) $\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) e^x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$$

(لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=1$)

إذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

2) أ) $\forall x\in\mathbb{R}^*;\quad f'(x)=\left(\frac{x-1}{x}e^x\right)'$

$$=\frac{1}{x^2}e^x+\frac{x-1}{x}e^x$$

$$=\frac{x^2-x+1}{x^2}e^x$$

ب) اشارة $f'(x)$ هي اشارة: x^2-x+1

وبما أن $\forall x\in\mathbb{R};\quad x^2-x+1>0$

فإن $\forall x\in\mathbb{R}^*;\quad f'(x)>0$

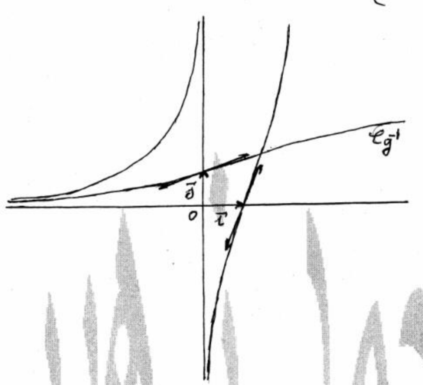
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3) لدينا: $f(1)=0$ و $f'(1)=e$

إذن: $(T_I):\ y=ex-e$

4) أ) $f(-1)=\frac{2}{e}$ ، $f(2)=\frac{e^2}{2}$

ب)



5) أ) بما أن g دالة متصلة وتزايدية قطعا على I

فإنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J

حيث $J=f(I)=\left]\lim_{x\to0^>}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$

$=\mathbb{R}$

تمرين رقم 70

$$u:x\mapsto e^x-x-1$$

$$D_u=\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}u(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}u(x)=+\infty$$

$\forall x\in\mathbb{R},\ u'(x)=e^x-1$

$u'(x)=0\iff e^x=1\iff x=0$

$u'(x)>0\iff e^x>1\iff x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

بما أن القيمة الدنوية للدالة u على $\mathbb{R}$ هي 0

فإن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ u(x)\geq0$

$\iff\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ 1+x\leq e^x$ (*)

2) لدينا: $\forall x\in]-1,+\infty[;\quad 0<1+x\leq e^x$

$\iff\forall x\in]-1,+\infty[;\quad \frac{1}{e^x}\leq\frac{1}{1+x}$

$\iff\forall x\in]-1,+\infty[,\quad e^{-x}\leq\frac{1}{1+x}$

(بوضع $X=-x$)

$\iff\forall X\in]-\infty,1[;\ e^X\leq\frac{1}{1-X}$ (**)

3) لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0<\frac{1}{n}\leq1$

بوضع $x=\frac{1}{n}$ في العلاقة (*) نحصل على:

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ 1+\frac{1}{n}\leq e^{\frac{1}{n}}$

$\iff\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$

ولدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ 0<\frac{1}{n+1}<1$

بوضع $X=\frac{1}{n+1}$ في العلاقة (**) نحصل على

$\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad e^{\frac{1}{n+1}}\leq\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$

$\iff\forall n\in\mathbb{N}^*;\ e^{\frac{1}{n+1}}\leq\frac{n+1}{n}$

$\iff\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad e^{\frac{1}{n+1}}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\iff\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

4) $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

أ) لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$\iff\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$\iff\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad u_n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$

$\iff\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad 0\leq e-u_n\leq\frac{1}{n}u_n$

وبما أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq3$

فإن $\forall n\in\mathbb{N}^*;\quad 0\leq e-u_n\leq\frac{3}{n}$

ب) لدينا $0\leq e-u_{10000}\leq3.10^{-4}$

إذن، u_{10000} قيمة مقربة للعدد e إلى 3.10^{-4}

$$u_{10000}=\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}$$

(تمرين رقم 71

I. $g(x) = e^{x} - 2x + 2$

(1 $D_g = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $g'(x) = e^{x} - 2$

(2 أ) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4-\ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 + 2 = 4 - \ln 4$

ب) بما أن القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}$ هي: $4 - \ln 4 > 0$

فإن: $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) > 0$

II. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{x}{e^{x}}$

(1 أ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x + 1 + \frac{x}{e^{x}}\right) = -\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x \cdot \frac{1}{e^{x}}\right) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{e^{x}}\right) = +\infty$

إذن لمنحنى f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x + 1 + \frac{x}{e^{x}}\right) = +\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0^{+}$

إذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (D) معادلته: $y = \frac{1}{2}x + 1$

ج) لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x}{e^{x}}$

إذن: $\forall x \in]-\infty, 0]$; $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \leq 0$

$\mathcal{C}_f$ تحت (D)

$\forall x \in [0, +\infty[$; $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \geq 0$

$\mathcal{C}_f$ فوق (D)

(2 $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{x} - xe^{x}}{(e^{x})^2}$

$= \frac{(e^{x})^2 + 2e^{x} - 2xe^{x}}{2(e^{x})^2} = \frac{e^{x} - 2x + 2}{2e^{x}} = \frac{g(x)}{2e^{x}}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(3 أ) بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]-1, 0[$

و $f(-1) = \frac{1}{2} - e < 0$ و $f(0) = 1$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1, 0[$ حيث $f(\alpha) = 0$

ب) لدينا: $f(0) = 1$ و $f'(0) = \frac{3}{2}$

إذن، $(T) : y = \frac{3}{2}x + 1$

ج) $\forall x \in \mathbb{R}$; $f''(x) = \frac{2e^{x}g'(x) - 2e^{x}g(x)}{4e^{2x}}$

$= \frac{2(e^{x} - 2) - 2(e^{x} - 2x + 2)}{4e^{x}}$

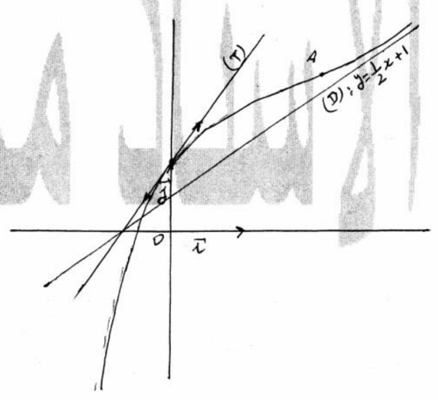
$= \frac{x - 2}{e^{x}}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ولدينا: $f(2) = 2 + \frac{2}{e^{2}}$

إذن لمنحنى f نقطة انعطاف وحيدة هي: $A\left(2, 2 + \frac{2}{e^{2}}\right)$

د)



(تمرين رقم 72

I. $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$

$D_g = \mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$

(لأن: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x} = 1$)

$\lim\limits_{x \to 0^{>}} g(x) = +\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x \to 0^{>}} e^{1/x} = +\infty$)

$\lim\limits_{x \to 0^{<}} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^{<}} \left(e^{1/x} + \frac{1}{x}e^{1/x} + 1\right) = 1$

(لأن: $\lim\limits_{x \to 0^{<}} e^{1/x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^{<}} \frac{1}{x} \cdot e^{1/x} = 0$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 2$

(لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1$)

(2 $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}$

$= -\frac{2x + 1}{x}\left(\frac{1}{x^2}e^{1/x}\right)$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$1-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	$1 \,\|\, +\infty$	$\searrow$	2

بما أن القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}^*$ هي $1-\frac{1}{e^2}>0$

فإن $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ g(x)>0$

II -

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{1/x}} & ,\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\dfrac{1}{1+e^{1/x}}=0=f(0)$

(لأن: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}=+\infty$)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}=0=f(0)$

(لأن: $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}=0$)

إذن f دالة متصلة في 0

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}=1$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x}=1$)

3) أ) $f(x)-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{1+e^{1/x}}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x(1-e^{1/x})}{2(1+e^{1/x})}$

$=-\dfrac{x(e^{1/x}-1)}{2(1+e^{1/x})}=-\dfrac{\left(\frac{e^{1/x}-1}{1/x}\right)}{2(1+e^{1/x})}$

لدينا بوضع $t=\frac{1}{x}$

$t\to 0 \iff |x|\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}=1$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

إذن لمنحنى C_f بجوار $+\infty$ وبجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته: $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

4) أ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}=0=f'_d(0)$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0

ولمنحنى C_f على يمين النقطة O نصف مماس أفقي

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}=1=f'_g(0)$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق على يسار 0

ولمنحنى C_f على يسار النقطة O نصف مماس معامله الموجه 1

وبما أن $f'_d(0)\neq f'_g(0)$ فإن f دالة غير قابلة للاشتقاق في 0

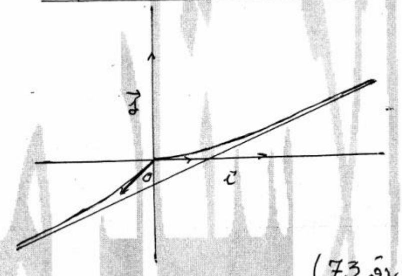
ب) $\forall x\in\mathbb{R}^*\ ;\ f'(x)=\left(\dfrac{x}{1+e^{1/x}}\right)'$

$=\dfrac{(1+e^{1/x})-x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$

$=\dfrac{1+e^{1/x}+\frac{1}{x}e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{1/x}+1}{(1+e^{1/x})^2}$

$=\dfrac{g(x)}{(1+e^{1/x})^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$1 \Vert 0$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$



تمرين رقم 73

$f(x)=x+\ln|e^x-2|$

1) أ) $x\in D_f \iff e^x-2\neq 0 \iff x\neq\ln 2$

$D_f=\mathbb{R}-\{\ln 2\}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x)=-\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to\ln 2}|e^x-2|=0^+$)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-2)=-2$)

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln|e^x-2|=\ln 2$

إذن لمنحنى C_f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته

$y=x+\ln 2$

3) أ) لدينا: $\forall x\in]\ln 2,+\infty[\ ;\ e^x-2>0$

إذن: $\forall x\in]\ln 2,+\infty[\ ;\ f(x)=x+\ln(e^x-2)$

$=x+\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{e^x}\right)\right)$

$=2x+\ln\left(1-\frac{2}{e^x}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2}{e^x}\right)=0^-$

إذن لمنحنى C_f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته

$y=2x$

و C_f تحت المقارب المائل بجوار $+\infty$

4) أ) $\forall x\in D_f\ ;\ f'(x)=\left(x+\ln|e^x-2|\right)'$

$=1+\dfrac{e^x}{e^x-2}=\dfrac{2(e^x-1)}{e^x-2}$

$f'(x)=0 \iff e^x-1=0 \iff x=0$

$e^x-2=0 \iff e^x=2 \iff x=\ln 2$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) $x \in]\ln 2, +\infty[\ , \ f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in]\ln 2, +\infty[\ ; \ x + \ln(e^x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x \in]\ln 2, +\infty[\ ; \ \ln e^x + \ln(e^x - 2) = \ln 1$

$\Leftrightarrow x \in]\ln 2, +\infty[\ ; \ \ln(e^x(e^x - 2)) = \ln 1$

$\Leftrightarrow x \in]\ln 2, +\infty[\ , \ (e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0$

$\Delta = 8$

$e^x = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(1 + \sqrt{2})$

$e^x = 1 - \sqrt{2}$ غير ممكن

اذن $S = \{\ln(1 + \sqrt{2})\}$

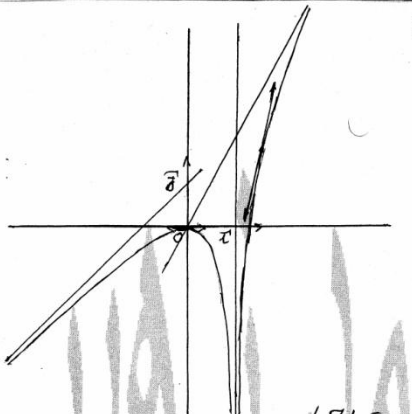
6) أ) لدينا: $f(\ln 3) = \ln 3$

$f'(\ln 3) = 4$

اذن: $(T): \ y = 4(x - \ln 3) + \ln 3$

$= 4x - 3\ln 3$

ب)



تمرين رقم 74

$f(x) = \ln(e^x + \frac{1}{4}e^{-x})$

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(e^x + \frac{1}{4}e^{-x}) = +\infty$

لأن: $\left(\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \ ، \ \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty\right)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(e^x + \frac{1}{4}e^{-x}) = +\infty$

لأن: $\left(\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \ ، \ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty\right)$

2) أ) $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ f'(x) = \dfrac{(e^x + \frac{1}{4}e^{-x})'}{e^x + \frac{1}{4}e^{-x}}$

$= \dfrac{e^x - \frac{1}{4}e^{-x}}{e^x + \frac{1}{4}e^{-x}} = \dfrac{4e^{2x} - 1}{4e^{2x} + 1}$

$= \dfrac{(2e^x - 1)(2e^x + 1)}{4e^{2x} + 1}$

ب) لدينا اشارة $f'(x)$ هي إشارة: $2e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-\ln 2) = \ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2) = \ln 1 = 0$

3) أ) لدينا: $f(x) - x = \ln(e^x + \frac{1}{4e^x}) - x$

$= \ln\left(\frac{4e^{2x} + 1}{4e^x}\right) - \ln e^x$

$= \ln\left(\frac{4e^{2x} + 1}{4e^{2x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{4e^{2x}}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{4e^{2x}}\right) = 0^+$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x$

و $\mathcal{C}_f$ فوق (Δ) بجوار $+\infty$

ب) $\forall x \in \mathbb{R} \ ; \ f(x) = \ln(e^x + \frac{e^{-x}}{4})$

$= \ln\left(\frac{4e^{2x} + 1}{4e^x}\right)$

$= \ln(1 + 4e^{2x}) - \ln(4e^x)$

$= \ln(1 + 4e^{2x}) - (\ln e^x + \ln 4)$

$= \ln(1 + 4e^{2x}) - (x + 2\ln 2$

ج) $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (-x - 2\ln 2)) = \lim_{x \to -\infty} \ln(1 + 4e^{2x})$

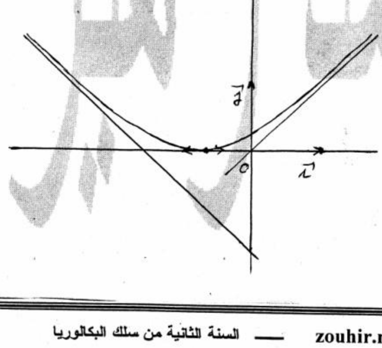
$= 0^+$

اذن منحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته: $y = -x - 2\ln 2$

و $\mathcal{C}_f$ فوق المقارب المائل بجوار $-\infty$

4) نقطة تقاطع $\mathcal{C}_f$ ومحور الاراتيب هي النقطة التي احداثيتها

$(0, f(0)) = (0, \ln\frac{5}{4})$



5) أ) $(E): \ m\in\mathbb{R}, \quad f(x)=m$

نعتبر المستقيم $(D): \ y=m$

عدد حلول المعادلة (E) هو عدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

ومنه فإن

* اذا كان : $m<0$ فإن $D\cap C_f=\varnothing$

اذن ليس للمعادلة (E) حل

* اذا كان $m=0$ فإن (D) يقطع C_f في نقطة وحيدة

اذن للمعادلة (E) حل وحيد

* اذا كان $m>0$ فإن (D) يقطع C_f في نقطتين

اذن للمعادلة (E) حلين مختلفين

ب) $(E): \ m\in\mathbb{R}, \quad f(x)=m$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}+\frac{1}{4e^{x}}\right)=\ln e^{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(e^{x})^{2}+1}{4e^{x}}=e^{m}$$

$$\Leftrightarrow 4(e^{x})^{2}-4e^{m}e^{x}+1=0$$

$$\Delta=16e^{2m}-16$$

$$=4(e^{m}+1)(e^{m}-1)$$

لدينا اشارة Δ هي اشارة $e^{m}-1$

* اذا كان $m<0$ فإن $e^{m}-1<0$

اذن $\Delta<0$

اذن $S=\varnothing$

* اذا كان $m=0$ فإن $\Delta=0$

اذن $e^{x}=\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

$$S=\{-\ln 2\}$$

* اذا كان : $m>0$ فإن $\Delta>0$

$$e^{x_1}=\frac{e^{m}-\sqrt{e^{2m}-1}}{2} \Leftrightarrow x_1=\ln\left(\frac{e^{m}-\sqrt{e^{2m}-1}}{2}\right)$$

$$e^{x_2}=\frac{e^{m}+\sqrt{e^{2m}-1}}{2} \Leftrightarrow x_2=\ln\left(\frac{e^{m}+\sqrt{e^{2m}-1}}{2}\right)$$

$$S=\left\{\ln\left(\frac{e^{m}-\sqrt{e^{2m}-1}}{2}\right), \ln\left(\frac{e^{m}+\sqrt{e^{2m}-1}}{2}\right)\right\}$$

تمرين رقم 75

$$f(x)=\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}$$

$$g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$$

1) $x\in D_g \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

اذن $D_g=]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1^{+}} g(x)=\lim_{x\to 1^{+}}\left(2x-(x-1)\ln(x-1)\right)=2$$

(لأن : بوضع $t=x-1$

$\lim_{x\to 1^{+}}(x-1)\ln(x-1)=\lim_{t\to 0^{+}} t\ln t=0$)

2) أ) $x\in]1,+\infty[\ ; \ 1-\ln(x-1)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in]1,+\infty[, \quad \ln(x-1)<1$

$\Leftrightarrow x\in]1,+\infty[, \quad x-1<e$

$\Leftrightarrow x\in]1,+\infty[, \quad x<1+e$

$$S=]1,1+e[$$

ب) $\forall x\in D_g, \ g'(x)=2-(\ln(x-1)+1)$

$$=1-\ln(x-1)$$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln(x-1)=0$

$\Leftrightarrow \ln(x-1)=1$

$\Leftrightarrow x-1=e \Leftrightarrow x=1+e$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln(x-1)>0$

$\Leftrightarrow x<1+e$

$$g(1+e)=2(1+e)-e=2+e$$

x	1		$1+e$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2+e$	$\searrow$	$-\infty$

ت) بما أن g دالة متصلة وتناقصية قطعا على المجال $[1+e, 1+e^{3}]$ ولدينا : $g(1+e)=2+e>0$

$g(1+e^{3})=2-e^{3}<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حلا وحيدا a للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $[1+e, 1+e^{3}]$

ث) من خلال السؤال السابق نستنتج أن

$\forall x\in]a,+\infty[\ ; \ g(x)<0$

و $\forall x\in[1+e,a[, \ g(x)>0$

وبما أن g دالة متصلة على $[1,1+e]$ و $g(1)>0$

و $g(1+e)>0$ فإن : $\forall x\in[1,1+e], \ g(x)>0$

اذن $\forall x\in[1,a] \ ; \ g(x)>0$

3) $x\in D_f \Leftrightarrow e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow x>0$

اذن $D_f=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{2x}\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)}{e^{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\ln\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{x}{e^{x}}+\frac{1}{e^{x}}\ln\left(1-\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)=0$$

(لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0$)

$$\lim_{x\to 0^{+}} f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{e^{x}}\ln(e^{2x}-1)=-\infty$$

(لأن $\lim_{x\to 0^{+}}(e^{2x}-1)=0^{+}$)

4) أ) $\forall x\in D_f \ ; \ f'(x)=\left(\frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}\right)'$

$$=\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\cdot e^{x}-e^{x}\ln(e^{2x}-1)}{e^{2x}}$$

$$\frac{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}-\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}}=\frac{2e^{2x}-(e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^{x}(e^{2x}-1)}=\frac{g(e^{2x})}{e^{x}(e^{2x}-1)}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow g(e^{2x})=0 \Leftrightarrow e^{2x}=a$

$\Leftrightarrow 2x=\ln a \Leftrightarrow x=\ln\sqrt{a}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow g(e^{2x})<0 \Leftrightarrow e^{2x}>a \Leftrightarrow x>\ln\sqrt{a}$

$$f(\ln\sqrt{a})=\frac{\ln\left(e^{2\ln\sqrt{a}}-1\right)}{e^{\ln\sqrt{a}}}=\frac{\ln(a-1)}{\sqrt{a}}$$

ولدينا $g(a)=0 \Leftrightarrow 2a-(a-1)\ln(a-1)=0$

$\Leftrightarrow (a-1)\ln(a-1)=2a=2(\sqrt{a})^{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\ln(a-1)}{\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{a}}{a-1}$

إذن $f(\ln\sqrt{a})=\frac{2\sqrt{a}}{a-1}$

x	0		$\ln\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{a}}{a-1}$	$\searrow$	0

ومنه فان f تقبل قيمة قصوى عند $\ln(\sqrt{a})$

ب) فان القيمة القصوية للدالة f على D_f هي: $\frac{2\sqrt{a}}{a-1}$

وان: $\forall x \in D_f \ ; f(x) \leq \frac{2\sqrt{a}}{a-1}$

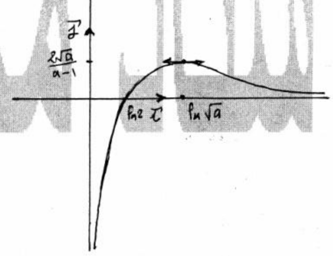
5) محور نقطة تقاطع C_f ومحور الأفاصيل

لدينا: $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-1)=0=\ln 1$

$\Leftrightarrow e^{2x}=2$

$\Leftrightarrow x=\ln\sqrt{2}$

اذن C_f يقطع محور الافاصيل في النقطة التي أفصولها $\ln\sqrt{2}$



تمرين (رقم 76)

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{\ln(-x)} \ ; \ x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\\ f(0)=0 \\ f(x)=e^{-x}+x-1 \ ; \ x\in]0,+\infty[\end{cases}$$

1) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+}(e^{-x}+x-1)=0=f(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-}\frac{x}{\ln(-x)}=\lim\limits_{x \to 0^-} x\cdot\frac{1}{\ln(-x)}$

$=0=f(0)$

اذن f دالة متصلة في 0.

2) $\lim\limits_{x \to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x}+1-\frac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x \to 0^+}\left(-\frac{e^{-x}-1}{(-x)}+1\right)=0=f'_d(0)$

$\left(\lim\limits_{x \to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1 \quad \text{لأن:}\right)$

$\lim\limits_{x \to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \to 0^-}\frac{1}{\ln(-x)}=0=f'_g(0)$

اذن f داله قابلة للاشتقاق في 0 ولدينا: $f'(0)=0$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to -\infty}-\frac{(-x)}{\ln(-x)}=-\infty$

$\left(\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{-x}{\ln(-x)}=\lim\limits_{t \to +\infty}\frac{t}{\ln t}=+\infty \ : \text{لأن}\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{\ln(-x)}=0$

اذن لمنحنى f بجوار $-\infty$ فرع شلجمي اتجاهه محور الأفاصيل

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x \to +\infty}(e^{-x}+x-1)=+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x)-(x-1))=\lim\limits_{x \to +\infty}e^{-x}=0^+$

اذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقارب مائل معادلته $y=x-1$

و C_f فوق المقارب المائل بجوار $+\infty$

5) لكل x من $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$

$f'(x)=\frac{\ln(-x)-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(-x))^2}=\frac{\ln(-x)-1}{(\ln(-x))^2}$

لكل x من $]0,+\infty[$

$f'(x)=(e^{-x}+x-1)'=-e^{-x}+1$

اذن:

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{\ln(-x)-1}{(\ln(-x))^2} \ ; \ x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[\\ f'(0)=0 \\ f'(x)=-e^{-x}+1 \ ; \ x\in]0,+\infty[\end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x \to -1^+}\frac{x}{\ln(-x)}=+\infty$

$\left(\lim\limits_{x \to -1^+}\ln(-x)=0^- \quad \text{لأن}\right)$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x \to -1^-}\frac{x}{\ln(-x)}=-\infty$

$\left(\lim\limits_{x \to -1^-}\ln(-x)=0^+ \quad \text{:لأن}\right)$

لكل x من $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ لدينا:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(-x)-1=0$

$\Leftrightarrow \ln(-x)=1=\ln e$

$\Leftrightarrow x=-e$

ولكل x من $]0,+\infty[$ لدينا:

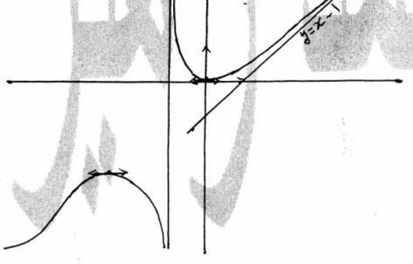
$x>0 \Leftrightarrow -x<0$

$\Leftrightarrow e^{-x}<1$

$\Leftrightarrow -e^{-x}>-1 \quad \Leftrightarrow -e^{-x}+1>0$

$f(-e)=\frac{-e}{\ln e}=-e$

x	$-\infty$		$-e$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow -\infty$	$\Vert$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



تمرين رقم 77

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1} \ ; \ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f(1) = 1 \\ f(x) = x^2 e^{-x} \ ; \ x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

(1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)\ln x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

(2 دراسة اتصال f في 0 :

لدينا $f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x-1} = 0 = f(0)$$

(لأن : $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 e^{-x} = 0 = f(0)$$

إذن f دالة متصلة في 0

دراسة اتصال f في 1 :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = 1 = f(1)$$

(لأن : $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$)

(3 دراسة قابلية اشتقاق f في 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = +\infty$$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يمين 0
ومنحنى f على يمين النقطة 0 نصف مماس يوازي محور الأراتيب

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} xe^{-x} = 0 = f'_g(0)$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق على يسار 0
ومنحنى f على يسار النقطة 0 نصف مماس يوازي محور الأفاصيل

(4 لكل x من : $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا :

$$f'(x) = \left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)(\ln x+1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$$

لكل x من $]-\infty, 0[$ لدينا :

$$f'(x) = (x^2e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

إذن :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{x-\ln x-1}{(x-1)^2} \ , \ x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ f'(x) = x(2-x)e^{-x} \ , \ x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

(5 $g(x) = x - 1 - \ln x$

(أ $D_g =]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

(ب $\forall x \in D_g \ ; \ g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

بما أن القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}_+^*$ هي 0
فإن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ g(x) \geq 0$

(ج لدينا :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\ ; \ f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} > 0$$

ولدينا : $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{1}{2}$

وهذا يعني أن f دالة قابلة للاشتقاق في 1
ومنحنى f في النقطة التي احداثيتها $(1,1)$ مماسا معامله
الموجه $f'(1) = 1$

ولدينا اشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty, 0[$ هي إشارة $x(2-x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0 \| +\infty$	$+$	$1/2$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(6 لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

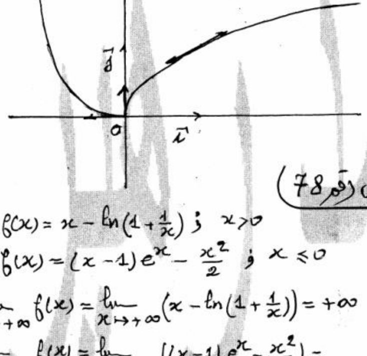
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$$

إذن منحنى f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$$

إذن منحنى f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب



تمرين رقم 78

$$\begin{cases} f(x) = x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ ; \ x > 0 \\ f(x) = (x-1)e^{x} - \dfrac{x^2}{2} \ ; \ x \leq 0 \end{cases}$$

(1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^{x} - \frac{x^2}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)xe^{x} - \frac{x^2}{2}\right) = -\infty$$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = 1 \text{ ، } \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \right.$: لأن$)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(x - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = -\infty$

ج) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0^-$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) = 1^+ \right.$: لأن$)$

اذن منحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y = x$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x-1}{x} e^{x} - \frac{x}{2}\right) = +\infty$

اذن منحنى f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{(x-1)e^{x} - \frac{x^2}{2} + 1}{x}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \left(\frac{x-1}{x} e^{x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \left(e^{x} - \frac{e^{x}-1}{x} - \frac{x}{2}\right) = 0$

$\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \right.$: لأن$)$

اذن f دالة قابلة للاشتقاق على يسار 0 ولدينا : $f'_g(0) = 0$

4) أ) لكل $x>0$ لدينا :

$f'(x) = \left(x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'$

$= 1 + \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}$

$= 1 + \frac{-1}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)}$

لكل $x<0$ لدينا :

$f'(x) = \left((x-1)e^{x} - \frac{x^2}{2}\right)'$

$= e^{x} + (x-1)e^{x} - x = x(e^{x} - 1)$

اذن :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2+x+1}{x(x+1)} , & x>0 \\ f'(x) = x(e^{x}-1) , & x<0 \end{cases}$$

ب)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 ||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1 || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5) أ) لدينا f دالة متصلة وتزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

و $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 3 < 0$ و $f(1) = 1 - \ln 2 > 0$

اذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة : $f(x) = 0$

حلا وحيدا α في المجال $]\frac{1}{2}, 1[$

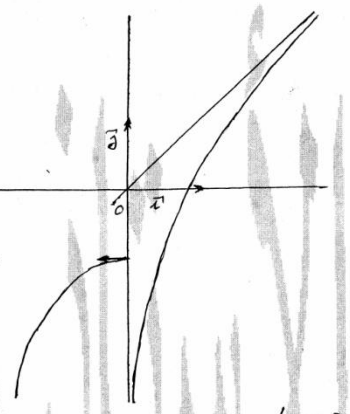
ب) لدينا : $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; f(x) - x = -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

اذن : $\forall x \in]0,+\infty[\; ; \; 1 + \frac{1}{x} > 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[\; ; \; \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[\; ; \; -\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 0$

اذن C_f تحت (Δ) في المجال $]0,+\infty[$



تمرين (رقم 79)

I- $g(x) = x + 1 + \ln(-x)$

1) $x \in D_g \Leftrightarrow (-x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

اذن $D_g =]-\infty, 0[$

2) $\forall x \in D_g \; ; \; g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

x	$-\infty$		-1		0
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	||

3) بما أن القيمة القصوية للدالة g على D_g هي 0

فإن $\forall x \in D_g \; ; \; g(x) \leq 0$

II

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x\ln(-x) , & x<0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} , & x>0 \end{cases}$$

1) اذا كان : $x<0$: $f(x) = x^2 + 2x\ln(-x)$

اذن يجب ان يكون $x<0$

واذا كان : $x>0$: $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$

اذن يجب ان يكون $x>0$

ولدينا : $f(0) = 0$

اذن : $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right.$ لأن$)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2 + 2x\ln(-x)\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1 + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1 - 2\frac{\ln(-x)}{(-x)}\right) = +\infty$

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{(-x)} = 0 \right.$: لأن$)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0 = f(0)$

$\left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x} = -\infty \right.$ لأن$)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 - 2(-x)\ln(-x)\right) = 0 = f(0)$$

$$\left(\text{لأن: } \lim_{x\to 0^-} (-x)\ln(-x) = 0\right)$$

إذن f دالة متصلة في 0

3) أ) $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(x + 2\ln(-x)\right) = -\infty$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يسار 0

ومنحنى f على يسار النقطة O نصف مماس يوازي محور الأراتيب

ب) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\cdot f(x)\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\, e^{\frac{\ln x}{x}}\right) = 0$

نضع: $t = \frac{\ln x}{x}$

$t \mapsto -\infty \iff x \mapsto 0^+$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}\, e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{t\to -\infty} t e^t = 0$$

ج) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\, e^{\frac{\ln x}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\ln x}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\, e^{\frac{\ln x}{x}}\right) = 0 = f'_d(0)$$

$$\left(\text{لأن } \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ و } \lim_{t\to -\infty} t e^t = 0\right)$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق على يمين 0

ومنحنى f على يمين O نصف مماس يوازي محور الأفاصيل

4) أ) $\forall x \in \mathbb{R}^*_- \; ; \; f'(x) = \left(x^2 + 2x\ln(-x)\right)'$

$$= 2x + 2 + 2\ln(-x)$$

$$= 2\left(x + 1 + \ln(-x)\right) = 2g(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*_+ \; ; \; f'(x) = \left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$= \frac{1-\ln x}{x^2}\, e^{\frac{\ln x}{x}}$$

x	$-\infty$		-1		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	$-\infty$ ‖ 0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

5) لدينا: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

إذن منحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا معادلته $y = 1$

لدينا: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(x + 2\ln(-x)\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln(-x)}{(-x)}\right) = -\infty$$

إذن منحنى f بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

6) $\forall x \in \mathbb{R}^*_- \; ; \; f''(x) = 2g'(x) = \frac{2(x-1)}{x}$

إذن $x \in \mathbb{R}^*_- \; ; \; f''(x) = 0 \iff x = -1$

x	$-\infty$		-1		0
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

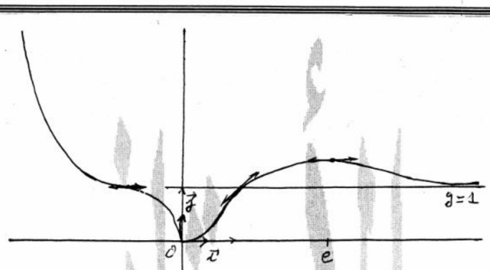
ولدينا، $f(-1) = 1$

إذن لمنحنى f نقطة انعطاف إحداثيتها $(-1,1)$

7) لدينا: $f(1) = 1$ و $f'(1) = 1$

إذن: $(T): \; y = (x-1) + 1$

$$= x$$



تمرين رقم 80

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\, e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & ; x < 1 \\ f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1) أ) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x-1)\, e^{\frac{1}{x-1}} = -\infty$

$$\left(\text{لأن: } \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \;,\; \lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\left(\text{لأن: } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right)$$

ب) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)\, e^{\frac{1}{x-1}}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}}{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{\left(\frac{-1}{x-1}\right) e^{\frac{-1}{x-1}}} = 0 = f(1)$$

لأن: نضع $t = \frac{-1}{x-1}$

$t \mapsto +\infty \iff x \mapsto 1^-$

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{-1}{x-1}\right) e^{\frac{-1}{x-1}} = \lim_{t\to +\infty} t e^t = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left((x-1) - \frac{\ln x}{x}\right) = 0 = f(1)$$

إذن f دالة متصلة في 1

ندرس قابلية اشتقاق f في 1

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \left(1 - \frac{1}{x}\,\frac{\ln x}{x-1}\right) = 0$$

$$\left(\text{لأن: } \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \left(e^{\frac{1}{x-1}}\right) = 0$$

إذن f دالة قابلة للاشتقاق في 1 ولدينا: $f'(1) = 0$

2) $\forall x \in]-\infty, 1[\; ; \; f'(x) = \left((x-1)\, e^{\frac{1}{x-1}}\right)'$

$$= e^{\frac{1}{x-1}} + (x-1)\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{x-2}{x-1}\, e^{\frac{1}{x-1}}$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty, 1[$ هي إشارة $\frac{x-2}{x-1}$

وبما أن $\forall x \in]-\infty,1[\ ,\ \frac{x-2}{x-1} > 0$

فإن f دالة تزايدية على المجال $]-\infty,1[$

$\forall x \in]1,+\infty[\ ;\ f'(x) = 1 - \frac{1-\ln x}{x^2}$

$= \frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ على المجال $]1,+\infty[$ هي إشارة : $x^2-1+\ln x$

ندرس إشارة : $x^2-1+\ln x$ على المجال $]1,+\infty[$

لأجل ذلك نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بما يلي :

$g(x) = x^2-1+\ln x$

لدينا : $\forall x \in]1,+\infty[\ ;\ g'(x) = \frac{2x^2+1}{x}$

ولدينا : $g(1) = 0$

x	1	
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$

إذن $\forall x \in]1,+\infty[\ ;\ g(x) > 0$

إذن $\forall x \in]1,+\infty[\ ;\ f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

ندرس الفروع اللانهائية لمنحنى f.

* لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0^-$

إذن لمنحنى f بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = x-1$

و C_f تحت المقارب المائل بجوار $+\infty$

* لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$

(لأن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x} = 1$)

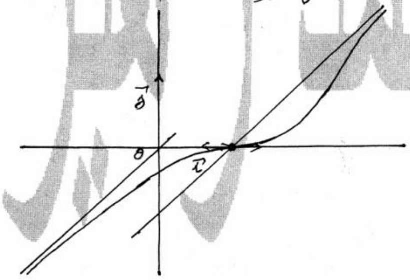
$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \left((x-1)e^{\frac{1}{x-1}} - x\right)$

$= \lim_{x\to-\infty} \left(x\left(e^{\frac{1}{x-1}}-1\right) - e^{\frac{1}{x-1}}\right)$

$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{x-1}\left(\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}\right) - e^{\frac{1}{x-1}}\right) = 0$

(لأن : $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x-1}}\right) = 1$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$)

إذن لمنحنى f بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا معادلته $y = x$



تمرين رقم 81

$x \in [0,+\infty[\ ;\ f_n(x) = 1 - \frac{2n}{x+n} - e^{-x}$

1) أ) $\forall x \in [0,+\infty[\ ;\ f_n'(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$

بما أن : $\forall x \in [0,+\infty[\ .\ \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0$

فإن f_n دالة تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

ب) $f_n(n) = -e^{-n}$

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2n}{x+n} - e^{-x}\right) = 1$

2) أ) $f_n(0) = -2$

ب) نبين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ e^{n+1} > 2n+1$

لدينا لأجل $n=1$: $e^2 > 3$

نفترض أن : $e^{n+1} > 2n+1$

نبرهن أن : $e^{n+2} > 2n+3$

لدينا حسب افتراض الترجع :

$e^{n+1} > 2n+1$

$\Leftrightarrow e.e^{n+1} > e(2n+1)$

$\Leftrightarrow e^{n+2} > (2n+1)e$

نبين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ (2n+1)e > 2n+3$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ (2n+1)e - (2n+3) =$

$= (e-1)(2n+1) - 2$

وبما أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ e-1 > 1$

و $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ 2n+1 > 2$

فإن $(e-1)(2n+1) > 2$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ (e-1)(2n+1) - 2 > 0$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ (2n+1)e > 2n+3$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ e^{n+1} > 2n+1$

ج) لدينا : $f_n(n+1) = \frac{1}{2n+1} - e^{-(n+1)} > 0$

لأن : $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ e^{n+1} > 2n+1$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*;\ \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{e^{n+1}}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*;\ \frac{1}{2n+1} - e^{-(n+1)} > 0$

3) لدينا f_n دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]n, n+1[$ و $f_n(n) = -e^{-n} < 0$

و $f_n(n+1) = \frac{1}{2n+1} - e^{-(n+1)} > 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية للمعادلة $f_n(x) = 0$

حلا وحيدا u_n حيث $n < u_n < n+1$

تمرين رقم 82

$f(x) = \ln(1+e^{-x})$

$x \in D_f \Leftrightarrow 1+e^{-x} > 0$

وبما أن: $\forall x \in IR \; ; \; 1+e^{-x} > 0$

فإن: $D_f = IR$

I-1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$

(لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$)

2) $\forall x \in IR \; ; \; f'(x) = \dfrac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}} = \dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$= \dfrac{-\frac{1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{-1}{1+e^x}$

بما أن: $\forall x \in IR \; ; \; f'(x) < 0$

فإن f دالة تناقصية قطعا على IR

3) أ) $\forall x \in IR \; ; \; f(x) = \ln(1+e^{-x})$

$= \ln \dfrac{1+e^x}{e^x}$

$= \ln(1+e^x) - \ln e^x$

$= -x + \ln(1+e^x)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = 0$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$)

إذن منحنى f بجوار $-\infty$ مقارب مائل (Δ) معادلته: $y=-x$

ج) لدينا $\forall x \in IR \; ; \; f(x)-x = \ln(1+e^x)$

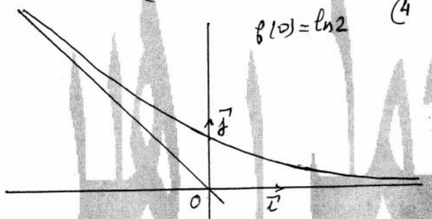
وبما أن $\forall x \in IR \; ; \; 1+e^x > 1$

$\Leftrightarrow \forall x \in IR \; ; \; \ln(1+e^x) > 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in IR \; ; \; f(x)-x > 0$

إذن منحنى f فوق (Δ)

4) $f(0) = \ln 2$



II- $u(t) = \ln(1+t) - t$

$v(t) = \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2$

لدينا $D_u = D_v =]-1, +\infty[$

1) أ) $\forall t \in]-1,+\infty[\; ; \; u'(t) = \dfrac{-t}{1+t}$

$\forall t \in]-1,+\infty[\; ; \; v'(t) = \dfrac{t^2}{1+t}$

t	-1		0		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	
$u(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

t	-1		0		$+\infty$
$v'(t)$		$+$	0	$+$	
$v(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

بما أن القيمة القصوية للدالة u على IR^+ هي 0

فإن $\forall t \in IR^+ \; ; \; u(t) \leq 0$

إذن: $\forall t \in IR^+ \; ; \; \ln(1+t) \leq t$

وبما أن القيمة الدنوية للدالة v على IR^+ هي 0

فإن $\forall t \in IR^+ \; ; \; v(t) \geq 0$

إذن: $\forall t \in IR^+ \; ; \; \ln(1+t) \geq t - \frac{1}{2}t^2$

إذن: $\forall t \in IR^+ \; ; \; t - \frac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t) \leq t$

ب) $\forall n \in IN^* \; ; \; S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

أ) بما أن: $\forall n \in IN^* \; ; \; e^{-n} > 0$

ونطبق العلاقة من السؤال (II-1 ب)

لأجل $t = e^{-1}$: $e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2} \leq \ln(1+e^{-1}) \leq e^{-1}$

لأجل $t = e^{-2}$: $e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-4} \leq \ln(1+e^{-2}) \leq e^{-2}$

$\vdots$

لأجل $t = e^{-n}$: $e^{-n} - \frac{1}{2}e^{-2n} \leq \ln(1+e^{-n}) \leq e^{-n}$

نجمع طرفا لطرف نحصل على:

$(e^{-1}+e^{-2}+\dots+e^{-n}) - \frac{1}{2}(e^{-2}+e^{-4}+\dots+e^{-2n}) \leq S_n \leq (e^{-1}+e^{-2}+\dots+e^{-n})$

لدينا: $e^{-1}+e^{-2}+\dots+e^{-n} = e^{-1}\left(\dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}\right) = \dfrac{1-e^{-n}}{e-1}$

$e^{-2}+e^{-4}+\dots+e^{-2n} = e^{-2}\left(\dfrac{1-e^{-2n}}{1-e^{-2}}\right) = \dfrac{1-e^{-2n}}{e^2-1}$

إذن: $\forall n \in IN^* \; ; \; \dfrac{1-e^{-n}}{e-1} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1-e^{-2n}}{e^2-1} \leq S_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{e-1}$

ب) بما أن: $\forall x \in IR \; ; \; f(x) > 0$

و $\forall n \in IN^* \; ; \; \dfrac{1-e^{-n}}{e-1} < \dfrac{1}{e-1}$

فإن (S_n) متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد $\dfrac{1}{e-1}$

إذن (S_n) متتالية متقاربة نهايتها ℓ

ج) بما أن: $\lim e^{-n} = 0$

فإن: $\dfrac{1}{e-1} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{e^2-1} \leq \ell \leq \dfrac{1}{e-1}$

إذن: $\dfrac{-1}{2(e^2-1)} \leq \ell - \dfrac{1}{e-1} \leq 0 \leq \dfrac{1}{2(e^2-1)}$

يعني: $\left|\ell - \dfrac{1}{e-1}\right| \leq \dfrac{1}{2(e^2-1)}$

7 الأعداد العقدية الجزء الثاني

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z.(التمارين من 1إلى8)

1

1) $(z+2i)(z-1+2i)=0$ 2) $(4z-5)^2=0$

2

1) $z^2=2$ 2) $2z^2=-3$ 3) $z^2+3=0$ 4) $z^2+8z=0$

3

1) $2z^2+z+3=0$ 2) $z^2+5z+3=0$
3) $z^2+\sqrt{2}z+\frac{1}{4}=0$ 4) $(z+1)^2=z-3$

4

1) $(z+2i)(z^2-1)=0$ 2) $(z^2-z+1)(2z^2+z+1)=0$

5

1) $(iz+1)^2+1=0$ 2) $(iz+2)^2-6(iz+2)-7=0$
3) $3(z+2)^2+2(z+2)+3=0$

6

1) $(2z+1-i)^2-6(2z+1-i)+13=0$ 2) $z^2-6z+13=0$

7

1) $\frac{z+1}{z}=z+2$ 2) $\frac{z-1}{z+2}=z$

8

1) $z^3-8=0$ 2) $z^3-1=0$ 3) $z^3+64=0$ 4) $z^3+27=0$

9

1)انشر $(z-2)(z^2+2z+3)$ 2) استنتج حلول المعادلة : $z^3-z-6=0$

10

1) انشر $(z-2i)(z^2+2z-1)$
2) استنتج حلول المعادلة : $z^3+(2-2i)z^2-(1+4i)z+2i=0$

11

حدد العددين العقديين z_1 و z_2 في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\begin{cases} z_1+z_2=3 \\ z_1\times z_2=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} z_1+2z_2=3 \\ z_1\times z_2=\frac{3}{2} \end{cases}$

12

أعط شكلا أسيا للأعداد العقدية التالية :

1) $z=4$ 2) $z=i$ 3) $z=-3$ 4) $z=3+i\sqrt{3}$

13

أعط شكلا أسيا للأعداد العقدية التالية :

1) $z=\frac{1}{1+i}$ 2) $z=(1+i)(-1+i\sqrt{3})$
3) $z=\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}$ 4) $z=\frac{2i(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{1-i}$

14

نضع : $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية :

$\frac{1}{z}$ و $z+\bar{z}$ و $z-\bar{z}$ و $z\left(z+\frac{1}{z}\right)$

15

ليكن θ عددا حقيقيا. حدد شكلا أسيا للأعداد العقدية التالية :

1) $z=-(\cos\theta+i\sin\theta)$ 2) $z=\cos\theta-i\sin\theta$
3) $z=-\cos\theta+i\sin\theta$ 4) $z=\sin\theta+i\cos\theta$

16

حدد شكلا أسيا للأعداد العقدية التالية :

1) $z_1=-2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ 2) $z_2=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$
3) $z_3=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^3$ 4) $z_4=-3\left(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$

17

أعط شكلا أسيا للأعداد العقدية التالية :

1) $z=(1+i\sqrt{3})^{15}$ 2) $z=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{30}$
3) $z=(1-i)^{21}$ 4) $z=(3+i\sqrt{3})^{41}$

18

نعتبر في المستوى العقدي، النقط A و B و C ذات الألحاق z_A و z_B و z_C على التوالي بحيث: $z_A\neq z_B$ و A و B و C نقط غير مستقيمية.
حدد طبيعة المثلث ABC في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ 2) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$
3) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=4e^{i\frac{\pi}{2}}$ 4) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{6}}$

20

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+c=0$ حيث $c\in IR$
حدد قيمة c التي من أجلها يكون العدد $2+i$ حلا للمعادلة ، ثم استنتج الحل الآخر للمعادلة.

21

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z\cos\alpha+1=0$
حيث z هو المجهول و α عدد حقيقي.(ناقش حسب قيم α)

22

ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $]-\pi,\pi[$ نضع : $Z=\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$

1) بيّن أن: $1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$
2) بيّن أن: $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$
3) استنتج الشكل الجبري، ثم شكلا مثلثيا للعدد Z حسب قيم θ.

23

ليكن θ عددا حقيقيا.
نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):z^2-e^{-i\theta}z+e^{-2i\theta}=0$

1) حل في $\mathbb{C}$، المعادلة (E).
2) اكتب حلي المعادلة (E) على شكل مثلثي.

24

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين:
(1): $z^2-6z+12=0$
(2): $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$

2) نضع : $z_1=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=-\sqrt{3}+3i$

أ- اكتب z_1 و z_2 على شكل أسي.
ب- مثل النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: z_1 و z_2 و z_1+z_2 في المستوى العقدي.
ج- ما طبيعة الرباعي $OACB$؟

25

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):z^2+2z+4=0$
2) نعتبر في المستوى العقدي، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C، بحيث $z_A=2$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

أ- بيّن أن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$
ب- استنتج طبيعة المثلث ABC.

26

1) أ- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):z^2+2\sqrt{2}z+4=0$

نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E)، حيث $\text{Im}(z_1)>0$
ب- أعط شكلا أسيا لكل من العددين z_1 و z_2.

2) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $z_A=2$ و z_1 و z_2.
ليكن I منتصف القطعة $[AB]$ و z_I لحقها.

أ- مثل النقط A و B و C و I.
ب- بيّن أن المثلث OAB متساوي الساقين ثم استنتج قياسا للزاوية $(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OI}})$.
ج- احسب z_I ثم $|z_I|$.
د- استنتج من الأسئلة السابقة، القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

27

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$
حيث θ عدد حقيقي (ناقش حسب قيم θ)

28

1) ليكن z عددا عقديا.
انشر الجداء: $(z^2-6z+13)(z^2+4z+13)$
2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^4-2z^3+2z^2-26z+169=0$

29

لكل z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z)=z^3-6z^2+12z-16$

1) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون لدينا :
$(\forall z\in\mathbb{C})\ ;\ P(z)=(z-4)(z^2+az+b)$
2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

30

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i=0$

1) بيّن أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0.
2) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق:
$z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i=(z-z_0)(az^2+bz+c)$ لكل z من $\mathbb{C}$.
3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$، المعادلة (E).

31

باتباع نفس خطوات التمرين السابق، حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين :

1) $z^3+(4-5i)z^2+(8-20i)z-40i=0$
2) $z^3-\frac{3}{2}iz^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{8}i=0$

32

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $z^4+z^2-2=0$ 2) $2z^4+3z^2+1=0$ 3) $2z^4+4z^2+1=0$

33

1) أ- ليكن z من $\mathbb{C}$ تحقق من أن: $z^4-1=(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$
ب- استنتج حلول المعادلة : $(z\in\mathbb{C})\,;\,z^4=1$
2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^4=1$

34

لكل z من $\mathbb{C}$ نضع : $P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$

1) احسب $P(1+i)$
2) أ- بيّن أنه إذا كان z_0 حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\overline{z_0}$ حل للمعادلة $P(z)=0$
ب- بيّن أنه إذا كان z_0 حلا للمعادلة $P(z)=0$ و z_0 يخالف 0 فإن $\frac{1}{z_0}$ حل للمعادلة $P(z)=0$
3) استنتج من الأسئلة السابقة الحلول الأربعة للمعادلة: $P(z)=0$

35

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:
$(E):z^2+2(1-\cos\alpha)z+2(1-\cos\alpha)=0$
حيث z هو المجهول و α عدد حقيقي من المجال $]0;\pi[$
2) اكتب حلي المعادلة (E) على شكل أسي.

36

ليكن a و b عددين حقيقيين.

1) بيّن أن:
أ- $e^{ia}+e^{ib}=e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$
ب- $e^{ia}-e^{ib}=e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$

2) استنتج أن:
أ- $e^{ia}+e^{ib}=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$
ب- $e^{ia}-e^{ib}=2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

3) ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $]-\pi,\pi[$

حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد التالية :

أ- $z_1=\cos\theta+i(1+\sin\theta)$
ب- $z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta$

37

1) ليكن a و b عددين حقيقيين. بيّن أن :(يمكن استعمال نتائج التمرين 36)
أ- $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$
ب- $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$
2) عمل $\cos 3x+\cos 2x$ ثم حل في IR المعادلة :
$\cos 3x+\cos 2x=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

38

ليكن x من IR بحيث $x\not\equiv 0[2\pi]$ (أي: $x\neq 2k\pi$ لكل k من $\mathbb{Z}$)

نضع :
$A(x)=1+\cos x+\cos 2x+...+\cos 6x$
$B(x)=\sin x+\sin 2x+...+\sin 6x$
$S(x)=1+e^{ix}+e^{i2x}+...+e^{i6x}$

1) عبر عن $S(x)$ بدلالة $A(x)$ و $B(x)$
2) بيّن أن: $S(x)=\frac{1-e^{i7x}}{1-e^{ix}}$ ثم استنتج أن: $S(x)=\frac{\sin\left(\frac{7}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}e^{i3x}$
3) استنتج $A(x)$ و $B(x)$ بدلالة $\cos(3x)$ و $\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$ و $\sin(3x)$ و $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

39

نعتبر في المستوى العقدي النقط A_0 و A_1 و A_2 التي ألحاقها على التوالي: $z_0=1$ و $z_1=e^{i\frac{\pi}{12}}$ و $z_2=e^{i\frac{\pi}{6}}$ و النقطة K منتصف القطعة $[A_0A_2]$

1) حدد z_K لحق النقطة K على الشكل الجبري.
2) باستعمال الشكل الأسي، بيّن أن: $z_K=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$
ثم استنتج أن النقط O و A_1 و K مستقيمية.
3) أ- تحقق من أن: $\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$
ب- استنتج أن: $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

40

1) حدد الكتابة العقدية للإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}$ حيث: $z_{\vec{u}} = 2 + i$

2) حدد الكتابة العقدية للإزاحة t التي تحول النقطة A إلى النقطة B حيث: $z_A=2-3i$ و $z_B=4+5i$

41

1) حدد الكتابة العقدية للتحاكي h الذي مركزه Ω ونسبته 2 حيث $z_\Omega = -3 + i$

2) حدد الكتابة العقدية للتحاكي h الذي مركزه Ω ويحول النقطة A إلى النقطة B حيث: $z_\Omega = 1 + i$ و $z_A=3+2i$ و $z_B=5+3i$

42

1) حدد الكتابة العقدية للدوران r الذي مركزه النقطة A ذات اللحق $1+i$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

2) حدد الكتابة العقدية للدوران r الذي مركزه النقطة A ذات اللحق i وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

43

1) ليكن x من IR، أخطط $\sin^3x.\cos^3x$

2) حدد دالة أصلية للدالة: $x \mapsto \sin^3x.\cos^3x$ على IR.

44

حدد دالة أصلية على IR لكل من الدالتين:

1) $x \mapsto \sin^2x.\cos^3 2x$ 2) $x \mapsto \cos^6 x$

45

1) أ– حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+2=0$ ثم اكتب حليها على شكل مثلثي.

ب– استنتج في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $(-iz+3i+3)^2-2(-iz+3i+3)+2=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C ذات الألحاق على التوالي: $z_A=1+i$ و $z_B=1-i$ و $z_C=2z_B$

أ– حدد الشكل الجبري للعدد z_C.

ب– بَيِّنْ أن النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها I ذات اللحق 3 وشعاعها $\sqrt{5}$.

ج– حدد طبيعة المثلث IAC.

د– لتكن E صورة النقطة O بالإزاحة التي متجهتها $2\overrightarrow{IC}$. حدد لحق النقطة E.

هـ– لتكن D صورة النقطة E بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة D.

و– بَيِّنْ أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

46

ليكن θ عددا حقيقيا من المجال $]0;2\pi[$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$(E): z^2-(2^{\theta+1}\cos\theta)z+2^{2\theta}=0$ ثم اكتب حليها على شكل مثلثي

2) نعتبر في المستوى العقدي النقطتين A و B اللتين لحقاهما حلي المعادلة (E).

حدد قيمة θ لكي يكون المثلث OAB متساوي الأضلاع.

47

1) لكل z من $\mathbb{C}$ نضع: $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

أ– بَيِّنْ أنه إذا كان z_0 حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\bar{z_0}$ حل للمعادلة $P(z)=0$

ب– تحقق من أن: $z_0 = 2 + i\sqrt{3}$ حل للمعادلة $P(z)=0$، ثم استنتج حلا آخر للمعادلة $P(z)=0$

ج– حدد العدد الحقيقي a الذي يحقق:

$(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = (z + a)(z - 2 - i\sqrt{3})(z - 2 + i\sqrt{3})$

د– استنتج حلول المعادلة: $P(z)=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي، النقط A و B و C و G التي ألحاقها على التوالي: $z_A=-1$ و $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_G=3$

أ– مثل النقط A و B و C و G

ب– احسب AB و BC و AC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ج– حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$، ثم استنتج طبيعة المثلث GAC.

48

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $[0;\pi]$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)$ المعرفة بمايلي:

$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1$

1) احسب $P(1)$.

2) حدد العددين الحقيقيين a و b اللذين من أجلهما يكون لدينا لكل z من $\mathbb{C}$

$P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$

3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$

4) اكتب حلول المعادلة $P(z)=0$ على شكل مثلثي.

49

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^4-16z^3+90z^2-16z+89=0$

1) أ– بَيِّنْ أن: $z^4-16z^3+90z^2-16z+89=(z^2+1)(z^2-16z+89)$

ب– حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

نرمز ب z_1 و z_2 و z_3 و z_4 لحلول المعادلة (E) بحيث: $Im(z_4)<Im(z_3)<Im(z_2)<Im(z_1)$

2) نعتبر في المستوى العقدي، النقط A و B و C و D التي ألحاقها z_1 و z_2 و z_3 و z_4 على التوالي.

أ– مثل النقط A و B و C و D.

ب– بَيِّنْ أن الرباعي $ABCD$ يقبل محور تماثل.

ج– احسب المسافات AC و BD و AD.

50

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): 2z^3+14z^2+41z+68=0$

1) تحقق من أن $z_1=-4$ حل للمعادلة (E).

2) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون لدينا لكل z من $\mathbb{C}$:

$2z^3+14z^2+41z+68=(z+4)(2z^2+az+b)$

3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

نرمز للحلين الآخرين للمعادلة (E) ب z_2 و z_3، بحيث $Im(z_2)>0$.

4) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها z_1 و z_2 و z_3 على التوالي.

أ– احسب $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب– حدد لحقي النقطتين D و E بحيث يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A.

51

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$، المعادلة: $(E): z^3-4z^2+6z-4=0$

1) تحقق من أن 2 حل للمعادلة (E).

2) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق:

$z^3-4z^2+6z-4=(z-2)(az^2+bz+c)$

3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ثم اكتب حلولها على شكل مثلثي.

4– نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي: $z_A=2$ و $z_B=1+i$ و $z_C=1-i$

أ– بَيِّنْ أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية.

ب– استنتج مركز وشعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

52

لكل عنصر z من $\mathbb{C}$ نضع:

$P(z) = z^3 + (-2 + \sqrt{2})z^2 + 2(1 - \sqrt{2})z + 2\sqrt{2}$

1) أ– حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون لدينا:

$(\forall z \in \mathbb{C}) ; P(z) = (z + \sqrt{2})(z^2 + az + b)$

ب– حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$،

د– أعط شكلا أسيا لكل حل من حلول المعادلة $P(z)=0$،

2) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $z_A = -\sqrt{2}$ و $z_B=1+i$ و $z_C=1-i$

أ– مثل النقط A و B و C.

ب– حدد قياسا للزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}}\right)$

3) أ– تحقق من أن: $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

ب– اكتب العدد $\frac{z_A-z_B}{z_A}$ على الشكلين الجبري والمثلثي ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

53

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$(E): z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$

1) أ– بَيِّنْ أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0.

ب– حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون لدينا:

$(\forall z \in \mathbb{C}) ; (z - z_0)(z^2 + az + b) = z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i$

ج– حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

د– اكتب حلول المعادلة (E) على شكل مثلثي.

2) في المستوى العقدي، نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي: $z_A=i$ و $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

أ– مثل النقط A و B و C.

ب– اكتب العدد العقدي $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على شكل مثلثي.

ج– استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن (E) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق:

$(1) \ |z - i| = \left|z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|$

أ– أول هندسيا المتساوية (1).

ب– أعط معادلة ديكارتية للمجموعة (E) ثم أنشئها.

54

لكل z من $\mathbb{C}$ نضع: $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1) أ– احسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$.

ب– حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون لدينا:

$(\forall z \in \mathbb{C}); P(z) = (z^2 + 3)(z^2 + az + b)$

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$، المعادلة: $P(z)=0$

3) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي: $z_A = i\sqrt{3}$ و $z_B = -i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_D = 3 - 2i\sqrt{3}$

أ– مثل النقط A و B و C و D

ب– بَيِّنْ أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى دائرة محددا لحق مركزها وشعاعها.

4) نعتبر النقطة E مماثلة النقطة D بالنسبة للنقطة O.

بَيِّنْ أن: $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC.

55

نعتبر المتتالية العددية (α_n) المعرفة بمايلي: $\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \\ (\forall n \in IN) ; \alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

1) تحقق من أن (α_n) متتالية حسابية ثم حدد α_n بدلالة n.

2) لكل n من IN، نعتبر في المستوى العقدي النقطة M_n التي تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وشعاعها 1 وتحقق: $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM_n}\right) \equiv \alpha_n[2\pi]$

و z_n لحق النقطة M_n. بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN); z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$

3) بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN); \overrightarrow{OM_n} + \overrightarrow{OM_{n+6}} = \vec{0}$

56

ليكن x عددا حقيقيا بحيث: $x \not\equiv 0[2\pi]$

لكل n من IN^*، نضع: $S_n=1+e^{ix}+...+e^{inx}$

1) بَيِّنْ أن: $(\forall\theta \in IR) ; 1 - e^{i\theta} = \left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

2) بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN^*) ; S_n = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$

3) استنتج أن: $(\forall n \in IN^*) ; S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{nx}{2}}$

4) نأخذ في السؤال: $x = \frac{\pi}{n}$ حيث $n \in IN^* - \{1\}$

نضع: $A_n = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + ... + \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

و $B_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + ... + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

تحقق من أن: $S_{n-1}=A_n+iB_n$ ثم استنتج أن: $B_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

تمرين رقم 1

1) $(z+2i)(z-1+2i)=0 \Leftrightarrow z+2i=0$ أو $z-1+2i=0$

$\Leftrightarrow z=-2i$ أو $z=1-2i$

$S=\{-2i, 1-2i\}$

2) $(4z-5)^2=0 \Leftrightarrow 4z-5=0$

$\Leftrightarrow z=\frac{5}{4}$

$S=\{\frac{5}{4}\}$

تمرين رقم 2

1) $z^2=2 \Leftrightarrow z=\sqrt{2}$ أو $z=-\sqrt{2}$

$S=\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

2) $2z^2=-3 \Leftrightarrow z^2=-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{\frac{3}{2}}\,i$ أو $z=-\sqrt{\frac{3}{2}}\,i$

$S=\{\sqrt{\frac{3}{2}}\,i, -\sqrt{\frac{3}{2}}\,i\}$

3) $z^2+3=0 \Leftrightarrow z^2=-3$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{3}\,i$ أو $z=-\sqrt{3}\,i$

$S=\{\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}\,i\}$

4) $z^2+8z=0 \Leftrightarrow z(z+8)=0$

$\Leftrightarrow z=0$ أو $z=-8$

$S=\{0, -8\}$

تمرين رقم 3

1) $2z^2+z+3=0$

$\Delta=-23$

$z_1=\frac{-1-\sqrt{23}\,i}{4}$, $z_2=\frac{-1+\sqrt{23}\,i}{4}$

$S=\{-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{23}}{4}i, -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{23}}{4}i\}$

2) $z^2+5z+3=0$

$\Delta=13$

$z_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $z_2=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$

$S=\{\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\}$

3) $z^2+\sqrt{2}z+\frac{1}{4}=0$

$\Delta=1$

$z_1=\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$, $z_2=\frac{-\sqrt{2}+1}{2}$

$S=\{\frac{-\sqrt{2}-1}{2}, \frac{-\sqrt{2}+1}{2}\}$

4) $(z+1)^2=z-3$

$\Leftrightarrow z^2+2z+1-z+3=0$

$\Leftrightarrow z^2+z+4=0$

$\Delta=-15$

$z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$, $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$

$S=\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i\}$

تمرين رقم 4

1) $(z+2i)(z^2-1)=0 \Leftrightarrow z=-2i$ أو $z^2=1$

$\Leftrightarrow z=-2i$ أو $z=1$ أو $z=-1$

$S=\{-2i, 1, -1\}$

2) $(z^2-z+1)(2z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2-z+1=0$ أو $2z^2+z+1=0$

$z^2-z+1=0$

$\Delta=-3$

$z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$2z^2+z+1=0$

$\Delta=-7$

$z_3=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i$, $z_4=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$

$S=\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i, -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i\}$

تمرين رقم 5

1) $(iz+1)^2+1=0 \Leftrightarrow (iz+1)^2=-1=i^2$

$\Leftrightarrow iz+1=i$ أو $iz+1=-i$

$\Leftrightarrow z=\frac{-1+i}{i}=1+i$ أو $z=\frac{-1-i}{i}=-1+i$

$S=\{-1+i, 1+i\}$

2) $(E): (iz+2)^2-6(iz+2)-7=0$

نضع $Z=iz+2$

$(E) \Leftrightarrow Z^2-6Z-7=0$

$\Delta=64$

$Z_1=-1$, $Z_2=7$

$Z_1=-1 \Leftrightarrow iz_1+2=-1$

$\Leftrightarrow z_1=\frac{-3}{i}=3i$

$Z_2=7 \Leftrightarrow iz_2+2=7$

$\Leftrightarrow z_2=\frac{5}{i}=-5i$

$S=\{-5i, 3i\}$

3) $(E): 3(z+2)^2+2(z+2)+3=0$

نضع $Z=z+2$

$(E) \Leftrightarrow 3Z^2+2Z+3=0$

$\Delta=-32$

$Z_1=-\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}i$, $Z_2=-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$

$z_1=Z_1-2=\frac{-7}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}i$, $z_2=Z_2-2=\frac{-7}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i$

$S=\{\frac{-7}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}i, \frac{-7}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}i\}$

تمرين رقم 6

1) $(E): (2z+1-i)^2-6(2z+1-i)+13=0$

نضع $Z=2z+1-i$

$(E) \Leftrightarrow Z^2-6Z+13=0$

$\Delta=-16$

$Z_1 = 3-2i \quad , \quad Z_2 = 3+2i$

$Z_1 = 3-2i \iff 2z_1 + 1 - i = 3-2i$

$\iff z_1 = 1 - \frac{i}{2}$

$Z_2 = 3+2i \iff 2z_2 + 1 - i = 3+2i$

$\iff z_2 = 1 + \frac{3}{2}i$

$S = \{1 - \frac{i}{2}, 1 + \frac{3}{2}i\}$

(2

$z^2 - 6z + 13 = 0$

$\Delta = -16$

$z_1 = 3-2i \quad , \quad z_2 = 3+2i$

$S = \{3-2i, 3+2i\}$

تمرين رقم 7

(1

$\frac{z+1}{z} = z+2 \iff z+1 = z^2 + 2z$

$\iff z^2 + z - 1 = 0$

$\Delta = 5$

$z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$S = \{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

(2

$\frac{z-1}{z+2} = z \iff z-1 = z^2 + 2z$

$\iff z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = -3$

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$S = \{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

تمرين رقم 8

(1

$z^3 - 8 = 0 \iff (z-2)(z^2+2z+4) = 0$

$\iff z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$

$z^2+2z+4=0$

$\Delta = -12$

$z = -1-\sqrt{3}i$ أو $z = -1+\sqrt{3}i$

$S = \{2, -1-\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i\}$

(2

$z^3 - 1 = 0 \iff (z-1)(z^2+z+1) = 0$

$\iff z-1=0$ أو $z^2+z+1=0$

$z^2+z+1=0$

$\Delta = -3$

$z = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ أو $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$S = \{1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

(3

$z^3 + 64 = 0 \iff (z+4)(z^2-4z+16) = 0$

$\iff z+4=0$ أو $z^2-4z+16=0$

$z^2-4z+16=0$

$\Delta = -48$

$z = 2-2\sqrt{3}i$ أو $z = 2+2\sqrt{3}i$

$S = \{-4, 2-2\sqrt{3}i, 2+2\sqrt{3}i\}$

(4

$z^3 + 27 = 0 \iff (z+3)(z^2+3z+9) = 0$

$\iff z+3=0$ أو $z^2+3z+9=0$

$z^2+3z+9=0$

$\Delta = -27$

$z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ أو $z = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$S = \{-3, -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$

تمرين رقم 9

(1

$(z-2)(z^2+2z+3) = z^3+2z^2+3z-2z^2-4z-6$

$= z^3 - z - 6$

(2

$z^3 - z - 6 = 0 \iff (z-2)(z^2+2z+3) = 0$

$\iff z-2=0$ أو $z^2+2z+3=0$

$z^2+2z+3=0$

$\Delta = -8$

$z = -1-\sqrt{2}i$ أو $z = -1+\sqrt{2}i$

$S = \{2, -1-\sqrt{2}i, -1+\sqrt{2}i\}$

تمرين رقم 10

(1

$(z-2i)(z^2+2z-1) = z^3+2z^2-z-2z^2i-4zi+2i$

$= z^3+(2-2i)z^2-(1+4i)z+2i$

(2

$z^3+(2-2i)z^2-(1+4i)z+2i = 0 \iff$

$\iff (z-2i)(z^2+2z-1) = 0$

$\iff z-2i=0$ أو $z^2+2z-1=0$

$z^2+2z-1=0$

$\Delta = 8$

$z = -1-\sqrt{2}$ أو $z = -1+\sqrt{2}$

$S = \{2i, -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\}$

تمرين رقم 11

(1

$\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \cdot z_2 = 2 \end{cases}$

حلول هذه النظمة هي حلول المعادلة :

$Z^2 - 3Z + 2 = 0$

$\Delta = 1$

$Z_1 = 1 \quad , \quad Z_2 = 2$

إذا كان $z_1 = 1$ فإن $z_2 = 2$

وإذا كان $z_1 = 2$ فإن $z_2 = 1$

$S = \{(1,2), (2,1)\}$

(2

$\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 3 \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1 + (2z_2) = 3 \\ z_1 \cdot (2z_2) = 3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z_1 + z'_2 = 3 \\ z_1 \cdot z'_2 = 3 \end{cases}$ نضع : $z'_2 = 2z_2$

حلول هذه النظمة هي حلول المعادلة :

$Z^2 - 3Z + 3 = 0$

$\Delta = -3$

$$z_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad , \quad z_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

اذا كان : $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

فإن

$$z_2' = 3 - z_1 = 3 - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

إذن :

$$z_2 = \frac{1}{2} z_2' = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

اذا كان : $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

فإن

$$z_2' = 3 - z_1 = 3 - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

إذن

$$z_2 = \frac{1}{2} z_2' = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i , \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i \right) , \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i , \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i \right) \right\}$$

تمرين (رقم 12)

(1 $z = 4 = [4, 0] = 4 e^{0i}$

(2 $z = i = [1, \frac{\pi}{2}] = e^{i\frac{\pi}{2}}$

(3 $z = -3 = [3, \pi] = 3 e^{i\pi}$

(4 $z = 3 + i\sqrt{3} = [2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}] = 2\sqrt{3} \, e^{i\frac{\pi}{6}}$

تمرين (رقم 13)

(1 $z = \frac{1}{1+i} = \frac{e^{i0}}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

(2
$$z = (1+i)(-1+i\sqrt{3}) = (\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})(2 e^{i\frac{2\pi}{3}}) = 2\sqrt{2} \, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = 2\sqrt{2} \, e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

(3
$$z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{2 e^{i(-\frac{\pi}{6})}}{2 e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

(4
$$z = \frac{2i(\sqrt{2} + \sqrt{2} i)}{1 - i} = \frac{(2 e^{i\frac{\pi}{2}})(2 e^{i\frac{\pi}{4}})}{\sqrt{2} \, e^{i(-\frac{\pi}{4})}} = \frac{4 e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2} \, e^{i(-\frac{\pi}{4})}} = 2\sqrt{2} \, e^{i\pi}$$

تمرين (رقم 14)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{7}}} = e^{i(-\frac{2\pi}{7})}$$

$$z + \bar{z} = (2\cos\frac{2\pi}{7}) \cdot e^{i0}$$

$$z - \bar{z} = 2i \sin\frac{2\pi}{7} = (2\sin\frac{2\pi}{7}) \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z(z + \frac{1}{z}) = z(z + \bar{z}) = (2\cos\frac{2\pi}{7}) \, e^{i\frac{2\pi}{7}}$$

تمرين (رقم 15)

(1 $z = -(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\pi + \theta) + i\sin(\pi + \theta)$

$$= e^{i(\pi + \theta)}$$

(2 $z = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{i(-\theta)}$

(3 $z = -\cos\theta + i\sin\theta = \cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta) = e^{i(\pi - \theta)}$

(4 $z = \sin\theta + i\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}$

تمرين (رقم 16)

(1
$$z = -2(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}) = 2\left(\cos(\pi + \frac{\pi}{5}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{5})\right) = 2 e^{i\frac{6\pi}{5}}$$

(2
$$z = \cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5} = \cos(-\frac{\pi}{5}) + i\sin(-\frac{\pi}{5}) = e^{i(-\frac{\pi}{5})}$$

(3
$$z = (\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})^3 = (e^{i\frac{\pi}{5}})^3 = e^{i\frac{3\pi}{5}}$$

(4
$$z = -3(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}) = 3(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}) = 3\left(\cos(-\frac{\pi}{5}) + i\sin(-\frac{\pi}{5})\right) = 3 e^{i(-\frac{\pi}{5})}$$

تمرين (رقم 17)

(1
$$z = (1 + i\sqrt{3})^{15} = [2, \frac{\pi}{3}]^{15} = [2^{15}, 5\pi] = [2^{15}, \pi] = 2^{15} e^{i\pi}$$

(2
$$z = (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)^{38} = [1, (-\frac{\pi}{3})]^{38} = [1, -\frac{38\pi}{3}] = [1, (-\frac{2\pi}{3})] = e^{i(-\frac{2\pi}{3})}$$

(3
$$z = (1 - i)^{21} = [\sqrt{2}, (-\frac{\pi}{4})]^{21} = [(\sqrt{2})^{21}, -\frac{21\pi}{4}] = [(\sqrt{2})^{21}, \frac{3\pi}{4}] = (\sqrt{2})^{21} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

(4
$$z = (3 + i\sqrt{3})^{41} = [2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}]^{41} = [(2\sqrt{3})^{41}, \frac{41\pi}{6}] = [(2\sqrt{3})^{41}, \frac{5\pi}{6}] = (2\sqrt{3})^{41} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

تمرين (رقم 18)

(1
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi] \end{cases}$$

إذن المثلث ABC متساوي الأضلاع

(2
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في A ومتساوي الساقين رأسه A

(3

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 4 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = 4AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في A

(4

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{6} \; [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{6} \; [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

تمرين رقم 20

$2+i$ حل للمعادلة $z^2 - 4z + c = 0$; $c \in \mathbb{R}$

يعني أن $(2+i)^2 - 4(2-i) + c = 0$

$\Leftrightarrow 4 + 4i - 1 - 8 - 4i + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 5$

والحل الثاني لهذه المعادلة هو مرافق $2+i$ يعني $2-i$

تمرين رقم 21

$z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$

$$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4$$
$$= -4\sin^2\alpha = (2i\sin\alpha)^2$$

* اذا كان : $\alpha = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

فإن $\cos\alpha = 1$

اذن $\Delta = 0$

وبالتالي للمعادلة حلا وحيدا هو 1

* اذا كان : $\alpha = (2k+1)\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

فإن $\cos\alpha = -1$

اذن $\Delta = 0$

وبالتالي للمعادلة حلا وحيدا هو -1

* اذا كان $\alpha \neq k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

فإن $\Delta < 0$

اذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين هما

$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = [1, \alpha]$ $\quad$ $z_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha = [1, -\alpha]$

تمرين رقم 22

$$Z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$$

1) الطريقة I :

$$1 - e^{i\theta} = 1 - (\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (1 - \cos\theta) - i\sin\theta$$
$$= \left(1 - \cos 2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right) - i\sin 2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)$$
$$= \left(1 - \left(\cos^2\tfrac{\theta}{2} - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\right)\right) - i\,2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$
$$= \left(\left(1 - \cos^2\tfrac{\theta}{2}\right) + \sin^2\tfrac{\theta}{2}\right) - i\,2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$
$$= 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} - i\,2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$
$$= \left(2\sin\tfrac{\theta}{2}\right)\left(\sin\tfrac{\theta}{2} - i\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$
$$= \left(-2i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)$$

$$= \left(-2i\sin\tfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

الطريقة II :

$$1 - e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$= -2i\,e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right) = -2i\left(\sin\tfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2) الطريقة I :

$$1 + e^{i\theta} = 1 + (\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= (1 + \cos\theta) + i\sin\theta$$
$$= \left(1 + \cos 2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right) + i\sin 2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)$$
$$= \left(1 + \left(\cos^2\tfrac{\theta}{2} - i\sin^2\tfrac{\theta}{2}\right)\right) + i\,2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$
$$= \left(\left(1 - \sin^2\tfrac{\theta}{2}\right) + \cos^2\tfrac{\theta}{2}\right) + i\,2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$
$$= 2\cos^2\tfrac{\theta}{2} + i\,2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$
$$= \left(2\cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2}\right) = \left(2\cos\tfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

الطريقة II :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$= 2e^{i\frac{\theta}{2}}\left(\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}}{2}\right) = 2\left(\cos\tfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

(3

$$Z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = \frac{\left(-2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}}$$
$$= -i\tan\tfrac{\theta}{2}$$

* اذا كان $\theta = 0$

فإن $Z = 0$

* اذا كان $-\pi < \theta < 0$

فإن $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < 0$

اذن $\tan\frac{\theta}{2} < 0$

اذن $Z = \left(-\tan\frac{\theta}{2}\right)i$

$$= \left[-\tan\tfrac{\theta}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$= \left(-\tan\tfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

* اذا كان $0 < \theta < \pi$

فإن $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$

اذن $\tan\frac{\theta}{2} > 0$

اذن $Z = \left(\tan\frac{\theta}{2}\right)(-i)$

$$= \left[\tan\tfrac{\theta}{2}, -\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$= \left(\tan\tfrac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

تمرين رقم 23

$$(E): z^2 - e^{-\theta}z + e^{-2\theta} = 0$$

$$\Delta = -3e^{-2\theta} = \left(i\sqrt{3}\,e^{-\theta}\right)^2$$

$$z_1 = \frac{e^{-\theta} - i\sqrt{3}\,e^{-\theta}}{2} = e^{-\theta}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[e^{-\theta}, -\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_1 = \frac{e^{-\theta} + i\sqrt{3}\, e^{-\theta}}{2} = e^{-\theta}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[e^{-\theta}, \frac{\pi}{3}\right]$$

تمرين رقم 24

1)

$z^2 - 6z + 12 = 0$

$\Delta = -12 = (2\sqrt{3}\, i)^2$

$z_1 = 3 + \sqrt{3}\, i \quad , \quad z'_1 = 3 - \sqrt{3}\, i$

$S = \{3 + \sqrt{3}\, i \ , \ 3 - \sqrt{3}\, i\}$

$z^2 + 2\sqrt{3}\, z + 12 = 0$

$\Delta = -36 = (6i)^2$

$z_2 = -\sqrt{3} + 3i \quad , \quad z'_2 = -\sqrt{3} - 3i$

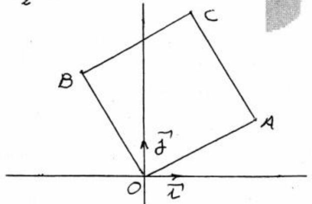
$S = \{-\sqrt{3} + 3i \ , \ -\sqrt{3} - 3i\}$

2) أ)

$z_1 = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = \left[2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right] = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

$z_2 = -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right] = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ب) لدينا: $z_C = z_1 + z_2 = (3 - \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3})i$



ج) لدينا: $|z_1| = |z_2| = 2\sqrt{3}$

اذن $OA = OB$

ولدينا $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \equiv \arg(z_2) - \arg(z_1) \ [2\pi]$

$\equiv \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

اذن $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$

اذن $(OA) \perp (OB)$

ولدينا $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_O}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_1}{z_1}\right) \ [2\pi]$

$\equiv \arg(1) \ [2\pi]$

$\equiv 0 \ [2\pi]$

اذن $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}) \equiv 0 \ [2\pi]$

اذن $(OA) \parallel (BC)$

ومنه فان الرباعي $OACB$ مربع

تمرين رقم 25

1)

$(E) : z^2 + 2z + 4 = 0$

$\Delta = -12 = (2\sqrt{3}\, i)^2$

$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

$S = \{-1 + i\sqrt{3} \ , \ -1 - i\sqrt{3}\}$

2) أ) لدينا: $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = 2$

$z_C = -1 - i\sqrt{3}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2}$$

$$= \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)}{-\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$= \left[1, \frac{\pi}{3}\right] = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب)

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \iff \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث ABC متساوي الاضلاع

تمرين رقم 26

1) أ) $z \in \mathbb{C} \ ; \ z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 4 = 0$

$\Delta = -8 = (2\sqrt{2}\, i)^2$

$z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i \quad , \quad z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

ب) $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \left[2, \frac{3\pi}{4}\right] = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$

$= \left[2, -\frac{3\pi}{4}\right] = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

2) لدينا:

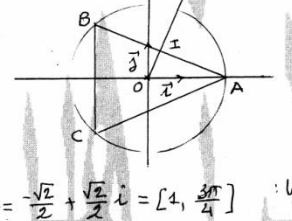
$z_A = 2$

$z_B = z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

$z_C = z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

3) أ)



ب) لدينا: $\frac{z_B}{z_A} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = \left[1, \frac{3\pi}{4}\right]$

$$\iff \begin{cases} \left|\frac{z_B}{z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \equiv \frac{3\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{3\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O

وبما ان I منتصف القطعة $[AB]$

فان $[OI]$ هو منصف الزاوية $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

اذن: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) \equiv \frac{3\pi}{8} \ [2\pi]$

ج) $z_I = \frac{1}{2}(z_A+z_B) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

د) لدينا : $z_I = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right] = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\frac{3\pi}{8} = \dfrac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\[2ex] \sin\frac{3\pi}{8} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}\end{cases}$$

تمرين (رقم 27)

$z^2 - 2(1+2\cos\theta)z + (5+4\cos\theta) = 0$

$\Delta = 4(1+2\cos\theta)^2 - 4(5+4\cos\theta)$

$= -16\sin^2\theta = (i4\sin\theta)^2$

* اذا كان : $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

فان $\sin\theta = 0$

اذن $\Delta = 0$

وبالتالي المعادلة حلا وحيدا هو : 3

* اذا كان : $\theta = (2k+1)\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

فان $\sin\theta = 0$

اذن $\Delta = 0$

وبالتالي المعادلة حلا وحيدا هو 1 -

* اذا كان : $\theta \neq k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

فان $\Delta \neq 0$

اذن المعادلة حلين عقديين مترافقين هما :

$z_1 = (1+2\cos\theta) + i\sin\theta$

$z_2 = (1+2\cos\theta) - i\sin\theta$

تمرين (رقم 28)

1) $(z^2-6z+13)(z^2+4z+13) =$

$= z^4+4z^3+13z^2-6z^3-24z^2-78z+13z^2+52z+169$

$= z^4-2z^3+2z^2-26z+169$

2) $z^4-2z^3+2z^2-26z+169 = 0$

$\Leftrightarrow (z^2-6z+13)(z^2+4z+13) = 0$

$\Leftrightarrow z^2-6z+13=0$ أو $z^2+4z+13=0$

$z^2-6z+13=0$

$\Delta = -16 = (4i)^2$

$z_1 = 3-2i$ ، $z_1' = 3+2i$

$z^2+4z+13=0$

$\Delta = -36 = (6i)^2$

$z_2 = -2-3i$ ، $z_2' = -2+3i$

$S = \{3-2i, 3+2i, -2-3i, -2+3i\}$

تمرين (رقم 29)

$P(z) = z^3-6z^2+12z-16$

1) $P(z) = (z-4)(z^2+az+b)$

$= z^3+(a-4)z^2+(b-4a)z-4b$

$= z^3-6z^2+12z-16$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a-4=-6\\ b-4a=12\\ 4b=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}$$

اذن

$P(z) = (z-4)(z^2-2z+4)$

2) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-4)(z^2-2z+4)=0$

$\Leftrightarrow z-4=0$ أو $z^2-2z+4=0$

$z^2-2z+4=0$

$\Delta = -12 = (2\sqrt{3}\, i)^2$

$z_1 = 1+\sqrt{3}\, i$ ، $z_2 = 1-\sqrt{3}\, i$

حلول المعادلة : $P(z)=0$ هي :

$z_0 = 4$ ، $z_1 = 1+\sqrt{3}\, i$ ، $z_2 = 1-\sqrt{3}\, i$

$S = \{4, 1+\sqrt{3}\, i, 1-\sqrt{3}\, i\}$

تمرين (رقم 30)

$(E): z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i=0$

1) نعتبر $z_0 = \alpha i$ حلا تخيليا للمعادلة (E)

اذن : $-\alpha^3 i-(1+i)\alpha^2+(-1+i)\alpha i-i=0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 i+\alpha^2+\alpha^2 i+\alpha i+\alpha+i=0$

$\Leftrightarrow (\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)i+(\alpha^2+\alpha)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha(\alpha+1)=0\\ \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=-1$$

اذن $z_0 = -i$

2) $z^3+(1+i)z^2+(-1+i)z-i = (z+i)(az^2+bz+c)$

$= az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b+ai=1+i\\ c+bi=-1+i\\ c=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=-1\end{cases}$$

اذن $(E) \Leftrightarrow (z+i)(z^2+z-1)=0$

$\Leftrightarrow z+i=0$ أو $z^2+z-1=0$

$z^2+z-1=0$

$\Delta = 5$

$z_1 = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} i$ ، $z_2 = \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} i$

$S = \left\{-i, \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} i, \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} i\right\}$

تمرين (رقم 31)

1) $(E): z^3+(4-5i)z^2+(8-20i)z-40i=0$

2) نعتبر $z_0 = \alpha i$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة (E)

اذن $-\alpha^3 i-(4-5i)\alpha^2+(8-20i)\alpha i-40i=0$

$\Leftrightarrow -\alpha^3 i-4\alpha^2+5\alpha^2 i+8\alpha i+20\alpha-40i=0$

$\Leftrightarrow (-4\alpha^2+20\alpha)+(-\alpha^3+5\alpha^2+8\alpha-40)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-4\alpha^2+20\alpha=0\\ -\alpha^3+5\alpha^2+8\alpha-40=0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=5$

اذن : $z_0=5i$

ب) $z^3+(4-5i)z^2+(8-20i)z-40i=$

$=(z-5i)(az^2+bz+c)$

$=az^3+(b-5ai)z^2+(c-5bi)z-5ci$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b-5ai=4-5i\\ c-5bi=8-20i\\ 5c=40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=4\\ c=8\end{cases}$

اذن $(E)\Leftrightarrow (z-5i)(z^2+4z+8)=0$

$\Leftrightarrow z-5i=0$ أو $z^2+4z+8=0$

$z^2+4z+8=0$

$\Delta=-16=(4i)^2$

$z_1=-2-2i$ ، $z_2=-2+2i$

$S=\{5i,-2-2i,-2+2i\}$

ج) $(E): z^3-\frac{3}{2}iz^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{8}i=0$

أ) نعتبر $z_0=\alpha i$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة (E)

اذن : $-\alpha^3 i+\frac{3}{2}\alpha^2 i-\frac{3}{4}\alpha i+\frac{9}{8}i=0$

$\Leftrightarrow (\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{3}{4}\alpha-\frac{9}{8})i=0$

$\Leftrightarrow \alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2-\frac{3}{4}\alpha-\frac{9}{8}=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha-\frac{3}{2})+\frac{3}{4}(\alpha-\frac{3}{2})=0$

$\Leftrightarrow (\alpha-\frac{3}{2})(\alpha^2+\frac{3}{4})=0$

$\Leftrightarrow \alpha=\frac{3}{2}$

اذن : $z_0=\frac{3}{2}i$

ب) $z^3-\frac{3}{2}iz^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{8}i=$

$=(z-\frac{3}{2}i)(az^2+bz+c)$

$=az^3+(b-\frac{3}{2}ai)z^2+(c-\frac{3}{2}bi)z-\frac{3}{2}ci$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b-\frac{3}{2}ai=-\frac{3}{2}i\\ c-\frac{3}{2}bi=-\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{2}c=\frac{9}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=-\frac{3}{4}\end{cases}$

اذن $(E)\Leftrightarrow (z-\frac{3}{2}i)(z^2+z-\frac{3}{4})=0$

$\Leftrightarrow z-\frac{3}{2}i=0$ أو $z^2+z-\frac{3}{4}=0$

$z^2+z-\frac{3}{4}=0$

$\Delta=4$

$z_1=-\frac{3}{2}$ ، $z_2=\frac{1}{2}$

$S=\{-\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}i\}$

تمرين رقم 32

1) $(E): z^4+z^2-2=0$

نضع : $Z=z^2$

اذن : $(E)\Leftrightarrow Z^2+Z-2=0$

$\Delta=9$

$Z=-2$ أو $Z=1$

$Z=-2 \Leftrightarrow z^2=-2$

$\Leftrightarrow z_1=\sqrt{2}i$ ، $z_2=-\sqrt{2}i$

$Z=1 \Leftrightarrow z^2=1$

$\Leftrightarrow z_3=1$ ، $z_4=-1$

$S=\{-1,1,\sqrt{2}i,-\sqrt{2}i\}$

2) $(E): 2z^4+3z^2+1=0$

نضع $Z=z^2$

اذن $(E)\Leftrightarrow 2Z^2+3Z+1=0$

$\Delta=1$

$Z=-\frac{1}{2}$ أو $Z=-1$

$Z=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow z^2=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$Z=-1 \Leftrightarrow z^2=-1$

$\Leftrightarrow z_3=i$ ، $z_4=-i$

$S=\{i,-i,\frac{\sqrt{2}}{2}i,-\frac{\sqrt{2}}{2}i\}$

3) $(E): 2z^4+4z^2+1=0$

نضع $Z=z^2$

اذن $(E)\Leftrightarrow 2Z^2+4Z+1=0$

$\Delta=8$

$Z=-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$ أو $Z=-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$Z=-(1+\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow z^2=-(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\Leftrightarrow z_1=\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i$ ، $z_2=-\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i$

$Z=-(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) \Leftrightarrow z^2=-(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

$\Leftrightarrow z_3=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i$ ، $z_4=-\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i$

$S=\left\{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i,-\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i,\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i,-\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\,i\right\}$

تمرين رقم 33

1)أ) $(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=(z^2-1)(z^2+1)$

$=z^4-1$

ب) $z^4-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0$

$\Leftrightarrow z_1=1$ ، $z_2=-1$ ، $z_3=i$ ، $z_4=-i$

$S=\{1,-1,i,-i\}$

2) $(E):\ z\in\mathbb{C}\ ;\ \left(\frac{z-i}{z+1}\right)^4=1$

نضع $Z=\frac{z-i}{z+1}$

$(E)\iff Z^4-1=0$

$\iff Z=1$ أو $Z=-1$ أو $Z=i$ أو $Z=-i$

$Z=1 \iff \frac{z-i}{z+1}=1$

$\iff z-i=z+1$ لا يمكن

$Z=-1 \iff \frac{z-i}{z+1}=-1$

$\iff z-i=-z-1$

$\iff 2z=-1+i \iff z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$Z=i \iff \frac{z-i}{z+1}=i$

$\iff z-i=zi+i$

$\iff (1-i)z=2i \iff z=\frac{2i}{1-i}=-1+i$

$Z=-i \iff \frac{z-i}{z+1}=-i$

$\iff z-i=-iz-i \iff z=0$

$S=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\ ,\ -1+i\ ,\ 0\right\}$

تمرين رقم 34

$P(z)=z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1$

1) $P(1+i)=(1+i)^4-3(1+i)^3+\frac{9}{2}(1+i)^2-3(1+i)+1$

$=-4-3(-2+2i)+\frac{9}{2}(2i)-3(1+i)+1$

$=-4+6-6i+9i-3-3i+1=0$

2) أ) z_0 حل للمعادلة : $P(z)=0$

يعني أن $P(z_0)=0$

$P(\bar{z}_0)=(\bar{z}_0)^4-3(\bar{z}_0)^3+\frac{9}{2}(\bar{z}_0)^2-3(\bar{z}_0)+1$

$=\overline{z_0^4-3z_0^3+\frac{9}{2}z_0^2-3z_0+1}$

$=\overline{P(z_0)}=\bar{0}=0$

اذن $\bar{z}_0$ حل للمعادلة : $P(z)=0$

ب) $P\left(\frac{1}{z_0}\right)=\left(\frac{1}{z_0}\right)^4-3\left(\frac{1}{z_0}\right)^3+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{z_0}\right)^2-3\left(\frac{1}{z_0}\right)+1$

$=\frac{1}{z_0^4}\left(1+3z_0+\frac{9}{2}z_0^2-3z_0^3+z_0^4\right)$

$=\frac{1}{z_0^4}P(z_0)=0$

اذن $\frac{1}{z_0}$ حل للمعادلة : $P(z)=0$

3) حلول المعادلة : $P(z)=0$ هي

$z_0=1+i$

$z_1=\bar{z}_0=1-i$

$z_2=\frac{1}{z_0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

$z_3=\overline{\left(\frac{1}{z_0}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

تمرين رقم 35

1) $(E):\ z^2+2(1-\cos\alpha)z+2(1-\cos\alpha)=0$

$\Delta=4(1-\cos\alpha)^2-8(1-\cos\alpha)$

$=4(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha)-8+8\cos\alpha$

$=-4(1-\cos^2\alpha)$

$=-4\sin^2\alpha=(2i\sin\alpha)^2$

وبما أن $\alpha\in]0,\pi[$ فإن $\sin\alpha\neq 0$

اذن $\Delta<0$

اذن للمعادلة (E) حلين عقديين مترافقين هما

$z_1=(-1+\cos\alpha)+i\sin\alpha$

$z_2=(-1+\cos\alpha)-i\sin\alpha$

2) $z_1=(-1+\cos\alpha)+i\sin\alpha$

$=-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

$=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

الطريقة I : $z_2=(-1+\cos\alpha)-i\sin\alpha$

$=-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-i\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}-i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)+i\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)$

$=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

الطريقة II : $z_2=\bar{z}_1=\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}$

تمرين رقم 36

لدينا: $a=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$

$b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$

اذن: $e^{ia}+e^{ib}=e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$

$e^{ia}-e^{ib}=e^{i\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}-e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$

2) أ) لدينا: $e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}=\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}=\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

اذن: $e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

اذن $e^{ia}+e^{ib}=\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

$e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}=2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$e^{ia}-e^{ib}=\left(2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

3) أ) $z_1=\cos\theta+i(1+\sin\theta)$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)+i$

$=e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$

$=\left(2\cos\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}$

$=\left[2\cos\left(\frac{2\theta+\pi}{4}\right), \frac{2\theta+\pi}{4}\right]$

$z_2=(1+\cos\theta)+i\sin\theta$

$=1+(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=e^{i0}+e^{i\theta}$

$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}=\left[2\cos\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}\right]$

تمرين رقم 37

1) لدينا : $(\cos a+\cos b)+i(\sin a+\sin b)=$

$=(\cos a+i\sin a)+(\cos b+i\sin b)$

$=e^{ia}+e^{ib}$

$=\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

$=\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$

$=\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)+i\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$

اذن : $\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\sin a+\sin b=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$

2) لدينا : $\cos 3x+\cos 2x=2\cos\left(\frac{3x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-2x}{2}\right)$

$=2\cos\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

اذن : $\cos 3x+\cos 2x=\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2}=\cos\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{5x}{2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=0$ أو $\cos\frac{5x}{2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \ / k\in\mathbb{Z}$

أو $\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ / k\in\mathbb{Z}$

أو $\frac{5x}{2}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ / k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ / k\in\mathbb{Z}$

أو $x=\frac{2\pi}{15}+\frac{4k\pi}{5} \ / k\in\mathbb{Z}$

أو $x=-\frac{2\pi}{15}+\frac{4k\pi}{5} \ / k\in\mathbb{Z}$

$S=\left\{\pi+2k\pi, \frac{2\pi}{15}+\frac{4k\pi}{5}, -\frac{2\pi}{15}+\frac{4k\pi}{5} \ / k\in\mathbb{Z}\right\}$

تمرين رقم 38

لكل x من $\mathbb{R}$ حيث $x\not\equiv 0\ [2\pi]$

$A(x)=1+\cos x+\cdots\cdots+\cos 6x$

$B(x)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 6x$

1) $S(x)=1+e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{i6x}$

$=1+(\cos x+i\sin x)+\cdots\cdots+(\cos 6x+i\sin 6x)$

$=(1+\cos x+\cdots+\cos 6x)+i(\sin x+\cdots+\sin 6x)$

$=A(x)+iB(x)$

2) $S(x)$ هي مجموع 7 حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $q=e^{ix}$

اذن بتطبيق نتائج التمرين رقم 36 نحصل على :

$S(x)=\frac{1-(e^{ix})^7}{1-e^{ix}}=\frac{1-e^{i7x}}{1-e^{ix}}$

$=\frac{e^{0i}-e^{i7x}}{e^{0i}-e^{ix}}=\frac{\left(2i\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\right)e^{i\frac{7x}{2}}}{\left(2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)e^{i\frac{x}{2}}}$

$=\frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i3x}$

اذن : $A(x)=\frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cdot\cos 3x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$B(x)=\frac{\sin\left(\frac{7x}{2}\right)\cdot\sin(3x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

تمرين رقم 39

$z_0=1$ ، $z_1=e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، $z_2=e^{i\frac{\pi}{6}}$

1) $z_K=\frac{1}{2}(z_0+z_1)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

2) بتطبيق نتائج التمرين رقم 36 نحصل على :

$z_K=\frac{z_0+z_2}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{0i}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$

$=\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}$

ومنه فان $z_K=\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)z_1$

يعني أن $\overrightarrow{OK}=\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\overrightarrow{OA_1}$

اذن النقط O و A و K مستقيمية

3) أ) لدينا : $\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

$=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

ب) لدينا : $\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^2 + i\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)\left(\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

اذن

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

تمرين رقم 40

1) t الازاحة التي متجهتها $\vec{u} = 2+i$

لتكن $M(z)$ و $M'(Z)$ نقطتين من المستوى $\mathcal{P}$

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow Z = z + 2 + i$$

2)

$$t(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_B - z_A = 2 + 8i$$

اذن t هي الازاحة التي متجهتها $\vec{u} = 2+8i$

ومنه : لتكن $M(z)$ و $M'(Z)$ نقطتين من المستوى $\mathcal{P}$

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow Z = z + 2 + 8i$$

تمرين رقم 41

1) h التحاكي الذي مركزه $\Omega(-3+i)$ ونسبته 2

لتكن $M(z)$ و $M'(Z)$ نقطتين من المستوى $\mathcal{P}$.

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow Z = (-3+i) + 2(z - (-3+i))$$

$$\Leftrightarrow Z = 2z + 3 - i$$

2)

$$h(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} = k\,\overrightarrow{\Omega A}$$

$$\Leftrightarrow z_B - z_\Omega = k(z_A - z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2i = k(2+i) \Leftrightarrow k = 2$$

اذن h هو التحاكي الذي مركزه $\Omega(1+i)$ ونسبته 2

ومنه : لتكن $M(z)$ و $M'(Z)$ نقطتين من المستوى $\mathcal{P}$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow Z = 2z - 1 - i$$

تمرين رقم 42

1) r الدوران الذي مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$

لتكن $M(z)$ و $M'(Z)$ نقطتين من المستوى $\mathcal{P}$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z - z_A}{z - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow Z = 1 + i + e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 1 - i)$$

2) r الدوران الذي مركزه $A(i)$ وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

لتكن $M(z)$ و $M'(Z)$ نقطتين من المستوى $\mathcal{P}$.

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv -\frac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z - i}{z - i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$\Leftrightarrow Z = -iz - 1 + i$$

تمرين رقم 43

1)

$$\sin^3 x \cdot \cos^3 x = (\sin x \cdot \cos x)^3$$

$$= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{4i}\right)^3 \left((e^{ix} - e^{-ix})(e^{ix} + e^{-ix})\right)^3$$

$$= \frac{i}{64}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)^3$$

$$= \frac{i}{64}\left(e^{i6x} - 3e^{i2x} + 3e^{-i2x} - e^{-i6x}\right)$$

$$= \frac{-1}{32}\left(\frac{e^{i6x} - e^{-i6x}}{2i} - 3\,\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)$$

$$= \frac{-1}{32}\left(\sin 6x - 3\sin 2x\right)$$

2) دالة أصلية للدالة : $x \longmapsto \sin^3 x \cdot \cos^3 x$ هي :

$$F(x) = \frac{1}{192}\cos 6x - \frac{3}{64}\cos 2x$$

تمرين رقم 44

$$\sin^2 x \cdot \cos^3 2x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{-1}{32}\left(e^{i2x} + e^{-i2x} - 2\right)\left(e^{i6x} + 3e^{i2x} + 3e^{-i2x} + e^{-i6x}\right)$$

$$= \frac{-1}{32}\left(e^{i8x} + e^{i4x} - 2e^{i6x} + 3e^{i4x} + 3 - 6e^{i2x} + 3 + 3e^{-i4x} - 6e^{-i2x} + e^{-i4x} + e^{-i2x} - 2e^{-i6x}\right)$$

$$= \frac{-1}{16}\left(\frac{e^{i8x} + e^{-i8x}}{2} - 2\,\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2} + 4\,\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} - 6\,\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + 3\right)$$

$$= \frac{-1}{16}\left(\cos 8x - 2\cos 6x + 4\cos 4x - 6\cos 2x + 3\right)$$

اذن دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \sin^2 x \cos^3 2x$ هي.

$$F(x) = \frac{-1}{16}\left(\frac{1}{8}\sin 8x - \frac{1}{3}\sin 6x + \sin 4x - 3\sin 2x + 3x\right)$$

2)

$$\cos^6 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6 =$$

$$= \frac{1}{64}\left(e^{i6x} + 6e^{i4x} + 15e^{i2x} + 20 + 15e^{-i2x} + 6e^{-i4x} + e^{-i6x}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{e^{i6x} + e^{-i6x}}{2} + 6\,\frac{e^{i4x} + e^{-i4x}}{2} + 15\,\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} + 10\right)$$

$$= \frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}$$

اذن دالة اصلية للدالة : $x \mapsto \cos^6 x$ هي :

$$F(x) = \frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x$$

تمرين رقم 45

1) أ)

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = -4 = (2i)^2$$

$$z_1 = 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = 1 - i = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$$

ب)

$$(E) : (-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0$$

نضع $Z = -iz + 3i + 3$

$$(E) \Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 2 = 0$$

وحسب السؤال السابق

$Z = 1+i$ أو $Z = 1-i$

$Z = 1+i \Leftrightarrow -iz+3i+3 = 1+i$

$\Leftrightarrow z = 2-2i$

$Z = 1-i \Leftrightarrow -iz+3i+3 = 1-i$

$\Leftrightarrow z = 4-2i$

$S = \{2-2i,\ 4-2i\}$

2) أ) $z_C = 2z_A = 2-2i$

ب) لدينا $I(3)$

وبأن:

$IA = |z_A - z_I| = |-2+i| = \sqrt{5}$

$IB = |z_B - z_I| = |-2-i| = \sqrt{5}$

$IC = |z_C - z_I| = |-1-2i| = \sqrt{5}$

فإن النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}(I,\sqrt{5})$

ج) لدينا: $IA = IC$

ولدينا:

$(\overline{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_I}{z_A - z_I}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{-1-2i}{-2+i}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \arg(i)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن المثلث IAC قائم الزاوية في I ومتساوي الساقين رأسه I

د) E صورة D بالإزاحة التي متجهتها $2\overrightarrow{IC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{IC}$

$\Leftrightarrow z_E = 2(z_C - z_I) = -2-4i$

هـ) D صورة E بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow z_D = z_E e^{i\frac{\pi}{2}}$

$= (-2-4i)i = 4-2i$

3) لدينا: $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \frac{(1-i)-(1+i)}{(4-2i)-(2-2i)}$

$= \frac{-2i}{2} = -i = [1, -\frac{\pi}{2}]$

إذن: $(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}}) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن $(AB) \perp (CD)$

تمرين رقم 46

$\theta \in [0, 2\pi]$

1) $(E):\ z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$

$\Delta = (2^{\theta+1}\cos\theta)^2 - 2^{2(\theta+1)}$

$= 2^{2(\theta+1)}\cos^2\theta - 2^{2(\theta+1)}$

$= 2^{2(\theta+1)}(\cos^2\theta - 1)$

$= 2^{2(\theta+1)}(-\sin^2\theta)$

$= (i\,2^{\theta+1}\sin\theta)^2$

* إذا كان: $\theta = 0$ فإن $\Delta = 0$

$(E) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow z = -1 = [1, \pi]$

$S = \{-1\}$

* إذا كان: $\theta = \pi$ فإن $\Delta = 0$

$(E) \Leftrightarrow z^2 + 2^{\pi+1}z + 2^{2\pi} = 0$

$z = -2^{\pi} = [2^{\pi}, \pi]$

$S = \{-2^{\pi}\}$

* إذا كان $\theta \neq 0$ و $\theta \neq \pi$ فإن $\Delta < 0$

إذن للمعادلة (E) حلين عقديين مترافقين هما:

$z_1 = 2^{\theta}\cos\theta - i\,2^{\theta}\sin\theta$

$= 2^{\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$

$= 2^{\theta}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$= [2^{\theta}, -\theta]$

$z_2 = 2^{\theta}\cos\theta + i\,2^{\theta}\sin\theta$

$= 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta) = [2^{\theta}, \theta]$

2) $\theta \neq 0$ و $\theta \neq \pi$

نعتبر $z_A = z_1$ و $z_B = z_2$

لدينا: $|z_B| = |z_A| = 2^{\theta}$

إذن: $OA = OB$

ولدينا: $(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \arg(z_B) - \arg(z_A)\ [2\pi]$

$\equiv 2\theta\ [2\pi]$

ولكي يكون المثلث OAB متساوي الأضلاع يجب أن يكون

$2\theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

تمرين رقم 47

$z \in \mathbb{C},\quad P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1) أ) z_0 حل للمعادلة: $P(z) = 0$

$\Leftrightarrow P(z_0) = 0$

لدينا: $P(\bar{z}_0) = (\bar{z}_0)^3 - 3(\bar{z}_0)^2 + 3\bar{z}_0 + 7$

$= \overline{z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7} = \overline{P(z_0)} = \bar{0} = 0$

إذن: (z_0 حل للمعادلة: $P(z) = 0$) $\Leftrightarrow$ ($\bar{z}_0$ حل للمعادلة: $P(z) = 0$)

ب) $P(2+i\sqrt{3}) = (2+i\sqrt{3})^3 - 3(2+i\sqrt{3})^2 + 3(2+i\sqrt{3}) + 7$

$= 8 + 12i\sqrt{3} - 18 - i3\sqrt{3} - 3 - 12i\sqrt{3} + 6 + 3i\sqrt{3} + 7$

$= 0$

إذن: $z_0 = 2+i\sqrt{3}$ حل للمعادلة: $P(z) = 0$

ومن نتيجة السؤال السابق نستنتج أن:

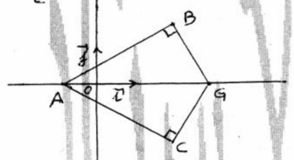
$\bar{z}_0 = 2 - i\sqrt{3}$ حل للمعادلة: $P(z) = 0$

$\forall z \in \mathbb{C}\ ;\ P(z) = (z+a)(z-(2+i\sqrt{3}))(z-(2-i\sqrt{3}))$
$= (z+a)(z^2-4z+7)$
$= z^3+(a-4)z^2+(7-4a)z+7a$
$= z^3-3z^2+3z+7$

إذن $a = 1$

د) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z+1)(z-(2+i\sqrt{3}))(z-(2-i\sqrt{3}))=0$
$\Leftrightarrow z=-1$ أو $z=2+i\sqrt{3}$ أو $z=2-i\sqrt{3}$
$S=\{-1,\ 2+i\sqrt{3}\ ;\ 2-i\sqrt{3}\}$

2) أ)



ب) لدينا:
$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$
$BC=|z_C-z_B|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$
$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

إذن المثلث ABC متساوي الأضلاع

ج) لدينا:
$\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,i = [\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}]$

إذن: $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

إذن المثلث GAC قائم الزاوية في C

تمرين رقم 48

$P(z) = z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$

1) $P(1) = 1-1+2\sin\alpha+1-2\sin\alpha-1=0$

2) $\forall z\in\mathbb{C}\ ;\ P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$
$= z^3+az^2+bz-z^2-az-b$
$= z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$
$= z^3-(1-2\sin\alpha)z^2+(1-2\sin\alpha)z-1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2\sin\alpha \\ b=1 \end{cases}$

3) $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+(2\sin\alpha)z+1)=0$
$\Leftrightarrow z-1=0$ أو $z^2+(2\sin\alpha)z+1=0$
$z^2+(2\sin\alpha)z+1=0$
$\Delta = -4\cos^2\alpha = (2i\cos\alpha)^2$

إذن حلول هذه المعادلة هي:
$z_0 = 1$
$z_1 = -\sin\alpha+i\cos\alpha$
$z_2 = -\sin\alpha-i\cos\alpha$

4) $z_0 = 1 = [1, 0]$
$z_1 = -\sin\alpha+i\cos\alpha$
$= \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = [1, \frac{\pi}{2}+\alpha]$
$z_2 = -\sin\alpha-i\cos\alpha$
$= \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)-i\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$
$= \cos(-(\frac{\pi}{2}+\alpha))+i\sin(-(\frac{\pi}{2}+\alpha)) = [1, -(\frac{\pi}{2}+\alpha)]$

تمرين رقم 49

$(E) : z^4-16z^3+90z^2-16z+89=0$

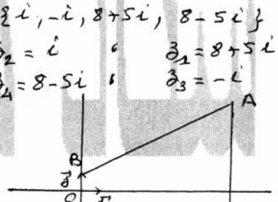
1) أ) $(z^2+1)(z^2-16z+89) = z^4-16z^3+89z^2+z^2-16z+89$
$= z^4-16z^3+90z^2-16z+89$

ب) $(E) \Leftrightarrow (z^2+1)(z^2-16z+89)=0$
$\Leftrightarrow z^2+1=0$ أو $z^2-16z+89=0$
$z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1$
$\Leftrightarrow z=i$ أو $z=-i$
$z^2-16z+89=0$
$\Delta = -100 = (10i)^2$
$z=8+5i$ أو $z=8-5i$

إذن: $S=\{i, -i, 8+5i, 8-5i\}$

نضع $z_1 = 8+5i$ ، $z_2 = i$
$z_3 = -i$ ، $z_4 = 8-5i$

2) أ)



ب) بما أن لحق D هو مرافق لحق A فإنهما متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي
ولحق C هو مرافق لحق B فإنهما متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

فإن للرباعي ABCD محور تماثل هو محور الأفاصيل

ج) $AC=|z_C-z_A|=|-8-6i|=10$
$BD=|z_D-z_B|=|8-6i|=10$
$AD=|z_D-z_A|=|-10i|=10$

تمرين رقم 50

$(E) : 2z^3+14z^2+41z+68=0$

1) $2z_1^3+14z_1^2+41z_1+68 = -128+224-164+68$
$=0$

2) $(z+4)(2z^2+az+b) = 2z^3+az^2+bz+8z^2+4az+4b$
$= 2z^3+(a+8)z^2+(b+4a)z+4b$
$= 2z^3+14z^2+41z+68$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=17 \end{cases}$

3) $(E) \Leftrightarrow (z+4)(2z^2+6z+17)=0$
$\Leftrightarrow z+4=0$ أو $2z^2+6z+17=0$
$2z^2+6z+17=0$
$\Delta = -100 = (10i)^2$

إذن حلول المعادلة (E) هي:
$z_1 = -4$
$z_2 = -\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$
$z_3 = -\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

تمرين رقم 51

$(E) : z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$

1) $(2)^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$

اذن 2 حل للمعادلة (E)

2) $(z-2)(az^2+bz+c) =$

$= az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c$

$= az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$

$= z^3 - 4z^2 + 6z - 4$

اذن $c = 2$ و $b = -2$ و $a = 1$

3) $(E) \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 2z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 = 0$ أو $z^2 - 2z + 2 = 0$

$z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = -4 = (2i)^2$

اذن حلول المعادلة (E) هي :

$z_1 = 2$ و $z_2 = 1+i$ و $z_3 = 1-i$

4) أ)

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1-i-2}{1+i-2} = \frac{-1-i}{-1+i}$$

$$= \frac{(1+i)^2}{2} = i = [1, \frac{\pi}{2}]$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

(4 $C(z_3)$ ، $B(z_2)$ ، $A(z_1)$

أ)
$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i + 4}{-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + 4} = \frac{5+5i}{5-5i}$$

$$= \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i = [1, \frac{\pi}{2}]$$

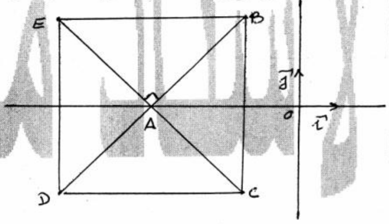
لدينا :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overline{AC}, \overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في A ومتساوي الساقين رأسه A

ب)



بما أن BCDE مربع مركزه A

فإن

$z_A = \frac{1}{2}(z_E + z_C) \Leftrightarrow z_E = -\frac{13}{2} + \frac{5}{2}i$

$z_A = \frac{1}{2}(z_B + z_D) \Leftrightarrow z_D = -\frac{13}{2} - \frac{5}{2}i$

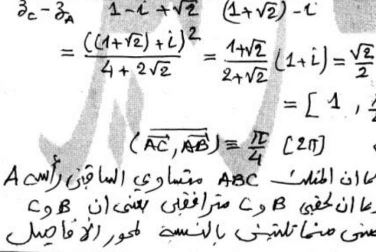
د) $z_0 = -\sqrt{2} = [\sqrt{2}, \pi] = \sqrt{2}\, e^{i\pi}$

$z_1 = 1+i = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 1-i = [\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) نعتبر $A(-\sqrt{2})$ ، $B(1+i)$ ، $C(1-i)$

أ)



ب) لدينا :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1+i+\sqrt{2}}{1-i+\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})+i}{(1+\sqrt{2})-i}$$

$$= \frac{((1+\sqrt{2})+i)^2}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$= [1, \frac{\pi}{4}]$$

اذن $(\overline{AC}, \overline{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

3) أ) بما أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

وبما أن لحقي B و C مترافقين يعني أن B و C

نقطتين متماثلتين بالنسبة لمحور الأفاصيل

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A وقائم الزاوية في A

ب) المثلث ABC محاط بالدائرة C التي مركزها I

منتصف [BC] وشعاعها $\frac{BC}{2}$ حيث :

$z_I = \frac{1}{2}(z_B + z_C) = 1$

$\frac{BC}{2} = \frac{1}{2}|z_C - z_B| = \frac{1}{2}|2i| = 1$

تمرين رقم 52

$P(z) = z^3 + (-2+\sqrt{2})z^2 + 2(1-\sqrt{2})z + 2\sqrt{2}$

1) أ) $\forall z \in \mathbb{C} \;;\; P(z) = (z+\sqrt{2})(z^2 + az + b)$

$= z^3 + (a+\sqrt{2})z^2 + (b + a\sqrt{2})z + b\sqrt{2}$

$= z^3 + (-2+\sqrt{2})z^2 + 2(1-\sqrt{2})z + 2\sqrt{2}$

اذن : $\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

ب) $(E) : P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow z + \sqrt{2} = 0$ أو $z^2 - 2z + 2 = 0$

$z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = -4 = (2i)^2$

حلول المعادلة (E) هي :

$z_0 = -\sqrt{2}$ و $z_1 = 1+i$ و $z_2 = 1-i$

$S = \{-\sqrt{2}, 1+i, 1-i\}$

وان $[AD)$ منصف الزاوية $(\widehat{\vec{AC},\vec{AB}})$

اذن : $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} \quad [2\pi]$

ب) لدينا :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A} = \frac{-\sqrt{2}-1-i}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

ولدينا :

$$\begin{cases} \left|\frac{z_A - z_B}{z_A}\right| = \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A}\right) \equiv (\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}) \quad [2\pi] \\ \qquad \equiv \frac{\pi}{8} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_A} = \sqrt{2+\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8}\right)$$

اذن :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

و

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

تمرين رقم 53

$$(E) : z^3 + (\sqrt{3}-i)z^2 + (1-i\sqrt{3})z - i = 0$$

1) أ) $z_0 = \alpha i$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة (E)

$$\Leftrightarrow -\alpha^3 i - (\sqrt{3}-i)\alpha^2 + (1-i\sqrt{3})\alpha i - i = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\alpha(1-\alpha) + (-1+\alpha+\alpha^2-\alpha^3)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1-\alpha) = 0 \\ -1+\alpha+\alpha^2-\alpha^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1$$

اذن $z_0 = i$

ب) $\forall z \in \mathbb{C} ; (z-i)(z^2+az+b) = z^3 + (a-i)z^2 + (b-ai)z - ib$

$$= z^3 + (\sqrt{3}-i)z^2 + (1-i\sqrt{3})z - i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

ج) $(E) \Leftrightarrow (z-i)(z^2+\sqrt{3}z+1) = 0$

$$\Leftrightarrow z - i = 0 \text{ أو } z^2+\sqrt{3}z+1 = 0$$

$$z^2+\sqrt{3}z+1 = 0$$

$$\Delta = -1 = i^2$$

اذن حلول المعادلة (E) هي :

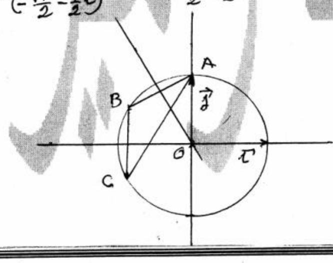
$$z_0 = i \ , \ z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \ , \ z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

د) $z_0 = i = [1, \frac{\pi}{2}]$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = [1, \frac{5\pi}{6}]$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i = [1, -\frac{5\pi}{6}]$$

2) $A(i)$ ، $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$ ، $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)$



ب)

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

$$= \frac{-2i}{\sqrt{3}+i} = \frac{-2i(\sqrt{3}-i)}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = [1, \frac{-2\pi}{3}]$$

ج) بما أن : $\left|\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1$ فإن $BC = BA$

اذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A .

3) $(1) : |z - i| = |z - (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)|$

أ) نعتبر $M(z)$ نقطة من المستوى $\mathcal{P}$.

لدينا : $|z-i| = |z - (-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)| \Leftrightarrow AM = BM$

اذن مجموعة النقط (E) هي واسط القطعة $[AB]$

ب) نضع $z = x + yi$

$$(1) \Leftrightarrow |x + yi - i| = |x + yi + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i|$$

$$\Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |(x+\frac{\sqrt{3}}{2}) + (y-\frac{1}{2})i|$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (E) : y = -\sqrt{3}x$$

تمرين رقم 54

$$\forall z \in \mathbb{C} ; P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

1) أ) $P(i\sqrt{3}) = 9 - i18\sqrt{3} - 72 + i18\sqrt{3}i + 63 = 0$

$$P(-i\sqrt{3}) = 9 - i18\sqrt{3} - 72 + i18\sqrt{3} + 63 = 0$$

ب) $\forall z \in \mathbb{C}; \ P(z) = (z^2+3)(z^2+az+b)$

$$= z^4 + az^3 + bz^2 + 3z^2 + 3az + 3b$$

$$= z^4 + az^3 + (b+3)z^2 + 3az + 3b$$

$$= z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

اذن $a = -6$ و $b = 21$

2) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2+3)(z^2-6z+21) = 0$

$$\Leftrightarrow z^2+3 = 0 \text{ أو } z^2-6z+21 = 0$$

$$z^2 - 6z + 21 = 0$$

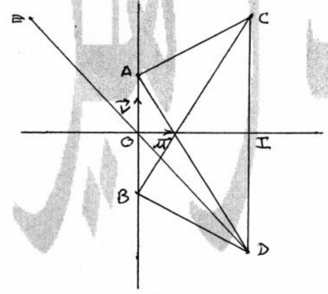
$$\Delta = -48 = (4\sqrt{3}\,i)^2$$

حلول المعادلة : $P(z) = 0$ هي :

$$z_1 = i\sqrt{3} \ , \ z_2 = -i\sqrt{3} \ , \ z_3 = 3+2\sqrt{3}i$$

$$z_4 = 3 - 2\sqrt{3}i$$

3) أ)



ب) لدينا :
$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} + i\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = i\sqrt{3} = [\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}]$$
$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

اذن المثلث BCD قائم الزاوية في B

اذن النقط B و C و D تنتمي الى الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها I منتصف $[C,D]$ وشعاعها IC حيث
$$z_I = \frac{1}{2}(z_C - z_D) = 3$$
$$IC = |z_C - z_I| = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

وبما أن : $IA = |z_A - z_I| = |-3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

فان النقط A و B و C و D تنتمي الى الدائرة $\mathcal{C}(I, 2\sqrt{3})$

4) E مماثلة D بالنسبة للنقطة O أصل المعلم

يعني ان O منتصف $[D,E]$

اذن : $z_E = -z_D = -3 + 2i\sqrt{3}$
$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \frac{-(1 + i\sqrt{3})^2}{-4}$$
$$= \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = [1, -\frac{\pi}{3}] = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$
$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = [1, -\frac{\pi}{3}] \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} BE = BC \\ (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$$

اذن المثلث BEC متساوي الأضلاع

تمرين رقم 55

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{5\pi}{6}$

اذن (α_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{5\pi}{6}$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}n$

2)
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} M_n(z_n) \in \mathcal{C}(O,1) \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_n}) \equiv \alpha_n\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_n| = 1 \\ \arg(z_n) \equiv \alpha_n\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z_n = [1, \alpha_n] = e^{i\alpha_n} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6})}$$

3)
$$\forall n \in \mathbb{N};\ z_n + z_{n+6} = e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6})} + e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+6)\pi}{6})}$$
$$= e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6})} + e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{6})} \cdot e^{i5\pi}$$
$$= 0$$
$$\left(e^{i5\pi} = e^{i\pi} = -1 \quad : \text{لأن}\right)$$

اذن $\forall n \in \mathbb{N},\ \overrightarrow{OM_n} + \overrightarrow{OM_{n+6}} = \vec{0}$

تمرين رقم 56

1) الطريقة I :
$$\forall \theta \in \mathbb{R};\ 1 - e^{i\theta} = (1 - \cos\theta) - i\sin\theta$$
$$= (1 - \cos 2(\tfrac{\theta}{2}) - i\sin 2(\tfrac{\theta}{2}))$$
$$= (1 - \cos^2\tfrac{\theta}{2} + \sin^2\tfrac{\theta}{2}) - i\,2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}$$
$$= (-2i\sin\tfrac{\theta}{2})(\cos\tfrac{\theta}{2} + i\sin\tfrac{\theta}{2})$$
$$= (-2i\sin\tfrac{\theta}{2})\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

الطريقة II :
$$\forall x \in \mathbb{R};\ 1 - e^{i\theta} = e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2})} - e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2})}$$
$$= e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})$$
$$= -2i\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$= -2i(\sin\tfrac{\theta}{2})\,e^{i\frac{\theta}{2}}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 1 + e^{ix} + \dots + e^{inx}$

S_n هو مجموع $n+1$ حد متتابع من متتالية هندسية أساسها e^{ix}

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \dfrac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}$

ولدينا حسب السؤال ①
$$1 - e^{ix} = (-2i\sin\tfrac{x}{2})e^{i\frac{x}{2}}$$
$$1 - e^{i(n+1)x} = (-2i\sin\tfrac{(n+1)x}{2})e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$$

إذن :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \frac{(-2i\sin(\frac{(n+1)x}{2}))\,e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{(-2i\sin\frac{x}{2})\,e^{i\frac{x}{2}}}$$
$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,e^{i\frac{nx}{2}}$$

4)
$$S_{n+1} = 1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + \dots + e^{i(\frac{n-1}{n})\pi}$$
$$= 1 + (\cos\tfrac{\pi}{n} + i\sin\tfrac{\pi}{n}) + \dots + (\cos(\tfrac{n-1}{n})\pi + i\sin(\tfrac{n-1}{n})\pi)$$
$$= (1 + \cos\tfrac{\pi}{n} + \dots + \cos(\tfrac{n-1}{n})\pi) +$$
$$+ (\sin\tfrac{\pi}{n} + \dots + \sin(\tfrac{n-1}{n})\pi)\,i$$
$$= A_n + i\,B_n$$

ولدينا حسب السؤال ③ بتعويض x بـ $\frac{\pi}{n}$
$$S_n = \frac{\sin(\frac{n}{2} \cdot \frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})}\,e^{i\frac{n\pi}{2n}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\,e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})}\,i$$

اذن :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \begin{cases} A_n = 0 \\ B_n = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})} \end{cases}$$

8 المعادلات التفاضلية

1
حل المعادلات التفاضلية:
1) $y'=0$. 2) $y'-3y=0$. 3) $y+2y'=0$.

2
حل المعادلات التفاضلية:
1) $y'=2$. 2) $y'=3y+5$. 3) $\frac{3}{4}y+\frac{2}{3}y'=1$.
4) حل المعادلة التفاضلية: $y''-5y'=0$ (يمكنك وضع $Y=y'$)

3
نعتبر دالة عددية f قابلة للاشتقاق على IR، وليكن (C) منحناها.
حدد f إذا علمت أنها تحقق: $(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x)=2f(x)$
و النقطة $A(-2;3)$ تنتمي إلى (C)

4
حدد الحل f للمعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط $f(x_0)=y_0$
في كل حالة من الحالات الآتية:
1) $2y'+3y-2=0$ و $x_0=1$ و $y_0=2$.
2) $y'+y+1=0$ و $x_0=0$ و $y_0=-5$.
3) $(\ln 2)y'+(\ln 3)y+\ln 4=0$ و $x_0=e$ و $y_0=e$.

5
حل المعادلات التفاضلية التالية:
1) $y''-3y=0$. 2) $y''+3y=0$. 3) $y''+3y'=0$. 4) $3y''+y=0$.
5) $(\omega \in \mathbb{R}^*);\ y''+\omega^2 y=0$.
6) $(\omega \in \mathbb{R}^*);\ y''-\omega^2 y=0$.

6
حل المعادلات التفاضلية الآتية:
1) $y''+3y'-4y=0$. 2) $y''+4y'+4y=0$.
3) $y''+y'+y=0$. 4) $y''-4y'+2y=0$.

7
حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية: $4y''+25y=0$
والتي تحقق الشرطين البدئيين: $f(0)=3$ و $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

8
1) حل المعادلة التفاضلية: $y''-6y'+8y=0$.
2) حدد الحل الذي يحقق $y(0)=1$ و $y'(0)=3$.

9
1) حل المعادلة التفاضلية $(E): y''-4y'+5y=0$
2) حدد حل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطين البدئيين: $y(0)=0$ و $y'(0)=1$.

10
1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-4y=0$.
2) حدد حل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0)=1$ و $y'(0)=2$.

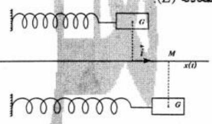
12
ليكن θ عدداً حقيقيا.
1) حل المعادلة التفاضلية: $y''+y'+(\cos^2\theta)y=0$
2) حل المعادلة التفاضلية: $y''+(2\cos\theta)y'+y=0$

13
لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على IR ولیكن (C) منحناها.
حدد الدالة العددية f التي تحقق ما يلي:
- $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x)+3f'(x)=2$.
- (C) يقبل في النقطة التي أفصولها -1 مماساً معامله الموجه $\frac{1}{3}$.

14
ليكن n عدداً صحيحا طبيعيا غير منعدم.
نعتبر المعادلة التفاضلية: $(E): y''-n^2y=0$
1) حل المعادلة التفاضلية (E).
2) حدد f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق $f(0)=1$ و $f'(0)=0$

15
لتكن $q(t)$ كمية تكاثر الجراثيم في اللحظة t. إذا علمت أن سرعة تكاثر الجراثيم متناسبةمع $q(t)$، و عدد الجراثيم في اللحظة $t=0$ هو 10^3، فحدد كمية الجراثيم بعد مضي 7 ساعات.

16
يتكون متذبذب ميكانيكي من نابض صلابته k وطوله الأصلي ℓ_0 ، ومن حامل ذاتي كتلته m، حركة الحامل مستقيمية أفقية.
نُعلّم موضع مركز قصوره بالأفصول x على المحور $(x'x)$ الذي ينطبق أصله O مع موضع توازن الحامل.
نزيح الحامل عن موضع توازنه ونحرره بدون سرعة بدئية.
1) بَيِّنْ أن المعادلة التفاضلية لحركة مركز قصور الحامل هي:
$$(E):\ \frac{d^2x}{dx^2}+\frac{k}{m}x=0$$
2) حل المعادلة (E).



17
لتكن (E) مجموعة الدوال f القابلة للاشتقاق على IR. والتي لا تنعدم في IR وتحقق المتساوية: $f'(x)+2f(x)=(f(x))^2$ ، لكل x من IR.
1) لتكن f دالة من المجموعة E.
بَيِّنْ أن الدالة العددية g المعرفة على IR بما يلي: $(\forall x \in IR);\ g(x)=\frac{1}{f(x)}$. قابلة للاشتقاق على IR

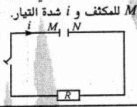
و أن g حل لمعادلة تفاضلية من نوع $y'=ay+b$
2) استنتج أن (E) هي مجموعة الدوال التي تكتب على الشكل: $x \mapsto \frac{2}{2ke^{2x}+1}$ حيث k عدد حقيقي و $(k \geq 0)$

18
1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y''-2y'+5y=0$
2) أ– حدد الحل f للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق $f(0)=1$ و $f'(0)=1$
ب– استنتج دالة أصلية للدالة f.

19
نعتبر المعادلتين التفاضليتين:
$(1):\ y''-2y'+3y=0$ و $(2):\ z''+2z=0$
نضع لكل x من IR : $y=ze^x$
1) بَيِّنْ أن y حل للمعادلة التفاضلية (1). إذا وفقط إذا كان z حلا للمعادلة (2)
2) حدد حلول المعادلة (1).
3) حدد f حل المعادلة (1) الذي يحقق $f(0)=1$ و $f'(0)=-2$

20
لتكن y دالة نمو نبتة، نفترض أن:
- y دالة قابلة للاشتقاق وأن مشتقتها في كل لحظة t متناسبة مع طول النبتة.
- معامل التناسب هو عدد حقيقي k حيث $0<k<1$
1) بَيِّنْ أن $(E):\ \frac{dy}{dt}=ky$.
2) استنتج حل المعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرط التالي: طول النبتة هو $2mm$ في اللحظة $t=0$.

21 تفريغ مكثف في موصل أومي
M وN لبوسا مكثف سعته C غير مشحون بدئيا.
نشحن المكثف تحت توتر مستمر $U_{MN}=U_0$ ثم نغلق الدارة لتفريغ المكثف في الموصل الأومي.
لتكن q_0 شحنة المكثف في اللحظة $t_0=0$ و i_0 شدة التيار في الدارة عند هذه اللحظة ولتكن q شحنة اللبوس M للمكثف و i شدة التيار.
1) بَيِّنْ أن: $\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=0$.
2) استنتج أن: $q=q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$.



22
ليكن $c(t)$ تركيز دواء (ب mg/l) في الدم بدلالة الزمن t ($t \geq 0$ معبر عنه بالساعات)، في لحظة معينة، سرعة تخلص الجسم من الدواء متناسبة مع كمية الدواء المتبقية في الدم.
ثابتة التخلص تساوي $0{,}25$ والتركيز البدئي هو: $5mg/l$
1) حدد $c(t)$ بدلالة t، ثم ادرس تغيرات الدالة c ثم مثل منحناها .
2) لتكن t_0 اللحظة التي يبتدئ فيها تركيز الدم بحيث يقل عن: $2mg/l$
أعط تأطيرا للحظة t_0 سعته $0{,}1$.

تمرين رقم 1

1) $y' = 0$

اذن: $y = k \ / \ k \in \mathbb{R}$

2) $y' - 3y = 0$

اذن: $y = k e^{3x} \ / \ k \in \mathbb{R}$

3) $y + 2y' = 0$

اذن: $y = k e^{-\frac{1}{2}x} \ / \ k \in \mathbb{R}$

تمرين رقم 2

1) $y' = 2$

اذن: $y = 2x + k \ / \ k \in \mathbb{R}$

2) $y' = 3y + 5$

اذن: $y = k e^{3x} - \frac{5}{3} \ / \ k \in \mathbb{R}$

3) $\frac{3}{4}y + \frac{2}{3}y' = 1$

$\Leftrightarrow y' = -\frac{9}{8}y + \frac{3}{2}$

اذن: $y = k e^{-\frac{9}{8}x} + \frac{4}{3} \ / \ k \in \mathbb{R}$

4) $y'' - 5y' = 0$

بوضع $Y = y'$ المعادلة تكافئ $Y' - 5Y = 0$

اذن $Y = k e^{5x} \ / \ k \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y' = k e^{5x} \ / \ k \in \mathbb{R}$

اذن: $y = \frac{k}{5} e^{5x} + h \ / \ (k,h) \in \mathbb{R}^2$

تمرين رقم 3

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(x)$

اذن: $\forall x \in \mathbb{R}; \ f(x) = k e^{2x} \ / \ k \in \mathbb{R}$

$A(-2,3) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$\Leftrightarrow k e^{-4} = 3 \Leftrightarrow k = 3e^4$

اذن: $\forall x \in \mathbb{R}; \ f(x) = 3e^{2x+4}$

تمرين رقم 4

1) $2y' + 3y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y + 1$

اذن: $y = k e^{-\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}$

$f(1) = 2 \Leftrightarrow k e^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} = 2$

$\Leftrightarrow k e^{-3/2} = \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow k = \frac{4}{3} e^{3/2}$

اذن: $f(x) = \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}(1-x)} + \frac{2}{3}$

2) $y' + y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow y' = -y - 1$

اذن: $y = k e^{-x} - 1$

$f(0) = -5 \Leftrightarrow k - 1 = -5 \Leftrightarrow k = -4$

اذن: $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = -4e^{-x} - 1$

3) $(\ln 2)y' + (\ln 3)y + \ln 4 = 0$

$y' = -\frac{\ln 3}{\ln 2}y - 2$

$y = k e^{-\frac{\ln 3}{\ln 2}x} - \frac{2\ln 2}{\ln 3}$

$f(e) = e \Leftrightarrow k e^{-\frac{\ln 3}{\ln 2}e} - \frac{2\ln 2}{\ln 3} = e$

$\Leftrightarrow k e^{-\frac{\ln 3}{\ln 2}e} = e + \frac{2\ln 2}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow k = \left(e + \frac{2\ln 2}{\ln 3}\right) e^{\frac{\ln 3}{\ln 2}e}$

اذن: $\forall x \in \mathbb{R}; \ f(x) = \left(e + \frac{2\ln 2}{\ln 3}\right) e^{\frac{\ln 3}{\ln 2}(e-x)} - \frac{2\ln 2}{\ln 3}$

تمرين رقم 5

1) $y'' - 3y = 0$

المعادلة المميزة: $r^2 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow r_1 = \sqrt{3} \ , \ r_2 = -\sqrt{3}$

اذن: $y = \lambda e^{\sqrt{3}x} + \mu e^{-\sqrt{3}x} \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

2) $y'' + 3y = 0$

المعادلة المميزة: $r^2 + 3 = 0$

$\Leftrightarrow r_1 = \sqrt{3}i \ , \ r_2 = -\sqrt{3}i$

اذن: $y = \lambda \cos(\sqrt{3}x) + \mu \sin(\sqrt{3}x) \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

3) $y'' + 3y' = 0$

المعادلة المميزة: $r^2 + 3r = 0$

$\Leftrightarrow r_1 = 0 \ , \ r_2 = -3$

اذن: $y = \lambda + \mu e^{-3x} \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

4) $3y'' + y = 0$

المعادلة المميزة: $3r^2 + r = 0$

$\Leftrightarrow r_1 = 0 \ , \ r_2 = -\frac{1}{3}$

اذن: $y = \lambda + \mu e^{-\frac{1}{3}x} \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

5) $y'' + w^2 y = 0$

المعادلة المميزة: $r^2 + w^2 = 0$

$\Leftrightarrow r_1 = wi \ , \ r_2 = -wi$

اذن: $y = \lambda \cos(wx) + \mu \sin(wx) \ / \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

تمرين رقم 6

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$

المعادلة المميزة: $r^2 + 3r - 4 = 0$

$\Delta = 25$; $r_1 = -4$, $r_2 = 1$

إذن : $y = \lambda e^{-4x} + \mu e^{x}$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 + 4r + 4 = 0$

$\Delta = 0$; $r = -2$

إذن : $y = (\lambda x + \mu)e^{-2x}$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

3) $y'' + y' + y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = -3$; $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, $r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

إذن : $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

4) $y'' - 4y' + 2y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 - 4r + 2 = 0$

$\Delta = 8$, $r_1 = 1 + \sqrt{2}$, $r_2 = 1 - \sqrt{2}$

إذن : $y = \lambda e^{(1-\sqrt{2})x} + \mu e^{(1+\sqrt{2})x}$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

تمرين رقم 7

$4y'' + 25y = 0$

المعادلة المميزة : $4r^2 + 25 = 0$

$r_1 = \frac{5}{2} i$, $r_2 = -\frac{5}{2} i$

إذن : $y = \lambda \cos\left(\frac{5}{2}x\right) + \mu \sin\left(\frac{5}{2}x\right)$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$f(0) = 3 \Leftrightarrow \lambda = 3$

$y' = -\frac{5}{2}\lambda \sin\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{5}{2}\mu \cos\left(\frac{5}{2}x\right)$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\lambda \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \frac{5}{2}\mu \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{4}\lambda - \frac{5\sqrt{2}}{4}\mu = 0$

$\Leftrightarrow \lambda - \mu = 0$

إذن $\lambda = \mu = 3$

إذن $f(x) = 3\cos\left(\frac{5}{2}x\right) + 3\sin\left(\frac{5}{2}x\right)$

تمرين رقم 8

$y'' - 6y' + 8y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 - 6r + 8 = 0$

$\Delta = 4$; $r_1 = 2$, $r_2 = 4$

إذن : $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{4x}$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda + \mu = 1$

$y' = 2\lambda e^{2x} + 4\mu e^{4x}$

$y'(0) = 3 \Leftrightarrow 2\lambda + 4\mu = 3$

$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 2\lambda + 4\mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = \frac{1}{2}$

إذن $y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}$

تمرين رقم 9

$(E) : y'' - 4y' + 5y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 - 4r + 5 = 0$

$\Delta = -4$, $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$

إذن : $y = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$y(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

$y' = -2\lambda \sin(2x) + 2\mu \cos(2x)$

$y'(0) = 1 \Leftrightarrow 2\mu = 1 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2}\sin(2x)$

تمرين رقم 10

$(E) : y'' - 4y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 - 4 = 0$

$r_1 = 2$, $r_2 = -2$

إذن : $y = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$y(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda + \mu = 1$

$y' = 2\lambda e^{2x} - 2\mu e^{-2x}$

$y'(0) = 2 \Leftrightarrow 2\lambda - 2\mu = 2 \Leftrightarrow \lambda - \mu = 1$

$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$

إذن : $y = e^{2x}$

تمرين رقم 12

1) $y'' + y' + (\cos^2\theta)y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 + r + \cos^2\theta = 0$

$\Delta = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

$r_1 = \frac{-1 + |\sin\theta|}{2}$, $r_2 = \frac{-1 - |\sin\theta|}{2}$

إذن : $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

2) $y'' + (2\cos\theta)y' + y = 0$

المعادلة المميزة : $r^2 + (2\cos\theta)r + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1) = -4\sin^2\theta$

$r_1 = -\cos\theta + i\sin\theta$; $r_2 = -\cos\theta - i\sin\theta$

إذن

$y = e^{(-\cos\theta)x}\left(\lambda \cos((\sin\theta)x) + \mu \sin((\sin\theta)x)\right)$ / $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

تمرين رقم 13

$\forall x \in \mathbb{R}$; $3f'(x) + f(x) = 2$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = -\frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k e^{-\frac{1}{3}x} + 1$ / $k \in \mathbb{R}$

C تقبل في النقطة التي أفصولها (-1) مماسا معامله الموجه $\frac{1}{3}$

يعني أن $f'(-1) = \frac{1}{3}$

ولدينا : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{k}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

$f'(-1) = -\frac{k}{3}e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = -e^{-\frac{1}{3}}$

إذن $\forall x\in\mathbb{R};\ f(x) = -e^{-\frac{1}{3}(x+1)}+1$

تمرين رقم 14

$(E): y''-n^2y=0$

1) المعادلة المميزة $r^2-n^2=0$

$r_1=n$, $r_2=-n$

إذن $y=\lambda e^{nx}+\mu e^{-nx}$ / $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

2) $f(0)=1 \Leftrightarrow \lambda+\mu=1$

ولدينا $f'(x)=n\lambda e^{nx}-\mu n e^{-nx}$

$f'(0)=0 \Leftrightarrow n\lambda-n\mu=0 \Leftrightarrow \lambda-\mu=0$

$\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\frac{1}{2}\\ \mu=\frac{1}{2}\end{cases}$

إذن $f(x)=\frac{1}{2}e^{nx}+\frac{1}{2}e^{-nx}$

تمرين رقم 15

لدينا $\frac{dq}{dt}(t)=k\,q(t)$

حيث k هو معامل التناسب

إذن $q(t)=h\,e^{kt}$ / $h\in\mathbb{R}$

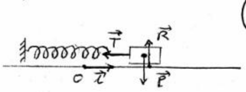
$q(0)=10^3 \Leftrightarrow h=10^3$

ومنه $q(t)=10^3e^{kt}$

إذن : $q(7)=10^3e^{7k}$

تمرين رقم 16

1)



لدينا حسب

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{T}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

نسقط على المحور $(O,\vec{i})$ نحصل على:

$0+0-T=m\frac{d^2x}{dt^2}$

وبما أن $T=kx$

فإن $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$

إذن $(E): \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$

2) المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي

$r^2+\frac{k}{m}=0$

إذن $r_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$, $r_2=-\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$

إذن $x=\lambda\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x\right)+\mu\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}x\right)$

حيث $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

تمرين رقم 17

1) $(E)=\{f/\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\neq0$ و $f'(x)+2f(x)=(f(x))^2\}$

لدينا g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأن f دالة قابلة

للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ولدينا $\forall x\in\mathbb{R};\ g(x)\neq0$

و $f(x)=\frac{1}{g(x)}$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)+2f(x)=(f(x))^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}+\frac{2}{g(x)}=\frac{1}{(g(x))^2}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ -g'(x)+2g(x)=1$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=2g(x)-1$

إذن g حل للمعادلة التفاضلية : $y'=2y-1$

2) $y'=2y-1$

إذن $g(x)=ke^{2x}+\frac{1}{2}$ / $k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{2ke^{2x}+1}{2}$ / $k\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{2ke^{2x}+1}$ / $k\in\mathbb{R}$

تمرين رقم 18

$y''-2y'+5y=0$

1) المعادلة المميزة هي : $r^2-2r+5=0$

$\Delta=-16$, $r_1=1-2i$, $r_2=1+2i$

إذن : $y=e^x(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x))$

حيث $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

2) أ) $f(0)=1 \Leftrightarrow \lambda=1$

ولدينا $y'=e^x(\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x))+$

$+e^x(-2\lambda\sin(2x)+2\mu\cos(2x))$

$=e^x((\lambda+2\mu)\cos(2x)+(-2\lambda+\mu)\sin(2x))$

$f'(0)=1 \Leftrightarrow \lambda+2\mu=1$

$\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda+2\mu=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1\\ \mu=0\end{cases}$

إذن : $f(x)=e^x\cos(2x)$

ب) لدينا $f''-2f'+5f=0$

$\Leftrightarrow f=\frac{2}{5}f'-\frac{1}{5}f''=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}f'\right)'$

إذن : $F(x)=\frac{2}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)$

$=\frac{2}{5}e^x\cos2x-\frac{1}{5}(e^x\cos2x-e^x\sin2x)$

$=\frac{1}{5}e^x\cos2x+\frac{2}{5}e^x\sin2x$

F دالة أصلية للدالة f

تمرين رقم 19

① $y''-2y'+3y=0$

② $z''+2z=0$

1) y حل للمعادلة ① $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y''-2y'+3y=0$

$\Leftrightarrow (ze^x)''-2(ze^x)'+3(ze^x)=0$

$\Leftrightarrow z''e^{x} + 2ze^{x} = 0$

$\Leftrightarrow e^{x}(z''+2z) = 0 \Leftrightarrow z''+2z = 0$

إذن: حل للمعادلة (2)

ب) المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (1):

$z^2 - 2z + 3 = 0$

$\Delta = -8 \; ; \; z_1 = 1-\sqrt{2}\,i \; , \; z_2 = 1+\sqrt{2}\,i$

إذن $y = e^{x}(\lambda\cos(\sqrt{2}x) + \mu\sin(\sqrt{2}x)) \;/\; (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

3) $f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$

$f'(x) = e^{x}(\lambda\cos(\sqrt{2}x) + \mu\sin(\sqrt{2}x)) + e^{x}(-\lambda\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}\mu\cos(\sqrt{2}x))$

$= e^{x}((\lambda+\sqrt{2}\mu)\cos(\sqrt{2}x) + (\mu-\sqrt{2}\lambda)\sin(\sqrt{2}x))$

$f'(0) = -2 \Leftrightarrow \lambda + \sqrt{2}\mu = -2$

$\begin{cases}\lambda = 1\\ \lambda+\sqrt{2}\mu = -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 1\\ \mu = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

إذن $f(x) = e^{x}\left(\cos(\sqrt{2}x) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}x)\right)$

تمرين رقم 20

1) مشتقة y في كل لحظة t متناسبة مع y طول النبتة

إذن: $y' = ky \;/\; 0<k<1$

إذن $(E): \frac{dy}{dt} = ky$

2) حل المعادلة التفاضلية (E):

$y = h\,e^{kt} \;/\; h\in\mathbb{R}$

$y(0) = 2 \Leftrightarrow h = 2$

إذن $y = 2e^{kt} \;/\; 0<k<1$

تمرين رقم 21

1) لدينا $u_R + u_C = 0$

إذن: $u_R = -u_C$

ولدينا من جهة أخرى $u_C = \frac{q}{C}$

و $u_R = Ri = R\cdot\frac{dq}{dt}$

حيث $\left(i = \frac{dq}{dt}\right)$

إذن: $R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$

$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}\cdot q$

إذن: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$

2) لدينا: $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0$

إذن: $q = k\,e^{-\frac{1}{RC}t} \;/\; k\in\mathbb{R}$

بما أن q_0 هي شحنة المكثف في اللحظة $t_0 = 0$

فإن: $q(0) = q_0$

إذن $k = q_0$

إذن $q = q_0\,e^{-\frac{1}{RC}t}$

تمرين رقم 22

$\frac{dC}{dt}(t) = a\,C(t)$

حيث $a = 0,25$

إذن: $\frac{dC}{dt}(t) = 0,25\,C(t)$

إذن: $C(t) = k\,e^{0,25t} \;/\; k\in\mathbb{R}$

وبما أن التركيز البدئي هو $5mg/l$

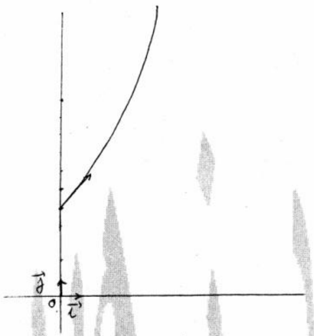
يعني: $C(0) = 5$

فإن: $k = 5$

إذن: $C(t) = 5e^{0,25t}$

لدينا: $\forall t\geq 0 \; ; \; C'(t) = 1,25\,e^{0,25t}$

t	0	$+\infty$
$C'(t)$	$1,25$ +	
$C(t)$	5 ↗	$+\infty$



2) $2 = 5e^{0,25t_0}$

$\Leftrightarrow e^{0,25t_0} = \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 0,25t_0 = \ln\frac{2}{5} \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{0,25}\ln\frac{2}{5}$

9 الحساب التكاملي

بالنسبة للتمارين من (1) إلى (7)، احسب التكاملات.

1

$I = \int_0^1 (2x-1)\,dx \quad ; \quad J = \int_0^1 (3x-4)^2\,dx$

$K = \int_1^{-2} (4x^3-5x)\,dx \quad ; \quad L = \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-\sqrt{2}x)\,dx$

2

$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx \quad ; \quad J = \int_1^2 \frac{3x^2+x-1}{x^4}\,dx$

$K = \int_{-2}^{-1} \frac{-2x+3}{x^5}\,dx \quad ; \quad L = \int_2^3 \frac{(x-1)(2x+1)}{x^4}\,dx$

3

$I = \int_1^4 \left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)dx \quad ; \quad J = \int_1^4 \frac{2x+1}{3\sqrt{x}}\,dx$

$K = \int_1^4 \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}}\,dx \quad ; \quad L = \int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-2x)}{x^2}\,dx$

4

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx \quad ; \quad J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$

$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{-\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx \quad ; \quad L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)dx$

5

$I = \int_1^e \frac{2}{x}\,dx \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{3}{2x+1}\,dx$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx \quad ; \quad L = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

6

$I = \int_0^1 2e^{-x}\,dx \quad ; \quad J = \int_0^{\ln 2} e^{\frac{x}{2}}\,dx$

$K = \int_0^1 (e^{2x}-e^x)\,dx \quad ; \quad L = \int_0^1 e^{-x}(e^{3x}+1)\,dx$

7

$I = \int_0^1 (2x-3\sqrt[3]{x})\,dx \quad ; \quad J = \int_1^{16} \frac{5x-1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

$K = \int_1^8 \frac{x+1}{2\sqrt[3]{x}}\,dx \quad ; \quad L = \int_1^4 \frac{2x\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}}\,dx$

8

لتكن f دالة متصلة على IR نفترض أن:

$\int_6^{3} f(x)\,dx = -2$ و $\int_1^{3} f(x)\,dx = 5$ و $\int_6^{10} f(x)\,dx = 7$

احسب $\int_1^{10} f(x)\,dx$

9

احسب التكاملات الآتية:

$I = \int_1^3 |x-2|\,dx \; ; \; J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin 2x|\,dx$

$K = \int_{-1}^3 |3x^2-6x|\,dx \; ; \; L = \int_{-1}^1 |e^x-1|\,dx$

10

لتكن f و g دالتين متصلتين على المجال $[-2;5]$ بحيث:

$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 6$ و $\int_{-2}^{5} g(x)\,dx = -4$

احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-2}^{5} (3f)(x)\,dx$ 2) $\int_{-2}^{5} (f+g)(x)\,dx$

3) $\int_{-2}^{5} \left(\frac{2}{3}f-7g\right)(x)\,dx$ 4) $\int_{5}^{-2} (-f+4g)(x)\,dx$

11

نضع: $I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2+x^3}\,dx$ و $J = \int_0^1 \frac{x^5}{2+x^3}\,dx$

1) حدد قيمة التكامل $I+J$ و احسب التكامل I.

2) استنتج قيمة J.

12

نعتبر التكاملين: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

1) احسب $I+J$ و $I-J$.

2) استنتج قيمة كل من I و J.

13

حدد القيمة المتوسطة للدالة f على القطعة I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $I=\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$; $f(x)=\cos 3x$ 2) $I=[2;4]$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $I=[-\ln 2;0]$; $f(x)=e^{-x}$ 4) $I=[-1;e-2]$; $f(x)=\frac{1}{x+2}$

14

لتكن M نقطة مادية متحركة سرعتها اللحظية v معرفة بالعلاقة:

$v(t)=\frac{1}{4}t^2+t+1$ (حيث $t\in[0;+\infty[$)

حدد السرعة المتوسطة للنقطة M بين اللحظتين 0 و 5.

15

1) احسب التكامل $\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}\,dx$.

2) حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\frac{\ln^2(x)+x}{x}$ على المجال $[1;e]$.

16

لتكن f دالة متصلة على قطعة J و v_m قيمتها المتوسطة على J.

احسب التكامل I في كل حالة من الحالات التالية:

1) $v_m=-\frac{1}{2}$; $I=\int_1^4 f(x)\,dx$; $J=[1;4]$.

2) $v_m=-\ln 3$; $I=\int_5^2 f(x)\,dx$; $J=[2;5]$.

3) $v_m=6\pi$; $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$; $J=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3}\right]$.

17

حدد إشارة كل تكامل من التكاملات التالية (دون حساب هذا التكامل):

$I = \int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx \; ; \; J = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \ln(x)\,dx$

$K = \int_2^0 e^{t^2}\,dt \; ; \; L = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \sin^9\theta\,d\theta$

18

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على المجال $[-1;4]$ بحيث:

$-1 \le f(x) \le 3$ و $-2 \le g(x) \le 1$

1) أطر: $f+g$ و $2f-3g$.

2) استنتج تأطيرا لكل من التكاملين: $\int_{-1}^4 (f(x)+g(x))\,dx$ و $\int_{-1}^4 (2f(x)-3g(x))\,dx$.

19

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي: $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1) بيّن أن: $\frac{1}{2x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \le \frac{1}{x^2}$; $(\forall x\in[1;+\infty[)$

2) استنتج تأطيرا للتكامل: $I=\int_1^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

20

قارن التكاملين I و J في كل حالة من الحالات التالية (دون حساب I و J)

1) $I=\int_0^1 xe^{-x}\,dx$; $J=\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,dx$

2) $I=\int_{\frac{1}{2}}^1 x\ln x\,dx$; $J=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2\ln x\,dx$

3) $I=\int_{-1}^0 x^2\cos x\,dx$; $J=\int_{-1}^0 (2x-1)\cos x\,dx$

21

1) تحقق من أن: $\tan x=\int_0^x (1+\tan^2 t)\,dt$; $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$

2) أ- بيّن أن: $1 \le 1+\tan^2 t \le 2$; $\left(\forall t\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$

ب- استنتج أن: $x \le \tan x \le 2x$; $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)$

22

بيّن أن:

1) $1 \le \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \le 2$

2) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \le \ln 2$

3) $2e^{-4} \le \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}\,dx \le 2$

4) $2\ln 3 \le \int_2^4 \ln(x^2-1)\,dx \le 2\ln 3+2\ln 5$

23

احسب التكاملات الآتية:

$I = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx \quad ; \quad J = \int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4}\,dx$

$K = \int_1^0 \frac{x^2-1}{(x^3-3x+5)^3}\,dx$

24

1) تحقق من أن: $\frac{x^3}{1+x^2}=x-\frac{x}{1+x^2}$; $(\forall x\in IR)$.

2) استنتج قيمة $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$.

25

1) حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$\frac{1}{1-x^2}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}$; $(\forall x\in\,]0;1[)$.

2) استنتج قيمة: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

26

1) أ- حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$\frac{2x-1}{x+2}=a+\frac{b}{x+2}$; $(\forall x\in IR-\{-2\})$.

ب- استنتج قيمة $\int_0^1 \frac{2x-1}{x+2}\,dx$.

2) احسب بنفس الطريقة التكاملات التالية:

أ- $\int_{-1}^0 \frac{3x+2}{x-1}\,dx$ ب- $\int_0^1 \frac{-x+3}{x-2}\,dx$ ج- $\int_0^1 \frac{x-3}{2x+1}\,dx$

27

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c و d بحيث لكل x من $IR-\{1\}$:

$\frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}=ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1}$.

2) احسب: $\int_2^{e+1} \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}\,dx$.

28

1) تحقق من أن:

$\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$; $(\forall x\in IR-\{-2;2\})$

ثم احسب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$.

2) تحقق من أن:

$\frac{3x}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}$; $(\forall x\in IR-\{1;-2\})$

ثم احسب التكامل: $\int_2^3 \frac{2x}{(x-1)(x+2)}\,dx$

29

احسب التكاملات:

$I = \int_0^{\pi} \cos(x)\cos(2x)\,dx \; ; \; J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 2x\cos(x)\,dx$

$K = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\sin^2 x\,dx \; ; \; L = \int_0^{\pi} \sin x\cos^3 x\,dx$

30

1) تحقق من أن:

$\cos^3 x=\cos x(1-\sin^2 x)$ و $\sin^3 x=\sin x(1-\cos^2 x)$

2) استنتج قيمة التكاملين: $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$; $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$

31

1) بيّن أن: $\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

ثم احسب التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\,dx$.

2) بيّن أن $\cos^4 x-\sin^4 x=\cos(2x)$ واحسب التكامل $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\,dx$.

32

1) تحقق من أن: $\tan^3 x+\tan x=\tan^2 x\tan x$ لكل x من المجال $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

2) احسب التكاملات:

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^3 x+\tan x)\,dx \quad , \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

$K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\,dx$

33

1) تحقق من أن $\frac{1}{\cos^4 x}=(1+\tan^2 x)^2$.

2) احسب التكاملات الآتية:

$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx \quad J = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx \quad K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

34

احسب التكاملات الآتية:

$R = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}\,dx$

$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3} \quad E = \int_0^{\pi} \sin 2x\,e^{1+\sin^2 x}\,dx$

35

نضع $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin t}\,dt \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\sin t}\,dt$

1) احسب $A+B$ و $A-B$

2) استنتج قيمة كل من A و B.

36

احسب التكاملات الآتية:

$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx \quad J = \int_1^6 \sqrt{x+3}\,dx$

$K = \int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(لاحظ أن: $\frac{x}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$)

37

احسب التكاملات الآتية:

$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \quad J = \int_0^1 \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2-x+1}}\,dx$

$K = \int_1^8 \left(\frac{4}{x\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

38

احسب التكاملات الآتية :

$I=\int_{2}^{3}(x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx \quad J=\int_{\sqrt{6}}^{5}x\sqrt[3]{2+x^2}\,dx$

$K=\int_{0}^{1}(2x-1)(x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}dx$

39

احسب التكاملات الآتية :

$I=\int_{1}^{e}\frac{\ln^2 x}{3x}dx \quad J=\int_{1}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x(3+2\ln x)^3}$

$K=\int_{\frac{1}{e}}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}$

40

احسب التكاملات الآتية :

$J=\int_{1}^{e-1}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} \quad I=\int_{1}^{e}\frac{x-1}{x(\ln x-x)^2}dx$

$K=\int_{e}^{\sqrt{e}}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$

41

احسب التكاملات الآتية :

$I=\int_{0}^{1}(e^{4x}-3e^{2x}-1)\,dx \quad J=\int_{0}^{\ln 2}\left(\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x}\right)dx$

$K=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{(e^x-1)^2}{e^x}dx$

42

احسب التكاملات الآتية :

$R=\int_{-\ln 2}^{\ln\sqrt{2}}\frac{e^x}{(2e^x+1)^2}dx \quad I=\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}}dx$

$M=\int_{0}^{1}(e^x+1)(e^x+x-1)^3dx$

$E=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\ln(e^x+1)\,dx$

في التمارين من (43) إلى (48) احسب التكاملات المقترحة باستعمال مكاملة بالأجزاء:

43

$I=\int_{0}^{\pi}(x-1)\sin x\,dx \quad J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\cos(2x)\,dx$

$K=\int_{0}^{\pi}2x\cos^2(x)\,dx \quad L=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$

44

$A=\int_{1}^{2}\ln(2+x)\,dx \quad B=\int_{1}^{e}(2x-1)\ln x\,dx$

$C=\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx \quad D=\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

45

$I=\int_{-\ln 2}^{0}(x+1)e^{-x}dx \quad J=\int_{0}^{-1}xe^{2x+1}dx$

$K=\int_{0}^{\ln 2}(x^2+1)e^{2x}dx$

46

$I=\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx\ ;\ J=\int_{1}^{e^2}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx\ ;\ K=\int_{0}^{1}t\sqrt{1+t}\,dt$

47

نضع $I=\int_{0}^{\pi}e^x\cos^2 x\,dx$ و $J=\int_{0}^{\pi}e^x\sin^2 x\,dx$.

1) احسب $I+J$ و $I-J$.

2) استنتج قيمة كل من I و J.

48

$I=\int_{0}^{9}x\log(x+1)\,dx \quad J=\int_{1}^{2}x2^x\,dx$

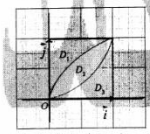
$K=\int_{0}^{1}(2x+1)3^x\,dx$

المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$.

49

في الشكل التالي تم إنشاء منحنيي الدالتين $x\mapsto\sqrt{x}$ و $x\mapsto x^2$ على المجال $[0;1]$.

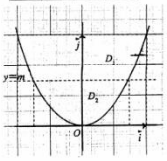
احسب مساحة D_1 و D_2 و D_3.



50

الشكل التالي يمثل منحنى الدالة $x\mapsto x^2$ ومستقيما معادلته $y=m$ حيث عدد حقيقي موجب.

حدد قيمة m التي من أجلها تكون للحيزين D_1 و D_2 نفس المساحة.



51

احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة : $f:x\mapsto\frac{-x+1}{x+1}$.

ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=2$.

52

ليكن R عددا حقيقيا موجبا قطعا.

ليكن (C) منحنى الدالة $x\mapsto\sqrt{R^2-x^2}$.

1) حدد مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث $-R\le x\le R$ و $0\le y\le\sqrt{R^2-x^2}$.

2) استنتج قيمة $\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx$.

في التمرينين 53 و 54، الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ بحيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

احسب حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f على القطعة I حول محور الأفاصيل.

53

1) $I=[0;1]\ ;\ f(x)=\sqrt{e^{x-1}}$

2) $I=[1;e]\ ;\ f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

54

1) $I=[0;\sqrt[3]{2}]\ ;\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$.

2) $I=\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]\ ;\ f(x)=\sqrt{\sin x}.\cos x$.

55

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي: $f(x)=x-2$

1) أنشئ التمثيل المبياني للدالة f

2) احسب حجم المجسم المولد بدوران منحنى f على القطعة $[2;5]$.

ما اسم هذا المجسم الدوراني؟

56

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي: $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ حيث r عدد حقيقي موجب قطعا.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) ادرس زوجية الدالة f

3) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في r وأوّل مبيانيا هذه النتيجة.

4) ادرس تغيرات الدالة f على $[0;r]$.

5) أنشئ منحنى f على $[0;r]$ ثم على $[-r;0]$.

6) احسب حجم المجسم المولد بدوران منحنى f حول محور الأفاصيل. ما اسم هذا المجسم الدوراني؟

58

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بمايلي: $f(x)=(1-x)e^x$

1) بيّن أن: $(\forall x\in IR)\ ;\ f''(x)+f(x)=2f'(x)$.

2) استنتج قيمة التكامل $\int_{0}^{1}f(x)\,dx$.

59

نضع $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x)}{1+2\sin x}dx$ و $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

1) احسب التكامل J.

2) احسب $I+J$ ثم استنتج قيمة I.

60

ليكن x من المجال $]1;+\infty[$.

1) حدد a و b و c من IR بحيث $\frac{1}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$

2) استنتج دالة أصلية للدالة: $f:x\mapsto\frac{1}{x(x^2-1)}$ على المجال $]1;+\infty[$.

3) احسب التكاملات الآتية :

$I=\int_{2}^{3}\frac{1}{x(x^2-1)}dx \quad , \quad J=\int_{2}^{3}\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$

$K=\int_{2}^{3}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$

61

نضع $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}\quad ;\quad I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي: $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1) بيّن أن: $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\right)\ ;\ f'(x)=\frac{3}{\cos^4 x}-\frac{2}{\cos^2 x}$.

2) احسب I و J.

62

ليكن x من المجال $]0;+\infty[$

نضع $F(x)=\int_{1}^{x}\cos(\ln t)\,dt \quad G(x)=\int_{1}^{x}\sin(\ln t)\,dt$

1) باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أن:

$F(x)=x\cos(\ln x)-1+G(x)$ و $G(x)=x\sin(\ln x)-F(x)$

2) استنتج تعبيري الدالتين F و G.

63

ليكن n من IN نضع :

$I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\sin x\,dx \quad J_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-nx}\cos x\,dx$

1) احسب I_0 و J_0

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بيّن أن: $I_n+nJ_n=1$ و $-nI_n+J_n=e^{-\frac{n\pi}{2}}$

3) استنتج I_n و J_n بدلالة n.

4) احسب $\lim_{n\to+\infty}J_n$ و $\lim_{n\to+\infty}I_n$.

64

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بمايلي :

$\begin{cases}u_0=\int_{1}^{e}x\,dx\\ u_n=\int_{1}^{e}x(\ln x)^n dx\ ;\ (n\in IN^*)\end{cases}$

1) ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_n$.

2) بيّن أن $(u_n)_n$ محدودة. ماذا تستنتج؟

3) بيّن أن: $\frac{e^2}{n+3}\le u_n\le\frac{e^2}{n+2}$ ثم حدد $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

65

ليكن n من IN. نضع: $I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

1) باستعمال مكاملة بالأجزاء، احسب I_0 .

2) بيّن أن (I_n) متتالية هندسية محددا أساسها.

3) نضع : $S_n=I_0+I_1+\ldots+I_n$.

احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$.

66

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$u_n=\int_{0}^{1}\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx$ حيث $n\in IN$.

1) احسب u_0.

2) بيّن أن: $(\forall n\in IN)\ ;\ u_n\ge 0$.

3) ادرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

4) أ- بيّن أن:

$(\forall n\in IN)\ ;\ (\forall x\in[0;1])\ ;\ 0\le\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\le x^{2n+1}$.

ب- استنتج نهاية المتتالية (u_n).

67

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال I ولتكن G دالة أصلية لها على المجال I. وليكن a عنصرا من I.

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بمايلي: $F(x)=\int_{a}^{x}f(t)\,dt$.

1) تحقق من أن $F(x)=G(x)-G(a)$.

2) استنتج أن F هي الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم في a.

3) تحقق من أن: $(\forall x\in IR^{*+})\ ;\ \ln x=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt$.

68

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR^+ بمايلي:

$f(x)=\int_{1}^{x}\frac{e^t}{1+t}dt$.

1) بيّن أن: $(\forall t\in IR^+)\ ;\ \frac{e^t}{1+t}\ge 1$ ثم استنتج أن: $f(2)\ge 1$.

2) بيّن أن f متصلة وقابلة للاشتقاق على IR^+ ثم احسب $f'(x)$.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α وأن $1<\alpha<2$.

4) بيّن أن: $(\forall x\in IR^+)\ ;\ f(x)\ge x-1$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

5) أعط جدول تغيرات الدالة f

69

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بمايلي: (لكل n من IN^*)

$u_n=\int_{0}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ و $u_0=\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1) أ- احسب الدالة المشتقة للدالة $u:x\mapsto\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ثم احسب u_0 و احسب u_1.

ب- بيّن أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية.

2) أ- بيّن أن: $\forall x\in[0;1]\ ;\ 1\le\sqrt{1+x^2}\le\sqrt{2}$.

ب- استنتج أن: $(\forall n\in IN^*)\ ;\ \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\le u_n\le\frac{1}{n+1}$.

ج- استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها.

3) نضع لكل n من IN و $n\ge 3$ $I_n=\int_{0}^{1}x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

أ- تحقق من أن: لكل n من IN حيث $n\ge 3$: $u_n+u_{n-2}=I_n$.

ب- بتطبيق تقنية المكاملة بالأجزاء على التكامل I_n بيّن أن لكل n من IN حيث $n\ge 3$

لدينا: $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$.

ج- استنتج أن لكل n من IN حيث $n\ge 3$: $(2n-1)u_n\le\sqrt{2}$.

د- استنتج: $\lim_{n\to+\infty}nu_n$.

70

لكل n من IN^* نضع $I_n=\int_{0}^{1}t^n\tan t\,dt$.

1) بيّن أن: $(\forall x\in[0;1])\ ;\ x^n\tan x\le x^n\tan(1)$.

2) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

3) باستعمال المكاملة بالأجزاء بيّن أن:
$(n+1)I_n = \tan 1 - \int_0^1 (1+\tan^2 x)x^{n+1}dx$.

4) احسب: $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (1+\tan^2 x)x^{n+1}dx$ ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

71

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بمايلي: $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) لكل n من IN حيث $n \geq 8$ نضع $u_n=f(8)+f(9)+...+f(n)$.

أ- بيّن أن لكل k من IN و $k \geq 8$:
$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dt \leq f(k)$ (يمكن استعمال رتابة f).

ب- استنتج أن: $(\forall n \geq 8)$; $u_{n+1}-f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq u_n$.

3) أ- باستعمال المكاملة بالأجزاء احسب $I_n=\int_8^{n+1} f(t)dt$.

ب- استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

72

نعرف العدد $n!$ حيث $n \in IN^*$ كالتالي: $n!=1\times2\times...\times n$ و $0!=1$ ($n!$ يقرأ عاملي n)

لكل n من IN^* نضع $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{n!}e^{-x}dx$.

1) احسب باستعمال المكاملة بالأجزاء I_1

2) بيّن أن: $(\forall n \in IN^*)$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3) لكل n من IN نضع: $g(x)=\frac{x^n}{n!}$
$f(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)$

أ- احسب $g'(x)$. ثم بيّن أن: $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

ب- استنتج أن: $I_n=f(0)-f(1)$.

4) أ- بيّن أن لكل n من IN:
$0 \leq e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right) \leq \frac{e}{n}$

ب- استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}\right)=e$

73

من بين المسائل التي تستأثر باهتمام علماء المحيطات تحديد شدة الضوء بدلالة عمق المحيط.

حسب قانون "*Beear Lambert*" شدة الضوء عند عمق x بالمتر، معرفة بالعلاقة $I(x)=I_0.a^x$ حيث I_0 و a ثابتتان موجبتان.

وحدة الشدة هي $Cal/cm^2/s$.

1) ما شدة الضوء عند السطح؟

2) احسب معدل تغير شدة الضوء في العمق x (هذا المعدل هو $(I'(x))$).

3) نفترض أن: $a=0,4$ و $I_0=10$.

احسب الشدة الضوئية المتوسطة بين السطح وعمق 5 أمتار.

74 القيمة المتوسطة والمسافة.

نرمز ب "$d(t)$" للمسافة التي قطعتها نقطة مادية متحركة على مستقيم عند لحظة t. سرعتها اللحظية $v(t)$ عند اللحظة t معرفة بالعلاقة: $v(t)=d'(t)$.

1) بيّن أن المسافة التي قطعتها النقطة المادية المتحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 (مع $t_1<t_2$) هي $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

2) احسب القيمة المتوسطة للدالة v على المجال $[t_1;t_2]$، ماذا تمثل هذه القيمة المتوسطة؟

3) تطبيق:

• احسب السرعة المتوسطة لنقطة متحركة على مسار مستقيمي بسرعة لحظية $v(t)=3.e^{-t}$ بين اللحظتين $t_0=0$ و $t_1=1$.

• إذا عبرنا عن الزمن بالثانية (s) وعن السرعة ب $m.s^{-1}$،
احسب بالمتر، المسافة التي قطعتها النقطة المتحركة بين اللحظتين t_0 و t_1.

• بيّن أن المسافة التي تقطعها النقطة المتحركة بين t_0 و T لا يمكن أن تتجاوز $3m$ لكل $T>t_0$.

75 القيمة المتوسطة والشدة الفعالة لتيار متناوب جيبي.

يعبر عن الشدة اللحظية $i(t)$ لتيار متناوب جيبي دوره T بالعلاقة:
$i(t)=I_m\sin(\omega t)$.

حيث I_m الشدة القصوية للتيار و $\omega=\frac{2\pi}{T}$. (ω يسمى النبض الخاص).

نسمي الشدة الفعالة I_e لهذا التيار، شدة تيار مستمر يسبب مروره في موصل أومي R خلال المدة T نفس مفعول جول، لدينا إذن:
$RI_e^2T=\int_0^T RI^2(t)dt$.

1) بيّن أن القيمة المتوسطة للدالة I^2 خلال دور هي I_e^2.

2) احسب $\int_0^T \sin^2(\omega t)dt$ ثم استنتج أن: $I_e=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

76 قيمة مقربة للتكامل $I=\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$

1) نعتبر الدالتين العدديتين u و v المعرفتين على IR بمايلي:

$u(x)=e^{-x}+x-1$; $v(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$.

أ- ادرس تغيرات كل من الدالتين u و v على المجال $[0;1]$.

ب- استنتج أن لكل x من المجال $[0;1]$ لدينا:
$1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$.

2) بيّن أن لكل x من المجال $[0;1]$ لدينا:
$1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$.

3) أ- بيّن أن لكل x من المجال $[0;1]$ لدينا:
$\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}$.

ب- استنتج أن: $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24}+\frac{\ln 2}{2}$.

ج- أعط قيمة مقربة للعدد I بالدقة 3.10^{-3}.

77 نهاية مساحة

I) لتكن u الدالة العددية المعرفة على IR بمايلي: $u(x)=e^x-(x+1)$.

1) ادرس تغيرات الدالة u.

2) استنتج أنه لكل x من IR^*: $u(x)>0$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بمايلي: $f(x)=e^{2x}-2xe^x-1$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى C الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) بيّن أنه لكل x من IR: $f'(x)=2u(x)e^x$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).

2) أعط جدول تغيرات الدالة f

3) ارسم المنحنى C. (دراسة تقعر C غير مطلوبة).

4) ليكن α عددا حقيقيا سالبا قطعا. احسب، بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ لحيز المستوى المحدود بالمنحنى C ومحور الأراتيب والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\alpha$ و $y=-1$ ثم حدد $\lim_{\alpha\to-\infty} A(\alpha)$.

تمرين رقم 1

$$I=\int_0^1 (2x-1)\,dx=\left[x^2-x\right]_0^1=0$$

$$J=\int_0^1 (3x-4)^2dx=\int_0^1 (9x^2-24x+16)\,dx$$
$$=\left[3x^3-12x^2+16x\right]_0^1=7$$

طريقة أخرى لحساب J:

$$J=\int_0^1 (3x-4)^2dx=\frac{1}{3}\int_0^1 (3x-4)^2(3)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(3x-4)^3\right]_0^1=\frac{1}{9}\left[(3x-4)^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{9}(-1+64)=7$$

$$K=\int_1^{-2}(4x^3-5x)\,dx=\left[x^4-\frac{5}{2}x^2\right]_1^{-2}$$
$$=6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$$

$$L=\int_1^{\sqrt{2}}(x^2-\sqrt{2}x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{3}$$

تمرين رقم 2

$$I=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-3\ln x\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{1}{2}-3\ln 2\right)-(-1)=\frac{1}{2}-3\ln 2$$

$$J=\int_1^2\frac{3x^2+x-1}{x^4}dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{3}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)-\left(-3-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{19}{12}$$

$$K=\int_{-2}^{-1}\frac{-2x+3}{x^5}dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{-2}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3x^3}-\frac{3}{4x^4}\right]_{-2}^{-1}=\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{2}{24}-\frac{3}{64}\right)=\frac{-147}{192}$$

$$L=\int_2^3\frac{(x-1)(2x+1)}{x^4}dx=\int_2^3\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)dx$$
$$=\left[\frac{-2}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}\right]_2^3$$
$$=\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{18}+\frac{1}{81}\right)-\left(-1+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)=\frac{19}{81}$$

تمرين رقم 3

$$I=\int_1^4\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-1\right)dx=\left[8\sqrt{x}-x\right]_1^4$$
$$=(16-4)-(8-1)=5$$

$$J=\int_1^4\frac{2x+1}{3\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(\frac{2\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{4}{9}\sqrt{x^3}+\frac{2\sqrt{x}}{3}\right]_1^4=\left(\frac{32}{9}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\right)=6$$

$$K=\int_1^4\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}}dx=\int_1^4\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}dx$$
$$=\int_1^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}\right)dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln x\right]_1^4$$
$$=(2-\ln 2)-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-\ln 2$$

$$L=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-2x}{x^2}\,dx=\int_1^4\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}-2\ln x\right]_1^4=(-1-4\ln 2)-(-2)$$
$$=1-4\ln 2$$

تمرين رقم 4

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}$$
$$J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1$$
$$K=\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx=\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{-\pi}=-\frac{3}{2}$$
$$L=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)dx=\left[-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{0}=\frac{-1-\sqrt{2}}{6}$$

تمرين رقم 5

$$I=\int_1^e\frac{2}{x}\,dx=\left[2\ln x\right]_1^e=2$$
$$J=\int_0^1\frac{3}{2x+1}\,dx=\frac{3}{2}\int_0^1\frac{2}{2x+1}\,dx$$
$$=\frac{3}{2}\left[\ln(2x+1)\right]_0^1=\frac{3}{2}\ln 3$$
$$K=\int_0^{\pi/3}\tan x\,dx=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$=-\int_0^{\pi/3}\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$=-\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/3}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$
$$L=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx=\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1=\ln\frac{e+1}{2}$$

تمرين رقم 6

$$I=\int_0^1 2e^{-x}dx=\left[-2e^{-x}\right]_0^1=2-\frac{2}{e}$$
$$J=\int_0^{\ln 2}e^{\frac{x}{2}}\,dx=\left[2e^{x/2}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=2e^{\frac{1}{2}\ln 2}-2=2\sqrt{2}-2$$
$$K=\int_0^1\left(e^{2x}-e^x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{1}{2}$$
$$L=\int_0^1 e^{-x}\left(e^{3x}+1\right)dx=\int_0^1\left(e^{2x}+e^{-x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^{-x}\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$$

تمرين رقم 7

$$I=\int_0^1\left(2x-3\sqrt[3]{x}\right)dx=\left[x^2-\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_0^1$$
$$=1-\frac{9}{4}=-\frac{5}{4}$$
$$J=\int_1^{16}\frac{5x-1}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\int_1^{16}\left(5\sqrt[4]{x^3}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{20}{7}\sqrt[4]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}\right]_1^{16}$$

$$=\left(\frac{20}{7}2^7-\frac{4}{3}2^3\right)-\left(\frac{20}{7}-\frac{4}{3}\right)=\frac{2424}{21}=\frac{808}{7}$$
$$K=\int_1^8\frac{x+1}{2\sqrt[3]{x}}\,dx=\int_1^8\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{3}{10}\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8$$
$$=\left(\frac{3}{10}2^5+\frac{3}{4}2^2\right)-\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{4}\right)=\frac{99}{10}-\frac{21}{20}=\frac{167}{20}$$
$$L=\int_1^4\frac{2x\sqrt{x}-1}{\sqrt[6]{x}}\,dx=\int_1^4\left(\frac{2\sqrt[6]{x^6}\cdot\sqrt[6]{x^3}}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)dx$$
$$=\int_1^4\left(2\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{6}{7}\sqrt[3]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\right]_1^4$$
$$=\left[\frac{6}{7}x^2\sqrt[3]{x}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}\right]_1^4$$
$$=\frac{96}{7}\sqrt[3]{2^2}-\frac{12}{5}\sqrt[6]{2^4}+\frac{12}{35}$$

تمرين رقم 8

$$\int_1^{10}f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx+\int_6^{10}f(x)\,dx$$
$$=\int_1^3 f(x)\,dx-\int_6^3 f(x)\,dx+\int_6^{10}f(x)\,dx$$
$$=5+2+7=14$$

تمرين رقم 9

نحسب $I=\int_1^3|x-2|\,dx$

لدينا :

x	1		2		3
$x-2$		$-$	0	$+$	

$$I=\int_1^2(2-x)\,dx+\int_2^3(x-2)\,dx$$
$$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

نحسب $J=\int_{\pi/4}^{3\pi/2}|\sin 2x|\,dx$

لدينا :

x	$\pi/4$		$\pi/2$		π		$3\pi/2$
$\sin 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$J=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}(\sin 2x)\,dx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\sin 2x)\,dx+\int_{\pi}^{3\pi/2}(\sin 2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi/2}^{\pi}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi}^{3\pi/2}$$
$$=\frac{5}{2}$$

نحسب $K=\int_{-1}^3|3x^2-6x|\,dx$

لدينا :

x	-1		0		2		3
$3x^2-6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$K=\int_{-1}^0(3x^2-6x)\,dx+\int_0^2-(3x^2-6x)\,dx+\int_2^3(3x^2-6x)\,dx$$
$$=\left[x^3-3x^2\right]_{-1}^0-\left[x^3-3x^2\right]_0^2+\left[x^3-3x^2\right]_2^3=12$$

نحسب : $L=\int_{-1}^{1}|e^x-1|\,dx$

x	-1		0		1
e^x-1		$-$	0	$+$	

$L=\int_{-1}^{0}(1-e^x)\,dx+\int_0^1(e^x-1)\,dx$

$=[x-e^x]_{-1}^{0}+[e^x-x]_0^1=\frac{1}{e}+e-2$

تمرين رقم 10

1) $\int_{-2}^{5}(3f)(x)\,dx=3\int_{-2}^{5}f(x)\,dx=18$

2) $\int_{-2}^{5}(f+g)(x)\,dx=\int_{-2}^{5}(f(x)+g(x))\,dx$

$=\int_{-2}^{5}f(x)\,dx+\int_{-2}^{5}g(x)\,dx=6-4=2$

3) $\int_{-2}^{5}(\frac{2}{3}f-7g)(x)\,dx=\frac{2}{3}\int_{-2}^{5}f(x)\,dx-7\int_{-2}^{5}g(x)\,dx$

$=4-28=-24$

4) $\int_{5}^{-2}(-f+4g)(x)\,dx=-\int_{-2}^{5}(-f+4g)(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{5}f(x)\,dx-4\int_{-2}^{5}g(x)\,dx=6+16=22$

تمرين رقم 11

$I=\int_0^1\frac{x^5}{2+x^3}\,dx$; $J=\int_0^1\frac{2x^2}{2+x^3}\,dx$

1) $I+J=\int_0^1\frac{2x^2+x^5}{2+x^3}\,dx$

$=\int_0^1\frac{(2+x^3)x^2}{2+x^3}\,dx=\int_0^1x^2\,dx$

$=[\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}$

$I=\int_0^1\frac{2x^2}{2+x^3}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{3x^2}{2+x^3}\,dx$

$=\frac{2}{3}[\ln(2+x^3)]_0^1=\frac{2}{3}(\ln3-\ln2)=\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$

2) $I+J=\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow J=\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$

تمرين رقم 12

$I=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$; $J=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

1) $I+J=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx=\int_0^{\pi/4}dx$

$=[x]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}$

2) $I-J=\int_0^{\pi/4}\frac{(-\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}\,dx$

$=[\ln(\cos x+\sin x)]_0^{\pi/4}=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln2$

$$\begin{cases}I+J=\frac{\pi}{4}\\ I-J=\frac{1}{2}\ln2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}I=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln2\\ J=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln2\end{cases}$$

تمرين رقم 13

1) $\mu=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos3x\,dx=\frac{6}{\pi}[\frac{1}{3}\sin3x]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{2}{\pi}(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\pi)=-\frac{2}{\pi}$

2) $\mu=\frac{1}{4-2}\int_2^4\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int_2^4\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$=[\sqrt{x}]_2^4=2-\sqrt{2}$

3) $\mu=\frac{1}{\ln2}\int_{-\ln2}^{0}e^{-x}\,dx=\frac{-1}{\ln2}\int_{-\ln2}^{0}-e^{-x}\,dx$

$=\frac{-1}{\ln2}[e^{-x}]_{-\ln2}^{0}=\frac{2}{\ln2}$

4) $\mu=\frac{1}{e-1}\int_{-1}^{e-2}\frac{1}{x+2}\,dx=\frac{1}{e-1}[\ln(x+2)]_{-1}^{e-2}$

$=\frac{\ln e}{e-1}=\frac{1}{e-1}$

تمرين رقم 14

$\mu=\frac{1}{5}\int_0^5(\frac{1}{4}t^2+t+1)\,dt=\frac{1}{5}[\frac{t^3}{12}+\frac{t^2}{2}+t]_0^5$

$=\frac{67}{12}$

تمرين رقم 15

1) $\int_1^e\frac{\ln^2(x)}{x}\,dx=[\frac{1}{3}\ln^3(x)]_1^e=\frac{1}{3}$

2) $\mu=\frac{1}{e-1}\int_1^e f(x)\,dx=\frac{1}{e-1}\int_1^e(\frac{\ln^2(x)}{x}+1)\,dx$

$=\frac{1}{e-1}(\int_1^e\frac{\ln^2(x)}{x}\,dx+\int_1^e dx)$

$=\frac{1}{e-1}(\frac{1}{3}+(e-1))=\frac{1}{3(e-1)}+1$

تمرين رقم 16

1) $-\frac{1}{2}=\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,dx\Leftrightarrow I=-\frac{3}{2}$

2) $-\ln3=\frac{1}{3}\int_2^5 f(x)\,dx\Leftrightarrow I=3\ln3$

3) $6\pi=\frac{1}{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}I=\frac{6}{5\pi}I\Leftrightarrow I=5\pi^2$

تمرين رقم 17

1) لدينا : $\forall x\in[0,1],\ x^2-1\le0$

$\Leftrightarrow\forall x\in[0,1],\ \frac{x^2-1}{x^2+1}\le0$

إذن $I\le0$

2) لدينا : $\forall x\in[\frac{1}{e},\frac{2}{e}]$; $\ln<0$

إذن $J<0$

3) لدينا : $\forall x\in[0,2]$; $e^{t^2}>0$

إذن : $K=-\int_0^2e^{t^2}\,dt<0$

4) لدينا :

$$\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right] ; \quad \sin\theta < 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right] ; \quad \sin^3\theta < 0$$

إذن

$$L < 0$$

تمرين رقم 18

* لدينا :

$$\forall x \in [-1,4] ; \quad -1 \leq f(x) \leq 3$$

$$\forall x \in [-1,4] , \quad -2 \leq g(x) \leq 1$$

إذن :

$$\forall x \in [-1,4] \quad -3 \leq f(x) + g(x) \leq 4$$

ومنه فإن

$$\int_{-1}^{4} (-3)\,dx \leq \int_{-1}^{4} (f(x)+g(x))\,dx \leq \int_{-1}^{4} (4)\,dx$$

$$\Leftrightarrow -3\,[x]_{-1}^{4} \leq \int_{-1}^{4} (f(x)+g(x))\,dx \leq 4\,[x]_{-1}^{4}$$

$$\Leftrightarrow -15 \leq \int_{-1}^{4} (f(x)+g(x))\,dx \leq 20$$

* لدينا :

$$\forall x \in [-1,4] ; \quad -2 \leq 2f(x) \leq 6$$

$$\forall x \in [-1,4] ; \quad -3 \leq -3g(x) \leq 6$$

إذن :

$$\forall x \in [-1,4] ; \quad -5 \leq 2f(x) - 3g(x) \leq 12$$

ومنه فإن :

$$\int_{-1}^{4} (-5)\,dx \leq \int_{-1}^{4} (2f(x) - 3g(x))\,dx \leq \int_{-1}^{4} (12)\,dx$$

$$\Leftrightarrow -25 \leq \int_{-1}^{4} (2f(x) - 3g(x))\,dx \leq 60$$

تمرين رقم 19

1) لدينا :

$$\forall x \in [1,+\infty[; \quad \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{x^2(1+x^2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [1,+\infty[; \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

ولدينا :

$$\forall x \in [1,+\infty[; \quad \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{2x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{(1+x)(1-x)}{2x^2(1+x^2)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [1,+\infty[; \quad \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

إذن :

$$\forall x \in [1,+\infty[; \quad \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

2) لدينا :

$$\forall x \in [1,+\infty[; \quad \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

إذن :

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{2x^2}\,dx \leq \int_{1}^{2} \frac{dx}{1+x^2} \leq \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{-1}{2x}\right]_{1}^{2} \leq \int_{1}^{2} \frac{dx}{1+x^2} \leq \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \int_{1}^{2} \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

تمرين رقم 20

1) لدينا :

$$\forall x \in [0,1] ; \quad \sqrt{x} \geq x$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] ; \quad \sqrt{x}\, e^{-x} \geq x\, e^{-x}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R} ; \quad e^{-x} > 0 \quad \text{لأن})$$

إذن :

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx \geq \int_{0}^{1} x e^{-x}\,dx$$

2) لدينا :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] ; \quad x^2 \leq x$$

و

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] , \quad \ln x \leq 0$$

إذن :

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2},1\right] ; \quad x^2 \ln x \geq x \ln x$$

ومنه :

$$\int_{1/2}^{1} x^2 \ln(x)\,dx \geq \int_{1/2}^{1} x \ln(x)\,dx$$

3) لدينا :

$$\forall x \in [-1,0] ; \quad (x-1)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [-1,0] ; \quad x^2 - 2x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [-1,0] ; \quad x^2 > 2x - 1$$

ولدينا :

$$\forall x \in [-1,0] ; \quad \cos x > 0$$

إذن :

$$\forall x \in [-1,0] , \quad x^2 \cos x > (2x-1) \cos x$$

ومنه فإن :

$$\int_{-1}^{0} x^2 \cos(x)\,dx > \int_{-1}^{0} (2x-1)\cos(x)\,dx$$

تمرين رقم 21

1)

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

لدينا الدالة المعرفة على $[0,x]$ بما يلي :

$$t \longmapsto 1 + \tan^2 t$$

دالة متصلة

إذن :

$$\int_{0}^{x} (1+\tan^2 t)\,dt = [\tan t]_{0}^{x} = \tan x$$

2) أ)

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] ; \quad 0 \leq \tan t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] ; \quad 0 \leq \tan^2 t \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] ; \quad 1 \leq 1 + \tan^2 t \leq 2$$

ب) لدينا

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] , \quad 1 \leq 1 + \tan^2 t \leq 2$$

إذن

$$\int_{0}^{x} dt \leq \int_{0}^{x} (1+\tan^2 t)\,dt \leq \int_{0}^{x} 2\,dt$$

$$\Leftrightarrow x \leq \tan x \leq 2x$$

تمرين رقم 22

1) لدينا :

$$\forall x \in [-1,1] ; \quad 0 \leq x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [-1,1] ; \quad 1 \leq 1 + x^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [-1,1] ; \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

إذن :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq \int_{-1}^{1} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,[x]_{-1}^{1} \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq [x]_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq 2$$

2)

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] ; \quad \sin\frac{\pi}{4} \leq \sin x \leq \sin\frac{\pi}{2}$$

(لأن الدالة : $x \longmapsto \sin x$ تزايدية على المجال $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

إذن :

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2x}\,dx \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\,[\ln x]_{\pi/4}^{\pi/2} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq [\ln x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\pi/2}{\pi/4} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \ln\frac{\pi/2}{\pi/4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \ln 2$$

3) لدينا: $\forall x\in[0,2]\ ;\ 0\leq x^2\leq 4$

وبما أن الدالة: $x\mapsto e^{-x}$ تناقصية على المجال $[0,2]$

فإن: $\forall x\in[0,2]\ ;\ e^{-4}\leq e^{-x^2}\leq e^{0}$

$\Leftrightarrow \forall x\in[0,2]\ ;\ e^{-4}\leq e^{-x^2}\leq 1$

إذن: $\int_0^2 e^{-4}dx \leq \int_0^2 e^{-x^2}dx \leq \int_0^2 dx$

$\Leftrightarrow 2e^{-4} \leq \int_0^2 \frac{1}{e^{x^2}}dx \leq 2$

4) لدينا: $\forall x\in[2,4]\ ;\ 4\leq x^2\leq 16$

$\Leftrightarrow \forall x\in[2,4]\ ;\ 3\leq x^2-1\leq 15$

وبما أن الدالة: $x\mapsto \ln x$ تزايدية على المجال $[2,4]$

فإن $\forall x\in[2,4]\ ;\ \ln 3\leq \ln(x^2-1)\leq \ln 15$

إذن: $\int_2^4(\ln 3)dx \leq \int_2^4 \ln(x^2-1)dx \leq \int_2^4(\ln 15)dx$

$\Leftrightarrow (\ln 3)[x]_2^4 \leq \int_2^4 \ln(x^2-1)dx \leq (\ln 15)[x]_2^4$

$\Leftrightarrow 2\ln 3 \leq \int_2^4 \ln(x^2-1)dx \leq 2(\ln 5+\ln 3)$

تمرين رقم 23

$I=\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{4}$

$J=\int_1^2 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^4}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^4}dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{3(x^2-2x+2)^3}\right]_1^2 = \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{48}$

$K=\int_1^0 \frac{x^2-1}{(x^3-3x+5)^3}dx = \frac{1}{3}\int_1^0 \frac{3x^2-3}{(x^3-3x+5)^3}dx$

$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2(x^3-3x+5)^2}\right]_1^0 = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{9}\right) = \frac{8}{675}$

تمرين رقم 24

1) $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x-\frac{x}{1+x^2} = \frac{x+x^3-x}{1+x^2} = \frac{x^3}{1+x^2}$

2) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

$= \int_0^1 x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2)$

تمرين رقم 25

1) $\forall x\in]0,1[\ ;\ \frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x} = \frac{(a-b)x+(a+b)}{1-x^2}$

$= \frac{1}{1-x^2}$

إذن: $\begin{cases}a-b=0\\a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$

2) $\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{1-x}dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{-1}{1-x}dx$

$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+x)\right]_0^{1/2} - \frac{1}{2}\left[\ln(1-x)\right]_0^{1/2}$

$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 3$

تمرين رقم 26

1) أ) $\forall x\in\mathbb{R}-\{-2\}\ ;\ a+\frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b}{x+2}$

$= \frac{ax+(2a+b)}{x+2} = \frac{2x-1}{x+2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\2a+b=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$

ب) $\int_0^1 \frac{2x-1}{x+2}dx = \int_0^1\left(2-\frac{3}{x+2}\right)dx$

$= \left[2x-3\ln(x+2)\right]_0^1 = 2-3\ln 3+3\ln 2$

2) أ) لدينا: $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}\ ;\ \frac{3x+2}{x-1} = \frac{3x-3+5}{x-1}$

$= 3+\frac{5}{x-1}$

$\int_{-1}^0 \frac{3x+2}{x-1}dx = \int_{-1}^0\left(3+\frac{5}{x-1}\right)dx$

$= \left[3x+5\ln|x-1|\right]_{-1}^0$

$= \left[3x+5\ln(1-x)\right]_{-1}^0 = 3-5\ln 2$

ب) لدينا:

$\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}\ ;\ \frac{-x+3}{x-2} = \frac{-x+2+1}{x-2}$

$= -1+\frac{1}{x-2}$

$\int_0^1 \frac{-x+3}{x-2}dx = \int_0^1\left(-1+\frac{1}{x-2}\right)dx$

$= \left[-x+\ln|x-2|\right]_0^1$

$= \left[-x+\ln(2-x)\right]_0^1 = -1-\ln 2$

ج) لدينا:

$\frac{x-3}{2x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{7}{2}}{2x+1}$

$= \frac{1}{2}-\frac{7/2}{2x+1}$

$\int_0^1 \frac{x-3}{2x+1}dx = \int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\,\frac{2}{2x+1}\right)dx$

$= \left[\frac{x}{2}-\frac{7}{4}\ln(2x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{7}{4}\ln 3$

تمرين رقم 27

1) $\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}\ ;\ ax^2+bx+c+\frac{d}{x-1} =$

$= \frac{ax^2(x-1)+bx(x-1)+c(x-1)+d}{x-1}$

$= \frac{ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x+(d-c)}{x-1}$

$$= \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b-a=-2 \\ c-b=2 \\ d-c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \\ d=-1 \end{cases}$$

2)
$$\int_2^{e+1} \frac{x^3-2x^2+2x-2}{x-1}\,dx = $$
$$= \int_2^{e+1}\left(x^2-x+1-\frac{1}{x-1}\right)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x-1)\right]_2^{e+1}$$
$$= \left(\frac{(e+1)^3}{3}-\frac{(e+1)^2}{2}+(e+1)-1\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}+2\right)$$
$$= \frac{e^3}{3}+\frac{e^2}{2}+e-\frac{17}{6}$$

تمرين رقم 28

1)
$$\forall x \in \mathbb{R}-\{-2,2\} ; \frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{x^2-4}$$
$$= \frac{4}{x^2-4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx$$
$$= \left[\ln|x-2|\right]_0^1 - \left[\ln(x+2)\right]_0^1$$
$$= \left[\ln(2-x)\right]_0^1 - \left[\ln(x+2)\right]_0^1$$

$$= -\ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = -\ln 3$$

2)
$$\forall x \in \mathbb{R}-\{1,-2\} ; \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2} = \frac{x+2+2(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$
$$= \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$$

$$\int_2^3 \frac{3x}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int_2^3\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}\right)dx$$
$$= \left[\ln(x-1)+2\ln(x+2)\right]_2^3$$
$$= \ln 2 + 2\ln 5 - 2\ln 4$$
$$= 2\ln 5 - 3\ln 2$$

تمرين رقم 29

$$I = \int_0^\pi \cos x \cdot \cos 2x\,dx = \int_0^\pi (\cos x)(1-2\sin^2 x)\,dx$$
$$= \int_0^\pi (\cos x)\,dx - 2\int_0^\pi (\sin^2 x)(\cos x)\,dx$$
$$= [\sin x]_0^\pi - \frac{2}{3}\left[\sin^3 x\right]_0^\pi = 0$$

$$J = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin 2x)(\cos x)\,dx = \int_{\pi/2}^0 2(\cos^2 x)(\sin x)\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} 3(\cos^2 x)(-\sin x)\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\left[\cos^3 x\right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

$$K = \int_0^{-\pi/2} (\cos x)(\sin^2 x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{-\pi/2} 3(\sin^2 x)(\cos x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sin^3 x\right]_0^{-\pi/2} = -\frac{1}{3}$$

تمرين رقم 30

1)
$$\cos^3 x = (\cos x)(\cos^2 x) = (\cos x)(1-\sin^2 x)$$
$$\sin^3 x = (\sin x)(\sin^2 x) = (\sin x)(1-\cos^2 x)$$

2)
$$I = \int_0^{\pi/2} (\sin^3 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - (\cos^2 x)(\sin x)\right)dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx + \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x)(-\sin x)\,dx$$
$$= [-\cos x]_0^{\pi/2} + \frac{1}{3}\left[\cos^3 x\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$J = \int_0^{\pi/2} (\cos^3 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(\cos x - (\sin^2 x)(\cos x)\right)dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} (\cos x)\,dx - \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x)(\cos x)\,dx$$
$$= [\sin x]_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\left[\sin^3 x\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

تمرين رقم 31

1) لدينا :
$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i6x}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\,\frac{e^{i6x}+e^{-i6x}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2} + \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos^4 x\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{3}{8}\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} 2(\cos 2x)\,dx + \frac{1}{32}\int_0^{\pi/4} 4(\cos 4x)\,dx$$
$$= \left[\frac{3}{8}x\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{32}\left[\sin 4x\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$$

2) لدينا :
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
و
$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$
إذن :
$$\cos 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$= \cos^4 x - \sin^4 x$$
إذن :
$$\sin^4 x = \cos^4 x - \cos 2x$$

$$\int_0^{\pi/4} (\sin^4 x)\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos^4 x - \cos 2x)\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} (\cos^4 x)\,dx - \int_0^{\pi/4} (\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2(\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$$

تمرين رقم 32

1)
$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right] ; \tan^3 x + \tan x =$$
$$= (\tan x)(1+\tan^2 x)$$
$$= (\tan x)(\tan x)'$$

2) $I=\int_0^{\pi/4}(\tan^3x+\tan x)dx=\left[\frac{1}{2}\tan^2x\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}$

$J=\int_0^{\pi/4}(\tan^2x)\,dx=\int_0^{\pi/4}\left((1+\tan^2x)-1\right)dx$

$=\int_0^{\pi/4}(1+\tan^2x)dx-\int_0^{\pi/4}dx$

$=\left[\tan x\right]_0^{\pi/4}-\left[x\right]_0^{\pi/4}=1-\frac{\pi}{4}$

$K=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\tan^2x}{\tan^3x}dx$

لاحظ أن: $\frac{1+\tan^2x}{\tan^3x}$ تكتب على شكل $\frac{f'(x)}{f^3(x)}$

حيث: $f(x)=\tan x$

إذن: $K=\left[\frac{-1}{2\tan^2x}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/3}=\frac{-1}{2(\sqrt{3})^2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{-1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

تمرين (رقم 33)

1) $\frac{1}{\cos^4x}=\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)^2=(1+\tan^2x)^2$

2) $I=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{\cos^4x}dx=\int_{\pi/4}^{\pi/3}(1+\tan^2x)^2dx$

$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}(1+\tan^2x)(1+\tan^2x)dx$

$=\int_{\pi/4}^{\pi/3}(1+\tan^2x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}(\tan^2x)(1+\tan^2x)dx$

$=\left[\tan x\right]_{\pi/4}^{\pi/3}+\left[\frac{1}{3}\tan^3x\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$

$=(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-\frac{1}{3})=-\frac{2}{3}$

$J=\int_{\pi/3}^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos^4x}dx=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{-\sin x}{\cos^4x}dx$

$=\left[\frac{-1}{3\cos^3x}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=-\frac{8}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}-8}{3}$

$K=\int_{\pi/4}^{\pi/6}\frac{\cos x}{\sin^3x}dx=\left[\frac{-1}{2\sin^2x}\right]_{\pi/4}^{\pi/6}=-1$

تمرين (رقم 34)

$I=\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{2\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}dx$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1+\cos 2x}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

$R=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x+\sin x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

$=-\left[\ln(\cos x+\sin x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\ln 2$

$E=\int_0^{\pi}(\sin 2x)e^{1+\sin^2x}dx=$

$=\int_0^{\pi}(2\sin x\cos x)e^{1+\sin^2x}dx$

$=\left[e^{1+\sin^2x}\right]_0^{\pi}=e-e=0$

$M=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}dx=-\int_0^{\pi/2}\frac{-\sin x}{(1+\cos x)^3}dx$

$=-\left[\frac{-1}{2(1+\cos x)^2}\right]_0^{\pi/2}=-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}$

تمرين (رقم 35)

$A=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1+\sin t}dt$ ، $B=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{1-\sin t}dt$

1) $A+B=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)dt$

$=\int_0^{\pi/4}\frac{2}{1-\sin^2t}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2t}dt$

$=2\left[\tan t\right]_0^{\pi/4}=2$

$A-B=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{1+\sin t}-\frac{1}{1-\sin t}\right)dt$

$=\int_0^{\pi/4}\frac{-2\sin t}{1-\sin^2t}dt=2\int_0^{\pi/4}\frac{-\sin t}{\cos^2t}dt$

$=2\left[\frac{-1}{\cos t}\right]_0^{\pi/4}=2(1-\sqrt{2})$

2) $\begin{cases}A+B=2\\A-B=2(1-\sqrt{2})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=2-\sqrt{2}\\B=\sqrt{2}\end{cases}$

تمرين (رقم 36)

$I=\int_0^4\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_0^4\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}dx$

$=\left[\sqrt{2x+1}\right]_0^4=3-1=2$

$J=\int_1^6\sqrt{x+3}\,dx=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+3)^3}\right]_1^6=\frac{38}{3}$

$K=\int_5^{10}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\int_5^{10}\left(\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)dx$

$=\int_5^{10}\sqrt{x-1}\,dx+\int_5^{10}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\right]_5^{10}+\left[2\sqrt{x-1}\right]_5^{10}$

$=\frac{2}{3}(27-8)+2(3-2)=\frac{44}{3}$

تمرين (رقم 37)

$I=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$

$=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}}=1$

$J=\int_0^1\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x^2-x+1}}dx=\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}\right]_0^1=0.$

$$K=\int_1^8\left(\frac{4}{x\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\left[\frac{-8}{\sqrt{x}}-\frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_1^8$$
$$=\left(\frac{-8}{2\sqrt2}-\frac{15}{2}\cdot4\right)-\left(-8-\frac{15}{2}\right)=-2\sqrt2-\frac{29}{2}$$

تمرين رقم 38

$$I=\int_2^3(x-1)\sqrt{x^2-2x}\,dx=\frac12\int_2^3\sqrt{x^2-2x}\,(2x-2)\,dx$$
$$=\frac12\cdot\frac23\left[\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^3\right]_2^3=\frac13(3\sqrt3)=\sqrt3$$
$$J=\int_{\sqrt6}^5 x\sqrt[3]{2+x^2}\,dx=\frac12\int_{\sqrt6}^5\sqrt[3]{2+x^2}\,(2x)\,dx$$
$$=\frac38\left[\left(\sqrt[3]{2+x^2}\right)^4\right]_{\sqrt6}^5=\frac38(81-16)=\frac{195}{8}$$
$$K=\int_0^1(2x-1)(x^2-x+1)^{2/3}dx=$$
$$=\frac35\left[(x^2-x+1)^{5/3}\right]_0^1=0$$

تمرين رقم 39

$$I=\int_1^e\frac{\ln^2x}{3x}dx=\left[\frac19\ln^3x\right]_1^e=\frac19$$
$$J=\int_1^{\sqrt e}\frac{dx}{x(3+2\ln x)^3}=\frac12\int_1^{\sqrt e}\frac{\left(\frac2x\right)}{(3+2\ln x)^3}dx$$
$$=-\frac14\left[\frac{1}{(3+2\ln x)^2}\right]_1^{\sqrt e}=\frac{13}{192}$$
$$K=\int_{1/e}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{2+\ln x}}=2\int_{1/e}^{e^2}\frac{\left(\frac1x\right)}{2\sqrt{2+\ln x}}dx$$
$$=2\left[\sqrt{2+\ln x}\right]_{1/e}^{e^2}=2(2-1)=2$$

تمرين رقم 40

$$I=\int_1^e\frac{x-1}{x(\ln x-x)^2}dx=\int_1^e\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{(\ln x-x)^2}dx$$
$$=\int_1^e\frac{\left(\frac1x-1\right)}{(\ln x-x)^2}dx=\left[\frac{-1}{\ln x-x}\right]_1^e=\frac{e-2}{1-e}$$
$$J=\int_1^{e-1}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}=\int_1^{e-1}\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)}{\ln(x+1)}dx$$
$$=\left[\ln(\ln(x+1))\right]_1^{e-1}=-\ln(\ln 2)$$
$$K=\int_e^{\sqrt e}\frac{1}{x\ln^2x}dx=\int_e^{\sqrt e}\frac{\left(\frac1x\right)}{\ln^2x}dx$$
$$=\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_e^{\sqrt e}=-1$$

تمرين رقم 41

$$I=\int_0^1(e^{4x}-3e^{2x}-1)dx=\left[\frac14e^{4x}-\frac32e^{2x}-x\right]_0^1$$
$$=\frac14e^4-\frac32e^2+\frac14$$
$$J=\int_0^{\ln2}\left(\frac{e^{2x}+e^x+1}{e^x}\right)dx=\int_0^{\ln2}(e^x+1+e^{-x})dx$$
$$=\left[e^x+x-e^{-x}\right]_0^{\ln2}=\frac32+\ln2$$

$$K=\int_{\ln2}^{\ln3}\frac{(e^x-1)^2}{e^x}dx=\int_{\ln2}^{\ln3}(e^x-2+e^{-x})dx$$
$$=\left[e^x-2x-e^{-x}\right]_{\ln2}^{\ln3}=\frac76+2\ln\frac23$$

تمرين رقم 42

$$I=\int_0^{\ln2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+5}}dx=\int_0^{\ln2}\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x}+5}}dx$$
$$=\left[\sqrt{e^{2x}+5}\right]_0^{\ln2}=3-\sqrt6$$
$$R=\int_{-\ln2}^{\ln\sqrt2}\frac{e^x}{(2e^x+1)^2}dx=\frac12\int_{-\ln2}^{\ln\sqrt2}\frac{2e^x}{(2e^x+1)^2}dx$$
$$=\frac12\left[\frac{-1}{2e^x+1}\right]_{-\ln2}^{\ln\sqrt2}=\frac12\left(\frac{-1}{2\sqrt2+1}-\frac{-1}{2}\right)$$
$$=\frac12\left(\frac12-\frac{1}{2\sqrt2+1}\right)$$
$$M=\int_0^1(e^x+1)(e^x+x-1)dx=\left[\frac12(e^x+x-1)^2\right]_0^1$$
$$=\frac{e^2}{2}$$
$$E=\int_{-\ln2}^{\ln2}\frac{e^x}{e^x+1}\ln(e^x+1)\,dx=$$
$$=\left[\frac12\ln^2(e^x+1)\right]_{-\ln2}^{\ln2}=\frac12\left(\ln^23-\ln^2\frac32\right)$$

تمرين رقم 43

$$I=\int_0^\pi(x-1)\sin x\,dx$$

نضع: $u'(x)=\sin x$ و $v(x)=x-1$

اذن $u(x)=-\cos x$ و $v'(x)=1$

لدينا الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0,\pi]$

والدالتان u' و v' متصلتان على المجال $[0,\pi]$

اذن حسب خاصية المكاملة بالاجزاء لدينا:

$$I=\left[(x-1)\cos x\right]_0^\pi-\int_0^\pi(-\cos x)\,dx$$
$$=\left[-(x-1)\cos x\right]_0^\pi+\left[\sin x\right]_0^\pi=2-\pi$$
$$J=\int_0^{\pi/4}x\cos(2x)\,dx$$

نضع: $u'(x)=\cos 2x$ و $v(x)=x$

اذن $u(x)=\frac12\sin 2x$ و $v'(x)=1$

لدينا الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0,\frac\pi4]$

والدالتان u' و v' متصلتان على المجال $[0,\frac\pi4]$

اذن حسب خاصية المكاملة بالاجزاء لدينا:

$$J=\left[\frac12x\sin2x\right]_0^{\pi/4}-\frac12\int_0^{\frac\pi4}\sin(2x)\,dx$$
$$=\left[\frac12x\sin(2x)\right]_0^{\pi/4}+\frac14\left[\cos(2x)\right]_0^{\frac\pi4}$$
$$=\frac{\pi+2}{8}$$

$$K=\int_0^{\pi} 2x\cos^2 x\,dx$$

لدينا: $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1$

$\Leftrightarrow \cos^2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

اذن: $K=\int_0^{\pi}2x\cos^2x\,dx=\int_0^{\pi}(x+x\cos 2x)\,dx$

$=\int_0^{\pi}x\,dx+\int_0^{\pi}x\cos(2x)\,dx$

نحسب: $\int_0^{\pi}x\cos(2x)\,dx$

نضع: $v(x)=x$ و $u'(x)=\cos 2x$

اذن: $v'(x)=1$ و $u(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

لدينا الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0,\pi]$

والدالتان u' و v' متصلتان على المجال $[0,\pi]$

اذن حسب خاصية المكاملة بالأجزاء لدينا

$$\int_0^{\pi}x\cos(2x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_0^{\pi}+\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\pi}=0$$

اذن $K=\int_0^{\pi}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$

$$L=\int_0^{\pi/4}\frac{x}{\cos^2x}\,dx$$

نضع: $v(x)=x$ و $u'(x)=\frac{1}{\cos^2x}$

اذن: $v'(x)=1$ و $u(x)=\tan x$

لدينا الدالتان u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0,\frac{\pi}{4}]$

والدالتان u' و v' متصلتان على المجال $[0,\frac{\pi}{4}]$

اذن حسب خاصية المكاملة بالاجزاء لدينا

$$L=[x\tan x]_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx$$

$$=[x\tan x]_0^{\pi/4}+\int_0^{\pi/4}\frac{(-\sin x)}{\cos x}\,dx$$

$$=[x\tan x]_0^{\pi/4}+[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

تمرين رقم 44

$$A=\int_1^2\ln(2+x)\,dx$$

نضع: $v(x)=\ln(2+x)$ و $u'(x)=1$

اذن: $v'(x)=\frac{1}{2+x}$ و $u(x)=x$

$$A=[x\ln(2+x)]_1^2-\int_1^2\frac{x}{2+x}\,dx$$

$$=2\ln4-\ln3-\int_1^2\left(1-\frac{2}{2+x}\right)dx$$

$$=2\ln4-\ln3-\int_1^2dx+2\int_1^2\frac{1}{2+x}\,dx$$

$$=2\ln4-\ln3-[x]_1^2+2[\ln(2+x)]_1^2$$

$$=2\ln4-\ln3-1-2\ln4+2\ln3=\ln3-1$$

$$B=\int_1^e(2x-1)\ln x\,dx$$

نضع: $v(x)=\ln x$ و $u'(x)=2x-1$

اذن: $v'(x)=\frac{1}{x}$ و $u(x)=x^2-x$

$$B=[(x^2-x)\ln x]_1^e-\int_1^e(x-1)\,dx$$

$$=[(x^2-x)\ln x]_1^e-\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e$$

$$=e^2-e-\left(\frac{e^2}{2}-e-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$C=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt x}\,dx=2\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{2\sqrt x}\,dx$$

نضع: $v(x)=\ln x$ و $u'(x)=\frac{1}{2\sqrt x}$

اذن: $v'(x)=\frac{1}{x}$ و $u(x)=\sqrt x$

$$C=2[\sqrt x\ln x]_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\frac{dx}{\sqrt x}$$

$$=2[\sqrt x\ln x]_1^{e^2}-4\int_1^{e^2}\frac{dx}{2\sqrt x}$$

$$=2[\sqrt x\ln x]_1^{e^2}-4[\sqrt x]_1^{e^2}$$

$$=2e-4(e-1)=2(2-e)$$

$$D=\int_{\sqrt e}^e\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

نضع: $v(x)=\ln x$ و $u'(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2}$

اذن: $v'(x)=\frac{1}{x}$ و $u(x)=\frac{-1}{2(x^2+1)}$

$$D=\left[\frac{-\ln x}{2(x^2+1)}\right]_{\sqrt e}^e+\int_{\sqrt e}^e\frac{1}{2x(x^2+1)}\,dx$$

نحسب قيم الاعداد a و b و c بحيث

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}=\frac{a(x^2+1)+x(bx+c)}{x(x^2+1)}$$

$$=\frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\c=0\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=0\end{cases}$$

اذن: $\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$

$$\int_{\sqrt e}^e\frac{1}{2x(x^2+1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\sqrt e}^e\frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\sqrt e}^e\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{4}\int_{\sqrt e}^e\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}[\ln x]_{\sqrt e}^e-\frac{1}{4}[\ln(x^2+1)]_{\sqrt e}^e$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\ln(e^2+1)-\ln(e+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{e^2+1}{e+1}$$

إذن : $D = \left(\frac{-1}{2(e^2+1)} + \frac{1}{4(e+1)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{e^2+1}{e+1}\right)$

تمرين رقم 45

$$I = \int_{-\ln 2}^{0} (x+1)e^{-x}\,dx$$

نضع : $v(x) = (x-1)$ و $u'(x) = e^{-x}$

إذن : $v'(x) = 1$ و $u(x) = -e^{-x}$

إذن : $I = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{0} - \int_{-\ln 2}^{0} -e^{-x}\,dx$

$= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{0} - \left[e^{-x}\right]_{-\ln 2}^{0}$

$= (-1 + 2(-\ln 2 + 1)) - (1-2) = 2 - 2\ln 2$

$$J = \int_{0}^{-1} x\,e^{2x+1}\,dx$$

نضع : $v(x) = x$ و $u'(x) = e^{2x+1}$

إذن : $v'(x) = 1$ و $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

إذن : $J = \left[\frac{x}{2}e^{2x+1}\right]_{0}^{-1} - \frac{1}{4}\int_{0}^{-1} 2e^{2x+1}\,dx$

$= \left[\frac{x}{2}e^{2x+1}\right]_{0}^{-1} - \frac{1}{4}\left[e^{2x+1}\right]_{0}^{-1}$

$= -\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{4}(e^{-1} - e) = \frac{e}{4} - \frac{3}{4e}$

$$K = \int_{0}^{\ln 2} (x^2+1)e^{2x}\,dx$$

نضع : $v(x) = x^2+1$ و $u'(x) = e^{2x}$

إذن : $v'(x) = 2x$ و $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$K = \left[\frac{1}{2}(x^2+1)e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2} - \int_{0}^{\ln 2} x\,e^{2x}\,dx$

نحسب : $\int_{0}^{\ln 2} x\,e^{2x}\,dx$

نضع : $v(x) = x$ و $u'(x) = e^{2x}$

إذن : $v'(x) = 1$ و $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

إذن : $\int_{0}^{\ln 2} x\,e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\,e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2} - \frac{1}{4}\int_{0}^{\ln 2} 2e^{2x}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x\,e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2} - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2}$

إذن : $K = \left[\frac{1}{2}(x^2+1)e^{2x} - \frac{1}{2}x\,e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{0}^{\ln 2}$

$= 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 3 - \frac{3}{4} = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{9}{4}$

تمرين رقم 46

$$I = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\,dx$$

نضع : $v(x) = x$ و $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

إذن : $v'(x) = 1$ و $u(x) = \sqrt{x+1}$

إذن : $I = \left[x\sqrt{x+1}\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\sqrt{x+1}\,dx$

$= \left[x\sqrt{x+1}\right]_{0}^{1} - \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{0}^{1}$

$= \sqrt{2} - \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$

$$J = \int_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\,dx$$

نضع : $v(x) = \ln x$ و $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

إذن : $v'(x) = \frac{1}{x}$ و $u(x) = \sqrt{x}$

إذن : $J = \left[\sqrt{x}\ln x\right]_{1}^{e^2} - 2\int_{1}^{e^2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$= \left[\sqrt{x}\ln x\right]_{1}^{e^2} - 2\left[\sqrt{x}\right]_{1}^{e^2}$

$= 2e - 2(e-1) = 2$

$K = \int_{0}^{1} t\sqrt{1+t}\,dt = \int_{0}^{1}\left((t+1)\sqrt{t+1} - \sqrt{t+1}\right)dt$

$= \int_{0}^{1}\sqrt{(t+1)^3}\,dt - \int_{0}^{1}\sqrt{t+1}\,dt$

$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{(t+1)^5}\right]_{0}^{1} - \left[\frac{2}{3}\sqrt{(t+1)^2}\right]_{0}^{1}$

$= \frac{2}{5}(4\sqrt{2} - 1) - \frac{2}{3}(2-1) = \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{16}{15}$

ملحوظة : $(t+1)\sqrt{t+1} = \sqrt{(t+1)^3}$

لأن : $\forall t \in [0,1]\ ;\ t+1 > 0$

تمرين رقم 47

$I = \int_{0}^{\pi} e^{x}\cos^2 x\,dx$ ، $J = \int_{0}^{\pi} e^{x}\sin^2 x\,dx$

(1 $I + J = \int_{0}^{\pi} e^{x}(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$

$= \int_{0}^{\pi} e^{x}\,dx = \left[e^{x}\right]_{0}^{\pi} = e^{\pi} - 1$

$I - J = \int_{0}^{\pi} e^{x}(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx$

$= \int_{0}^{\pi} e^{x}\cos(2x)\,dx$

نضع : $v(x) = \cos 2x$ و $u'(x) = e^{x}$

إذن $v'(x) = -2\sin(2x)$ و $u(x) = e^{x}$

إذن : $I - J = \left[e^{x}\cos 2x\right]_{0}^{\pi} + 2\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin(2x)\,dx$

نحسب : $\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin(2x)\,dx$

نضع $v(x) = \sin 2x$ و $u'(x) = e^{x}$

إذن $v'(x) = 2\cos 2x$ و $u(x) = e^{x}$

إذن : $\int_{0}^{\pi} e^{x}\sin(2x)\,dx = \left[e^{x}\sin 2x\right]_{0}^{\pi} - 2\int_{0}^{\pi} e^{x}\cos(2x)\,dx$

$= -2(I - J)$

إذن : $I - J = \left[e^{x}\cos 2x\right]_{0}^{\pi} - 2(I - J)$

$\Leftrightarrow 3(I - J) = 1 - e^{\pi}$

$\Leftrightarrow I - J = \frac{1}{3}(1 - e^{\pi})$

ج)

$$\begin{cases} I+J = e^{\pi}-1 \\ I-J = \frac{1}{3}(1-e^{\pi}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{3}(e^{\pi}-1) \\ J = \frac{2e^{\pi}}{3} - \frac{2}{3} \end{cases}$$

تمرين (رقم 48)

$$I = \int_0^9 x \log(x+1)\,dx$$

نضع: $v(x) = \log(x+1)$ و $u'(x) = x$

اذن: $v'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 10}$ و $u(x) = \frac{1}{2}x^2$

اذن:

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\right]_0^9 - \frac{1}{2\ln 10}\int_0^9 \frac{x^2}{(x+1)}\,dx$$

نحسب: $\int_0^9 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

$$\int_0^9 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^9 \frac{(x^2-1)+1}{x+1}\,dx$$

$$= \int_0^9 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx + \int_0^9 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \int_0^9 (x-1)\,dx + \int_0^9 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^9 = \frac{63}{2} - \ln 10$$

اذن:

$$I = \frac{81}{2} - \frac{1}{2\ln 10}\left(\frac{63}{2} - \ln 10\right)$$

$$= 41 - \frac{63}{4\ln 10}$$

$$J = \int_1^2 x\, 2^x\,dx$$

نضع: $v(x) = x$ و $u'(x) = 2^x = e^{x\ln 2}$

اذن: $v'(x) = 1$ و $u(x) = \frac{1}{\ln 2}2^x$

اذن:

$$J = \left[\frac{x}{\ln 2}2^x\right]_1^2 - \frac{1}{\ln^2 2}\int_1^2 (\ln 2)2^x\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{\ln 2}2^x\right]_1^2 - \frac{1}{\ln^2 2}\left[2^x\right]_1^2$$

$$= \frac{6}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}$$

$$K = \int_0^1 (2x+1)3^x\,dx$$

نضع: $v(x) = 2x+1$ و $u'(x) = 3^x = e^{x\ln 3}$

اذن: $v'(x) = 2$ و $u(x) = \frac{1}{\ln 3}3^x$

اذن:

$$K = \left[\frac{1}{\ln 3}(2x+1)3^x\right]_0^1 - \frac{2}{\ln^2 3}\int_0^1 (\ln 3)3^x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{\ln 3}(2x+1)3^x\right]_0^1 - \frac{2}{\ln^2 3}\left[3^x\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{\ln 3} - \frac{4}{\ln^2 3}$$

تمرين (رقم 49)

$$D_1 = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \int_0^1 (1-\sqrt{x})\,dx$$

$$= \left[x - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D_2 = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D_3 = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

تمرين (رقم 50)

لدينا المستقيم الذي معادلته $y = m$: يقطع منحنى الدالة: $x \mapsto x^2$ في النقطتين:

$A(\sqrt{m}, m)$ و $B(-\sqrt{m}, m)$

لدينا:

$$D_1 + D_2 = \int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

$$D_2 = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} (m - x^2)\,dx = \left[mx - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}}$$

$$= \frac{4\sqrt{m^3}}{3}$$

اذن

$$D_1 = (D_1 + D_2) - D_2 = \frac{4(1-\sqrt{m^3})}{3}$$

$$D_1 = D_2 \Leftrightarrow \frac{4(1-\sqrt{m^3})}{3} = \frac{4\sqrt{m^3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{m^3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow m^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

تمرين (رقم 51)

ندرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0, 2]$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$-x+1$	$+$		$+$	0	$-$	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$	$+$
$\frac{-x+1}{x+1}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$-$

$$A = \int_0^2 \left|\frac{-x+1}{x+1}\right| dx = \int_0^1 \frac{-x+1}{x+1}\,dx + \int_1^2 \frac{x-1}{x+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(-x-1)+2}{x+1}\,dx + \int_1^2 \frac{(x+1)-2}{x+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(-1 + \frac{2}{x+1}\right)dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[-x + 2\ln(x+1)\right]_0^1 + \left[x - 2\ln(x+1)\right]_1^2$$

$$= -1 + 2\ln 2 + 2 - 2\ln 3 - 1 + 2\ln 2$$

$$= 4\ln 2 - 2\ln 3$$

تمرين رقم 52

1) مجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوى حيث

$$\begin{cases} -R \le x \le R \\ 0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2} \end{cases}$$

هي مساحة الحيز من المستوى المحصور بين محور الأفاصيل $y=0$ ومنحنى الدالة: $x \mapsto \sqrt{R^2-x^2}$ والمستقيمين: $x=-R$ و $x=R$

2) بما أن منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt{R^2-x^2}$ هو الدائرة $\mathcal{C}(O,R)$

فإن:

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{\pi R^2}{2}$$

تمرين رقم 53

1)

$$V = 8\int_0^1 \pi\left(\sqrt{e^{x-1}}\right)^2 dx = 8\pi\int_0^1 e^{x-1}dx = 8\pi\left[e^{x-1}\right]_0^1 = 8\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)cm^3$$

2)

$$V = 8\int_1^e \pi\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = 8\pi\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \frac{8\pi}{3}\left[\ln^3 x\right]_1^e = \frac{8\pi}{3}\ cm^3$$

تمرين رقم 54

1)

$$V = 8\int_0^{\sqrt[3]{2}} \pi\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{8\pi}{3}\int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{3x^2}{1+x^3}dx$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left[\ln(1+x^3)\right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{8\pi}{3}(\ln 3)\ cm^3$$

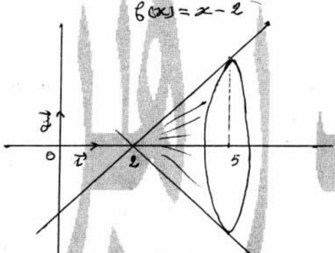
2)

$$V = 8\int_{\pi/3}^{\pi/2}\pi\left(\sqrt{\sin x}\cdot\cos x\right)^2dx = -8\pi\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^2 x(-\sin x)\,dx = -\frac{8\pi}{3}\left[\cos^3 x\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{\pi}{3}\ cm^3$$

تمرين رقم 55

$f(x) = x-2$

1)



2)

$$V = \int_2^5 \pi(x-2)^2dx = \frac{\pi}{3}\left[(x-2)^3\right]_2^5 = \frac{\pi}{3}(27) = 9\pi$$

هذا الجسم الدوراني هو: مخروط دوراني.

تمرين رقم 56

$f(x) = \sqrt{2^2-x^2}$

1) $x \in D_f \Leftrightarrow 2^2-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$

إذن: $D_f = [-2,2]$

2) لكل x من D_f لدينا: $(-x) \in D_f$

$\forall x \in D_f\ ;\ f(-x) = \sqrt{2^2-(-x)^2} = \sqrt{2^2-x^2} = f(x)$

إذن f دالة زوجية.

3)

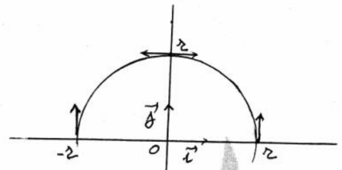
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2^2-x^2}}{x-2} = -\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{2^2-x^2}}{2-x} = -\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{(2-x)(2+x)}{(2-x)^2}} = -\lim_{x\to 2^-}\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = -\infty$$

إذن f دالة غير قابلة للاشتقاق على يسار 2 والمنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل في النقطة التي أفصولها 2 $(2,0)$ نصف مماس عمودي.

4) $\forall x \in [0,2[\ ;\ f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{2^2-x^2}} < 0$

x	0		2
$f'(x)$	0	−	$-\infty$
$f(x)$	2	↘	0

5)



6)

$$V = \int_{-2}^{2}\pi(2^2-x^2)dx = \pi\int_{-2}^{2}(2^2-x^2)dx$$

$$= \pi\left[2^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= \pi\left[\left(2^3-\frac{2^3}{3}\right)-\left(-2^3+\frac{2^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4\pi 2^3}{3}$$

هذا الجسم الدوراني هو الفلكة $S(O,2)$

تمرين رقم 58

$f(x) = (1-x)e^x$

1) لدينا: $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = -e^x+(1-x)e^x = -xe^x$

$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f''(x) = -e^x - xe^x = -(1+x)e^x$

إذن: $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f''(x)+f(x) = (1-x-1-x)e^x = -2xe^x = 2f'(x)$

2) لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f(x) = 2f'(x) - f''(x)$

اذن : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (2f'(x) - f''(x))\,dx$

$$= \int_0^1 (2f(x) - f'(x))'\,dx$$

$$= \left[2f(x) - f'(x)\right]_0^1$$

$$= \left[2(1-x)e^x + xe^x\right]_0^1 = e - 2$$

تمرين رقم 59

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin x}\,dx \quad , \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$$

1) $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos x}{1+2\sin x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\pi/2} = 1$$

2) $I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x) + \cos x}{1+2\sin x}\,dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x + \cos x}{1+2\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)(1+2\sin x)}{1+2\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = 1$$

اذن : $I + J = 1 \iff I = 0$

تمرين رقم 60

1) $\forall x \in]1,+\infty[\; ; \; \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} =$

$$= \frac{a(x^2-1) + bx(x+1) + cx(x-1)}{x(x^2-1)}$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{x(x^2-1)}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c = 0 \\ b-c = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2) لدينا : $\forall x \in]1,+\infty[\; ; \; f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

اذن : $\forall x \in]1,+\infty[\; ; \; F(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

3) $I = \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx = \left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\right]_2^3$

$$= \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$$

$$J = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x^2-1}\right]_2^3 = \frac{5}{24}$$

$$K = \int_2^3 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{2x}{(x^2-1)^2}\right)(\ln x)\,dx$$

نضع : $v(x) = \ln x \quad$ و $\quad u'(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

اذن : $v'(x) = \frac{1}{x} \quad$ و $\quad u(x) = \frac{-1}{x^2-1}$

اذن : $K = \left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)}$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3 + \left[\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)\right]_2^3$$

$$= -\frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 2}{3} + \frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$$

$$= -\frac{13}{8}\ln 3 + \frac{17}{6}\ln 2$$

تمرين رقم 61

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad , \quad J = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$$

1) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] \; ; \; f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right)'$

$$= \frac{\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 3(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{3 - 2\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$$

2) $I = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\tan x\right]_0^{\pi/4} = 1$

$$3J - 2I = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos^3 x}\right]_0^{\pi/4} = 2$$

$$3J - 2I = 2 \iff J = \frac{4}{3}$$

تمرين رقم 62

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt \quad , \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt$$

1) $F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt$

نضع : $v(t) = \cos(\ln t) \quad$ و $\quad u'(t) = 1$

اذن : $v'(t) = \frac{-1}{t}\sin(\ln t) \quad$ و $\quad u(t) = t$

اذن : $F(x) = \left[t\cos(\ln t)\right]_1^x + \int_1^x \sin(\ln t)\,dt$

$$= x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$$

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt$$

نضع : $v(t) = \sin(\ln t) \quad$ و $\quad u'(t) = 1$

اذن : $v'(t) = \frac{1}{t}\cos(\ln t) \quad$ و $\quad u(t) = t$

اذن : $G(x) = \left[t\sin(\ln t)\right]_1^x - \int_1^x \cos(\ln t)\,dt$

$$= x\sin(\ln x) - F(x)$$

2) لدينا

$$\begin{cases} F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x) \\ G(x) = x\sin(\ln x) - F(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(x) - G(x) = x\cos(\ln x) - 1 \\ F(x) + G(x) = x\sin(\ln x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\left(x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - 1\right) \\ G(x) = \frac{1}{2}\left(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1\right) \end{cases}$$

تمرين رقم 63

$$\forall n\in\mathbb{N};\ I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\,dx$$

$$\forall n\in\mathbb{N};\ J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\,dx$$

1) $I_0 = \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$

$J_0 = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

2) $\forall n\in\mathbb{N};\ I_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\sin x\,dx$

نضع: $v(x) = e^{-nx}$ و $u'(x) = \sin x$

إذن: $v'(x) = -ne^{-nx}$ و $u(x) = -\cos x$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ I_n = [-e^{-nx}\cos x]_0^{\pi/2} - n\int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\,dx$

$= 1 - nJ_n$

ومنه فإن: $\forall n\in\mathbb{N};\ I_n + nJ_n = 1$

$$\forall n\in\mathbb{N};\ J_n = \int_0^{\pi/2} e^{-nx}\cos x\,dx$$

نضع: $v(x) = e^{-nx}$ و $u'(x) = \cos x$

إذن: $v'(x) = -ne^{-nx}$ و $u(x) = \sin x$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ J_n = [e^{-nx}\sin x]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} e^{-nx}(\sin x)\,dx$

$= e^{-n\frac{\pi}{2}} + nI_n$

ومنه فإن: $\forall n\in\mathbb{N};\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$

3) لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nI_n + n^2J_n = n \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_n = \frac{1}{1+n^2}\left(1 - ne^{-n\frac{\pi}{2}}\right) \\ J_n = \frac{1}{1+n^2}\left(n + e^{-n\frac{\pi}{2}}\right) \end{cases}$$

4) لدينا:

$$\forall n\in\mathbb{N};\begin{cases} I_n = \frac{1}{1+n^2}\left(1 - \frac{n}{e^{n\frac{\pi}{2}}}\right) \\ J_n = \frac{n}{1+n^2}\left(1 + \frac{1}{ne^{n\frac{\pi}{2}}}\right) \end{cases}$$

وبما أن: $\lim \frac{1}{1+n^2} = \lim \frac{n}{1+n^2} = \lim \frac{n}{e^{n\frac{\pi}{2}}} = \lim \frac{1}{ne^{n\frac{\pi}{2}}} = 0$

فإن: $\lim I_n = \lim J_n = 0$

تمرين رقم 64

$$\begin{cases} u_0 = \int_1^e x\,dx \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx \end{cases}$$

1) $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx - \int_1^e x(\ln x)^n dx$

$= \int_1^e x(\ln x)^n(\ln x - 1)\,dx$

بما أن: $\forall x\in[1,e],\ \forall n\in\mathbb{N};\ x(\ln x)^n(\ln x - 1) \leq 0$

فإن: $\forall n\in\mathbb{N};\ \int_1^e x(\ln x)^n(\ln x - 1)\,dx \leq 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1} - u_n \leq 0$

إذن: (u_n) متتالية تناقصية

2) وبما أن: $\forall x\in[1,e],\ \forall n\in\mathbb{N}^*;\ x(\ln x)^n \geq 0$

فإن: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_1^e x(\ln x)^n\,dx \geq 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ u_n \geq 0$

ولدينا: $u_0 = \int_1^e x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{2} > 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ 0 \leq u_n \leq \frac{e^2-1}{2}$

ومنه فإن (u_n) محدودة

نستنتج أن (u_n) متقاربة لأنها تناقصية ومصغورة

3) لدينا: $u_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

نضع: $v(x) = (\ln x)^n$ و $u'(x) = x$

إذن: $v'(x) = n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}$ و $u(x) = \frac{x^2}{2}$

إذن: $u_n = \left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^n\right]_1^e - \frac{n}{2}u_{n-1}$

$= \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1}$

لدينا من جهة:

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1} \leq u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}u_n \leq u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ \frac{e^2}{2} \leq \left(1 + \frac{n+1}{2}\right)u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ \frac{e^2}{2} \leq \frac{n+3}{2}u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ \frac{e^2}{n+3} \leq u_n$

ولدينا من جهة أخرى:

$u_n = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1}$

$\Leftrightarrow u_{n-1} = \frac{e^2}{n} - \frac{2}{n}u_n$

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_n \leq u_{n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ u_n \leq \frac{e^2}{n} - \frac{2}{n}u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_n \leq \frac{e^2}{n}$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ u_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ \frac{e^2}{n+3} \leq u_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

تمرين رقم 65

$$\forall n\in\mathbb{N};\quad I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

1) $I_0=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{0} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

نضع: $u'(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ و $v(x)=x$

إذن: $u(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ و $v'(x)=1$

إذن: $I=-\left[2x\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$=-2\pi-4\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$

$=-2\pi-4\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi}=4-2\pi$

2) $\forall n\in\mathbb{N};\ I_{n+1}=\frac{1}{2^{n+2}}\int_{\pi}^{4(n+1)\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{2\cdot 2^{n+1}}\int_{\pi}^{4n\pi+4\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$=\frac{1}{2\cdot 2^{n+1}}\left(\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{4n\pi}^{4n\pi+4\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)$

نحسب: $J=\int_{4n\pi}^{4n\pi+4\pi} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

نضع: $x=t+4n\pi \Leftrightarrow t=x-4n\pi$

$t=0 \Leftrightarrow x=4n\pi$

$t=4\pi \Leftrightarrow x=4n\pi+4\pi$

$J=\int_0^{4\pi}(t+4n\pi)\cos\left(\frac{t}{2}+2n\pi\right)dt$

$=\int_0^{4\pi}(t+4n\pi)\cos\left(\frac{t}{2}\right)dt$

نضع: $u'(t)=\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ و $v(t)=t+4n\pi$

إذن: $u(t)=2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ و $v'(t)=1$

إذن: $J=\left[2(t+4n\pi)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{4\pi}-2\int_0^{4\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$

$=4\int_0^{4\pi}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt$

$=4\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{4\pi}=0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ I_{n+1}=\frac{1}{2}I_n$

إذن (I_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $I_0=4-2\pi$

3) $S_n=I_0+I_1+\dots+I_n$

$=(4-2\pi)\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=$

$=(4-2\pi)\cdot 2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

بما أن: $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$

فإن $\lim S_n=2(4-2\pi)$

تمرين رقم 66

$$\forall n\in\mathbb{N};\quad u_n=\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx$$

1) $u_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}\ln 2$

2) لدينا: $\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\geq 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx\geq 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_n\geq 0$

3) $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{x^{2n+3}}{x^2+1}dx-\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx$

$=\int_0^1\frac{(x^2-1)x^{2n+1}}{x^2+1}dx$

بما أن: $\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N};\ \frac{(x^2-1)x^{2n+1}}{x^2+1}\leq 0$

فإن: $\forall n\in\mathbb{N};\ \int_0^1\frac{(x^2-1)x^{2n+1}}{x^2+1}dx\leq 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}<u_n$

إذن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

إذن (u_n) متقاربة

4) أ) لدينا من جهة:

$\forall n\in\mathbb{N};\ \forall x\in[0,1];\ \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\geq 0$

ولدينا من جهة أخرى:

$\forall n\in\mathbb{N};\ \forall x\in[0,1];\ \frac{x^{2n+1}}{x^2+1}-x^{2n+1}=\frac{-x^2\cdot x^{2n+1}}{x^2+1}$

$=-\frac{x^{2n+3}}{x^2+1}\leq 0$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N};\ \forall x\in[0,1];\ 0\leq\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}\leq x^{2n+1}$

ب) لدينا: $\forall n\in\mathbb{N};\ 0\leq\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{x^2+1}dx\leq\int_0^1 x^{2n+1}dx$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ 0\leq u_n\leq\left[\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N};\ 0\leq u_n\leq\frac{1}{2n+2}$

بما أن: $\lim\frac{1}{2n+2}=0$

فإنه حسب مصاديق التقارب

$\lim u_n=0$

تمرين رقم 67

نعتبر الدالة F المعرفة بمايلي:

$$F:\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}\\ x\longmapsto F(x)=\int_a^x f(t)\,dt\end{cases}$$

1) بما أن G دالة أصلية للدالة f على المجال I

فإن : $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$$=[G(t)]_a^x = G(x)-G(a)$$

2) بما أن $F(a)=G(a)-G(a)=0$

فإن F هي الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a

3) نعتبر الدالة F المعرفة كما يلي :

$$F:\begin{bmatrix} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{bmatrix}$$

بما أن : $t\mapsto \ln t$ دالة أصلية للدالة $t\mapsto \frac{1}{t}$ على $\mathbb{R}_+^*$

فإن

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \; ; \; \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_1^x$$

$$= \ln x$$

تمرين (رقم 68)

$$f:\begin{bmatrix} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t+1}\,dt \end{bmatrix}$$

1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$g : t \mapsto e^t - 1 - t$$

لدينا : $\forall t\in\mathbb{R}^+ \; ; \; g'(t)=e^t-1\geq 0$

t	0		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	

إذن : $\forall t\in\mathbb{R}^+ \; ; \; g(t)\geq 0$

$$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}^+ \; ; \; e^t\geq t+1$$

$$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}^+ \; ; \; \frac{e^t}{t+1}\geq 1$$

لدينا $f(2)=\int_1^2 \frac{e^t}{t+1}\,dt$

بما أن : $\forall t\in[1,2] \; ; \; \frac{e^t}{t+1}\geq 1$

فإن : $\int_1^2 \frac{e^t}{t+1}\,dt \geq \int_1^2 dt$

$$\Leftrightarrow f(2)\geq [t]_1^2$$

$$\Leftrightarrow f(2)\geq 1$$

2) لدينا الدالة $t\mapsto \frac{e^t}{1+t}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ إذن فهي متصلة على كل مجال مغلق طرفاه 1 و x حيث $x\geq 0$

إذن الدالة f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$

ولدينا : $\forall x\in\mathbb{R}^+ \; ; \; f'(x)=\frac{e^x}{1+x}>0$

3) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$h(x)=f(x)-1$$

لدينا h دالة متصلة وتزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

و $h(2)=f(2)-1\geq 0$ و $h(1)=f(1)-1=-1<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية يوجد حل وحيد α للمعادلة $h(x)=0$ حيث $1<\alpha<2$

إذن للمعادلة : $f(x)=1$ حلا وحيدا α حيث $1<\alpha<2$

4) لدينا : $\forall t\in\mathbb{R}^+ \; ; \; \frac{e^t}{1+t}\geq 1$

إذن : $\forall x\in\mathbb{R}^+ ; \int_1^x \frac{e^t}{1+t}\,dt \geq \int_1^x dt$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^+ \; ; \; f(x)\geq x-1$$

وبما أن $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$

فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

5)

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$+\infty$

تمرين (رقم 69)

$$\begin{cases} U_0=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ U_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \; ; \; \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1) أ) $u : x\mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$\forall x\in\mathbb{R} \; ; \; u'(x)=\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u_0=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})$$

$$u_1=\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$$

ب) لدينا : $\forall x\in[0,1] , \forall n\in\mathbb{N} , x^{n+1}\leq x^n$

$$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1] ; \forall n\in\mathbb{N} ; \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N} ; \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$$\forall n\in\mathbb{N} ; \; u_{n+1}\leq u_n$$

إذن المتتالية (u_n) تناقصية

2) أ) $\forall x\in[0,1] \; ; \; 0\leq x^2\leq 1$

$$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1] \; ; \; 1\leq x^2+1\leq 2$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1] \; ; \; 1\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}$$

ب) لدينا : $\forall x\in[0,1] ; \; 1\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1] ; \; \frac{1}{\sqrt{2}}\leq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1] ; \forall n\in\mathbb{N} ; \; \frac{x^n}{\sqrt{2}}\leq\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\leq x^n$$

إذن : $\forall n\in\mathbb{N} , \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\,dx\leq U_n\leq\int_0^1 x^n\,dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1\leq U_n\leq\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 , \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N} ; \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

ج) لدينا $\forall n\in\mathbb{N};\ 0 < \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n$

وبما أن (u_n) متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

فإن (u_n) متقاربة نهايتها ℓ

وبما أن: $\lim \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب

$\lim u_n = 0$

3) $\forall n\geq 3 ;\ I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

أ) $\forall n\geq 3;\ u_n + u_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$= \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx = I_n$

ب) $\forall n\geq 3 ;\ I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

نضع: $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ و $f'(x) = x^{n-2}$

إذن: $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $f(x) = \frac{1}{n-1}x^{n-1}$

إذن: $\forall n\geq 3 ;\ I_n = \left[\frac{1}{n-1}x^{n-1}\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{n-1}u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ,\ u_n + u_{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ,\ (n-1)u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2} - u_n$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ,\ n u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

ج) بما أن (u_n) متتالية تناقصية فإن

$\forall n\geq 3 ;\ u_n \leq u_{n-2}$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ;\ (n-1)u_n \leq (n-1)u_{n-2}$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ;\ nu_n + (n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2}$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ;\ (2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ;\ u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$

$\Leftrightarrow \forall n\geq 3 ;\ nu_n \leq \frac{\sqrt{2}n}{2n-1}$

لدينا حسب السؤال ② ب)

$\forall n\geq 3 ;\ nu_n \geq \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}}$

إذن: $\forall n\geq 3;\ \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leq nu_n \leq \frac{\sqrt{2}n}{2n-1}$

وبما أن: $\lim \frac{n}{(n+1)\sqrt{2}} = \lim \frac{\sqrt{2}n}{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

فإنه حسب مصاديق التقارب:

$\lim nu_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين رقم 70

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 t^n \tan t\,dt$

1) الدالة $t\mapsto \tan t$ تزايدية على المجال $[0,1]$

إذن: $\forall x\in[0,1]\ .\ \tan x \leq \tan 1$

$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*,\ x^n\tan x \leq x^n \tan 1$

2) لدينا: $\forall t\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*;\ t^n\tan t \leq t^n \tan 1$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq \int_0^1 t^n \tan t\,dt \leq \int_0^1 t^n(\tan 1)\,dt$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*;\ 0 \leq I_n \leq (\tan 1)\int_0^1 t^n\,dt$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*;\ 0 \leq I_n \leq (\tan 1)\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \frac{\tan 1}{n+1}$

وبما أن: $\lim \frac{\tan 1}{n+1} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب

$\lim I_n = 0$

3) $I_n = \int_0^1 t^n \tan t\,dt$

نضع: $v(t) = \tan t$ و $u'(t) = t^n$

إذن $v'(t) = 1+\tan^2 t$ و $u(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ I_n = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\tan t\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1(1+\tan^2 t)t^{n+1}dt$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{\tan 1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1(1+\tan^2 t)t^{n+1}dt$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*;\ (n+1)I_n = \tan 1 - \int_0^1(1+\tan^2 t)t^{n+1}dt$

4) لدينا: $\forall x\in[0,1] ;\ 0\leq \tan^2 x \leq \tan 1$

$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1];\ 1 \leq 1+\tan^2 x \leq 1+\tan 1$

$\Rightarrow \forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*;\ x^{n+1} \leq (1+\tan^2 x)x^{n+1} \leq (1+\tan 1)x^{n+1}$

إذن: $\forall n\in\mathbb{N}^*;$

$\int_0^1 x^{n+1}dx \leq \int_0^1(1+\tan^2 x)x^{n+1}dx \leq (1+\tan 1)\int_0^1 x^{n+1}dx$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*;$

$\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 \leq \int_0^1(1+\tan^2 x)x^{n+1}dx \leq (1+\tan 1)\left[\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*;\ \frac{1}{n+2} \leq \int_0^1(1+\tan^2 x)x^{n+1}dx \leq \frac{1+\tan 1}{n+2}$

وبما أن: $\lim \frac{1}{n+2} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب

$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1(1+\tan^2 x)x^{n+1}dx = 0$

ولدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ nI = \tan 1 - I_n - \int_0^1(1+\tan^2 x)x^{n+1}dx$

وبما أن $\lim I_n = \lim \int_0^1(1+\tan^2 x)x^{n+1}dx = 0$

إذن $\lim nI_n = 0$

تمرين رقم 71

1) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$D_f =]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(\ln x) = -\infty$

$\forall x\in D_f;\ f'(x) = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2-\ln x = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 2$
$\Leftrightarrow x = e^2$

$f(e^2)=\frac{2}{e}$

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2/e$	$\searrow$	0

2) $\forall n\geq 8;\ u_n = f(8)+f(9)+\dots+f(n)$

أ) لكل x من $[k,k+1]$ حيث $k\geq 8$

لدينا f دالة تناقصية

اذن لكل x من $[k,k+1]$ حيث $k\geq 8$

$f(k+1)\le f(x)\le f(k)$

اذن: $f(k+1)\int_k^{k+1}dx \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)\int_k^{k+1}dx$

$\Leftrightarrow f(k+1)\le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$

ب) لكل $k\geq 8$ لدينا:

$\int_8^{n+1} f(x)dx = \int_8^9 f(x)dx + \int_9^{10} f(x)dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)dx$

$f(9)\le\int_8^9 f(x)dx \le f(8)$

$f(10)\le\int_9^{10} f(x)dx\le f(9)$

$\vdots$

$f(n+1)\le\int_n^{n+1} f(x)dx\le f(n)$

$u_{n+1}-f(8)\le \int_8^{n+1} f(x)dx \le u_n$

3) أ) $I_n = \int_8^{n+1} f(t)dt$

$= 2\int_8^{n+1}\frac{\ln t}{2\sqrt t}dt$

نضع: $v(t)=\ln t$ و $u'(t)=\frac{1}{2\sqrt t}$

اذن $v'(t)=\frac1t$ و $u(t)=\sqrt t$

اذن، $I_n = 2[\sqrt t\ln t]_8^{n+1} - 4\int_8^{n+1}\frac{1}{2\sqrt t}dt$

$= 2[\sqrt t\ln t - 2\sqrt t]_8^{n+1}$

$= 2(\sqrt{n+1}\ln(n+1) - 2\sqrt2\ln 8 - 2\sqrt{n+1} + 4\sqrt2)$

$=2\sqrt{n+1}\ln(n+1) - 12\sqrt2\ln2 - 4\sqrt{n+1} + 8\sqrt2$

$=2\sqrt{n+1}(\ln(n+1)-2)+8\sqrt2-12\sqrt2\ln2$

ب) بما ان: $\lim I_n = +\infty$

ولدينا: $\forall n\geq 8;\quad I_n\le u_n$

فانه حسب مصاديق التقارب

$\lim u_n=+\infty$

تمرين رقم 72

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!}e^{-x}dx$

1) $I_1 = \int_0^1 x e^{-x}dx$

نضع: $v(x)=x$ و $u'(x)=e^{-x}$

اذن: $v'(x)=1$ و $u(x)=-e^{-x}$

اذن: $I_1 = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$

$= [-xe^{-x}-e^{-x}]_0^1 = 1-\frac2e$

2) $\forall x\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*;\ 0\le x^n\le 1$

$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1],\forall n\in\mathbb N^*;\ 0\le\frac{x^n}{n!}\le\frac1{n!}\le\frac1n$

اذن: $\forall n\in\mathbb N^*;\ 0\le\int_0^1\frac{x^n}{n!}dx\le\int_0^1\frac1n dx$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb N^*;\ 0\le I_n\le\frac{1}{n!}\le\frac1n$

بما ان $\lim\frac1n=0$

فانه حسب مصاديق التقارب

$\lim I_n = 0$

3) لكل n من $\mathbb{N}$:

$g(x)=\frac{x^n}{n!}$

$f(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)$

لدينا: $g'(x)=\frac{nx^{n-1}}{n!}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$f'(x) = -e^{-x}\left(1+\frac x{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right) +$
$+ e^{-x}\left(1+\frac x{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)$

$= e^{-x}\left(-\frac{x^n}{n!}\right) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

ب) لدينا: $\frac{x^n}{n!}e^{-x} = -(f'(x))$

اذن: $I_n = -[f(x)]_0^1$

$= f(0)-f(1)$

4) أ) لدينا: $I_n = f(0)-f(1)$

$= 1-\frac1e\left(1+\frac1{1!}+\frac1{2!}+\dots+\frac1{n!}\right)$

ولدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*;\ 0 \leq 1 - \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*;\ 0 \leq e - \left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \leq \frac{e}{n}$

ب) بما أن: $\lim \frac{e}{n} = 0$

فإنه حسب مصاديق التقارب

$$\lim \left(e - \left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right) = 0$$

إذن: $\lim \left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e$

تمرين رقم 73

1) شدة الضوء عند السطح هي:

$$I(0) = I_0 a^0 = I_0$$

2) معدل تغير شدة الضوء في العمق x هو:

$$I'(x) = (I_0 a^x)' = (I_0 \ln a) a^x$$

3) شدة الضوء المتوسطة بين السطح وعمق 5 أمتار:

$$\mu(5) = \frac{1}{5}\int_0^5 I(x)\,dx$$

$$= \frac{I_0}{5}\int_0^5 a^x\,dx$$

$$= \frac{I_0}{5\ln a}\int_0^5 (\ln a)\, a^x\,dx$$

$$= \frac{I_0}{5\ln a}\left[a^x\right]_0^5$$

$$= \frac{I_0(a^5-1)}{5\ln a} \simeq 2{,}2$$

تمرين رقم 74

1) المسافة التي قطعتها النقطة المادية المتحركة بين اللحظتين t_1 و t_2 (مع $t_1 < t_2$) هي:

$$d(t_2) - d(t_1) = \left[d(t)\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

2) $$\mu = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1}$$

هذه القيمة المتوسطة تمثل معدل تغير المسافة التي قطعتها النقطة المادية المتحركة بين اللحظتين t_1 و t_2

3) * $$\mu = \int_0^1 v(t)\,dt = \int_0^1 3e^{-t}\,dt$$

$$= -3\left[e^{-t}\right]_0^1 = 3\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

* $$d(1) - d(0) = \int_0^1 v(t)\,dt = 3\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

* لدينا $$d(T) - d(0) = \int_0^T 3e^{-t}\,dt$$

$$= -3\left(e^{-T}-1\right) = 3\left(1-e^{-T}\right)$$

وبما أن $\forall T>0,\ e^{-T} \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall T>0;\ 3(1-e^{-T}) \leq 3$

فإن. $\forall T>0,\ d(T) \leq 3$

تمرين رقم 75

1) لدينا: $$R I_e^2 T = \int_0^T R I^2(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow R I_e^2 T = R\int_0^T I^2(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow I_e^2 T = \int_0^T I^2(t)\,dt$$

إذن: $$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T} I_e^2 T = I_e^2$$

2) $$\int_0^T \sin^2(wt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T (1-\cos(2wt))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\right]_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T \cos(2wt)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}T - \frac{1}{4w}\left[\sin(2wt)\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}T - \frac{1}{4w}\sin(2wT)$$

نعوض $w = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{1}{2}T$$

إذن: $$\int_0^T I^2(t)\,dt = I_e^2 T$$

$$\int_0^T I_m^2 \sin^2(wt)\,dt = I_e^2 T$$

$$\Leftrightarrow I_m^2\int_0^T \sin^2(wt)\,dt = I_e^2 T$$

$$\Leftrightarrow I_m^2 \frac{T}{2} = I_e^2 T$$

$$\Leftrightarrow \frac{I_m^2}{2} = I_e^2$$

$$\Leftrightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

تمرين رقم 76

نعتبر الدالتين العدديتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$u(x) = e^{-x} + x - 1$ ، $v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$

1) لدينا $\forall x \in \mathbb{R};\ u'(x) = -e^{-x} + 1$

$$= \frac{e^x - 1}{e^x}$$

بما أن: $\forall x \in [0,1];\ e^x \geq 1$

فإن $\forall x \in [0,1];\ u'(x) \geq 0$

x	0		1
$u'(x)$		+	
$u(x)$	0	↗	

إذن: $\forall x \in [0,1],\ u(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1];\ e^{-x} + x - 1 \geq 0$

ولدينا $\forall x \in [0,1];\ v'(x) = -1 + x + e^{-x}$

$$= u(x) \geq 0$$

x	0		1
$v'(x)$		+	
$v(x)$	0	↗	

ب) لدينا :
$\forall x \in [0,1] \; ; \; u(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \; ; \; e^{-x} \geq 1-x$
ولدينا :
$\forall x \in [0,1] \; ; \; v(x) \geq 0$
$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \; ; \; e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$
اذن
$\forall x \in [0,1] \; ; \; 1-x \leq e^{-x} \leq 1-x+\frac{x^2}{2}$

2) نضع : $X = x^2$
لدينا : $0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq X \leq 1$
حسب السؤال السابق :
$\forall X \in [0,1] \; ; \; 1-X \leq e^{-X} \leq 1-X+\frac{X^2}{2}$
$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \; ; \; 1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1-x^2+\frac{x^4}{2}$
$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \; ; \; (1-x)(1+x) \leq e^{-x^2} \leq (1-x)(1+x)+\frac{x^4}{2}$
$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \; ; \; 1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$

3) أ)
$\forall x \in [0,1] \; ; \; x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1} =$
$= \frac{x^3(x+1)-x^2(x+1)+x(x+1)-(x+1)+1}{x+1}$
$= \frac{x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x-1+1}{x+1}$
$= \frac{x^4}{x+1}$

ب) $\forall x \in [0,1] \quad 1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \; ; \; 1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x+\frac{1}{2}\left(x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1}\right)$
$\Leftrightarrow \forall x \in [0,1] \; ; \; 1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2(x+1)}$
$\Leftrightarrow \int_0^1 (1-x)\,dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2(x+1)}\right)dx$
$\Leftrightarrow \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_0^1$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq I \leq \frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24}+\frac{1}{2}\ln 2$

اذن : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{24}+\frac{1}{2}\ln 2\right)\right) = \frac{17}{48}+\frac{\ln 2}{4}$
هو مقرب للعدد I بالدقة 3.10^{-2}

تمرين رقم (77)

I نعتبر الدالة العددية u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$u(x) = e^{x}-(x+1)$
لدينا : $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; u'(x) = e^{x}-1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
$u(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

تعتبر القيمة الدنوية للدالة $u(x)$ على $\mathbb{R}$ هي 0
فإن $\forall x \in \mathbb{R}^* \; ; \; u(x) > 0$

II نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$f(x) = e^{2x}-2xe^{x}-1$

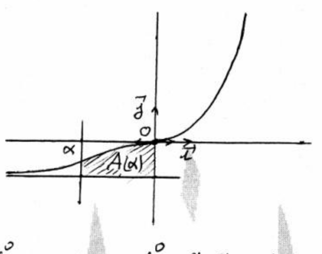
1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1-2\frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{2x}}\right)$
$= +\infty$
(لأن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$)
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (e^{2x}-2xe^{x}-1) = -1$
(لأن : $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$)

2) لدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$
اذن المنحنى C_f بجوار $-\infty$ مقاربا معادلته $y=-1$
ولدينا : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
اذن : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x}-e^{x}-\frac{1}{x}\right)$
$= \lim_{x \to +\infty} e^{x}\left(\frac{e^{x}}{x}-1-\frac{1}{xe^{x}}\right) = +\infty$
اذن المنحنى C_f بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

3) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = 2e^{2x}-2(e^{x}+xe^{x})$
$= 2e^{x}(e^{x}-(x+1))$
$= 2(u(x))\,e^{x}$

4)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



5) $A(\alpha) = \int_\alpha^0 |1-f(x)|\,dx = \int_\alpha^0 |-e^{x}(e^{x}-2x)|\,dx$
$= \int_\alpha^0 (e^{2x}-2xe^{x})\,dx = \int_\alpha^0 e^{2x}\,dx - 2\int_\alpha^0 xe^{x}\,dx$
نحسب : $I = \int_\alpha^0 xe^{x}\,dx$
نضع : $u'(x) = e^{x}$ و $v(x) = x$
اذن $u(x) = e^{x}$ و $v'(x) = 1$
اذن : $I = [xe^{x}]_\alpha^0 - [e^{x}]_\alpha^0$
$= -\alpha e^{\alpha} - 1 + e^{\alpha}$
$A(\alpha) = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_\alpha^0 - 2(-\alpha e^{\alpha}-(1-e^{\alpha}))$
$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2\alpha}+2\alpha e^{\alpha}+2-2e^{\alpha}$
$= \frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2\alpha}+2(\alpha-1)e^{\alpha}$
$\lim_{\alpha \to -\infty} A(\alpha) = \frac{5}{2}$

10 حساب الاحتمالات

1

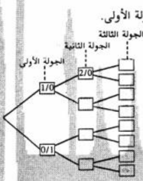
رمينا نردا وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6 مرتين متتابعتين.
أنشئ شجرة الإمكانيات.

2

يحتوي صندوق على كرة بيضاء وكرة حمراء وكرة سوداء.
نسحب بالتتابع وبدون إحلال جميع الكرات، أنشئ شجرة الإمكانيات.

3

يلعب لاعبان لكرة المضرب A وB ثلاث جولات متتالية، وفي كل جولة نسجل النتيجة على الشكل الآتي: في الجولة الأولى: $1/0$ وتعني أن اللاعب A ربح الجولة الأولى.
أو $0/1$ وتعني أن اللاعب B ربح الجولة الأولى.
بعد انتهاء الجولة الثانية نحصل على نتائج من بينها: $2/0$ وتعني أن اللاعب A فاز بالجولتين الأولى والثانية.
انقل إلى دفترك الشجرة الآتية ثم أتممها.



4

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء وكرتين خضراوين.
نسحب بالتتابع و بإحلال 3 كرات.
1) ما عدد الإمكانيات؟
2) ما عدد إمكانيات الحصول على 3 كرات حمراء؟

5

ما عدد الأرقام الهاتفية المكونة من 9 أرقام كلها مختلفة (نفترض أن الرقم الأول يمكن أن يساوي ما بين 0 و 9)؟

6

يحتوي صندوق على 9 كرات مرقمة من 1 إلى 9 نسحب بالتتابع وبدون إحلال 3 كرات.
1) ما عدد الإمكانيات؟
2) ما عدد إمكانيات الحصول على 3 كرات تحمل كلها أرقاما زوجية؟
3) ما عدد إمكانيات الحصول على :
أ) الكرة الأولى فقط تحمل رقما فرديا .ب) كرة واحدة تحمل رقما فرديا فقط.

7

نهتم بترتيب المتسابقين الثلاثة الأوائل في سباق للدراجات مكون من أربعين متسابقا، (كل رتبة يحتلها متسابق واحد). ما عدد النتائج الممكنة؟

8

كم تبديلة مختلفة يمكن أن نكون باستعمال جميع حروف كلمة "سقراط"؟

9

يحتوي صندوق على تسع كرات مرقمة من 1 إلى 9 (كل كرة تحمل رقما واحدا).
نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق.
1) حدد عدد السحبات الممكنة.
2) احسب عدد السحبات المكونة من كرتين تحملان رقمين زوجين.
3) احسب عدد السحبات المكونة من كرة تحمل رقما زوجيا وكرة تحمل رقما فرديا.

10

تتكون مجموعة من 12 شخصا: 5 رجال و 7 نساء.
تريد هذه المجموعة اختيار وفد مكون من ستة أشخاص لتمثيلها.
1) ما عدد الحالات الممكنة؟
2) ما عدد الحالات للحصول على وفد يضم امرأة واحدة فقط ؟

11

استدعى المسؤول عن الألعاب الجماعية بإحدى الثانويات عشرة تلاميذ لتشكيل فريق لكرة السلة، موزعين كالتالي: اثنان من المستوى الأول، ثلاثة من المستوى الثاني وخمسة من المستوى الثالث.
حدد عدد الحالات لاختيار:
1) فريق يضم تلميذا من المستوى الأول، وتلميذا من المستوى الثاني، وثلاثة تلاميذ من المستوى الثالث.
2) فريق يضم تلميذا من المستوى الثاني ولا يضم أي تلميذ من المستوى الأول.
3) فريق يضم التلميذ أحمد من المستوى الأول، وتلميذين على الأقل من المستوى الثاني، والباقين من المستوى الثالث.

12

بسط الأعداد التالية :

$$b = \frac{8! + 6!}{5!} \quad ; \quad a = \frac{7! \times 5!}{6! \times 4!}$$

$$d = \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} \quad ; \quad c = \frac{(n+2)!}{n!}$$

13

بسط الأعداد التالية :

$$d = \frac{3C_{n+1}^{3}}{C_n^{2}} \quad ; \quad c = \frac{C_{10}^{4}}{C_8^{2}} \quad ; \quad b = \frac{A_n^{4}}{A_n^{2}} \quad ; \quad a = \frac{A_6^{2}}{A_5^{3}}$$

14

حل في IN المعادلات التالية :

1) $A_{n+2}^{2} = 6$ 　 2) $A_{n+1}^{4} = 2A_{n-1}^{3}$

3) $C_n^{3} = 5n$ 　 4) $6C_{n+2}^{3} + 4C_{n+2}^{2} = 3A_{n+2}^{2}$

19

A وB حدثان بحيث $p(A)=0,7$ و $p(B)=0,5$.
1) هل يمكن أن يكون لدينا $p(A \cap B) = 0,1$ ؟ $p(A \cap B) = 0,2$ ؟
2) حدد المجال الذي ينتمي إليه العدد $p(A \cap B)$ ؟

20

A وB حدثان بحيث $p(A) = \frac{1}{2}$ و $p(B) = \frac{2}{7}$ و $p(A \cap B) = \frac{3}{14}$.
1) احسب $p(\overline{A})$ و $p(A \cup B)$.
2) أ) تحقق من أن: $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ (يمكن الاستعانة بشكل مع إبراز A و B و Ω).
ب) استنتج $p(\overline{A} \cup \overline{B})$ ثم $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

21

نرمي نردا مكعبا وجوهه الستة مرقمة من 1 إلى 6، ونرمز بالعدد p_k لاحتمال ظهور العدد k حيث $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$

حدد الأعداد p_k في كل حالة من الحالات الآتية :
1) $p_4 = p_5 = p_6 = \frac{p_1}{2}$ و $p_1=p_2=p_3$.
2) $\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_5}{5} = \frac{p_6}{6}$

22

يحتوي كيس على 10 بيدقات تحمل الأرقام: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9.
الأرقام 0 و1 و2 و3 و4 مكتوبة بالأحمر.
الأرقام 5 و6 و7 مكتوبة بالأزرق.
الرقمان 8 و9 مكتوبان بالأصفر.
لايمكن التمييز بينها باللمس
نسحب تآنيا وبكيفية عشوائية 3 بيدقات.
ما الاحتمال لكي نحصل على:
1) ثلاثة أرقام زوجية؟
2) ثلاثة أرقام لها نفس اللون؟
3) ثلاثة أرقام مختلفة الألوان؟
4) ثلاثة أرقام زوجية لها نفس اللون؟
5) ثلاثة أرقام زوجية ألوانها مختلفة؟

23

رمينا 3 نرود A وB وC أوجهها مرقمة من 1 إلى 6.
احسب الاحتمال لكي:
1) نحصل على الرقم 1 مرة واحدة.
2) نحصل على الرقم 1 على الأقل مرة واحدة.
3) نحصل على 3 أرقام مختلفة.
4) نحصل على رقمين متساويين على الأقل.
5) نحصل على رقمين متساويين بالضبط.
6) نحصل على رقمين مجموعهما عدد زوجي.

24

يحتوي كيس على 3 كرات حمراء تحمل الأرقام 2 و4 و8 ، وعلى 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 3 و5 و7.لايمكن التمييز بينها باللمس.
نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس فنحصل على عدد مكون من رقمين.
1) كم عددا يمكن تكوينه؟
2) احسب احتمال الحصول على عدد مكون من رقمين مسجلين على كرتين ليس لهما نفس اللون.

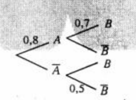
25

1) نعتبر التجربة التي تتمثل في رمي قطعتي نقود.
ما احتمال الأحداث التالية :
A: "القطعتان تسقطان على وجهيهما"؟
B: "القطعتان تسقطان على ظهريهما"؟
C: "القطعتان تسقطان على جهتين مختلفتين"؟
2) نربط التجربة السابقة باللعبة التالية :
نضع بيدقة فوق الخانة رقم 0 من مجموع سبع خانات مرقمة من اليسار إلى اليمين على الشكل التالي:
$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
– نرمي ثلاث مرات متتابعة قطعتي النقود وفي كل رمية :
- إذا تحقق الحدث A نزيح البيدقة عن الخانة التي توجد فيها إلى الخانة التي توجد بجوار هذه الأخيرة من جهة اليمين.
- إذا تحقق الحدث B نزيح البيدقة عن الخانة التي توجد فيها إلى الخانة التي توجد بجوار هذه الأخيرة من جهة اليسار.
- إذا تحقق الحدث C نترك البيدقة في الخانة التي توجد فيها.

احسب احتمال الأحداث التالية :
E_3: "توجد البيدقة في الخانة رقم 3 بعد الرميات الثلاث".
E_2: "توجد البيدقة في الخانة رقم 2 بعد الرميات الثلاث".
E_0: "توجد البيدقة في الخانة رقم 0 بعد الرميات الثلاث".

26

1) أتمم شجرة الأحداث التالية :



2) احسب $p(A \cap B)$ و $p(\overline{A} \cap B)$ ثم استنتج $p(B)$.
3) احسب $p_B(A)$.

27

A وB حدثان بحيث $p(A)=0,3$ و$p(B)=0,3$ و$p(A \cap B) = 0,2$.
احسب مايلي: $p_A(B)$; $p_A(\overline{B})$; $p_B(A)$; $p_B(\overline{A})$

28

ليكن A وB حدثين بحيث: $p(A)=0,4$ و$p(B)=0,5$.
احسب $p(\overline{A} \cup B)$ و $p_A(A \cap B)$ و$p_B(\overline{A})$ في الحالات التالية :
1) A وB حدثان مستقلان.
2) A وB حدثان غير منسجمين.
3) $p(A \cup B) = 0,8$.

31

نعتبر مجتمعا مكونا من 60% من الرجال و40% من النساء. نعلم أن 20% من الرجال و10% من النساء يتكلمون اللغة الفرنسية.
اخترنا عشوائيا شخصا من هذا المجتمع.
ما الاحتمال أن يكون هذا الشخص:
1) رجلا يتكلم الفرنسية؟
2) رجلا لا يتكلم الفرنسية؟
3) امرأة تتكلم الفرنسية؟
4) امرأة لا تتكلم الفرنسية؟

32

يحتوي كيس على ثلاث كرات حمراء وكرتين بيضاوين.
سحبنا من هذا الكيس كرتين بالتتابع وبدون إحلال.
نعتبر الأحداث التالية :
A: "الكرة الأولى حمراء".
B: "الكرة الثانية بيضاء".
هل الحدثان A و B مستقلان؟

33

احتمالات إصابة الهدف من طرف ثلاث رماة هي على التوالي: $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$.
رمى كل واحد منهم الهدف رمية واحدة.
1) احسب الاحتمال لكي يصيب واحد منهم بالضبط الهدف.
2) إذا أصيب الهدف مرة واحدة فما هو الاحتمال لكي يكون أول الرماة هو الذي أصابه.

34

احتمال فوز إحدى الفرق الرياضية في كل مباراة تلعبها هو 0,6، واحتمال انهزامها هو 0,3، واحتمال تعادلها هو 0,1.
لعبت هذه الفرقة ثلاث مباريات خلال نهاية الأسبوع.
1) احسب احتمال فوز هذه الفرقة مرتين على الأقل دون أن تنهزم.

2) احسب الاحتمال لكي تفوز مرة وتنهزم مرة وتتعادل مرة.

35

يحتوي صندوق A على 3 كرات حمراء وكرتين سوداوين، ويحتوي صندوق B على كرتين حمراوين و5 كرات سوداء.
نختار عشوائيا أحد الصندوقين ونسحب منه كرة ثم نضعها في الصندوق الآخر. فنسحب كرة من الصندوق الأخير.
احسب الاحتمال P لكي يكون للكرتين نفس اللون.

36

ينتج معمل مصابيح كهربائية بواسطة ثلاث آلات: A وB وC. الآلة A تضمن 20% من الإنتاج و5% من المصابيح المصنوعة ب A غير صالحة. الآلة B تضمن 30% من الإنتاج و4% من المصابيح المصنوعة ب B غير صالحة. الآلة C تضمن 50% من الإنتاج و1% من المصابيح المصنوعة ب C غير صالحة.

1) أخذنا وبكيفية عشوائية مصباحا كهربائيا. ما احتمال:
أ- أن يكون المصباح غير صالح ومصنوعا ب A؟
ب- أن يكون المصباح غير صالح ومصنوعا ب B؟
ج- أن يكون المصباح غير صالح ومصنوعا ب C؟
ثم استنتج احتمال أن يكون مصباح مأخوذا بكيفية عشوائية غير صالح.
2) أخذنا بكيفية عشوائية أحد المصابيح فإذا هو غير صالح.
احسب احتمال أن يكون هذا المصباح مصنوعا ب A؟

37

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء مرقمة ب: $-1, -1, 1, 1$ وثلاث كرات سوداء مرقمة ب: $0, 0, 1$. كل الكرات غير قابلة للتمييز باللمس. نسحب تآنيا وعشوائيا كرتين من الكيس.

1) ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من نفس اللون؟
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المحصل عليهما. حدد قانون احتمال X.

38

يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وثلاث كرات زرقاء.
نسحب عشوائيا أربع كرات بالتتابع وبإحلال من الصندوق.
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الزرقاء التي سحبت.

1) ضع قانون احتمال X.
2) احسب الأمل الرياضي والمغايرة.

39

I) يحتوي كيس على 12 كرة غير قابلة للتمييز باللمس، 4 كرات حمراء و8 كرات بيضاء.
نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس.
1) ما احتمال سحب كرتين من نفس اللون؟
2) ما احتمال سحب كرتين أولاهما بيضاء؟

II) نسحب بالتتابع وبإحلال كرتين من الكيس.
1) ماهو احتمال سحب كرة واحدة حمراء؟
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس.
أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X.
ب- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X.
ج- احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

40

يحتوي صندوق على 6 بيدقات لا يمكن التمييز بينها باللمس؛ ثلاث بيدقات حمراء تحمل الأرقام: $1, 2, 3$ وثلاث بيدقات خضراء تحمل الأرقام: $1, 1, 2$.
نسحب عشوائيا وفي آن واحد بيدقتين من الصندوق، وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بالقيمة المطلقة لفرق الرقمين المحصل عليهما.

1) أ- حدد القيم التي يأخذها X.
ب- حدد قانون احتمال X.
ج- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والمغايرة $V(X)$ للمتغير العشوائي X.
2) احسب احتمال الحصول على بيدقتين تحملان نفس الرقم علما أنهما مختلفتي اللون.

41

يحتوي صندوق على تسع كرات: أربع منها بيضاء ومرقمة $1, 2, 3, 4$ وخمس منها سوداء ومرقمة $5, 6, 7, 8, 9$.

1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق. وليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.
أ- حدد قانون احتمال X.
ب- احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.
2) نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق ونعتبر العدد المكون من الأرقام الثلاثة المحصل عليها حيث الرقم المكتوب على الكرة الأولى هو رقم المئات، والرقم المكتوب على الكرة الثانية هو رقم العشرات، والرقم المكتوب على الكرة الثالثة هو رقم الوحدات:
احسب احتمال الحدثين الآتيين.
(E_1): "الحصول على عدد أصغر من 300".
(E_2): "الحصول على عدد زوجي".

42

يحتوي صندوق على 4 كرات تحمل العدد a و5 كرات تحمل العدد $(a-1)$; $(a \in IR)$.
نسحب تآنيا وعشوائيا 3 كرات من الصندوق.

1) احسب احتمال الحدثين التاليين:
A: سحب 3 كرات تحمل نفس العدد.
B: سحب كرتين بالضبط تحمل نفس العدد.
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة.
أ- حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X.
ب- حدد قانون احتمال X.
ج- احسب الأمل الرياضي بدلالة a وحدد a من أجل: $E(X)=0$.

43

نتوفر على نرد مكعب، وجوهه الستة تحمل على التوالي الأعداد: -2، 2، 1، 1، 1، -1.
نفترض أن الوجوه الستة لهذا النرد متساوية الاحتمال.

1) نرمي هذا النرد مرة واحدة. ونعتبر العدد الذي يعينه النرد عندما يستقر.
أ- احسب احتمال الحدثين التاليين:
الحدث A "النرد عين عددا نسبيا زوجيا".
الحدث B "النرد عين عددا موجبا".
ب- احسب احتمال الحدث B علما أن الحدث A محقق.
ج- هل الحدثان A وB مستقلان؟ علل جوابك.
2) رمينا هذا النرد ثلاث مرات متتالية. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل إمكانية بعدد المرات التي عين فيها النرد عددا نسبيا زوجيا.

أ- حدد قانون احتمال X.
ب- احسب احتمال الحدث C "النرد عين عددا نسبيا زوجيا مرتين على الأكثر".

44

يتكون مكتب إحدى الجمعيات من 16 عضوا: عدد الذكور 12، عدد المتزوجين 10، من بينهم امرأتان.

1) اختير (بواسطة القرعة) أحد الأعضاء رئيسا للمكتب.
أ- ما احتمال أن يكون الرئيس ذكرا غير متزوج؟
ب- ما احتمال أن يكون الرئيس أنثى؟
2) اختار المكتب (بواسطة القرعة) وفدا يتكون من عضوين لتمثيله في أحد المؤتمرات.
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأعضاء الذكور من بين العضوين المختارين.
ليكن Y المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأعضاء المتزوجين.
أ- حدد قيم X: $X(\Omega)$ وقيم Y: $Y(\Omega)$.
ب- حدد قانون احتمال X وقانون Y.
ج- احسب $\sigma(X)$ و $\sigma(Y)$.

45

يحتوي كيس على بيدقتين خضراوين و4 بيدقات حمراء مرقمة كمايلي:
- بيدقة خضراء واحدة تحمل الرقم 1 والأخرى تحمل الرقم 2.
- بيدقتان حمراوان تحملان الرقم 1 وبيدقتان حمراوان تحملان الرقم 2.
نسحب في آن واحد ثلاث بيدقات من الكيس مع العلم أنه لا يمكن التمييز بين جميع البيدقات باللمس.

1) ما احتمالات الأحداث التالية:
أ- A: "جميع البيدقات المسحوبة حمراء".
ب- B: "بيدقة واحدة بالضبط خضراء".
ج- C: " البيدقات الثلاث المسحوبة تحمل الرقم 1".
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البيدقات الخضراء المسحوبة، وليكن Y المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الأرقام التي تحملها البيدقات المسحوبة الثلاث.
أ- حدد قانون احتمال X.
ب- حدد قانون احتمال Y.

46

1) a و b عددان حقيقيان غير منعدمين.
باستعمال الاستدلال بالترجع بَيِّنْ أن:
$$(\forall n \in IN^*) \; ; \; (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$
$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$
2) انشر: $(x-2)^6$ و $(2x-y)^7$.
3) بَيِّنْ أن: $(\forall n \in IN) \; ; \; 2^n > n$.
4) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بمايلي:
$f(x)=(1+x)^n$ حيث n ينتمي إلى IN^*.
أ- احسب $f'(x)$ لكل x من IR بطريقتين مختلفتين.
ب- استنتج أن: $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n.2^{n-1}$
ج- حدد قيمة المجموع: $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

47

يصنع معمل قطعا، بحيث 1,8% منها غير صالحة.
مراقبة القطع داخل المعمل تجرى بحيث:
97% من القطع الصالحة مقبولة.
99% من القطع غير الصالحة مرفوضة.

1) ما احتمال أن تكون قطعة غير صالحة؟
2) ما احتمال أن تكون قطعة غير صالحة مقبولة؟
3) ما احتمال أن تكون قطعة صالحة ومرفوضة؟
4) ما احتمال أن يكون خطأ في المراقبة؟

48

رمينا نردا (وجوهه مرقمة من 1 إلى 6) ثلاث مرات متتابعة. نرمز ب a لنتيجة الرمية الأولى وب b للثانية وب c للثالثة.
نعتبر في IR المعادلة $ax^2+bx+c=0$
ما احتمال أن يكون لهذه المعادلة حل مزدوج؟

49

وُضِعَ فَأْرٌ في صندوق به أربعة أبواب متشابهة بحيث باب واحد و واحد فقط إذا قصده الفأر فإنه يخرج، وإذا قصد إحدى الأبواب الثلاثة الأخرى فإنه يتلقى صدمة كهربائية تعيده إلى نقطة انطلاقه وهكذا حتى يقصد الباب الجيد.

1) نفترض أنه ليس للفأر أية ذاكرة، بحيث في كل محاولة يقصد بكيفية متساوية الاحتمال أحد الأبواب الأربعة.
احسب احتمال الأحداث التالية:
A "الفأر خرج عند المحاولة الثالثة".
B "الفأر خرج عند المحاولة السابعة".
2) نفترض أن الفأر يتمتع بذاكرة قوية، بحيث في كل محاولة يتجنب الأبواب التي اختارها في المحاولات السابقة.
ويختار بكيفية عشوائية أحد الأبواب التي لم يقصدها بعد.
ليكن k عدد المحاولات التي قام بها الفأر. حدد القيم الممكنة ل k ثم احتمال الحدث "الفأر خرج عند المحاولة رقم k".

50

يحتوي صندوق A على 4 كرات: كرتان حمراوان وكرتان بيضاوان.
ويحتوي صندوق B على 5 كرات: ثلاث كرات حمراء وكرتان بيضاوان.
(لا يمكن التمييز بين الكرات التسع باللمس).
نسحب عشوائيا كرة من الصندوق A، نسجل لونها ونضعها في الصندوق B ثم نسحب بالتتابع وبإحلال كرتين من الصندوق B ونسجل لونيهما.

1) احسب احتمال الحدث التالي "تسجيل اللون الأحمر ثلاث مرات".
2) عند سحب كرة حمراء فإننا نسجل العدد النسبي $(+2)$، وعند سحب كرة بيضاء فإننا نسجل العدد النسبي (-1).
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي المجموع للأعداد بعد سحب الكرات الثلاثة.
أ- حدد قيم المتغير العشوائي X.
ب- حدد قانون احتمال X.

51

يحتوي كيس على ثلاثة أقراص بيضاء، وأربعة أقراص حمراء، وخمسة أقراص خضراء. الأقراص البيضاء تحمل الأرقام: $1, 1, 2$
الأقراص الحمراء تحمل الأرقام: $1, 1, 2, 2$
الأقراص الخضراء تحمل الأرقام: $1, 2, 2, 2, 3$.
نسحب عشوائيا وفي آن واحد قرصين من الكيس.

1) نعتبر الحدثين:
الحدث A: "سحب قرصين من نفس اللون".
الحدث B: "سحب قرص أخضر على الأقل".

أ- احسب احتمال الأحداث A و B و $A \cap B$.

ب- هل الحدثان A وB مستقلان؟

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع العددين المسجلين على القرصين المسحوبين.

أ- أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب- احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X.

ج- احسب $V(X)$ مغايرة المتغير العشوائي X.

52

يحتوي كيس على 10 صفائح مرقمة من 0 إلى 9 لا يمكن التعرف عليها باللمس. نسحب بالتتابع وبدون إحلال أربع صفائح ونضعها جنبا إلى جنب من اليسار إلى اليمين في ترتيب السحب بحيث نحصل على عدد مكون من أربعة أرقام.

نفترض أن جميع السحبات لها نفس الاحتمال، وأن الرقم صفر يمكن أن يكون أول رقم في العدد المحصل.

1) احسب احتمال الحصول على:

أ- العدد 1987.

ب- العدد 1989.

ج- عدد مكون من أرقام زوجية فقط.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأرقام الزوجية المحصل عليها. حدد قانون احتمال X.

53

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء وكرتين حمراوين. نسحب عشوائيا وتآنيا ثلاث كرات من U_1. لا يمكن التمييز بينها باللمس.

1) احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

A: "سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء".

B: "سحب ثلاث كرات من نفس اللون".

C: "سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل".

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة.

احسب احتمال كل من الحدثين: $(X=3)$; $(X=2)$

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين وكرة سوداء.

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وتآنيا كرتين من U_2.

ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون؟

54

ينطلق الإنذار بمصنع مجهز "بنظام الإنذار" مبدئيا في حالة وقوع عطب بإحدى وحدات الإنتاج ويمكن أن ينطلق الإنذار خطأ وبالفعل تمت دراسة إحصائية بينت أنه خلال يوم:

احتمال انطلاق الإنذار خطأ هو $\frac{1}{50}$، واحتمال أن يقع عطب دون أن ينطلق الإنذار هو $\frac{1}{500}$، واحتمال أن يقع عطب بالمصنع هو $\frac{1}{100}$.

نعتبر الحدثين:

A "انطلاق الإنذار".

I "وقع عطب بالمصنع".

الجزء الأول:

1) احسب احتمال الحدث E "وقوع عطب بالمصنع وانطلاق الإنذار" بالنسبة ليوم ثم استنتج احتمال الحدث A.

2) احسب احتمال الحدث F "وقوع خطأ بجهاز الإنذار" بالنسبة ليوم.

3) ما احتمال وقوع حادث بالمصنع علما أن جهاز الإنذار انطلق؟

الجزء الثاني:

المُؤَمِّنُونَ يقدرون أن تكلفة الأعطاب بالنسبة للشركة هو كالتالي:

$5000dh$ لعطب عندما يعلن عنه جهاز الإنذار.

$15000dh$ لعطب عندما لا يعلن عنه جهاز الإنذار.

$10000dh$ عندما ينطلق الإنذار خطأ.

نفترض أن عطبا يقع كل يوم في المعمل على الأكثر.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي التكلفة اليومية للأعطاب في هذا المعمل.

1) حدد قانون احتمال X.

2) أعط معدل التكلفة اليومية للأعطاب في هذا المعمل.

55

يحتوي كيس على 3 كرات بيضاء و4 كرات سوداء غير قابلة للتمييز باللمس.

نجري سلسلة من السحبات: في كل سحبة نأخذ عشوائيا كرة من الكيس. إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب، وإذا كانت بيضاء لا نعيدها

إلى الكيس ونسحب كرة أخرى، وهكذا دواليك.

1) أ- احسب احتمال الحدثين:

A "الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء".

B "الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء".

ب- استنتج حساب الاحتمال لكي لا نجري السحبة الثالثة.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها. أعط قانون احتمال X.

56

يحتوي صندوق على $10n$ كرات $(n \in IN^*)$ من صنفين A وB موزعة حسب الجدول التالي:

الصنف \ اللون	أحمر	أخضر
A	$2n$	n
B	$4n$	$3n$

1) أ- احسب احتمال سحب كرة حمراء.

ب- احسب احتمال سحب كرة حمراء من الصنف A.

2) احسب احتمال سحب كرة من الصنف A علما أن لونها أحمر.

3) نسحب تآنيا وعشوائيا كرتين من الصندوق.

أ- احسب p_n احتمال سحب كرتين مختلفتي اللون.

ب- استنتج Q_n احتمال سحب كرتين من نفس اللون.

ج- حدد القيمة الدنوية ل n بحيث يكون p_n أصغر من Q_n.

57

1) نعتبر المتتالية العددية (u_n)، المعرفة بمايلي: $u_1 = \frac{1}{2}$ و $(\forall n \in IN^*)\ ;\ u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$

أ- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي: $(\forall n \in IN^*)\ ;\ v_n = u_n - \frac{2}{5}$. بيّن أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسية.

ب- حدد v_n ثم u_n بدلالة n.

2) نعتبر نردين A وB، بحيث:

- للنرد A ثلاثة وجوه لونها أحمر وثلاثة وجوه لونها أبيض.

- للنرد B أربعة وجوه لونها أحمر ووجهان لونهما أبيض.

نختار عشوائيا أحد النردين ثم نرميه، إذا حصلنا على وجه أحمر، نحتفظ

به، وإذا حصلنا على وجه أبيض نغير النرد بالآخر ونعيد التجربة.

ليكن A_n الحدث: "نرمي النرد A في الرمية n".

و R_n الحدث: "نحصل على وجه لونه أحمر في الرمية n".

نرمز ب a_n و r_n على التوالي لاحتمال الحدثين A_n و R_n.

أ- حدد a_1.

ب- حدد r_1 (يمكنك الاستعانة بشجرة الاختيار).

ج- بملاحظة أن لكل n من IN^*: $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$.

بيّن أن: $r_n = \frac{-1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

د- بيّن أنه لكل n من IN^*: $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$.

هـ- استنتج أن لكل n من IN^*: $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ ثم حدد a_n بدلالة n.

و- استنتج r_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} r_n$.

58

يحتوي كيس على كرة واحدة بيضاء و $n-1$ كرة سوداء. $(n>1)$.

1) نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس. ليكن X عدد الكرات السوداء المسحوبة.

أ- أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X.

ب- احسب بدلالة n الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير X.

2) نسحب هذه المرة n كرة من الكيس بالتتابع وبإحلال.

احسب، بدلالة n، $p(n)$ احتمال سحب n مرة الكرة البيضاء.

3) نضع $U_n=p(n)$ لكل n من IN^*. بيّن أن المتتالية $(U_n)_{n\in IN^*}$ متقاربة وحدد نهايتها.

59

يتم اختيار حارس مرمى كرة القدم بعد عدة اختبارات منها ضربات الجزاء.

بعد سلسلة من ضربات الجزاء للحارس أحمد، تَبَيَّنَ أنه:

- إذا تصدى أحمد لضربة الجزاء رقم n، فإن احتمال أن يتصدى لضربة الجزاء رقم $(n+1)$ هو 0,8.

- إذا لم يتصد أحمد لضربة الجزاء رقم n، فإن احتمال أن يتصدى لضربة الجزاء رقم $(n+1)$ هو 0,6.

- احتمال أن يتصدى أحمد لضربة الجزاء الأولى هو 0.7.

ليكن A_n الحدث: "أحمد يتصدى لضربة الجزاء رقم n"

1) أ- أعط قيمة كل من $p(A_1)$ و $p_{A_n}(A_{n+1})$ و $p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.

ب- احسب $p(A_{n+1} \cap A_n)$ و $p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ بدلالة $p(A_n)$

ج- استنتج أن: $p(A_{n+1})=0,2\ p(A_n)+0,6$

2) نضع: $p_n=p(A_n)$ و $u_n=p_n-0,75$ لكل n من IN^*.

أ- بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها 0,2.

ب- استنتج u_n، ثم p_n بدلالة n.

ج- حدد نهاية $(p_n)_{n\geq 1}$ وأوّل هذه النتيجة.

60

نوزع عشوائيا 3 كرات على 4 صناديق مرقمة من 1 إلى 4 (يمكن أن يحتوي كل صندوق على k كرة، $0 \leq k \leq 3$).

1) احسب احتمالي الحدثين التاليين:

A: "صندوق واحد فقط لا يحتوي على أية كرة".

B: "أحد الصناديق يحتوي على الكرات الثلاث".

2) ليكن X المتغير العشوائي المرتبط بعدد الصناديق الفارغة بعد عملية التوزيع. حدد القيم التي يأخذها X وقانون احتماله.

61

يحتوي صندوق على 5 أشرطة لتعليم اللغة الأنجليزية، و 4 أشرطة لتعليم اللغة الإيطالية، و3 أشرطة لتعليم اللغة الألمانية.

نحسب عشوائيا، وفي آن واحد، 3 أشرطة من الصندوق.

احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

A: "سحب 3 أشرطة لتعليم اللغة الأنجليزية".

B: "سحب 3 أشرطة لتعليم نفس اللغة".

C: "سحب 3 أشرطة لتعليم 3 لغات مختلفة".

62

نعتبر خزانة مكونة من أربعة أدراج مرقمة من 1 إلى 4 وثلاثة أظرفة E_1 و E_2 و E_3.

نوزّع عشوائيا الأظرفة الثلاثة على الأدراج الأربعة بحيث كل درج يُمْكِنُهُ احتواء أكثر من ظرف.

1) احسب عدد الطرق الممكنة لتوزيع الأظرفة الثلاثة على الأدراج.

2) احسب عدد الطرق الممكنة لكي يحتوي كل درج على ظرف واحد على الأكثر.

63

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا، $n \geq 2$.

نعتبر n كيس S_1 و S_2 و... و S_n بحيث يحتوي:

S_1 على كرتين سوداوين وكرة بيضاء، ويحتوي كل كيس من الأكياس الأخرى على كرة بيضاء وكرة سوداء.

نقوم بالتجربة التالية:

- المرحلة الأولى: نسحب عشوائيا كرة من S_1؛

- المرحلة الثانية: نضع الكرة المسحوبة في الكيس S_2 ثم نسحب بعد ذلك كرة من نفس الكيس S_2؛

- المرحلة الثالثة: نضع الكرة المسحوبة من S_2 في الكيس S_3 ثم نسحب بعد ذلك كرة من S_3؛

وهكذا إلى أن نصل إلى الكيس S_n.

لكل عدد صحيح طبيعي k بحيث $1 \leq k \leq n$، نرمز ب E_k للحدث: "الكرة المسحوبة من الكيس S_k بيضاء".

1) أ- احسب $p(E_1)$ و $p_{E_1}(E_2)$ و $p_{\overline{E_1}}(E_2)$ ثم استنتج $p(E_2)$.

ب- لكل عدد صحيح k بحيث $1 \leq k \leq n$.

نضع: $p_k=p(E_k)$

تحقق من أن: $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

2) دراسة متتالية

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة بمايلي $u_1 = \frac{1}{3}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}$ لكل n من IN^*.

أ- نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بمايلي: $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ لكل n من IN^*.

- بيّن أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

- اكتب v_n بدلالة n.

ب- بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

3) نفترض في هذا السؤال أن: $n=10$.

حدد قيم k التي من أجلها يكون $0,4999 \leq P_k \leq 0,5$.

64

قررت فاطمة القيام بحمية غذائية لمدة معينة.

- احتمال احترام فاطمة لبرنامج حميتها في اليوم الأول هو 0,6.

- إذا احترمت فاطمة هذا البرنامج يوما، فإن احتمال أن لا تحترمه اليوم الموالي هو 0,8. وإذا لم تحترمه يوما، فإن احتمال أن لا تحترمه في اليوم الموالي هو 0,3.

ليكن p_n احتمال احترام فاطمة برنامج حميتها في اليوم n.

1) اكتب p_{n+1} بدلالة p_n.

2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = p_n - \frac{7}{15}$$

أ- بَيِّنْ أن (u_n) متتالية هندسية.

ب- احسب $\lim_{x \to +\infty} p_n$ ثم أوّل هذه النتيجة.

3) استنتج $\lim_{n \to +\infty} p_n$ ثم أوّل هذه النتيجة.

65

ينقسم تلاميذ قسم من الأقسام إلى مجموعتين A و B حسب الجدول التالي:

المجموعة A: " التلاميذ الذين يدرسون الأنجليزية ".

المجموعة B: " التلاميذ الذين يدرسون الإسبانية ".

	ذكور	إناث
A	10	4
B	7	6

نختار تلميذا من هذا القسم.

نفترض أن جميع التلاميذ لهم نفس الحظ لكي يقع عليهم الاختيار.

1) ما احتمال أن يكون هذا التلميذ ذكرا؟

2) إذا علمت أن هذا التلميذ من المجموعة B، ما احتمال أن يكون ذكرا؟

3) إذا علمت أن هذا التلميذ ذكر، ما احتمال أن يكون من المجموعة A؟

66

يحتوي صندوق على 20 بطاقة تحمل كل واحدة منها سؤالا.

تتعلق الأسئلة بمادتي الرياضيات والعلوم الفيزيائية، وهي موزعة كمايلي:

12 بطاقة تحمل كل واحدة منها سؤالا واحدا في الرياضيات: 4 أسئلة ي الجبر و 8 أسئلة في الهندسة.

8 بطاقات تحمل كل واحدة سؤالا واحدا في العلوم الفيزيائية:

5 أسئلة في الفيزياء و 3 أسئلة في الكيمياء.

اختيار الاختبارات الشفوية لمباراة توظيف يَسْحَبُ مترشح عشوائيا، في آن واحد، بطاقتين من الصندوق.

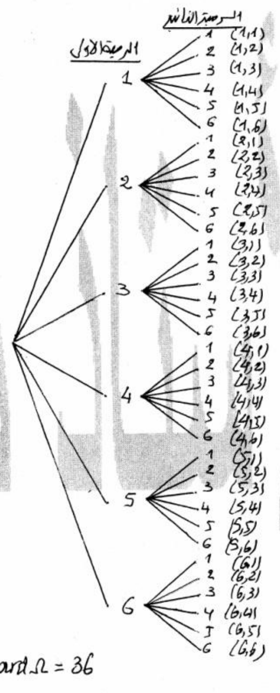
1) احسب احتمال سحب بطاقة تحمل سؤالا في الجبر وبطاقة تحمل سؤالا في الكيمياء.

2) احسب احتمال سحب بطاقتين تحملان سؤالين في الرياضيات.

3) إذا علمت أن البطاقتين المسحوبتين تحملان سؤالين في الرياضيات، ما الاحتمال أن يكون السؤالان في الهندسة؟

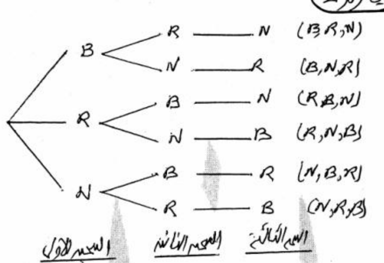
4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البطاقات التي تحمل سؤالا في الهندسة. أعط قانون احتمال X.

تمرين رقم 1



$\text{card}\,\Omega = 36$

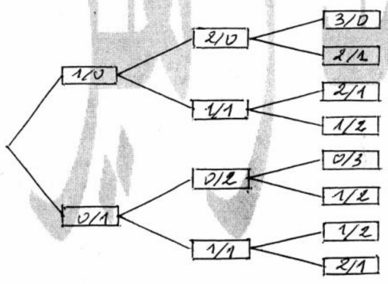
تمرين رقم 2



$\Omega = \{(B,R,N), (B,N,R), (R,B,N), (R,N,B), (N,B,R), (N,R,B)\}$

$\text{card}\,\Omega = 6$

تمرين رقم 3



تمرين رقم 4

B B R R V
B B B R R V

1) بما أننا نسحب بالتتابع وبإحلال ثلاث كرات من الكيس فإن كل سحبة هي ترتيبة بتكرار لثلاث كرات من الكيس
إذن عدد الإمكانيات الممكنة هو:

$$\text{Card } \Omega = 11^3 = 1331$$

2) للحصول على ثلاث كرات حمراء (نسحب بالتتابع وبإحلال ثلاث كرات حمراء من بين أربع كرات حمراء)
إذن عدد إمكانيات الحصول على ثلاث كرات حمراء هو:

$$4^3 = 64$$

تمرين رقم 5

اختبارين	ثلاث اختبارات	اربع اختبارات	خمس اختبارات	ست اختبارات	سبع اختبارات	ثمان اختبارات	تسع اختبارات	عشر اختبارات

وحسب مبدأ الجداء فإن عدد الأرقام الهاتفية المكونة من 9 أرقام مختلفة هو:

$$2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10 = 3628800$$

تمرين رقم 6

1) بما أن كل سحبة بالتتابع وبدون إحلال لثلاث كرات من الكيس هي ترتيبة بدون تكرار لثلاث كرات من بين التسع كرات الموجودة في الكيس فإن عدد الإمكانيات الممكنة هو:

$$A_9^3 = 504$$

2) للحصول على ثلاث كرات تحمل كلها أرقاما زوجية نسحب بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من بين الكرات المرقمة $\{2,4,6,8\}$
إذن عدد الإمكانيات الممكنة هو: $A_4^3 = 24$

3) أ) للحصول على «الكرة الأولى فقط تحمل رقما فرديا» نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرة تحمل رقما فرديا وكرتين تحملان رقما زوجيا.
إذن عدد الإمكانيات الممكنة هو:

$$A_5^1 \times A_4^2 = 60$$

ب) للحصول على «كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا» نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرة تحمل رقما فرديا وكرتين تحملان رقما زوجيا مع أخذ بعين الاعتبار ترتيب الكرات الثلاثة المسحوبة فيما بينها.
إذن عدد الإمكانيات الممكنة هو:

$$3 \cdot A_5^1 \cdot A_4^2 = 180$$

تمرين رقم 7

كل نتيجة هي ترتيبة لثلاث متسابقين من بين 40 متسابقا
إذن عدد النتائج الممكنة هو:

$$A_{40}^3 = 59280$$

تمرين رقم 8

عدد التبديلات باستعمال جميع حروف كلمة سقراط هي:

$$5! = 240$$

تمرين رقم 9

1 3 5 7
2 4 6 8 9

1) كل سحبة تآنيا لكرتين من الصندوق هي تأليفة لكرتين من بين 9 كرات
إذن عدد السحبات الممكنة هو:

$$C_9^2 = 36$$

2) للحصول على «كرتين تحملان رقمين زوجيين» نسحب تآنيا كرتين من بين الكرات المرقمة $\{2,4,6,8\}$
إذن عدد الإمكانيات هو:

$$C_4^2 = 6$$

3) للحصول على «كرتين الواحدة تحمل رقما زوجيا والأخرى تحمل رقما فرديا» نسحب كرتين تآنيا كرة من بين الكرات المرقمة $\{2,4,6,8\}$ والأخرى من بين الكرات المرقمة $\{1,3,5,7,9\}$
إذن عدد النتائج الممكنة هو:

$$C_4^1 \cdot C_5^1 = 20$$

تمرين رقم 10

1) بما أننا نختار في آن واحد ستة أشخاص من بين 12 شخصا
فإن عدد الحالات الممكنة هو:

$$C_{12}^6 = 924$$

2) للحصول على وفد يضم امرأة واحدة: نختار الخمس رجال وامرأة واحدة من بين 7 نسوة
إذن عدد الحالات الممكنة هو:

$$C_7^1 \cdot C_5^5 = 7$$

تمرين رقم 11

1 2 3 3 3
1 2 2 3 3

بما أن المسؤول عن الألعاب الجماعية سيختار لتشكيل فريق كرة السلة تآنيا خمسة تلاميذ من بين العشرة المستدعون فإن كون الإمكانيات Ω هو مجموعة التأليفات لخمسة تلاميذ من بين 10 تلاميذ المستدعون
إذن:

$$\text{Card } \Omega = C_{10}^5 = 252$$

1) لتكوين فريق يضم تلميذا من المستوى الأول وتلميذا من المستوى الثاني وثلاثة تلاميذ من المستوى الثالث يختار المسؤول عن الألعاب الجماعية تآنيا تلميذا واحدا من المستوى الأول وتلميذا واحدا من المستوى الثاني وثلاثة تلاميذ من المستوى الثالث
إذن عدد الحالات هو:

$$C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^3 = 60$$

2) لتكوين فريق يضم تلميذا من المستوى الثاني ولا يضم أي تلميذ من المستوى الأول: يختار المسؤول عن الألعاب الجماعية تآنيا تلميذا من المستوى الثاني وأربعة تلاميذ من المستوى الثالث
إذن عدد الحالات هو:

$$C_3^1 \cdot C_5^4 = 15$$

3) لتكوين فريق يضم التلميذ أحمد من المستوى الأول وتلميذين على الأقل من المستوى الثاني والباقين من المستوى الثالث
(يختار المسؤول عن الالعاب الجانبية تلقائيا التلميذ أحمد من المستوى الاول وتلميذين من المستوى الثاني وتلميذين من المستوى الثالث)
أو (يختار تلقائيا التلميذ أحمد من المستوى الاول وثلاثة تلاميذ من المستوى الثاني وتلميذ واحد من المستوى الثالث)
اذن عدد الحالات هو:

$$C_1^1 . C_3^2 . C_5^2 + C_1^1 C_3^3 . C_5^1 = 35$$

تمرين رقم 12

$$a = \frac{7!\ 5!}{6!\ 4!} = \frac{7.6!.5.4!}{6!.4!} = 7.5 = 35$$

$$b = \frac{8!+6!}{5!} = \frac{(8.7.6)5!+6.5!}{5!}$$

$$= 336 + 6 = 342$$

$$c = \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

$$d = \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n!}{n!} - \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$= n+1-n = 1$$

تمرين رقم 13

$$a = \frac{A_6^2}{A_5^3} = \frac{\frac{6!}{4!}}{\frac{5!}{2!}} = \frac{6!\ 2!}{4!\ 5!} = \frac{6.5!.2!}{4.3.2!5!}$$

$$= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{A_n^4}{A_n^2} = \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{n!}{(n-2)!}} = \frac{n!\ (n-2)!}{n!\ (n-4)!}$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = (n-2)(n-3)$$

$$c = \frac{C_{10}^4}{C_8^2} = \frac{\frac{10!}{4!\ 6!}}{\frac{8!}{2!\ 6!}} = \frac{10!\ 2!\ 6!}{8!\ 4!\ 6!}$$

$$= \frac{10.9.8!\ 2!\ 6!}{8!\ 4!\ 6!} = \frac{90}{12} = \frac{15}{2}$$

$$d = \frac{3\,C_{n+1}^3}{C_n^2} = \frac{3\frac{(n+1)!}{3!\,(n-2)!}}{\frac{n!}{2!\,(n-2)!}}$$

$$= \frac{3.\,2!\,(n+1)!\,(n-2)!}{3!\,(n-2)!\,n!}$$

$$= \frac{3!\,(n+1)\,n!\,(n-2)!}{3!\,(n-2)!\,n!} = n+1$$

تمرين رقم 14

1) $n \in \mathbb{N};\ A_{n+2}^2 = 6 \Leftrightarrow n \in \mathbb{N};\ \frac{(n+2)!}{n!} = 6$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N};\ \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 6$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N};\ (n+2)(n+1) = 6$$

$$\Leftrightarrow n \in \mathbb{N};\ n^2+3n-4 = 0$$

$$\Delta = 25;\quad n_1 = 1;\quad n_2 = -4$$

$$S = \{1\}$$

2) $n \geq 3;\ A_{n+1}^4 = 2A_{n-1}^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ \frac{(n+1)!}{(n-3)!} = 2\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ (n+1)! - 2(n-1)! = 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ (n-1)!\,(n(n+1)-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ n^2+n-2 = 0$$

$$\Delta = 9,\quad n_1 = 1,\quad n_2 = -2$$

$$S = \emptyset$$

3) $n \geq 3;\ C_n^3 = 5n \Leftrightarrow n \geq 3;\ \frac{n!}{3!\,(n-3)!} = 5n$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ n! = 30n\,(n-3)!$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ n(n-1)(n-2)(n-3)! = 30n\,(n-3)!$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ (n-1)(n-2) = 30$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3;\ n^2-3n-28 = 0$$

$$\Delta = 121,\quad n_1 = 7;\quad n_2 = -4$$

$$S = \{7\}$$

4) $n \geq 1;\ 6C_{n+2}^3 + 4C_{n+2}^2 = 3A_{n+2}^2$

$$\Leftrightarrow n \geq 1;\ 6\frac{(n+2)!}{3!\,(n-1)!} + 4\frac{(n+2)!}{2!\,n!} = 3\frac{(n+2)!}{n!}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1;\ \frac{1}{(n-1)!} + \frac{12}{n!} = \frac{3}{n!}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1;\ \frac{n}{n!} + \frac{12}{n!} - \frac{3}{n!} = 0$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1;\ n = -9$$

$$S = \emptyset$$

تمرين رقم 19

$p(A) = 0,7$ و $p(B) = 0,5$

1) نفترض أن: $p(A \cap B) = 0,1$

اذن: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$= 0,7 + 0,5 - 0,1 = 1,1$$

وهذا غير ممكن.

اذن لا يمكن ان يكون لدينا: $p(A \cap B) = 0,1$

نفترض أن: $p(A \cap B) = 0,2$

اذن: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$$= 0,7 + 0,5 - 0,2 = 1$$

إذن يمكن أن يكون لدينا: $p(A \cap B) = 0,2$

2) لدينا: $A \cap B \subset B \Leftrightarrow p(A \cap B) \leq p(B)$

$$\Leftrightarrow p(A \cap B) \leq 0,5$$

ولدينا: $A \cup B \subset \Omega \Leftrightarrow p(A \cup B) \leq p(\Omega)$

$$\Leftrightarrow p(A) + p(B) - p(A \cap B) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow p(A \cap B) \geq p(A) + p(B) - 1$$

$$\Leftrightarrow p(A \cap B) \geq 0,2$$

إذن: $0,2 \leq p(A \cap B) \leq 0,5$

تمرين رقم 20

$p(A\cap B)=\frac{3}{14}$ ، $p(B)=\frac{2}{7}$ ، $p(A)=\frac{1}{2}$

(1

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{7}-\frac{3}{14}=\frac{4}{7}$$
$$p(\overline{A})=1-p(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

2) أ)

$$x\in\overline{A\cap B}\iff x\notin A\cap B$$
$$\iff x\notin A \text{ و } x\notin B$$
$$\iff x\in\overline{A} \text{ أو } x\in\overline{B}$$
$$\iff x\in\overline{A}\cup\overline{B}$$

إذن

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

ب)

$$p(\overline{A}\cup\overline{B})=p(\overline{A\cap B})$$
$$=1-p(A\cap B)=1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}$$
$$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A\cup B})$$
$$=1-p(A\cup B)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$

تمرين رقم 21

1) لدينا:

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$$
$$\iff p_1+p_1+p_1+\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{2}+\frac{p_1}{2}=1$$
$$\iff \frac{9p_1}{2}=1 \iff p_1=\frac{2}{9}.$$

إذن:

$$p_1=p_2=p_3=\frac{2}{9} \quad ، \quad p_4=p_5=p_6=\frac{1}{9}$$

2) لدينا:

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$$
$$\iff p_1+2p_1+3p_1+4p_1+5p_1+6p_1=1$$
$$\iff 21p_1=1 \iff p_1=\frac{1}{21}$$

إذن

$$p_1=\frac{1}{21} \text{ ، } p_2=\frac{2}{21} \text{ ، } p_3=\frac{3}{21}$$
$$p_4=\frac{4}{21} \text{ ، } p_5=\frac{5}{21} \text{ ، } p_6=\frac{6}{21}$$

تمرين رقم 22

R0 R2 R4 BL6 J8
R1 R3 BL5 BL7 J9

بما أننا نسحب تآنيا ثلاث بيدقات من الكيس فإن كل تأليفة لثلاث بيدقات هي عنصر من كون الإمكانيات Ω

إذن $\text{card}\,\Omega=C_{10}^3=120$

1) A « الحصول على ثلاثة أرقام زوجية »

للحصول على ثلاثة أرقام زوجية (نسحب تآنيا ثلاث بيدقات من بين البيدقات التي تحمل رقما زوجيا)

إذن $p(A)=\frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}=\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

2) B « الحصول على ثلاثة أرقام لها نفس اللون »

للحصول على ثلاثة أرقام لها نفس اللون (نسحب تآنيا ثلاث بيدقات حمراء) أو (نسحب تآنيا ثلاث بيدقات زرقاء)

إذن $p(B)=\frac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega}=\frac{C_5^3+C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{11}{120}$

3) C « الحصول على ثلاثة أرقام مختلفة اللون »

للحصول على ثلاثة أرقام مختلفة اللون (نسحب تآنيا بيدقة حمراء وبيدقة زرقاء وبيدقة صفراء)

إذن $p(C)=\frac{\text{card}\,C}{\text{card}\,\Omega}=\frac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}$

4) D « الحصول على ثلاثة أرقام زوجية لها نفس اللون »

للحصول على ثلاثة أرقام زوجية لها نفس اللون (نسحب تآنيا البيدقات الحمراء التي تحمل الأرقام 0 و2 و4)

إذن: $p(D)=\frac{\text{card}\,D}{\text{card}\,\Omega}=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$

5) E « الحصول على ثلاثة أرقام زوجية ألوانها مختلفة »

للحصول على ثلاثة أرقام زوجية ألوانها مختلفة (نسحب تآنيا بيدقة حمراء تحمل رقما زوجيا والبيدقة الزرقاء التي تحمل الرقم 6 والبيدقة الصفراء التي تحمل الرقم 8)

إذن: $p(E)=\frac{C_3^1C_1^1C_1^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{120}=\frac{1}{40}$

تعليق: يمكن اعتبار $D=A\cap B$. الحدثان A و B غير مستقلين لأنه عندما نسحب كرة تحمل رقما زوجيا فإنه يؤثر على اختيار اللون والعكس

تمرين رقم 23

نعتبر المجموعة $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

بما أننا نرمي ثلاثة نرد A و B و C أوجهها مرقمة من 1 إلى 6 فإن كون الإمكانيات Ω هو:

$$\Omega=E\times E\times E$$

إذن: $\text{card}\,\Omega=6^3=216$

1) A « الحصول على الرقم 1 مرة واحدة بالضبط »

$$p(A)=3\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)=\frac{75}{216}$$

2) B « الحصول على الرقم 1 على الأقل مرة واحدة »

الطريقة I: لدينا $\overline{B}$ « عدم الحصول على الرقم 1 »

$$p(\overline{B})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

إذن

$$p(B)=1-p(\overline{B})$$
$$=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$$

الطريقة II: نعتبر B_1 « الحصول على الرقم 1 مرة واحدة بالضبط »

B_2 « الحصول على الرقم 1 مرتين بالضبط »

B_3 « الحصول على الرقم 1 ثلاث مرات »

لدينا:

$$p(B_1)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{75}{216}$$
$$p(B_2)=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$$
$$p(B_3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$
$$p(B)=p(B_1\cup B_2\cup B_3)$$
$$=p(B_1)+p(B_2)+p(B_3)=\frac{75+15+1}{216}=\frac{91}{216}$$

3) C « الحصول على ثلاثة أرقام مختلفة »

$$p(C)=\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{120}{216}$$

4) D « الحصول على رقمين متساويين على الأقل »

لدينا: $\overline{D}$ « الحصول على ثلاثة أرقام مختلفة »

$$p(\overline{D})=p(C)=\frac{120}{216}$$

إذن:

$$p(D)=1-p(\overline{D})$$
$$=1-\frac{120}{216}=\frac{96}{216}$$

5) E « الحصول على رقمين متساويين »

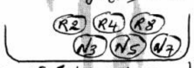
$$p(E) = 3\,\frac{A_6^2}{6^3} = \frac{90}{216}$$

6) F « الحصول على رقمين مجموعهما عدد زوجي »

الحصول على رقمين مجموعهما عدد زوجي يعني الحصول على رقمين لهما نفس الزوجية وهذا دائما متحقق.

إذن $p(F) = 1$

تمرين رقم 24



1) بما أننا نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس فإن كل ترتيبة بدون تكرار لكرتين من الكيس هي عنصر من كون الإمكانيات Ω

إذن عدد الأعداد المكونة من رقمين التي يمكن تكوينها هو:

$$card\,\Omega = A_6^2 = 30$$

2) A « الحصول على عدد مكون من رقمين مسجلين على كرتين ليس لهما نفس اللون »

يعني « الحصول على كرتين مختلفتي اللون »

$$p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = \frac{2A_3^1 \cdot A_3^1}{A_6^2} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

تمرين رقم 25

1) بما أننا نرمي قطعتين نقود فإن كون الإمكانيات هو:

$$\Omega = \{FF, PF, FP, PP\}$$

A « القطعتان تسقطان على وجهيهما »

$$p(A) = p(\{FF\}) = \frac{1}{4}$$

B « القطعتان تسقطان على ظهريهما »

$$p(B) = p(\{PP\}) = \frac{1}{4}$$

C : « القطعتان تسقطان على جهتين مختلفتين »

$$p(C) = p(\{PF, FP\}) = \frac{1}{2}$$

2) E_3 « توجد البيدقة في الخانة رقم 3 بعد الرميات الثلاث »

لكي توجد البيدقة في الخانة رقم 3 بعد الرميات الثلاث يجب أن يتحقق الحدث A في الرميات الثلاثة.

وبما أن الرميات الثلاثة مستقلة الواحدة عن الأخرى فإن:

$$p(E_3) = p(A \cap A \cap A) = p(A) \cdot p(A) \cdot p(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

E_2 « توجد البيدقة في الخانة رقم 2 بعد الرميات الثلاث »

لكي توجد البيدقة في الخانة رقم 2 بعد الرميات الثلاث يجب أن يتحقق الحدث C مرة واحدة والحدث A مرتين.

وبما أن الرميات الثلاثة مستقلة الواحدة عن الأخرى فإن:

$$p(E_2) = 3 \cdot p(A) \cdot p(A) \cdot p(C) = \frac{3}{32}$$

E_0 « توجد البيدقة في الخانة رقم 0 بعد الرميات الثلاث »

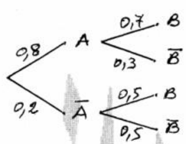
لكي توجد البيدقة في الخانة رقم 0 بعد الرميات الثلاث يجب أن (يتحقق الحدث C ثلاث مرات) أو (يتحقق الحدث A مرة واحدة والحدث B مرة واحدة والحدث C مرة واحدة)

وبما أن الرميات الثلاثة مستقلة الواحدة عن الأخرى فإن:

$$p(E_0) = (p(C))^3 + p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = \frac{1}{8} + \frac{3}{32} = \frac{7}{32}$$

تمرين رقم 26

1)



2) نحسب $p(A \cap B)$

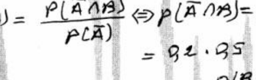
$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p_A(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$$

نحسب: $p(\overline{A} \cap B)$

$$p_{\overline{A}}(B) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(\overline{A})} \Leftrightarrow p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \cdot p_{\overline{A}}(B) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$$

نستنتج: $p(B)$

لدينا:



$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$
$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

إذن

$$p(B) = p((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = 0,56 + 0,1 = 0,66$$

3)

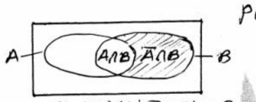
$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0,56}{0,66} = 0,84$$

تمرين رقم 27

$p(A) = 0,3$ ، $p(B) = 0,3$ ، $p(A \cap B) = 0,2$

نحسب: $p(\overline{A} \cap B)$

لدينا:



$$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$
$$(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

إذن

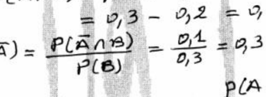
$$p(B) = p((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$
$$\Leftrightarrow p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

إذن:

$$p_B(\overline{A}) = \frac{p(\overline{A} \cap B)}{p(B)} = \frac{0,1}{0,3} = 0,3$$

نحسب: $p(A \cap \overline{B})$

لدينا:



$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$$
$$(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$$

$$p(A) = p((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$$
$$\Leftrightarrow p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0,3 - 0,2 = 0,1$$

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)} = \frac{0,1}{0,3} = 0,3$$

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,3} = 0,6$$

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0,2}{0,3} = 0,6$$

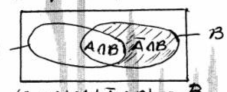
تمرين (رقم 28)

$p(A) = 0,4 \quad ; \quad p(B) = 0,5$

1) A و B حدثان مستقلان

يعني أن $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$

لدينا:



$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B) = B$

$(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B) = \emptyset$

$p(B) = p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B)$

$\Leftrightarrow p(\overline{A}\cap B) = p(B) - p(A\cap B)$

$= p(B) - p(A)\cdot p(B)$

إذن: $p(\overline{A}\cup B) = p(\overline{A}) + p(B) - p(A\cap B)$

$= 1 - p(A) + p(B) - p(B) + p(A)\cdot p(B)$

$= 1 - p(A) + p(A)\cdot p(B)$

$= 1 - 0,4 + 0,4\cdot 0,5 = 0,8$

$$P_A(A\cap B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\cdot P(B)}{P(A)} = p(B) = 0,5$$

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A)\cdot P(B)}{P(B)}$$

$= 1 - p(A) = 0,6$

2) A و B حدثان مستقلان

يعني أن: $A\cap B = \emptyset$

يعني أن: $p(A\cap B) = 0$

بما أن: $B \subset \overline{A}$

فإن: $\overline{A}\cup B = \overline{A}$ و $\overline{A}\cap B = B$

إذن: $p(\overline{A}\cup B) = p(\overline{A})$

$= 1 - p(A) = 0,6$

$$P_A(A\cap B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = 0$$

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

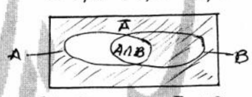
3) $P(A\cup B) = 0,8$

$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$

$\Leftrightarrow p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B)$

$= 0,4 + 0,5 - 0,8 = 0,1$

لدينا:



$\overline{A}\cup(A\cap B) = \overline{A}\cup B$

$\overline{A}\cap(A\cap B) = \emptyset$

إذن: $p(\overline{A}\cup B) = p(\overline{A}\cup(A\cap B))$

$= p(\overline{A}) + p(A\cap B)$

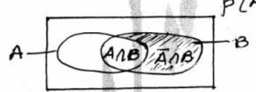
$= 1 - p(A) + p(A\cap B)$

$= 1 - 0,4 + 0,1 = 0,7$

$$P_A(A\cap B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

نحسب: $p(\overline{A}\cap B)$

لدينا:



$B = (A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)$

$(A\cap B)\cap(\overline{A}\cap B) = \emptyset$

$p(B) = p((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))$

$= p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B)$

$\Leftrightarrow p(\overline{A}\cap B) = p(B) - p(A\cap B)$

$= 0,5 - 0,1 = 0,4$

$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

تمرين (رقم 31)

نعتبر الأحداث التالية:

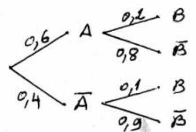
A «الحصول على رجل»

$\overline{A}$ «الحصول على امرأة»

B «الحصول على شخص يتكلم الفرنسية»

$\overline{B}$ «الحصول على شخص لا يتكلم الفرنسية»

لدينا شجرة الأحداث التالية



1) الحدث $A\cap B$ «رجل يتكلم الفرنسية»

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B)$

$= 0,6\cdot 0,2 = 0,12$

2) الحدث $A\cap\overline{B}$ «رجل لا يتكلم الفرنسية»

$P(A\cap\overline{B}) = P(A)\cdot P_A(\overline{B})$

$= 0,6\cdot 0,8 = 0,48$

3) الحدث $\overline{A}\cap B$ «امرأة تتكلم الفرنسية»

$P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)$

$= 0,4\cdot 0,1 = 0,04$

4) الحدث: $\overline{A}\cap\overline{B}$ «امرأة لا تتكلم الفرنسية»

$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})$

$= 0,4\cdot 0,9 = 0,36$

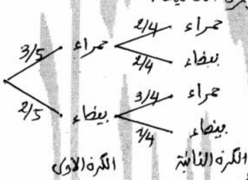
تمرين رقم 32

R B
R R B

بما أننا نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس فإن كل ترتيبة بدون تكرار لكرتين من الكيس هي عنصر من كون الامكانيات Ω

إذن $card\,\Omega = A_5^2 = 20$

لدينا الشجرة التالية :



A « الكرة الأولى حمراء »

نسحب الكرة الأولى حمراء والثانية مما تبقى من الكرات في الكيس .

$$p(A) = \frac{A_3^1 \cdot A_4^1}{A_5^2} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

B « الكرة الثانية بيضاء »

$$p(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$A \cap B$ « الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء »

$$p(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

بما أن : $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$

فإن الحدثان A و B غير مستقلان

تمرين رقم 33

نعتبر الأحداث التالية

A_1 « الرامي الأول أصاب الهدف »

A_2 « الرامي الثاني أصاب الهدف »

A_3 « الرامي الثالث أصاب الهدف »

لدينا : $p(A_1) = \frac{1}{6}$ ، $p(A_2) = \frac{1}{4}$ ، $p(A_3) = \frac{1}{3}$

أ) نعتبر الحدث : A « رام واحد بالضبط يصيب الهدف »

لدينا :

$$A = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$$

وبما أن الأحداث A_1 و A_2 و A_3 مستقلة الواحدة عن الأخرى

فإن :

$$p(A) = p\left((A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)\right)$$
$$= p(A_1) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}) \cdot p(A_2) \cdot p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(A_3)$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{72}$$

ب) نعتبر الحدث : B « الرامي الأول أصاب الهدف »

$$p(B) = p(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3})$$
$$= p(A_1) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(\overline{A_3}) = \frac{1}{12}$$

نعتبر الحدث C « الرامي الأول أصاب الهدف علما أن الهدف أصيب مرة واحدة »

$$p(C) = p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(B)}{p(A)}$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{72}{31} = \frac{6}{31}$$

تمرين رقم 34

نعتبر الأحداث التالية :

A « الفرقة تفوز في المباراة »

B « الفرقة تنهزم في المباراة »

C « الفرقة تتعادل في المباراة »

لدينا : $p(A) = 0,6$ ، $p(B) = 0,3$ ، $p(C) = 0,1$

يلعب الفريق ثلاث مباريات .

1) نعتبر الحدث D « الفريق يفوز مرتين على الأقل دون أن تنهزم »

يعني أن هذا الفريق (يفوز ثلاث مرات) أو (يفوز مرتين وينهزم مرة) أو (يفوز مرتين ويتعادل مرة)

$$p(D) = (p(A))^3 + 3(p(A))^2 \cdot p(B) + 3(p(A))^2 \cdot p(C)$$
$$= 0,216 + 0,324 + 0,108$$
$$= 0,324$$

2) نعتبر الحدث E « الفريق يفوز مرة وينهزم مرة ويتعادل مرة »

$$p(E) = 3!\ p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$$
$$= 0,108$$

تمرين رقم 35

R N N
R N N N N
B

R N
R R N
A

نعتبر الأحداث

A « اختيار الصندوق A »

B « اختيار الصندوق B »

C « الحصول على كرتين لهما نفس اللون »

لكي نحصل على كرتين لهما نفس اللون : (نختار الصندوق A فنسحب كرة حمراء من الصندوق A ثم كرة حمراء من الصندوق B أو نسحب كرة سوداء من الصندوق A ثم كرة سوداء من الصندوق B) أو (نختار الصندوق B فنسحب كرة حمراء من الصندوق B ثم كرة حمراء من الصندوق A أو نسحب كرة سوداء من الصندوق B ثم كرة سوداء من الصندوق A)

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{6}\right)$$
$$= \frac{21}{80} + \frac{23}{84} = 0,5$$

تمرين رقم 36

نعتبر الأحداث التالية :

A « المصباح مصنوعا بالآلة A »

B « المصباح مصنوعا بالآلة B »

C « المصباح مصنوعا بالآلة C »

D « المصباح غير صالح »

لدينا : $p(A) = 0,2$ ، $p(B) = 0,3$ ، $p(C) = 0,5$

$p_A(D) = 0,05$ ، $p_B(D) = 0,04$ ، $p_C(D) = 0,01$

1) أ) الحدث : $A \cap D$ « المصباح غير صالح ومصنوعا بـ A »

$$p(A \cap D) = p(A) \cdot p_A(D) = 0,2 \cdot 0,05 = 0,01$$

ب) الحدث : $B \cap D$ « المصباح غير صالح ومصنوعا بـ B »

$$p(B \cap D) = p(B) \cdot p_B(D) = 0,3 \cdot 0,04 = 0,012$$

ج) الحدث : $C \cap D$ « المصباح غير صالح ومصنوعا بـ C »

$$p(C \cap D) = p(C) \cdot p_C(D) = 0,5 \cdot 0,01 = 0,005$$

$$P(D)=P(\Omega\cap D)$$
$$=P((A\cup B\cup C)\cap D)$$
$$=P((A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D))$$
$$=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$
$$=0{,}01+0{,}012+0{,}005$$
$$=0{,}027$$

2) $P_D(A)=\dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}=\dfrac{0{,}01}{0{,}027}=0{,}37$

تمرين رقم 37

B-1 B1 N0

B-1 B1 N0 N1

بما أننا نسحب تآنيا كرتين من الكيس فإن كل تأليفة لكرتين من الكيس هي عنصر من كون الامكانيات Ω

إذن $\text{card}\,\Omega=C_7^2=21$

1) A «الحصول على كرتين لهما نفس اللون»

للحصول على كرتين لهما نفس اللون (نسحب تآنيا كرتين بيضاوين) أو (نسحب تآنيا كرتين سوداوين)

$$P(A)=\frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_7^2}=\frac{9}{21}$$

2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع رقمي الكرتين المسحوبتين

لدينا: $X(\Omega)=\{-2,-1,0,1,2\}$

$(X=-2)$: (نسحب تآنيا كرتين تحملان الرقم (1-))

$$P(X=-2)=\frac{C_2^2}{C_7^2}=\frac{1}{21}$$

$(X=-1)$: (نسحب تآنيا كرتين إحداهما تحمل الرقم (1-) والأخرى تحمل الرقم 0)

$$P(X=-1)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{4}{21}$$

$(X=0)$: (نسحب تآنيا كرتين تحملان الرقم 0 أو نسحب تآنيا كرتين إحداهما تحمل الرقم (1-) والأخرى تحمل الرقم 1)

$$P(X=0)=\frac{C_2^1C_3^1+C_2^2}{C_7^2}=\frac{7}{21}$$

$(X=1)$: (نسحب تآنيا كرتين إحداهما تحمل الرقم 0 والأخرى تحمل الرقم 1)

$$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^2}=\frac{6}{21}$$

$(X=2)$: (نسحب تآنيا كرتين تحملان الرقم 1)

$$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{3}{21}$$

تمرين رقم 38

BL BL BL

N N N

B B B B

بما أننا نسحب من الصندوق أربع كرات بالتتابع وبإحلال فإن كل ترتيبة بتكرار لأربع كرات من الصندوق هو عنصر من كون الامكانيات Ω

إذن: $\text{card}\,\Omega=10^4$

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الزرقاء المسحوبة.

إذن $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$

$(X=0)$: «الكرات الاربع المسحوبة غير زرقاء»

$$P(X=0)=\frac{7^4}{10^4}=\frac{2401}{10000}$$

$(X=1)$: «كرة واحدة زرقاء وثلاث كرات غير زرقاء»

$$P(X=1)=4\,\frac{3^1\cdot7^3}{10^4}=\frac{4116}{10000}$$

$(X=2)$: «كرتين زرقاوين وكرتين غير زرقاوين»

$$P(X=2)=6\,\frac{3^2\cdot7^2}{10^4}=\frac{2646}{10000}$$

$(X=3)$: «ثلاث كرات زرقاء وكرة واحدة غير زرقاء»

$$P(X=3)=4\,\frac{3^3\cdot7}{10^4}=\frac{756}{10000}$$

$(X=4)$: «الكرات الاربع المسحوبة زرقاء»

$$P(X=4)=\frac{3^4}{10^4}=\frac{81}{10000}$$

2) $E(X)=\dfrac{0\cdot2401+1\cdot4116+2\cdot2646+3\cdot756+4\cdot81}{10000}$

$$=\frac{11708}{10000}=1{,}1708$$

تمرين رقم 39

B B R

B B R

B B R

B B R

I- بما أننا نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس فإن كل ترتيبة بدون تكرار لكرتين من الكيس هي عنصر من كون الامكانيات Ω

إذن: $\text{card}\,\Omega=A_{12}^2=132$

1) الحدث A «نسحب كرتين من نفس اللون»

للحصول على كرتين من نفس اللون (نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين حمراوين) أو (نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين بيضاوين)

$$P(A)=\frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}=\frac{A_4^2+A_8^2}{A_{12}^2}=\frac{68}{132}$$

الحدث B «نسحب كرتين أولاهما بيضاء»

للحصول على كرتين أولاهما بيضاء (نسحب بالتتابع وبدون إحلال الكرة الأولى بيضاء ثم نسحب الكرة الثانية مما تبقى من كرات بالكيس)

$$P(B)=\frac{\text{card}\,B}{\text{card}\,\Omega}=\frac{A_8^1\cdot A_{11}^1}{A_{12}^2}=\frac{88}{132}$$

II- بما أننا نسحب بالتتابع وبإحلال كرتين من الكيس فإن كل ترتيبة بتكرار لكرتين من الكيس هي عنصر من كون الإمكانيات Ω.

اذن $card\,\Omega = 12^2 = 144$

1) الحدث : A « سحب كرة واحدة حمراء »
للحصول على كرة واحدة حمراء (سحب بالتتابع وبإحلال كرة حمراء وكرة بيضاء مع أخذ بعين الاعتبار ترتيب الكرتين المسحوبتين فيما بينهما)

$$p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = 2\,\frac{4.8}{12^2} = \frac{64}{144}$$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أ) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

ب)
$$p(X=0) = \frac{8^2}{12^2} = \frac{64}{144}$$
$$p(X=1) = 2\cdot\frac{4.8}{144} = \frac{64}{144}$$
$$p(X=2) = \frac{4^2}{12^2} = \frac{16}{144}$$

ج) $$E(X) = \frac{0.64 + 1.64 + 2.16}{144} = \frac{96}{144}$$

تمرين رقم 40

V1 V1 V2
R1 R2 R3

بما أننا نسحب تآنيا بيدقتين من الصندوق فإن كل تأليفة لبيدقتين من الكيس هي عنصر من كون الإمكانيات Ω
إذن : $card\,\Omega = C_6^2 = 15$
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بالقيمة المطلقة لفرق الرقمين المحصل عليهما.

1) أ) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

ب) $(X=0)$: للحصول على القيمة 0 (سحب تآنيا كرتين تحملان الرقم 2) أو (سحب تآنيا كرتين تحملان الرقم 1)

$$p(X=0) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

$(X=1)$: للحصول على القيمة 1 (سحب تآنيا الكرة التي تحمل الرقم 3 وكرة تحمل الرقم 2) أو (سحب تآنيا كرة تحمل الرقم 2 وكرة تحمل الرقم 1)

$$p(X=1) = \frac{C_1^1 C_2^1 + C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$$

$(X=2)$: للحصول على القيمة 2 (سحب تآنيا الكرة التي تحمل الرقم 3 وكرة تحمل الرقم 1)

$$p(X=2) = \frac{C_1^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

ج) $$E(X) = \frac{0.4 + 1.8 + 2.3}{15} = \frac{14}{15}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$
$$= \frac{0.4 + 1.8 + 4.3}{15} - \left(\frac{14}{15}\right)^2 = \frac{104}{225}$$

2) نعتبر الحدثين.
A « البيدقتان تحملان نفس الرقم »
B « البيدقتان مختلفتي اللون »
$A\cap B$ « البيدقتان تحملان نفس الرقم ومختلفتي اللون »
A : للحصول على بيدقتين تحملان نفس الرقم (سحب تآنيا

بيدقتان تحملان الرقم 2) أو (سحب تآنيا بيدقتان تحملان الرقم 1)

$$p(A) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{4}{15}$$

B : للحصول على بيدقتين مختلفتي اللون (نسحب تآنيا بيدقتان حمراوان) أو (سحب تآنيا بيدقتان خضراوان)

$$p(B) = \frac{C_3^2 + C_3^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}$$

$A\cap B$: للحصول على بيدقتين تحملان نفس الرقم ومختلفتي اللون (سحب تآنيا الكرة الحمراء التي تحمل الرقم 2 والكرة الخضراء التي تحمل الرقم 2) أو (سحب تآنيا الكرة الحمراء التي تحمل الرقم 1 وكرة خضراء تحمل الرقم 1)

$$p(A\cap B) = \frac{C_1^1 C_1^1 + C_1^1 C_2^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$$

اذن $$p_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{3}{15}\cdot\frac{15}{6} = \frac{1}{2}$$

تمرين رقم 41

B1 B2 B3 B4
N5 N6 N7 N8 N9

بما أننا نسحب تآنيا ثلاث كرات من الصندوق فإن كل تأليفة لثلاث كرات من الصندوق هي عنصر من كون الإمكانيات Ω
إذن $card\,\Omega = C_9^3 = 84$
نعتبر X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة.

أ) $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$(X=0)$: جميع الكرات المسحوبة سوداء.
$$p(X=0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

$(X=1)$: الحصول على كرة بيضاء وكرتين سوداوين
$$p(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_5^2}{C_9^3} = \frac{40}{84}$$

$(X=2)$: الحصول على كرتين بيضاوين وكرة سوداء
$$p(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_5^1}{C_9^3} = \frac{30}{84}$$

$(X=3)$: جميع الكرات المسحوبة بيضاء
$$p(X=3) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84}$$

ب) $$E(X) = \frac{0.10 + 1.40 + 2.30 + 3.4}{84} = \frac{28}{21}$$

2) بما أننا نسحب بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق فإن كل ترتيبة بدون تكرار لثلاث كرات هي عنصر من كون الإمكانيات Ω
إذن $card\,\Omega = A_9^3 = 504$
E_1 « الحصول على عدد أصغر من 300 »
للحصول على عدد أصغر من 300 (سحب بالتتابع و بدون إحلال الكرة الأولى تحمل الرقم 0 أو الرقم 1 لرقم المئات وكرتين مما تبقى من كرات في الكيس)

$$p(E_1) = \frac{A_2^1 \cdot A_8^2}{A_9^3} = \frac{122}{504} = \frac{61}{252}$$

E_2 « الحصول على عدد زوجي »

لدينا في الصندوق أربع بيدقات تحمل أرقاما زوجية
إذن للحصول على عدد زوجي (سحب بالتتابع وبدون إحلال كرة تحمل رقما زوجيا لرقم الوحدات وكرتين لرقم العشرات والمئات مما تبقى من كرات في الصندوق)

$$p(E_2) = \frac{A_8^2\, A_4^1}{A_9^3} = \frac{224}{504} = \frac{4}{9}$$

تمرين رقم 42

(a) (a) (a) (a)
(a-1) (a-1) (a-1) (a-1) (a-1)

1) بما أننا نسحب تآنيا ثلاث كرات من الصندوق فإن كل تأليفة لثلاث كرات من الصندوق هو عنصر من كون الامكانيات Ω
إذن
$$card\,\Omega = C_9^3 = 84$$

A « سحب ثلاث كرات تحمل نفس العدد »
للحصول على ثلاث كرات تحمل نفس العدد (سحب تآنيا ثلاث كرات تحمل العدد a) أو (سحب تآنيا ثلاث كرات تحمل العدد $a-1$)
إذن
$$p(A) = \frac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3} = \frac{14}{84}$$

B « سحب كرتين بالضبط تحمل نفس العدد »
للحصول على كرتين بالضبط تحمل نفس العدد (سحب تآنيا كرتين تحملان العدد a وكرة تحمل العدد $a-1$) أو (سحب تآنيا كرتين تحملان العدد $a-1$ وكرة تحمل العدد a)

$$p(B) = \frac{C_4^2 C_5^1 + C_4^1 C_5^2}{C_9^3} = \frac{30+40}{84} = \frac{70}{84}$$

2) أ) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الأعداد المسجلة على الكرات المسحوبة
لدينا
$$X(\Omega) = \{3a-3, 3a-2, 3a-1, 3a\}$$

ب) $(X=3a)$: « سحب تآنيا ثلاث كرات تحمل الرقم a »
$$p(X=3a) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84}$$

$(X=3a-1)$: « سحب تآنيا كرتين تحملان العدد a وكرة تحمل العدد $a-1$ »
$$p(X=3a-1) = \frac{C_4^2 C_5^1}{C_9^3} = \frac{30}{84}$$

$(X=3a-2)$: « سحب تآنيا كرتين تحملان العدد $a-1$ وكرة تحمل العدد a »
$$p(X=3a-2) = \frac{C_4^1 C_5^2}{C_9^3} = \frac{40}{84}$$

$(X=3a-3)$ « سحب تآنيا ثلاث كرات تحمل العدد $a-1$ »
$$p(X=3a-3) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

ج)
$$E(X) = \frac{12a + 30(3a-1) + 40(3a-2) + 10(3a-3)}{84}$$
$$= \frac{252a - 140}{84}$$
$$E(X) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{140}{252} = \frac{35}{63}$$

443

تمرين رقم 43

1) أ) A « النرد عين عددا نسبيا زوجيا »
B « النرد عين عددا موجبا »
$A\cap B$ « النرد عين عددا نسبيا زوجيا موجبا »

$$p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$p(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$p(A\cap B) = \frac{1}{6}$$
$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{1} = \frac{1}{2}$$

ب) بما أن
$$P_A(B) \neq p(B)$$
فإن A و B حدثان غير مستقلين

2) رمينا النرد ثلاث مرات متتالية
X المتغير العشوائي الذي يربط كل إمكانية بعدد المرات التي عين فيها النرد عددا نسبيا زوجيا.
$$X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$
X متغير عشوائي حداني وسيطاه $\frac{1}{3}$ و 3
إذن:
$$p(X=0) = C_3^0 \left(\tfrac{1}{3}\right)^0\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$
$$p(X=1) = C_3^1 \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$
$$p(X=2) = C_3^2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{6}{27}$$
$$p(X=3) = C_3^3 \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

ب) C « النرد عين عددا نسبيا زوجيا مرتين على الأكثر »
الطريقة I :
$$p\big((X=0)\cup(X=1)\cup(X=2)\big) =$$
$$= p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$
$$= \frac{26}{27}$$

الطريقة II :
$\overline{C}$ « النرد عين عددا نسبيا زوجيا ثلاث مرات »
$$p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

تمرين رقم 44

لدينا : عدد أعضاء مكتب الجمعية 16
عدد الذكور من مكتب الجمعية 12
عدد الإناث من مكتب الجمعية 4
عدد المتزوجين الذكور من مكتب الجمعية 8
عدد المتزوجات من مكتب الجمعية 2

1) اختير بواسطة القرعة أحد الأعضاء رئيسا لمكتب الجمعية
A « الرئيس ذكرا غير متزوج »
$$p(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$
B « الرئيس أنثى »
$$p(B) = \frac{card\,B}{card\,\Omega} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

2) اختار المكتب بواسطة القرعة وفدا يتكون من عضوين
بما أننا نختار تآنيا عضوين من مكتب الجمعية فإن كل تأليفة لعضوين من هذا المكتب هي عنصر من كون الامكانيات Ω

444

إذن $card\,\Omega = C_{16}^{2} = 120$

أ) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الاعضاء الذكور من بين العضوين المختارين في الوفد.

لدينا: $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$(X=0)$: الوفد يتكون من امرأتين

$$P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_{16}^2} = \frac{6}{120}$$

$(X=1)$: الوفد يتكون من امرأة ورجل

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_{12}^1}{C_{16}^2} = \frac{48}{120}$$

$(X=2)$: الوفد يتكون من رجلين

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2}{C_{16}^2} = \frac{66}{120}$$

ب) نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يساوي عدد الاعضاء المتزوجين من بين العضوين المختارين في الوفد

لدينا: $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$(Y=0)$: الوفد يتكون من عضوين غير متزوجين

$$P(Y=0) = \frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{15}{120}$$

$(Y=1)$: الوفد يتكون من عضو متزوج وعضو غير متزوج

$$P(Y=1) = \frac{C_6^1\, C_{10}^1}{C_{16}^2} = \frac{60}{120}$$

$(Y=2)$: الوفد يتكون من عضوين متزوجين

$$P(Y=2) = \frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} = \frac{45}{120}$$

ج)

$$E(X) = \frac{0.6 + 1.48 + 2.66}{120} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{0.6 + 1.48 + 4.66}{120} = \frac{13}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{13}{5} - \frac{9}{4} = \frac{7}{20}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{7}{20}}$$

$$E(Y) = \frac{0.15 + 1.60 + 2.45}{120} = \frac{5}{4}$$

$$E(Y^2) = \frac{0.15 + 1.60 + 4.45}{120} = 2$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 2 - \frac{25}{16} = \frac{7}{16}$$

$$\sigma(Y) = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

تمرين رقم 45

V1 R1 R2
V2 R1 R2

حالنا سحب تآنيا بيدقتان من الكيس فإن كل تآلفية لبيدقتين من الكيس هي عنصر من كون الإمكانيات Ω

إذن $card\,\Omega = C_6^3 = 20$

1) أ) A « جميع البيدقات المسحوبة حمراء »

$$P(A) = \frac{card\,A}{card\,\Omega} = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20}$$

B « بيدقة واحدة بالضبط خضراء »

$$P(B) = \frac{card\,B}{card\,\Omega} = \frac{C_2^1\, C_4^2}{C_6^3} = \frac{12}{20}$$

C « البيدقات الثلاث المسحوبة تحمل الرقم 1 »

$$P(C) = \frac{card\,C}{card\,\Omega} = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد البيدقات الخضراء المسحوبة.

أ) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$(X=0)$: جميع البيدقات المسحوبة حمراء.

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20}$$

$(X=1)$: الحصول على بيدقة خضراء وبيدقتان حمراوان

$$P(X=1) = \frac{C_2^1\, C_4^2}{C_6^3} = \frac{12}{20}$$

$(X=2)$: الحصول على بيدقتين خضراوين وبيدقة حمراء

$$P(X=2) = \frac{C_2^2\, C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20}$$

ب) نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يربط كل سحبة بمجموع الأرقام التي تحملها البيدقات الثلاث المسحوبة.

$Y(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$

$(Y=3)$: البيدقات الثلاث المسحوبة تحمل الرقم 1

$$P(Y=3) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$$

$(Y=4)$: الحصول على بيدقتين تحملان الرقم 1 وبيدقة تحمل الرقم 2

$$P(Y=4) = \frac{C_3^2\, C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20}$$

$(Y=5)$: الحصول على بيدقتين تحملان الرقم 2 وبيدقة تحمل الرقم 1

$$P(Y=5) = \frac{C_3^1\, C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}$$

$(Y=6)$: البيدقات الثلاث المسحوبة تحمل الرقم 2

$$P(Y=6) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}$$

تمرين رقم 46

1) نبرهن بالترجع أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

لدينا: $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$

نفترض أن: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n$$

نبرهن أن:

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + \dots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

$$= (a+b)(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^n b^n)$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \dots + C_n^{n-1} a^2 b^{n-1} + C_n^n a b^n +$$
$$+ C_n^0 a^n b + \dots + C_n^{n-1} a b^n + C_n^n b^{n+1}$$

$= C_n^0 a^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) a^n b + \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n) a b^n + C_n^n b^{n+1}$

$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \dots + C_{n+1}^n a b^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ $(*)$

2) $(x-2)^6 = C_6^0 x^6 - C_6^1 2x^5 + C_6^2 4x^4 - C_6^3 8x^2 + C_6^4 16x^2 - C_6^5 32x + C_6^6 64$

$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

$(2x-y)^7 = C_7^0 (2x)^7 - C_7^1 (2x)^6 y + C_7^2 (2x)^5 y^2 - C_7^3 (2x)^4 y^3 + C_7^4 (2x)^3 y^4 - C_7^5 (2x)^2 y^5 + C_7^6 (2x) y^6 - C_7^7 y^7$

$= 128x^7 - 448x^6 y + 672x^5 y^2 - 560x^4 y^3 + 280x^3 y^4 - 84x^2 y^5 + 14x y^6 - y^7$

3) نبين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 2^n > n$

لدينا: $2^1 > 1$

نفترض أن $2^n > n$

نبرهن أن $2^{n+1} > n+1$

لدينا حسب افتراض الترجع $2^n > n$

$\Leftrightarrow 2 . 2^n > 2n \geq n+1$

إذن $2^{n+1} > n+1$

إذن: $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ 2^n > n$

4) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x) = (1+x)^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

أ) الطريقة الأولى:

$\forall x \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}^*;\ f'(x) = n(1+x)^{n-1}$

الطريقة الثانية

لدينا $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$

إذن: $\forall x \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$f'(x) = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + n C_n^n x^{n-1}$

ومنه فإن: $\forall x \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + n C_n^n x^{n-1}$ $(**)$

ب) بوضع $x=1$ في العلاقة $(**)$ نحصل على

$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1}$

ج) بوضع $a=0$ و $b=-1$ في العلاقة $(*)$ نحصل على

$(-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

تمرين رقم 47

نعتبر الأحداث التالية:

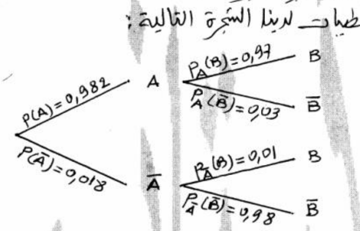
A « قطعة صالحة »

$\bar{A}$ « قطعة غير صالحة »

B « قطعة مقبولة »

$\bar{B}$ « قطعة غير مقبولة »

من خلال المعطيات لدينا الشجرة التالية:



1) $p(\bar{A}) = 0{,}018$

2) $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$

$= 0{,}018 \times 0{,}01 = 0{,}00018$

3) $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \cdot P_A(\bar{B})$

$= 0{,}982 \times 0{,}03 = 0{,}02946$

4) يكون خطأ في المراقبة برفض قطعة صالحة أو قبول قطعة غير صالحة.

$p((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B)$

$= 0{,}02964$

تمرين رقم 48

نعتبر المجموعة $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

بما أننا نرمي النرد ثلاث مرات متتابعة فإن

$\Omega = E \times E \times E$

إذن $p(\Omega) = 216$

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة: $(E): ax^2 + bx + c$

نعتبر الحدث A « تكون المعادلة (E) حل مزدوج »

يتحقق الحدث A إذا وفقط إذا كان: $\Delta = 0$

يعني $b^2 = 4ac$

لدينا ثلاث حالات فقط لتحقيق ذلك:

$a = c = 1$ و $b = 2$

أو $a = c = 2$ و $b = 4$

أو $a = c = 3$ و $b = 6$

إذن $p(A) = \frac{card A}{card \Omega} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$

تمرين رقم 49

1) نعتبر الحدث: S « الفأر يختار الباب الجيد »

لدينا $p(\bar{S}) = \frac{3}{4}$ و $p(S) = \frac{1}{4}$

إذن: $p(A) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$p(B) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^6$

2) القيم الممكنة لـ k هي: 1، 2، 3، 4

$p(k=1)=\frac{1}{4}$

$p(k=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$p(k=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$p(k=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$

تمرين رقم 50

1) للحصول على اللون الأحمر ثلاث مرات (نسحب كرة حمراء من الصندوق A ثم نضعها في الصندوق B ثم نسحب بالتتابع وبإحلال كرتين حمراوين من الصندوق B)

E «نحصل اللون الأحمر ثلاث مرات»

$p(E)=\frac{2}{4}\cdot\frac{4^2}{6^2}=\frac{2}{9}$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي مجموع الأعداد بعد سحب الكرات الثلاثة

أ) $X(\Omega)=\{-3,0,3,6\}$

ب) $(X=6)$: (نسحب ثلاث كرات حمراء)

$p(X=6)=p(E)=\frac{2}{9}$

$(X=3)$: (نسحب كرة بيضاء من A وكرتين حمراوين من B)

أو (نسحب كرة حمراء من A وكرة حمراء ثم كرة بيضاء من B)

أو (نسحب كرة حمراء من A وكرة بيضاء ثم كرة حمراء من B)

$p(X=3)=\frac{2}{4}\cdot\frac{3^2}{6^2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}$

$=\frac{25}{72}$

$(X=0)$: (نسحب كرة حمراء من A وكرتين بيضاوين من B)

أو (نسحب كرة بيضاء من A وكرة حمراء ثم كرة بيضاء من B)

أو (نسحب كرة بيضاء من A وكرة بيضاء ثم كرة حمراء من B)

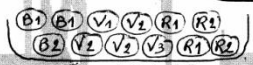
$p(X=0)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2^2}{6^2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}$

$=\frac{11}{36}$

$(X=-3)$: (نسحب كرة بيضاء من A وكرتين بيضاوين من B)

$p(X=-3)=\frac{2}{4}\cdot\frac{3^2}{6^2}=\frac{1}{8}$

تمرين رقم 51



1) بما أننا نسحب تآنيا قرصين من الكيس فإن كل تآلفة لقرصين من الكيس هي عنصر من كون الإمكانات Ω

$card\,\Omega=C_{12}^2=66$

أ) A «نسحب قرصين من نفس اللون»

للحصول على قرصين من نفس اللون (نسحب تآنيا قرصين بيضاوين) أو (نسحب تآنيا قرصين خضراوين) أو (نسحب تآنيا قرصين حمراوين)

$p(A)=\frac{C_3^2+C_5^2+C_4^2}{C_{12}^2}=\frac{19}{66}$

B «نسحب قرص أخضر على الأقل»

لدينا $\overline{B}$ «لا نسحب أي قرص أخضر»

$p(\overline{B})=\frac{C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{21}{66}$

إذن $p(B)=1-p(\overline{B})=\frac{45}{66}$

$A\cap B$ «القرصين المسحوبين غير خضراوين ومن نفس اللون»

للحصول على قرصين غير خضراوين ومن نفس اللون (نسحب تآنيا قرصين حمراوين) أو (نسحب تآنيا قرصين بيضاوين)

$p(A\cap B)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_{12}^2}=\frac{9}{66}$

ب) لدينا: $p(A)\cdot p(B)=\frac{19}{66}\cdot\frac{45}{66}\neq\frac{9}{66}$

وبما أن: $p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B)$

فإن A و B حدثين غير مستقلين

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بمجموع العددين المسجلين على القرصين المسحوبين

أ) $X(\Omega)=\{2,3,4,5\}$

$p(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}=\frac{10}{66}$

$p(X=3)=\frac{C_5^1C_6^1}{C_{12}^2}=\frac{30}{66}$

$p(X=4)=\frac{C_6^2+C_5^1C_3^1}{C_{12}^2}=\frac{20}{66}$

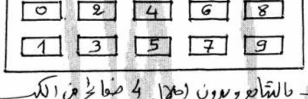
$p(X=5)=\frac{C_1^1C_6^1}{C_{12}^2}=\frac{6}{66}$

ب) $E(X)=\frac{2.10+3.30+4.20+5.6}{66}=\frac{110}{33}$

ج) $E(X^2)=\frac{4.10+9.30+16.20+25.6}{66}=\frac{130}{11}$

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{770}{1089}$

تمرين رقم 52



1) بما أننا نسحب بالتتابع وبدون إحلال 4 صفائح من الكيس فإن كل ترتيبة بدون تكرار لأربعة صفائح من كون الإمكانات Ω

$card\,\Omega=A_{10}^4=5040$

أ) الحدث A «الحصول على العدد 1987»

$p(A)=\frac{card\,A}{card\,\Omega}=\frac{1}{5040}$

ب) الحدث B «الحصول على العدد 1989»

بما أن السحب بالتتابع وبدون إحلال ولدينا صفيحة واحدة تحمل الرقم 9 فإنه لا يمكن الحصول على الرقم 1989

إذن $p(B)=0$

ج) الحدث C «الحصول على عدد مكون من أرقام زوجية فقط»
لدينا خمسة صفائح تحمل أرقاما زوجية.

$$p(C)=\frac{A_5^4}{A_{10}^4}=\frac{120}{5040}=\frac{1}{42}$$

ح) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الأرقام الزوجية المحصل عليها:

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$$

$(X=0)$ «عدد مكون من أرقام فردية فقط»

$$p(X=0)=\frac{A_5^4}{A_{10}^4}=\frac{120}{5040}=\frac{1}{42}$$

$(X=1)$ «عدد يحتوي على رقم زوجي فقط»

$$p(X=1)=4\,\frac{A_5^1A_5^3}{A_{10}^4}=\frac{1200}{5040}=\frac{5}{21}$$

$(X=2)$ «عدد يحتوي على رقمين زوجيين فقط»

$$p(X=2)=\frac{C_4^2A_5^2A_5^2}{A_{10}^4}=\frac{2400}{5040}=\frac{10}{21}$$

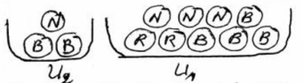
$(X=3)$ «عدد يحتوي على رقم فردي واحد فقط»

$$p(X=3)=4\,\frac{A_5^1A_5^3}{A_{10}^4}=\frac{5}{21}$$

$(X=4)$ «عدد مكون من أرقام زوجية فقط»

$$p(X=4)=\frac{A_5^4}{A_{10}^4}=\frac{120}{5040}=\frac{1}{42}$$

تمرين رقم 53



U_2 U_1

1) بما أننا نسحب تآنيا ثلاث كرات من U_1
فإن $card\,\Omega=C_9^3=84$

A «نسحب كرتين سوداوين وكرة حمراء»

$$p(A)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_9^3}=\frac{6}{84}$$

B «الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون»

$$p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{4+1}{84}=\frac{5}{84}$$

C «نسحب كرة بيضاء واحدة على الأقل»
$\overline{C}$ «الكرات الثلاثة المسحوبة غير بيضاء»

$$p(\overline{C})=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{10}{84}$$

إذن

$$p(C)=1-p(\overline{C})=\frac{74}{84}$$

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات الثلاثة المسحوبة من U_1

$(X=3)$: للحصول على ثلاثة ألوان (نسحب من U_1 تآنيا كرة بيضاء وكرة سوداء وكرة حمراء)

$$p(X=3)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}$$

$(X=2)$ الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها لونين مختلفين.

الطريقة 1

للحصول على ثلاث كرات تحمل لونين مختلفين (نسحب تآنيا من U_1 كرتين بيضاوين وكرة مما تبقى) أو (نسحب تآنيا من U_1 كرتين سوداوين وكرة مما تبقى) أو (نسحب تآنيا من U_1 كرتين حمراوين وكرة مما تبقى)

$$p(X=2)=\frac{C_4^2C_5^1+C_3^1C_6^1+C_2^2C_7^1}{C_9^2}=\frac{55}{84}$$

الطريقة 2

$(X=1)$: الكرات الثلاثة المسحوبة من U_1 لها نفس اللون
للحصول على ثلاث كرات لها نفس اللون (نسحب تآنيا من U_1 ثلاث كرات حمراء) أو (نسحب تآنيا من U_1 ثلاث كرات بيضاء)

$$p(X=1)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=p(B)=\frac{5}{84}$$

$$p(\overline{X=2})=p(X=3)+p(X=1)=\frac{29}{84}$$

إذن

$$p(X=2)=1-p(\overline{X=2})=\frac{55}{84}$$

3) نعتبر الحدثين

D «الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين»
B «الكرات الثلاثة المسحوبة من U_1 لها نفس اللون»
$B\cap D$ «الكرات الثلاثة المسحوبة من U_1 لها نفس اللون والكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين»

إذن $B\cap D$: (نسحب تآنيا من U_1 ثلاث كرات بيضاء نضعها في U_2 ثم نسحب تآنيا من U_2 كرتين بيضاوين) أو (نسحب تآنيا من U_1 ثلاث كرات سوداء نضعها في U_2 ثم نسحب تآنيا من U_2 كرتين بيضاوين)

$$p(B\cap D)=\frac{C_4^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{C_9^3}\cdot\frac{C_2^2}{C_6^2}$$

$$=\frac{4}{84}\cdot\frac{10}{15}+\frac{1}{84}\cdot\frac{1}{15}=\frac{41}{1260}$$

$$p_B(D)=\frac{p(B\cap D)}{p(B)}=\frac{41}{1260}\cdot\frac{84}{5}=\frac{41}{75}$$

تمرين رقم 54

نعتبر الحدثين

A «ينطلق الانذار» ، I «وقع عطب بالمصنع»

إذن: $A\cap\overline{I}$: «ينطلق الانذار خطأ»
يعني «ينطلق الانذار ولا يقع عطب بالمصنع»

$I\cap\overline{A}$: «يقع عطب بالمصنع دون أن ينطلق الانذار»
يعني: «يقع عطب بالمصنع ولا ينطلق الانذار»

لدينا: $p(I)=\frac{1}{100}$ ، $p(I\cap\overline{A})=\frac{1}{500}$ ، $p(A\cap\overline{I})=\frac{1}{50}$

الجزء الاول

1) $E=I\cap A$ «وقوع عطب بالمصنع وانطلاق الانذار»

لدينا: $\Omega=A\cup\overline{A}$

إذن: $I=I\cap(A\cup\overline{A})=(I\cap A)\cup(I\cap\overline{A})$

وبما أن $(I\cap A)\cup(I\cap\bar{A}) = I$

و $(I\cap A)\cap(I\cap\bar{A}) = \emptyset$

فإن $p(I) = p(I\cap A) + p(I\cap\bar{A})$

$\Leftrightarrow p(I\cap A) = p(I) - p(I\cap\bar{A})$

$= \frac{1}{100} - \frac{1}{500} = \frac{4}{500}$

ج) F « وقوع خطأ بجهاز الإنذار »

وقوع خطأ بجهاز الانذار معناه (يقع العطب ولاينطلق الإنذار) أو (لايقع العطب وينطلق الإنذار)

إذن : $F = (I\cap\bar{A})\cup(\bar{I}\cap A)$

وبما أن : $(I\cap\bar{A})\cap(\bar{I}\cap A) = \emptyset$

فإن $p(F) = p(I\cap\bar{A}) + p(\bar{I}\cap A)$

$= \frac{1}{500} + \frac{1}{50} = \frac{11}{500}$

3) لدينا : $\Omega = I\cup\bar{I}$

إذن $A = A\cap(I\cup\bar{I})$

$= (A\cap I)\cup(A\cap\bar{I})$

وبما أن $(A\cap I)\cup(A\cap\bar{I}) = A$

و $(A\cap I)\cap(A\cap\bar{I}) = \emptyset$

فإن $p(A) = p(A\cap I) + p(A\cap\bar{I})$

$= \frac{4}{500} + \frac{1}{50} = \frac{14}{500}$

إذن $p_A(I) = \frac{p(A\cap I)}{p(A)} = \frac{4}{500}\cdot\frac{500}{14} = \frac{2}{7}$

الجزء الثاني .

1) نحسب تكلفة الأعطاب بالشركة :

لايقع العطب ولاينطلق الانذار = 0 DH

يقع العطب وينطلق الإنذار = 500 DH

لايقع العطب وينطلق الأبذار = 1000 DH

يقع العطب ولاينطلق الابذار = 15000 DH

$p(X=0) = p(\bar{A}\cap\bar{I})$

$= p(\overline{A\cup I})$

$= 1 - p(A\cup I)$

$= 1 - (p(I) + p(A) - p(I\cap A))$

$= 1 - \left(\frac{1}{100} + \frac{14}{500} - \frac{4}{500}\right)$

$= \frac{485}{500}$

$p(X=5000) = p(I\cap\bar{A}) = \frac{1}{500}$

$p(X=10000) = p(\bar{I}\cap A) = \frac{1}{50}$

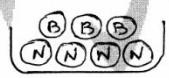
$p(X=15000) = p(I\cap A) = \frac{4}{500}$

ج) معدل التكلفة اليومية للأعطاب في هذا المعمل هو :

$E(X) = \frac{0.485 + 5000 + 10000\cdot 10 + 15000\cdot 4}{500}$

$= 330$ DH

تمرين رقم 55



1) أ) A « الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء »

$p(A) = \frac{4}{7}$

B « الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء »

يعني أننا نسحب في المرة الأولى كرة بيضاء وفي المرة الثانية كرة سوداء

$p(B) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{7}$

ب) الحدث C « لا نجري السحبة الثالثة »

لكي لانجري السحبة الثالثة (الكرة المسحوبة في المرة الاولى سوداء) أو (الكرة المسحوبة في المرة الاولى بيضاء والكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء)

إذن $C = A\cup B$

وبما أنه حسب طريقة السحب $A\cap B = \emptyset$

فإن $p(C) = p(A\cup B) = p(A) + p(B)$

$= \frac{6}{7}$

ج) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$

$p(X=1) = \frac{4}{7}$

$p(X=2) = \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{7}$

$p(X=3) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{35}$

$p(X=4) = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4} = \frac{1}{35}$

تمرين رقم 56

1) A_1 « سحب كرة لونها أحمر »

$p(A_1) = \frac{6n}{10n} = \frac{3}{5}$

A_2 « سحب كرة حمراء من الصنف A »

$p(A_2) = \frac{2n}{10n} = \frac{1}{5}$

2) B « سحب كرة من الصنف A »

$p(B) = \frac{3n}{10n} = \frac{3}{10}$

$B\cap A_1 = A_2$ « سحب كرة من الصنف A لونها أحمر »

$p(B\cap A_1) = \frac{2n}{10n} = \frac{1}{5}$

$p_{A_1}(B) = \frac{p(B\cap A_1)}{p(A_1)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

3) بما أننا نسحب تآنيا كرتين من الصندوق فإن كل تآليفة لكرتين من الصندوق هي عنصر من كون الامكانيات Ω

$\text{card}\,\Omega = C_{10n}^{2} = \frac{(10n)!}{2!\,(10n-2)!}$

$= \frac{1}{2}(10n)(10n-1) = 5n(10n-1)$

4) نسحب تآنيا كرة حمراء وكرة خضراء

$P_n = \frac{C_{6n}^{1}\cdot C_{4n}^{1}}{C_{10n}^{2}} = \frac{6n\cdot 4n}{5n(10n-1)} = \frac{24n}{5(10n-1)}$

5) نسحب تآنيا كرتين لهما نفس اللون

الطريقة الأولى

نسحب تآنيا كرتين لهما نفس اللون يعني (نسحب

تأتيا كرتين خضراوين) أو (سحب تأتيا كرتين حمراوين)

اذن :

$$Q_n = \frac{C_{6n}^2 + C_{4n}^2}{C_{10n}^2}$$

$$= \frac{\frac{(6n)!}{2!(6n-2)!} + \frac{(4n)!}{2!(4n-2)!}}{\frac{(10n)!}{2!(10n-2)!}}$$

$$= \frac{3n(6n-1)+2n(4n-1)}{5n(10n-1)} = \frac{26n-5}{5(10n-1)}$$

الطريقة الثانية

لدينا الحدث « سحب كرتين من نفس اللون » هو الحدث المضاد للحدث « سحب كرتين مختلفتي اللون »

إذن:

$$Q_n = 1 - p_n = 1 - \frac{24n}{5(10n-1)} = \frac{26n-5}{5(10n-1)}$$

ج) $p_n < Q_n \Leftrightarrow \frac{24n}{5(10n-1)} < \frac{26n-5}{5(10n-1)}$

$\Leftrightarrow 24n < 26n-5$

$\Leftrightarrow 2n > 5$

$\Leftrightarrow n > \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow n \geq 3$

تمرين رقم 57

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}^* ; \ u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

أ) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ v_n = u_n - \frac{2}{5}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{5}$

$= \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}v_n$

اذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ وحدها الأول

$v_1 = \frac{1}{10}$

ب) لدينا : $\forall n\in\mathbb{N}^* ; \ v_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

اذن $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

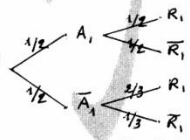
ج) نعتبر الحدثين A_n « نرمي النرد A في الرمية n » و R_n « نحصل على وجه لونه أحمر في الرمية n »

$a_n = p(A_n)$ و $r_n = p(R_n)$

أ) A_1 « نرمي النرد A في الرمية الأولى »

$a_1 = p(A_1) = \frac{1}{2}$

ب)

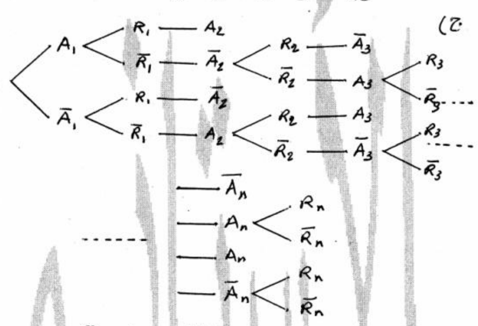


$r_1 = p(A_1\cap R_1) + p(\bar{A}_1\cap R_1)$

$= p(A_1)\cdot p_{A_1}(R_1) + p(\bar{A}_1)\cdot p_{\bar{A}_1}(R_1)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{12}$

ج)



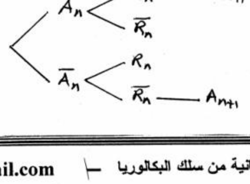
$\forall n\in\mathbb{N}^*, \ r_n = p(R_n)$

$= p(A_n\cap R_n) + p(\bar{A}_n\cap R_n)$

$= p(A_n)\cdot p_{A_n}(R_n) + p(\bar{A}_n)\cdot p_{\bar{A}_n}(R_n)$

$= a_n\frac{1}{2} + (1-a_n)\frac{2}{3}$

$= \frac{-1}{6}a_n + \frac{2}{3}$



هـ) $A_{n+1} = (A_n\cap R_n)\cup(\bar{A}_n\cap\bar{R}_n)$

$p(A_{n+1}) = p(A_n\cap R_n) + p(\bar{A}_n\cap\bar{R}_n)$

$= p(A_n)\cdot p_{A_n}(R_n) + p(\bar{A}_n)\cdot p_{\bar{A}_n}(\bar{R}_n)$

$= a_n\frac{1}{2} + (1-a_n)\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$

لدينا :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, \ a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

وحسب السؤال 1 .

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \ a_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

و) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \ r_n = \frac{-1}{6}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3}$

وبما أن : $\lim\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 0$

فإن $\lim r_n = \frac{-2}{30} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

تمرين رقم 58

1) نسحب بالتتابع وبدون إحلال كرتين من الكيس

أ) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات السوداء المسحوبة .

لدينا : $X(\Omega) = \{1, 2\}$

$$p(X=1) = \frac{2A_1^1 A_{n-1}^1}{A_n^2} = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

$$p(X=2) = \frac{A_{n-1}^2}{A_n^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n}$$

$$E(X)=\frac{2+(n-2)2}{n}=\frac{2(n-1)}{n}$$

2) نسحب بالتتابع وبإحلال n كرة من الكيس

نعتبر الحدث A « نسحب الكرة البيضاء من الكيس »

$$p(n)=p(\underbrace{A\cap A\cap\cdots\cap A}_{n \text{ من المرات}})=(p(A))^n=\frac{1}{n^n}$$

3) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{IN^*}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n\in IN^*,\ u_n=\frac{1}{n^n}$$

ندرس رتابة $(u_n)_{IN^*}$

لدينا :

$$\forall n\in IN^*,\ n<n+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n\in IN^*,\ n^n<(n+1)^n<(n+1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow \forall n\in IN^*,\ \frac{1}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{n^n}$$

إذن

$$\forall n\in IN^*,\ u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}-\frac{1}{n^n}<0$$

وبما أن

$$\forall n\in IN^*,\ \frac{1}{n^n}>0$$

فإن : $(u_n)_{IN^*}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0

إذن $(u_n)_{IN^*}$ متتالية متقاربة

نحدد نهاية $(u_n)_{IN^*}$

لدينا :

$$\forall n\in IN^*;\ 0<\frac{1}{n^n}\leq\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*,\ 0<u_n\leq\frac{1}{n}$$

وبما أن : $\lim \frac{1}{n}=0$

فإنه حسب مصاديق التقارب : $\lim U_n=0$

تمرين رقم 59

نعتبر الحدث A_n « أحمد يتصدى لضربة الجزاء رقم n »

1) أ) A_1 « أحمد يتصدى لضربة الجزاء رقم 1 »

$$p(A_1)=0,7$$

احتمال أن يتصدى أحمد لضربة الجزاء رقم $(n+1)$ علما أنه يتصدى لضربة الجزاء رقم n :

$$p_{A_n}(A_{n+1})=0,8$$

احتمال أن يتصدى أحمد لضربة الجزاء رقم $(n+1)$ علما أنه لم يتصد لضربة الجزاء رقم n :

$$p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})=0,6$$

ب) لدينا ،

$$p_{A_n}(A_{n+1})=\frac{p(A_n\cap A_{n+1})}{p(A_n)}$$

$$\Leftrightarrow p(A_n\cap A_{n+1})=0,8\cdot p(A_n)$$

$$p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})=\frac{p(\overline{A_n}\cap A_{n+1})}{p(\overline{A_n})}$$

$$\Leftrightarrow p(\overline{A_n}\cap A_{n+1})=0,6\cdot p(\overline{A_n})$$

$$=0,6(1-p(A_n))$$

ج) لدينا ،

$$A_{n+1}=A_{n+1}\cap(A_n\cup\overline{A_n})$$

$$p(A_{n+1})=p(A_{n+1}\cap(A_n\cup\overline{A_n}))$$

$$=p((A_{n+1}\cap A_n)\cup(A_{n+1}\cap\overline{A_n}))$$

$$=p(A_{n+1}\cap A_n)+p(A_{n+1}\cap\overline{A_n})$$

$$=0,8\cdot p(A_n)+0,6-0,6\,p(A_n)$$

$$=0,2\cdot p(A_n)+0,6$$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{IN^*}$

$$\begin{cases} P_n=p(A_n) \\ \forall n\in IN^*,\ U_n=P_n-0,75 \end{cases}$$

أ)

$$\forall n\in IN^*,\ U_{n+1}=P_{n+1}-0,75$$

$$=p(A_{n+1})-0,75$$

$$=0,2\,p(A_n)+0,6-0,75$$

$$=0,2\,p(A_n)-0,15$$

$$=0,2\ U_n$$

إذن $(u_n)_{IN^*}$ متتالية هندسية أساسها 0,2 وحدها الأول $u_1=-0,05$

ب)

$$\forall n\in IN^*,\ u_n=u_1(0,2)^{n-1}$$

$$=(-0,05)(0,2)^{n-1}$$

$$\forall n\in IN^*,\ U_n=P_n-0,75$$

$$\Leftrightarrow \forall n\in IN^*,\ P_n=0,75-(0,05)(0,2)^{n-1}$$

ج) بما أن : $\lim (0,2)^{n-1}=0$

فإن $\lim P_n=0,75$

ومنه فإن 75% يتصدى أحمد للهدف

و 25% لا يتصدى أحمد للهدف

تمرين رقم 60

1) بما أن لكل كرة من الكرات الثلاثة أربع اختيارات لوضعها في أحد الصناديق الاربعة فإن كل نتيجة هي ترتيبة بتكرار لثلاث عناصر من بين أربعة

إذن عدد النتائج الممكنة هو :

$$card\,\Omega=4^3=64$$

الحدث A « صندوق واحد فقط لا يحتوي على أية كرة »

لكي يكون صندوقا واحدا فارغا يجب ان نختار لكل كرة صندوقا واحدا

إذن كل نتيجة هي ترتيبة بدون تكرار لثلاثة عناصر من بين أربعة

إذن :

$$card\,A=A_4^3=24$$

ومنه :

$$p(A)=\frac{card\,A}{card\,\Omega}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$

الحدث B « أحد الصناديق يحتوي على الكرات الثلاثة »

عدد النتائج الممكنة هو : 4

إذن

$$card\,B=4$$

ومنه :

$$p(B)=\frac{card\,B}{card\,\Omega}=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$

2) نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الصناديق الفارغة بعد كل عملية توزيع للكرات الثلاثة على الصناديق الأربعة

لدينا :

$$X(\Omega)=\{1,2,3\}$$

$$p(X=1)=p(A)=\frac{3}{8}$$

$$p(X=3)=p(B)=\frac{1}{16}$$

نحسب $p(X=2)$

الطريقة الأولى

$$p(\overline{X=2})=p((X=1)\cup(X=3))$$

$$=p(X=1)+p(X=3)=\frac{7}{16}$$

إذن :

$$p(X=2)=1-p(\overline{X=2})=\frac{9}{16}$$

الطريقة الثالثة

نختار عشوائيا وتآنيا صندوقين من بين الصناديق الاربعة ونختار عشوائيا وتآنيا كرتين من بين الكرات الثلاثة لوضعهما في أحد الصندوقين ونضع الكرة الثالثة في الصندوق الثاني

اذن

$$P(X=2)=\frac{C_4^2 C_3^2 C_1^1}{4^3}=\frac{36}{64}=\frac{1}{16}$$

تمرين (رقم 61)

بما أننا نسحب تآنيا ثلاثة أشرطة من الصندوق فإن كل نتيجة هي تأليفة لثلاثة عناصر من بين 12 عنصر

اذن عدد عناصر كون الامكانيات Ω هو:

$$\text{card}\,\Omega=C_{12}^3=220$$

A « نسحب ثلاثة أشرطة لتعليم الانجليزية »

$$P(A)=\frac{\text{card}\,A}{\text{card}\,\Omega}=\frac{C_5^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{22}$$

B « نسحب ثلاثة أشرطة لتعليم نفس اللغة »

يعني (نسحب تآنيا ثلاثة أشرطة لتعليم الانجليزية) أو (نسحب تآنيا ثلاثة أشرطة لتعليم الإيطالية) أو (نسحب تآنيا ثلاثة أشرطة لتعليم الألمانية).

اذن:

$$P(B)=\frac{C_5^3+C_4^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{15}{220}=\frac{3}{44}$$

C « نسحب ثلاثة أشرطة لتعليم ثلاث لغات مختلفة »

يعني (نسحب تآنيا شريط لتعليم الانجليزية وشريط لتعليم الألمانية وشريط لتعليم الايطالية)

اذن:

$$P(C)=\frac{C_5^1 C_4^1 C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{60}{220}=\frac{3}{11}$$

تمرين (رقم 62)

1) بما أن لكل ظرف من الأظرفة الثلاثة أربع اختيارات لوضعه في أحد الأدراج فإن كل نتيجة هي ترتيبة بتكرار لثلاثة عناصر من بين أربعة.

إذن عدد الطرق الممكنة لتوزيع الأظرفة الثلاثة على الأدراج هي:

$$4^3=64$$

2) لكي يحتوي كل درج على ظرف واحد على الأكثر يجب أن نضع كل ظرف في درج

إذن كل نتيجة هي ترتيبة بدون تكرار لثلاثة عناصر من بين أربعة.

إذن عدد الطرق الممكنة هي:

$$A_4^3=24$$

تمرين رقم (63)

E_k « الكرة المسحوبة من الكيس S_k بيضاء »

$\overline{E_k}$ « الكرة المسحوبة من الكيس S_k سوداء »

1) أ) E_1 « الكرة المسحوبة من الكيس S_1 بيضاء »

$$P(E_1)=\frac{1}{3} \quad ، \quad P(\overline{E_1})=\frac{2}{3}$$

نحسب $P_{E_1}(E_2)$ ، $P_{\overline{E_1}}(E_2)$

الطريقة الأولى

الحدث $E_1\cap E_2$ « الكرة المسحوبة من الكيس S_1 بيضاء

والكرة المسحوبة من الكيس S_2 بيضاء »

$$P(E_1\cap E_2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

الحدث $\overline{E_1}\cap E_2$ « الكرة المسحوبة من الكيس S_1 سوداء والكرة المسحوبة من الكيس S_2 بيضاء »

$$P(\overline{E_1}\cap E_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

اذن

$$P_{E_1}(E_2)=\frac{P(E_1\cap E_2)}{P(E_1)}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{1}=\frac{2}{3}$$

$$P_{\overline{E_1}}(E_2)=\frac{P(\overline{E_1}\cap E_2)}{P(\overline{E_1})}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}$$

نستنتج $P(E_2)$

لدينا:

$$E_2=E_2\cap(E_1\cup\overline{E_1})$$
$$=(E_2\cap E_1)\cup(E_2\cap\overline{E_1})$$

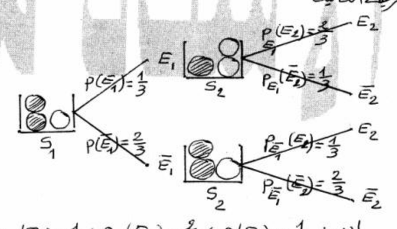
ولدينا:

$$(E_2\cap E_1)\cap(E_2\cap\overline{E_1})=\emptyset$$

اذن:

$$P(E_2)=P(E_1\cap E_2)+P(\overline{E_1}\cap E_2)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

الطريقة الثانية



اذن: $P(E_1)=\frac{1}{3}$ ، $P_{E_1}(E_2)=\frac{2}{3}$ ، $P_{\overline{E_1}}(E_2)=\frac{1}{3}$

$$P(E_2)=P(E_1)\cdot P_{E_1}(E_2)+P(\overline{E_1})\cdot P_{\overline{E_1}}(E_2)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

ب) لدينا:

$$P_1=P(E_1)=\frac{1}{3}$$
$$P_2=P(E_2)=\frac{4}{9}=\frac{1}{3}P_1+\frac{1}{3}$$

نضع:

$$P_k=P(E_k)$$

نتحقق من أن لكل k من $\mathbb{N}$ حيث $0<k<n$

$$P_{k+1}=\frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}$$

الطريقة الأولى

لدينا:

$$E_{k+1}=E_{k+1}\cap(E_k\cup\overline{E_k})$$
$$=(E_{k+1}\cap E_k)\cup(E_{k+1}\cap\overline{E_k})$$

و

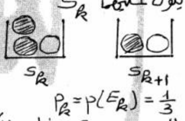
$$(E_{k+1}\cap E_k)\cap(E_{k+1}\cap\overline{E_k})=\emptyset$$

اذن،

$$P(E_{k+1})=P(E_{k+1}\cap E_k)+P(E_{k+1}\cap\overline{E_k})$$

لدينا حالتين يكون عليهما S_k

الحالة الأولى:



لدينا $P_k=P(E_k)=\frac{1}{3}$

$E_k\cap E_{k+1}$ « الكرة المسحوبة من S_k بيضاء والكرة المسحوبة من S_{k+1} بيضاء »

$$P(E_k\cap E_{k+1})=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

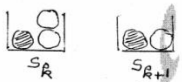
$\overline{E_k}\cap E_{k+1}$ « الكرة المسحوبة من S_k سوداء والكرة المسحوبة من S_{k+1} بيضاء »

$$P(\overline{E_k}\cap E_{k+1})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$

إذن:

$$P_{k+1}=P(E_{k+1})=\frac{4}{9}=\frac{1}{3}P_k+\frac{1}{3}$$

الحالة الثانية



لدينا $P_k = p(E_k) = \frac{2}{3}$

$E_k \cap E_{k+1}$ « الكرة المسحوبة من S_k بيضاء والكرة المسحوبة من S_{k+1} بيضاء »

$$p(E_k \cap E_{k+1}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$\overline{E_k} \cap E_{k+1}$ « الكرة المسحوبة من S_k سوداء والكرة المسحوبة من S_{k+1} بيضاء »

$$p(E_k \cap E_{k+1}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

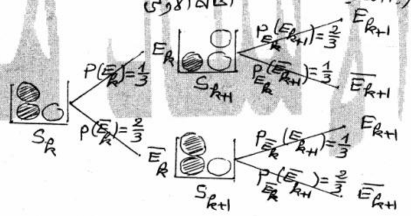
اذن $P_{k+1} = p(E_{k+1}) = \frac{5}{9} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$

اذن لكل k من $\mathbb{N}$ بحيث $0 < k \leq n$

لدينا : $P_{k+1} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$

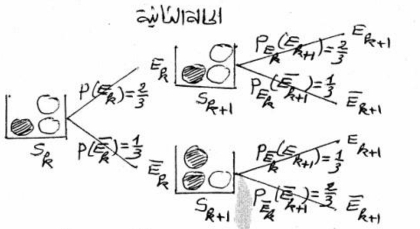
الطريقة الثانية

الحالة الأولى



$$P_{k+1} = p(E_k) \cdot P_{E_k}(E_{k+1}) + p(\overline{E_k}) \cdot P_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$$

الحالة الثانية



$$P_{k+1} = p(E_{k+1}) = p(E_k) \cdot P_{E_k}(E_{k+1}) + p(\overline{E_k}) \cdot P_{\overline{E_k}}(E_{k+1})$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$
$$= \frac{5}{9} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$$

ج) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

أ) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = u_n - \frac{1}{2}$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}$
$$= \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$$

اذن $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_1 = -\frac{1}{3}$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = v_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{3}$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \ -\frac{1}{3} \leq -\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*; \ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \leq u_n < \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{6} \leq u_n < \frac{1}{2}$$

ولدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} - u_n$
$$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}u_n$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - u_n\right) > 0$$

اذن $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$

اذن $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

وبما أن $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

فإن $\lim u_n = \frac{1}{2}$

3) نعتبر $n = 10$

لدينا : $P_k = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$$0{,}4999 \leq P_k < 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow 0{,}4999 \leq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^k < 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow -0{,}0001 \leq -\left(\frac{1}{3}\right)^k < 0$$
$$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^k \leq 10^{-4}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right)^k \leq \ln 10^{-4}$$
$$\Leftrightarrow -k\ln 3 \leq -4\ln 10$$
$$\Leftrightarrow k \geq \frac{4\ln 10}{\ln 3}$$

وبما أن $\frac{4\ln 10}{\ln 3} \simeq 8{,}38$

فإن : $k = 9$ أو $k = 10$

تمرين (رقم 64)

نعتبر الحدث E_n « احترام فاطمة برنامج حميتها في اليوم n »

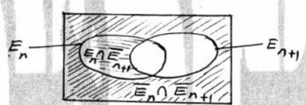
لدينا : $P_{E_n}(\overline{E_{n+1}}) = 0{,}8$ ، $P_{\overline{E_n}}(\overline{E_{n+1}}) = 0{,}3$

1) الطريقة الأولى

$$P_{E_n}(\overline{E_{n+1}}) = \frac{P(E_n \cap \overline{E_{n+1}})}{P(E_n)} = 0{,}8$$
$$\Leftrightarrow p(E_n \cap \overline{E_{n+1}}) = 0{,}8 \cdot p(E_n)$$
$$P_{\overline{E_n}}(\overline{E_{n+1}}) = \frac{P(\overline{E_n} \cap \overline{E_{n+1}})}{P(\overline{E_n})} = 0{,}3$$
$$\Leftrightarrow p(\overline{E_n} \cap \overline{E_{n+1}}) = 0{,}3 \cdot p(\overline{E_n})$$

وبما أن : $(E_n \cap \overline{E_{n+1}}) \cup (\overline{E_n} \cap \overline{E_{n+1}}) = \overline{E_{n+1}}$

و $(E_n \cap \overline{E_{n+1}}) \cap (\overline{E_n} \cap \overline{E_{n+1}}) = \emptyset$

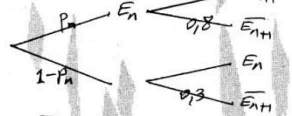


$$P(\overline{E_{n+1}}) = p(E_n \cap \overline{E_{n+1}}) + p(\overline{E_n} \cap \overline{E_{n+1}})$$
$$= 0{,}8 \cdot p(E_n) + 0{,}3\,p(\overline{E_n})$$
$$= 0{,}8 \cdot p(E_n) + 0{,}3(1 - p(E_n))$$
$$= 0{,}5\,P_n + 0{,}3$$

إذن : $1 - P_{n+1} = 0{,}5\,P_n + 0{,}3$
$$\Leftrightarrow P_{n+1} = 0{,}7 - 0{,}5\,P_n$$

الطريقة الثانية

لدينا شجرة الأحداث التالية



$$p(\overline{E}_{n+1}) = 0,8p_n + 0,3(1-p_n)$$
$$\Leftrightarrow 1 - p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$$
$$\Leftrightarrow p_{n+1} = 0,7 - 0,5p_n$$

2) نعتبر المتتالية $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = p_n - \frac{7}{15}$$

أ)
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{7}{15}$$
$$= \frac{7}{10} - \frac{1}{2}p_n - \frac{7}{15}$$
$$= \frac{7}{30} - \frac{1}{2}p_n$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(p_n - \frac{7}{15}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)u_n$$

اذن $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{1}{2}\right)$ وحدها الأول $u_1 = \frac{2}{15}$

ب) لدينا:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{2}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{2}{15}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{7}{15}$$

اذن $\lim p_n = \frac{7}{15}$

تأويل النتيجة

بما أن $\frac{1}{2} > \frac{7}{15}$ فإن احتمال عدم احترام فاطمة لحميتها الغذائية أكبر

تمرين رقم 65

1) الحدث M « اختيار تلميذ ذكر »

لدينا عدد تلاميذ القسم هو 27

وعدد التلاميذ الذكور في القسم هو 17

اذن:
$$p(M) = \frac{17}{27}$$

2) الحدث $B \cap M$ « اختيار تلميذ ذكر من المجموعة B »

لدينا عدد التلاميذ الذكور من المجموعة B هو 7

اذن:
$$p_B(M) = \frac{p(B\cap M)}{p(B)} = \frac{7}{27} \cdot \frac{27}{13}$$
$$= \frac{7}{13}$$

3) الحدث $A \cap M$ « اختيار تلميذ ذكر من المجموعة A »

لدينا عدد التلاميذ الذكور من المجموعة A هو 10

اذن
$$p_A(M) = \frac{p(A\cap M)}{p(A)} = \frac{10}{27} \cdot \frac{27}{17}$$
$$= \frac{10}{17}$$

تمرين رقم 66

يحتوي الصندوق على عشرين بطاقة

بما ان المترشح يسحب تآنيا من الصندوق بطاقتين

فان كل تأليفة لبطاقتين هي عنصر من كون الامكانيات Ω

اذن
$$\mathrm{card}\,\Omega = C_{20}^2 = 190$$

1) الحدث A « الحصول على بطاقة تحمل سؤالا في الجبر وبطاقة تحمل سؤالا في الكيمياء »

$$p(A) = \frac{C_4^1\, C_3^1}{C_{20}^2} = \frac{12}{190}$$

2) الحدث B « الحصول على بطاقتين تحملان سؤالين في الرياضيات »

$$p(B) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{66}{190}$$

3) الحدث C « الحصول على بطاقتين تحملان سؤالين في الهندسة »

الحدث B « الحصول على بطاقتين تحملان سؤالين في الرياضيات »

لدينا:
$$p(C) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{28}{190}$$

وبما أن كل بطاقة في الرياضيات تحمل سؤالا في الهندسة

فان
$$p(C\cap B) = p(C)$$

اذن:
$$p_B(C) = \frac{p(B\cap C)}{p(B)} = \frac{p(C)}{p(B)}$$
$$= \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{28}{66}$$

4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد البطاقات التي تحمل سؤالا في الهندسة.

لدينا:
$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$(X=0)$ « البطاقتان المسحوبتان ليسا في الهندسة »
$$p(X=0) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{66}{190}$$

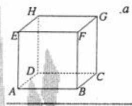
$(X=1)$ « سحب بطاقة في الهندسة وبطاقة في العلوم الفيزيائية »
$$p(X=1) = \frac{C_8^1\, C_{12}^1}{C_{20}^2} = \frac{96}{190}$$

$(X=2)$ « البطاقتان المسحوبتان في الهندسة »
$$p(X=2) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{28}{190}$$

11 الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

1

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا طول ضلعه a.



احسب الجداءات السلمية التالية :

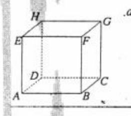
1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ 2) $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FC}$ 4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}$

5) $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{FC}$ 6) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BH}$

2

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا طول ضلعه a.



احسب الجداءات السلمية التالية:

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH}$

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$ 4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$

5) $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{EG}$ 6) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{GE}$

3

ليكن $ABCD$ رباعي أوجه منتظم طول ضلعه a.

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

2) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$. ماذا يمكن أن نقول عن المستقيمين (AB) و(CD)؟

4

ليكن $ABCD$ رباعي أوجه بحيث:

$AB=AC=AD=4$ و $BC=CD=DB=3$.

و I وJ هما منتصفا القطعتين $[BC]$ و $[CD]$ على التوالي.

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) احسب $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ و$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI}$، ثم استنتج المسافة AJ.

3) احسب $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$.

5

لتكن A وB وC ثلاث نقط من الفضاء بحيث: $AB=2$ و $AC=3$ و $\widehat{BAC}=\frac{2\pi}{3}$.

احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

6

$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ أساس متعامد ممنظم و α عدد حقيقي.نعتبر المتجهات:

$\vec{u}=\cos\alpha\vec{i}+\sin\alpha\vec{j}$ ، $\vec{v}=-\sin\alpha\vec{i}+\cos\alpha\vec{j}$ و $\vec{w}=\vec{k}$.

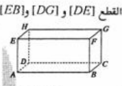
بيّنْ أن $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ أساس متعامد ممنظم.

7

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائما بحيث:

$AB=2$ و $AD=AE=1$.

النقط I وJ وK هي على التوالي منتصفات القطع $[DE]$ و $[DG]$ و$[EB]$.



ننسب الفضاء إلى المعلم المتعامد

الممنظم: $\left(D;\overrightarrow{DA};\frac{1}{2}\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$.

1) حدد إحداثيات المتجهتين $\overrightarrow{IJ}$ و$\overrightarrow{IK}$، ثم احسب: $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ وIJ وIK.

2) استنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\widehat{JIK}$ بالدرجة.

8

احسب الجداء السلمي $\vec{u}.\vec{v}$ في الحالات التالية :

1) $\vec{u}(-1;2;-3)$ و $\vec{v}(-2;2;2)$.

2) $\vec{u}(5;1;-5)$ و $\vec{v}(1;-3;7)$.

3) $\vec{u}(\sqrt{3};\sqrt{2};1)$ و $\vec{v}(-\sqrt{3};\sqrt{2};1)$.

9

حدد في كل حالة من الحالات التالية قيمة العدد الحقيقي x بحيث تكون المتجهتان $\vec{u}$ و$\vec{v}$ متعامدتين.

1) $\vec{u}(x;1;-5)$ و $\vec{v}(x;6;x)$.

2) $\vec{u}(x;2;1)$ و $\vec{v}(1;-x;3x)$.

3) $\vec{u}(x;1;1)$ و $\vec{v}(1;0;-x)$.

10

نعتبر المتجهتين $\vec{u}(1;2;3)$ و $\vec{v}(4;-2;0)$.

1) بيّنْ أن المتجهتين $\vec{u}$ و$\vec{v}$ متعامدتان.

2-أ) حدد إحداثيات المتجهة $\vec{e_1}$ التي تكون مستقيمية مع $\vec{u}$ و $\|\vec{e_1}\|=1$.

ب) حدد إحداثيات المتجهة $\vec{e_2}$ التي تكون مستقيمية مع $\vec{v}$ و $\|\vec{e_2}\|=1$.

11

نعتبر المتجهات: $\vec{u}(1;-2;5)$ و$\vec{v}(0;1;2)$ و $\vec{w}(4;-3;-2)$.

1) احسب $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{v}.\vec{w}$.

2) احسب $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$.

3) بيّنْ أن المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$ متعامدتان.

12

نعتبر النقط التالية: $A(3;3;-5)$ و $B(4;-1;3)$ و $C(5;2;-3)$.

1) احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ و AB و AC.

2) استنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\widehat{BAC}$ بالدرجة.

13

نعتبر النقط $A(5;-5;3)$ و $B(-1;-2;-1)$ و $C(8;5;6)$ و $D(2;8;2)$.

1) بيّنْ أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

2) بيّنْ أن المتجهتين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدتان.

3) حدد طبيعة الرباعي $ABDC$.

14

1) بيّنْ أن المثلث ABC قائم الزاوية حيث:

$A(1;1;1)$ و $B(2;0;-2)$ و $C(1;-2;2)$.

2) بيّنْ أن المثلث ABC متساوي الساقين حيث:

$A(2;-1;0)$ و $B(3;2;-1)$ و $C(6;3;0)$.

15

نعتبر في الفضاء النقطتين $A(1;1;\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$.

لتكن النقطة C هي مماثلة A بالنسبة للنقطة O.

بيّنْ أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية.

16

نعتبر النقط $A(0;0;\sqrt{2})$ و $B(0;1;0)$ و $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$ و $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$.

1) بيّنْ أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان:

2) بيّنْ أن $ABCD$ رباعي أوجه منتظم.

17

أعط متجهة منظمية على المستوى (P) في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(P): 2x+y-z+7=0$

2) $(P): x+z+3=0$

3) $(P): x-y=4z+2$

18

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A والمتجهة $\vec{n}$ منظمية عليه في كل من الحالات التالية :

1) $A(1;-2;3)$ و $\vec{n}(1;-3;-2)$.

2) $A(-1;2;4)$ و $\vec{n}(2;-3;-5)$.

3) $A(1;1;2)$ و $\vec{n}(2;-1;4)$.

19

حدد في كل حالة من الحالات التالية، تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P).

1) $A(-1;1;2)$ و $(P): 2x-3y+z+1=0$.

2) $A(0;1;-1)$ و $(P): x+2z-2=0$.

3) $A(0;0;2)$ و $(P): x+y-1=0$.

20

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) في كل من الحالتين التاليتين:

1) (P) مار من النقطة $A(4;-3;2)$ وعمودي على المستقيم (D) ذي المعادلتين: $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ 2x-y-3z=0 \end{cases}$

2) (P) مار من النقطة $A(4;1;0)$ وعمودي على المستقيم (D) المعرف بمايلي: $\begin{cases} x=2-3t \\ y=-3+t \ ;\ (t\in IR) \\ z=4-2t \end{cases}$

21

ادرس تعامد المستويين (P) و(Q) في كل من الحالات التالية :

1) $(P): 2x+z-1=0$ و $(Q): x-2y-2z+1=0$

2) $(P): x-y-4z+1=0$ و $(Q): 4x-y-2z-3=0$

3) $(P): 2x-5y-z=0$ و $(Q): \begin{cases} x=-2t+3 \\ y=k \ ;\ (t;k)\in IR^2 \\ z=t \end{cases}$

22

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطتين A وB والعمودي على المستوى (Q) في كل من الحالات التالية :

1) $(Q): x-2y+3z-7=0$ ، $B(0;-2;0)$ و $A(2;2;2)$.

2) $(Q): x+2y-5z-3=0$ ، $B(3;2;2)$ و $A(2;1;1)$.

3) $(Q): 3x+y+2z=0$ ، $B(2;0;-2)$ و $A(1;2;-2)$.

23

حدد مثلوث إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) في الحالتين التاليتين:

1) $(P): x-y+2z-1=0$ و $A(1;1;1)$.

2) $(P): 2x+y-z+2=0$ و $A(0;1;2)$.

24

نعتبر النقط التالية: $A(1;0;-1)$ و $B(2;2;3)$ و $C(3;1;-2)$.

1) تحقق من أن النقط A وB وC غير مستقيمية.

2) بيّنْ أن المتجهة $\vec{n}(2;-3;1)$ منظمية على المستوى (ABC)، ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

3) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة $D(-2;2;-1)$ والموازي للمستوى (ABC).

25

احسب مسافة النقطة A عن المستوى (P) في كل حالة من الحالات التالية :

1) $A(1;1;1)$ ، $(P): x+2y+2z-1=0$

2) $A(0;-2;-1)$ ، $(P): x+y-z+1=0$

3) $A(2;0;1)$ ، $(P): x=1$

26

نعتبر النقطتين $A(1;-2;1)$ و $B(1;2;3)$ والمتجهة $\vec{n}(-1;1;2)$.

احسب مسافة النقطة A عن المستوى (P) المار من النقطة B و$\vec{n}$ متجهة منظمية عليه.

27

اكتب معادلة ديكارتية للفلكة التي مركزها $\Omega(a;b;c)$ وشعاعها R في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $\Omega(1;-2;1)$ و $R=6$. 2) $\Omega(0;-3;-4)$ و $R=5$.

28

اكتب معادلة ديكارتية للفلكة التي مركزها Ω وتمر من النقطة A في كل حالة من الحالات التالية :

1) $\Omega(-1;4;5)$ و $A(3;5;2)$

2) $\Omega(1;-2;1)$ و $A(0;-1;1)$

3) $\Omega(1;-2;1)$ و $A\left(\frac{3}{4};\frac{4}{3};2\right)$

29

اكتب معادلة ديكارتية للفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$ في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $A(-1;0;3)$ و $A(2;5;-4)$ 2) $B(1;2;5)$ و $B(-3;1;0)$

30

حدد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق المعادلات التالية، إذا كانت (S) فلكة فحدد مركزها وشعاعها.

1) $x^2+y^2+z^2-2x-4y+4=0$

2) $x^2+y^2+z^2-x+2y-2z+\frac{11}{4}=0$

3) $x^2+y^2+z^2+4x+2z+5=0$

31

بيّنْ أن المستوى (P) مماس للفلكة $S(\Omega;R)$ في كل حالة من الحالات التالية

1) $(P)\ x+2y+2z-1=0$ و $\Omega(2;1;0)$ و $R=1$.

2) $(P): x+\sqrt{3}y-1=0$ و $\Omega(2;\sqrt{3};4)$ و $R=2$.

3) $(P): x+y+z+1=0$ و $\Omega(\sqrt{3};\sqrt{3};-1)$ و $R=\sqrt{3}$.

32

تحقق من أن النقطة A تنتمي إلى الفلكة (S) ثم حدد معادلة المستوى المماس للفلكة (S) في النقطة A.

1) $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$ و $A(0;-2;1)$.

2) $(S): x^2+y^2+z^2-4x+y+2z=0$ و $A(0;0;0)$.

3) $(S): x^2+y^2+z^2+6x-y+9=0$ و $A(-3;1;0)$.

33

ادرس الوضع النسبي للفلكة (S) التي معادلتها الديكارتية هي: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4=0$ مع كل من المستويات التالية:

1) $(P_1): x+y+z-4=0$

2) $(P_2): 2x+3y+z+1=0$

3) $(P_3): 2x+y-2z-8=0$

34

حدد تقاطع المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري التالي:

$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t / t \in IR \\ z = 2 + t \end{cases}$ مع كل من الفلكتين (S_1) و (S_2) المعرفتين بمعادلة ديكارتية: $(S_1): x^2+y^2+z^2+2x=0$

$$(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + \frac{31}{3} = 0$$

36

لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على مستوى (Q).

إذا كان مثلوث إحداثيات H هو $(1;-1;2)$، فما معادلة المستوى (Q)؟

37

ليكن (P) المستوى الذي معادلته هي: $4x-4y-2z+3=0$.

حدد مجموعة النقط M من الفضاء التي مسافتها عن (P) هي 3.

38

نعتبر النقط $A(0;0;6)$ و $B(-3;2;2)$ و $C(1;-4;4)$ و $D(-3;-6;6)$

1) بَيِّنْ أن النقط A و B و C و D غير مستوائية.

2) بَيِّنْ أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC).

39

حدد معادلة ديكارتية للمستويين الموازيين للمستوى (P)، واللذين مسافتهما عن النقطة A تساوي d في كل من الحالات التالية:

1) $(P): 6x+3y-2z+14=0$; $A(0;0;0)$ و $d=2$.

2) $(P): 3x-6y-2z-4=0$; $A(0;0;0)$ و $d=3$.

3) $(P): 4x-4y+7z-3=0$; $A(4;1;-2)$ و $d=4$.

4) $(P): x-y+2=0$; $A(1;1;1)$ و $d=\sqrt{2}$.

40

ليكن (P) المستوى الذي معادلته هي: $2x-5y+z+3=0$.

1) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من النقطة $A(1;-1;1)$ والموازي للمستوى (P).

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (R) العمودي على المحور (zz') والمار من النقطة A.

41

نعتبر النقط التالية:

$A(2;0;3)$ و $B(0;4;-3)$ و $C(0;0;3)$ و $D(0;0;-3)$.

1) بَيِّنْ أن المثلث BCD قائم الزاوية في D، ثم احسب مساحته.

2) بَيِّنْ أن المستقيم (AC) عمودي على المستوى (BCD).

3) حدد حجم رباعي الأوجه $ABCD$.

42

ليكن (P) المستوى الموازي للمحور (xx') والمار من النقطتين $A(0;4;0)$ و $B(0;0;-2)$.

1) بَيِّنْ أن $\vec{n}(0;1;-2)$ منظمية على المستوى (P).

2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

43

نعتبر المستوى (P) الذي معادلته $2x-y-1=0$ والنقطة $A(3;0;2)$.

1) حدد مسافة النقطة A عن المستوى (P).

2) استنتج مسافة النقطة A عن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x-1$ في المستوى (xOy).

44

نعتبر النقط التالية: $A(1;2;0)$ و $B(2;1;0)$ و $C\left(0;0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

1) أ) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب) احسب مسافة النقطة O عن المستوى (ABC).

2) لتكن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$.

أ) بَيِّنْ أن المستقيمين (AB) و (IC) متعامدان.

ب) بَيِّنْ أن المثلث OIC قائم الزاوية في O ومتساوي الساقين.

45

ليكن (D) المستقيم الذي أحد تمثيلاته البارامترية هو:

$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$;$(t \in IR)$ و $A(3;-2;1)$

1) لتكن M نقطة تنتمي إلى المستقيم (D).

احسب المسافة AM بدلالة t.

2) استنتج مسافة النقطة A عن المستقيم (D).

46

نعتبر المستوى (P) المار من النقطة $B(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ متجهة منظمية عليه، والمستوى (Q) الذي معادلته $x+2y-7=0$

1) بَيِّنْ أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

2) بَيِّنْ أن تقاطع (P) و (Q) هو المستقيم (Δ) المار من النقطة $C(-1;4;-1)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(2;-1;1)$.

3) لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$.

احسب مسافة A عن المستوى (P)، ثم مسافة A عن المستوى (Q).

4) استنتج مسافة النقطة A عن المستقيم (Δ).

47

ليكن (P) المستوى الذي معادلته $2x+y-z+6=0$ والنقطتين $A(0;2;2)$ و $B(1;2;-1)$.

1) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A والعمودي على (P).

2) أ) حدد إحداثيات النقطة I تقاطع المستوى (P) والمستقيم (D).

ب) احسب مسافة النقطة A عن المستوى (P).

3) أ) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من النقطة B والموجه بالمتجهتين $\vec{u}(4;1;0)$ و $\vec{v}(2;1;-1)$.

ب) بَيِّنْ أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

48

نعتبر المستقيم (D) المار من النقطة $A(0;0;3)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(1;1;1)$ والمستوى (P) المار من O والموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{i}$.

1) أ) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P).

ج) استنتج مسافة النقطة O عن المستقيم (D).

2) لتكن (H) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.

أ) حدد مجموعة (H).

ب) حدد تقاطع (H) و (P).

49

نعتبر النقطتين $A(1;1;1)$ و $B(1;1;1)$.

1) أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$.

2) ليكن (P) المستوى المعرف بالمعادلة: $Z-1=0$.

بَيِّنْ أن (P) يقطع الفلكة (S) حسب دائرة (C) يتم تحديد مركزها وشعاعها.

50

نعتبر المستوى (P) والفلكة (S) المعرفين على التوالي بالمعادلتين الديكارتيتين:

$(P): x-2y+2z-2=0$

$(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

1) حدد مركز وشعاع الفلكة (S).

2) بَيِّنْ أن المستوى (P) مماس للفلكة (S).

3) حدد نقطة تماس المستوى (P) والفلكة (S).

51

نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $x+y-z+3=0$ والنقطة $A(2;0;2)$.

1) أعط تمثيلا برامتريا للمستقيم (D) المار من A والعمودي على المستوى (P).

2) حدد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P).

3) أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A وتقطع المستوى (P) حسب الدائرة التي مركزها B وشعاعها 2.

52

نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0;1;1)$ وتمر من النقطة $A(0;2;1)$.

1) أ- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S).

ب- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس للفلكة (S) في النقطة A.

2) ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة O والعمودي على المستوى (P).

بَيِّنْ أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $B(0;1;0)$.

53

نعتبر النقط $A(0;1;1)$ و $B(0;0;2)$ و $C(3;0;0)$.

1- بَيِّنْ أن المستقيم (D) المار من النقطة C والموجه بالمتجهة $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ عمودي على المستقيم (AB).

2- أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب) حدد مسافة النقطة B عن المستقيم (AC).

3- لتكن (S) الفلكة المعرفة بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-4z+2=0$

أ- حدد شعاع وإحداثيات مركز الفلكة (S).

ب- بَيِّنْ أن المستقيم (AC) مماس للفلكة (S).

ج- حدد تقاطع المستوى (ABC) والفلكة (S).

54

1) نعتبر النقطة $A(0;0;1)$ والمتجهة $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{k}$

حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A و $\vec{u}$ متجهة منظمية عليه.

2) لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 4z + \frac{34}{3} = 0$$

أ- حدد إحداثيات Ω مركز الفلكة (S) وشعاعها r.

ب- تحقق من أن النقطة Ω تنتمي إلى المستوى (P).

3) ليكن (Q) المستوى الذي معادلته: $2x+y-z+6=0$

أ- أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (Q).

ب- بَيِّنْ أن المستوى (Q) مماس للفلكة (S) ثم حدد إحداثيات نقطة تقاطع الفلكة (S) والمستوى (Q).

55

نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق مايلي:

$$x^2+y^2+z^2-8x-6y=0$$

والنقط $A(2;-1;0)$ و $B(-1;2;0)$ و $C(\sqrt{2};1;1)$.

1) بَيِّنْ أن (S) فلكة محددا مركزها Ω وشعاعها R.

2) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى (ABC).

4) بَيِّنْ أن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) يتم تحديد مركزها وشعاعها.

56

نعتبر النقطتين $A(2;1;0)$ و $B(4;2;2)$ والمستوى (P) الذي معادلته:

$$2x+y+2z-5=0$$

1) حدد معادلة الفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$.

2) بَيِّنْ أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة A.

3) ليكن المستقيم (Δ) المار من النقطة B والموجه بالمتجهة $\vec{u} = 2\vec{j} - \vec{k}$

أ) بَيِّنْ أن المستقيم (Δ) يوازي قطعا المستوى (P).

ب) بَيِّنْ أن (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة B.

4) بَيِّنْ أن المستوى (Q) الذي معادلته $z=0$ يقطع الفلكة (S) وفق دائرة ينبغي تحديدها.

57

نعتبر الفلكة (S) التي مركزها $\Omega(1;0;-2)$ وشعاعها $r=2$.

1) حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S).

2) لتكن النقطة $A(0;\sqrt{2};-1)$.

أ) تحقق من أن A تنتمي إلى (S).

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس للفلكة (S) في A.

3) أ) حدد تمثيلا برامتريا للمستقيم (D) المار من O والمتعامد مع (P).

ب) حدد تقاطع (S) و (D).

58

لتكن (S) الفلكة ذات المعادلة : $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-19=0$

و (Δ) المستقيم المعرف كالتالي: $\begin{cases} x-1=0 \\ \frac{y-4}{3}=\frac{z-9}{4} \end{cases}$

1) حدد شعاع الفلكة (S) ومركزها Ω .

2) تحقق أن $\Omega \in (\Delta)$ وحدد متجهة موجهة للمستقيم (Δ).

3) (P_1) و (P_2) هما المستويان المماسان للفلكة (S) والعموديان على المستقيم (Δ).

أعط معادلة ديكارتية لكل من المستويين (P_1) و (P_2) وحدد نقطتي التماس.

59

نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-x\sqrt{3}-z-3=0$

1) حدد مركز وشعاع الفلكة (S).

2) لتكن النقطة $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.

أ- تحقق من أن النقطة A تنتمي إلى الفلكة (S).

ب- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس للفلكة (S) في A.

ج- حدد المستقيم (D) المماس للفلكة (S) في النقطة A والذي يقطع المستقيم (Δ) المار من النقطة O والموجه بالمتجهة $\vec{u}\left(2\sqrt{3};-\frac{1}{2};1\right)$.

60

نعتبر في الفضاء النقط التالية: $A(1;1;-1)$ و $B(-1;0;0)$ و $C(0;0;-1)$

1) بيّن أن $x-y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (P) المحدد بالنقط A و B و C.

2) بيّن أن المستوى (P) يوازي المستوى (Q) الذي معادلته $x-y+z-1=0$.

3) أ- احسب مسافة النقطة A عن المستوى (Q).

ب- بيّن أن الفلكة (S) ذات الشعاع r والمركز $\Omega(a;b;c)$ تكون مماسة للمستويين (P) و (Q) إذا وفقط إذا كان: $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و $b=a+c$.

61

نعتبر في الفضاء المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما:

$(Q): 2x+2y-z=0$ و $(P): x-2y-2z=0$

1) أ- تحقق من أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

ب- أعط مثلوث إحداثيات متجهة موجهة للمستقيم (Δ).

ج- استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (R) المار من النقطة $A(1;-5;1)$ والعمودي على (P) و (Q).

2) ليكن (D) المستقيم المار بالنقطة $B(1;0;-1)$ والموازي للمستقيم (Δ).

أ- أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

ب- تحقق من أن: $d(M;(P))=d(M;(Q))$ لكل M من (D).

62

نعتبر في الفضاء النقط $A(1;0;-3)$ و $B(0;1;-4)$ و $C(1;1;-7)$.

1) أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2) نعتبر الدائرة (E) المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} y=3 \\ x^2+z^2-2x-2z-7=0 \end{cases}$$

أ) حدد مركز وشعاع الدائرة (E).

ب) أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي تضم الدائرة (E) والتي مركزها ينتمي إلى المستوى (ABC).

63

نعتبر في الفضاء النقط: $A(1;0;1)$ و $B(0;1;0)$ و $C(0;1;1)$ و $E(1;1;0)$ والمستقيم (D) المار من النقطة E، و $\vec{u}(1;1;-1)$ متجهة موجهة له.

1- أ) بيّن أن $x+y-1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ب) حدد تقاطع المستوى (ABC) والمستقيم (D).

2- اكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يتضمن المستقيم (D) و متعامد مع المستوى (ABC).

3- لتكن (S) الفلكة التي مركزها النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ وشعاعها $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) اكتب معادلة ديكارتية للفلكة (S).

ب) بيّن أن تقاطع المستوى (ABC) والفلكة (S) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

64

نعتبر في الفضاء، مكعبا $ABCDEFGH$، حيث I منتصف القطعة $[EF]$ و J مركز المربع $ADHE$.

ننسب الفضاء إلى المعلم المتعامد الممنظم $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$.

1- أ) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (AIB).

ب) احسب $d(G;(AIB))$.

ج) استنتج حجم رباعي الأوجه $ABIG$.

2- أ) بيّن أن المستقيم (BJ) عمودي على المستوى (AIG)، ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (AIG).

ب) احسب $d(B;(AIG))$.

3- أ) عبر عن حجم رباعي الأوجه $ABIG$ بدلالة مساحة المثلث AIG.

ب) استنتج مساحة المثلث AIG.

65

نعتبر الفلكة (S) التي إحدى معادلاتها الديكارتية :

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$

و المستوى (P) الذي معادلته : $x+2y+2z+2=0$.

1- حدد Ω مركز و R شعاع الفلكة (S).

2- بيّن أن المستوى (P) مماس للفلكة (S).

3- أوجد معادلة ديكارتية للمستوى (Q)، المماس للفلكة (S) في النقطة $B(3;2;0)$.

4- بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

5- ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $C(1;1;1)$ والموازي للمستويين (P) و (Q).

أ) أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D).

ب) احسب مسافة النقطة Ω عن المستقيم (D).

ج) استنتج أن المستقيم (D) يقطع الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين.

66

نعتبر النقط $A(1;1;1)$ و $B(0;1;2)$ و $C(-3;2;5)$ والمستوى (P) الذي معادلته الديكارتية : $x-y-z+2=0$.

1- أ) بيّن أن النقط A و B و C و O غير مستوائية.

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ج) بيّن أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

2- ليكن (Δ) المستقيم المار من النقطة O والعمودي على المستوى (P).

أ) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ).

ب) حدد تقاطع (Δ) والمستوى (P).

3- لتكن (S) الفلكة التي معادلتها: $x^2+y^2+z^2-2=0$

أ) حدد مركز وشعاع الفلكة (S).

ب) بيّن أن (ABC) مماس للفلكة (S).

ج) بيّن أن تقاطع المستوى (P) والفلكة (S) هو دائرة ينبغي تحديد مركزها وشعاعها.

67

نعتبر النقط $A(0;2;0)$ و $B(1;2;0)$ و $C(0;0;3)$.

1- أ) بيّن أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من النقطة A و $\overrightarrow{BC}$ متجهة منظمية عليه.

ج) حدد مثلوث إحداثيات النقطة A' تقاطع المستوى (Q) والمستقيم (BC).

د) استنتج مساحة المثلث ABC.

2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

3- بيّن أن المستوى (ABC) عمودي على المستوى ذي المعادلة : $x=0$.

4- لتكن (S) الفلكة التي أحد أقطارها $[BC]$.

أ) أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S).

ب) بيّن أن تقاطع الفلكة (S) والمستوى (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.

68

نعتبر في الفضاء الفلكة (S) والمستوى (P) بحيث:

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y=0$ ، $(P): x-y-z-1=0$

1- حدد إحداثيات النقطة Ω مركز الفلكة (S) وشعاعها R.

2- بيّن أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) محددا إحداثيات مركزها ω وشعاعها r.

3- ليكن (Q) المستوى المماس للفلكة (S) في النقطة O أصل المعلم.

أ) حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q).

ب) أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).

4- أ) حدد إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (Δ).

ب) بيّن أن H هي أيضا المسقط العمودي للنقطة ω على المستقيم (Δ).

ج) بيّن أن النقط ω و Ω و O و H مستوائية وأنها متداورة.

69

نعتبر (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق مايلي:

$x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$، حيث m بارامتر حقيقي.

1- بيّن أن (S_m) فلكة مهما يكن m من IR محددا مركزها Ω_m وشعاعها R_m بدلالة m.

2- حدد المحل الهندسي للنقط Ω_m عندما يتغير m في IR.

3- بيّن أنه توجد دائرة (C) بحيث: $(C) \subset (S_m)$ مهما يكن m من IR، محددا مركزها وشعاعها ومستواها.

4- لتكن A نقطة من الفضاء لاتنتمي إلى المستوى الذي معادلته: $x+2y+z=0$. بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد m_0 بحيث: $A \in (S_{m_0})$.

تمرين رقم 1

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AH} = \vec{AB}\cdot(\vec{AD}+\vec{DH})$
$= \vec{AB}\cdot(\vec{AD}+\vec{AE})$
$= \vec{AB}\cdot\vec{AD} + \vec{AB}\cdot\vec{AE}$
$= 0 + 0 = 0$

2) $\vec{AF}\cdot\vec{BC} = (\vec{AB}+\vec{BF})\cdot\vec{BC}$
$= (\vec{AB}+\vec{AE})\cdot\vec{AD}$
$= \vec{AB}\cdot\vec{AD} + \vec{AE}\cdot\vec{AD}$
$= 0 + 0 = 0$

3) $\vec{FA}\cdot\vec{FC} = (\vec{FB}+\vec{BA})\cdot(\vec{FB}+\vec{BC})$
$= \vec{FB}^2 + \vec{FB}\cdot\vec{BC} + \vec{BA}\cdot\vec{FB} + \vec{BA}\cdot\vec{BC}$
$= a^2 + 0 + 0 + 0 = a^2$

4) $\vec{AB}\cdot\vec{AG} = \vec{AB}\cdot(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CG})$
$= \vec{AB}\cdot(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AE})$
$= \vec{AB}^2 + \vec{AB}\cdot\vec{AD} + \vec{AB}\cdot\vec{AE}$
$= a^2 + 0 + 0 = a^2$

5) $\vec{FD}\cdot\vec{FC} = (\vec{FB}+\vec{BC}+\vec{CD})\cdot(\vec{FB}+\vec{BC})$
$= \vec{FB}^2 + \vec{FB}\cdot\vec{BC} + \vec{BC}\cdot\vec{FB} + \vec{BC}^2 + \vec{CD}\cdot\vec{FB} + \vec{CD}\cdot\vec{BC}$
$= a^2 + 0 + 0 + a^2 + 0 + 0 = 2a^2$

6) $\vec{AG}\cdot\vec{BH} = (\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CG})\cdot(\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DH})$
$= \vec{AB}\cdot\vec{BC} + \vec{AB}\cdot\vec{CD} + \vec{AB}\cdot\vec{DH} + \vec{BC}^2 + \vec{BC}\cdot\vec{CD} + \vec{BC}\cdot\vec{DH} + \vec{CG}\cdot\vec{BC} + \vec{CG}\cdot\vec{CD} + \vec{CG}\cdot\vec{DH}$

$= 0 - a^2 + 0 + a^2 + 0 + 0 + 0 + 0 + a^2 = a^2$

تمرين رقم 2

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AB}\cdot(\vec{AB}+\vec{BC})$
$= \vec{AB}^2 + \vec{AB}\cdot\vec{BC}$
$= a^2 + 0 = a^2$

2) $\vec{AB}\cdot\vec{DH} = \vec{AB}\cdot\vec{AE} = 0$

3) $\vec{AB}\cdot\vec{DG} = \vec{AB}\cdot(\vec{DC}+\vec{CG})$
$= \vec{AB}\cdot\vec{DC} + \vec{AB}\cdot\vec{CG}$
$= a^2 + 0 = a^2$

4) $\vec{AB}\cdot\vec{EG} = \vec{AB}\cdot(\vec{EF}+\vec{FG})$
$= \vec{AB}\cdot\vec{EF} + \vec{AB}\cdot\vec{FG}$
$= a^2 + 0 = a^2$

5) $\vec{BD}\cdot\vec{EG} = (\vec{BC}+\vec{CD})\cdot(\vec{EF}+\vec{FG})$
$= \vec{BC}\cdot\vec{EF} + \vec{BC}\cdot\vec{FG} + \vec{CD}\cdot\vec{EF} + \vec{CD}\cdot\vec{FG}$
$= 0 + a^2 - a^2 + 0 = 0$

6) $\vec{AC}\cdot\vec{GE} = (\vec{AB}+\vec{BC})\cdot(\vec{GF}+\vec{FE})$
$= \vec{AB}\cdot\vec{GF} + \vec{AB}\cdot\vec{FE} + \vec{BC}\cdot\vec{GF} + \vec{BC}\cdot\vec{FE}$
$= 0 - a^2 - a^2 + 0 = -2a^2$

تمرين رقم 3

1) بما أن $ABCD$ رباعي أوجه منتظم فإن جميع وجوهه هي مثلثات متساوية الأضلاع

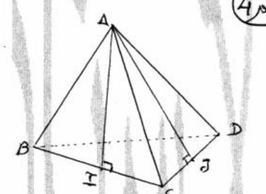
إذن $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AD} = AB \times AD \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$

2) $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}\cdot(\vec{CB}+\vec{BD})$
$= \vec{AB}\cdot\vec{CB} + \vec{AB}\cdot\vec{BD}$
$= \vec{BA}\cdot\vec{BC} - \vec{BA}\cdot\vec{BD}$
$= BA \times BC \times \cos\frac{\pi}{3} - BA \times BD \times \cos\frac{\pi}{3}$
$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$

إذن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

تمرين رقم 4



1) لدينا: المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A و I منتصف $[BC]$

إذن: $(AI)\perp(BC)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (\vec{AI}+\vec{IB})\cdot(\vec{AI}+\vec{IC})$
$= \vec{AI}^2 + \vec{AI}\cdot\vec{IC} + \vec{IB}\cdot\vec{AI} + \vec{IB}\cdot\vec{IC}$
$= (4^2 - (\frac{3}{2})^2) + 0 + 0 + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cos\pi$
$= \frac{55}{4} - \frac{9}{4} = \frac{23}{2}$

2) $\vec{CA}\cdot\vec{CB} = (\vec{CI}+\vec{IA})\cdot\vec{CB}$
$= \vec{CI}\cdot\vec{CB} + \vec{IA}\cdot\vec{CB}$

$= \frac{9}{2} + 0 = \frac{9}{2}$

$\vec{CA}\cdot\vec{CI} = (\vec{CI}+\vec{IA})\cdot\vec{CI}$
$= \vec{CI}\cdot\vec{CI} + \vec{IA}\cdot\vec{CI}$
$= \frac{9}{4} + 0 = \frac{9}{4}$

لدينا المثلث ACD متساوي الساقين رأسه A و J منتصف $[CD]$

إذن: $(CD)\perp(AJ)$

وحسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة

$AJ = \sqrt{16 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}$

3) $\vec{AI}\cdot\vec{AJ} = (\vec{AC}+\vec{CI})\cdot(\vec{AC}+\vec{CJ})$
$= \vec{AC}^2 + \vec{AC}\cdot\vec{CJ} + \vec{CI}\cdot\vec{AC} + \vec{CI}\cdot\vec{CJ}$
$= \vec{AC}^2 - \vec{CA}\cdot\vec{CJ} - \vec{CI}\cdot\vec{CA} + \vec{CI}\cdot\vec{CJ}$
$= 16 - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{3}$
$= \frac{37}{8}$

تمرين رقم 5

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\frac{2\pi}{3})$
$= 2 \times 3 \times (-\frac{1}{2}) = -3$

تمرين رقم 6

$\vec{u} = (\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}$
$\vec{v} = (-\sin\alpha)\vec{i} + (\cos\alpha)\vec{j}$
$\vec{w} = \vec{k}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = 1$

$\|\vec{w}\| = \|\vec{k}\| = 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left((\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}\right)\left((-\sin\alpha)\vec{i} + (\cos\alpha)\vec{j}\right)$

$= -\cos\alpha\cdot\sin\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = \left((\cos\alpha)\vec{i} + (\sin\alpha)\vec{j}\right)\cdot\vec{k}$

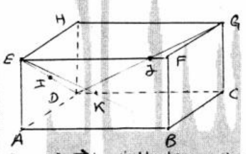
$= 0$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = \left((-\sin\alpha)\vec{i} + (\cos\alpha)\vec{j}\right)\cdot\vec{k}$

$= 0$

اذن $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس متعامد ممنظم

تمرين رقم 7



نعتبر الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد الممنظم: $(D,\vec{DA},\frac{1}{2}\vec{DC},\vec{DH})$

1) * $\vec{IJ} = \vec{ID} + \vec{DJ}$

$= -\frac{1}{2}\vec{DE} + \frac{1}{2}\vec{DG}$

$= -\frac{1}{2}(\vec{DA}+\vec{DH}) + \frac{1}{2}(\vec{DC}+\vec{DH})$

$= -\frac{1}{2}\vec{DA} + (\frac{1}{2}\vec{DC}) + 0\vec{DH}$

اذن: $\vec{IJ}\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

* من المثلث EDB لدينا:

I منتصف [ED] و J منتصف [EB]

اذن: $\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{DB}$

$\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}(\vec{DC}+\vec{DA})$

$= \frac{1}{2}\vec{DA} + (\frac{1}{2}\vec{DC}) + 0\vec{DH}$

اذن: $\vec{IK}\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

وبما أن المعلم $(D,\vec{DA},\frac{1}{2}\vec{DC},\vec{DH})$ متعامد ممنظم

فإن $\vec{IJ}\cdot\vec{IK} = (\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) + 1\times1 + 0$

$= \frac{3}{4}$

$IJ = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$IK = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2) $\vec{IJ}\cdot\vec{IK} = IJ\times IK\times\cos(\widehat{JIK})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{JIK}) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

اذن $(\widehat{JIK}) \simeq 53^\circ$

تمرين رقم 8

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم: $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)(-2) + 2\cdot2 + (-3)\cdot2 = 0$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5 - 3 - 35 = -33$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3 + 2 + 1 = 0$

تمرين رقم 9

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لدينا: $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = x^2 + 6 - 5x$

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Delta = 1$

$x = 2$ او $x = 3$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = x - 2x + 3x = 2x$

$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow x = 0$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = x + 0 - x = 0$

اذن: $\forall x\in\mathbb{R};\ \vec{u}\perp\vec{v}$

تمرين رقم 10

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\vec{v}(4,-2,0)$ ، $\vec{u}(1,2,3)$

1) لدينا: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 - 4 + 0 = 0$

اذن: $\vec{u}\perp\vec{v}$

2) أ) لدينا: $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

اذن: $\vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{u} = \left(\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, 0\right)$

ب) لدينا: $\|\vec{v}\| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

اذن: $\vec{e_2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\vec{v} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}, 0\right)$

تمرين رقم 11

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$\vec{u}(1,-2,5)$, $\vec{v}(0,1,2)$, $\vec{w}(4,-3,-2)$

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 - 2 + 10 = 8$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 - 3 - 4 = -7$

2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+(-2)^2+5^2} = \sqrt{30}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{0+1+2^2} = \sqrt{5}$

3) $\vec{u}\cdot\vec{w} = 4 + 6 - 10 = 0$

اذن $\vec{u}\perp\vec{v}$

تمرين رقم 12

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(3,3,-5)$ ، $B(4,-1,3)$, $C(5,2,-3)$

1) لدينا: $\vec{AC}(2,-1,2)$ ، $\vec{AB}(1,-4,8)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2 + 4 + 16 = 22$

$AB = \sqrt{1+16+64} = 9$

$AC = \sqrt{4+1+4} = 3$

2) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

$\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{27}$

اذن: $(\widehat{BAC}) \simeq 35{,}4^\circ$

تمرين رقم 13

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j,\vec k)$

$D(2,8,2)$, $C(8,5,6)$, $B(-1,-2,-1)$, $A(5,-5,3)$

1) لدينا: $\vec{AC}(3,10,3)$ و $\vec{BD}(3,10,3)$

إذن: $\vec{AC}=\vec{BD}$

2) لدينا: $\vec{AC}(3,10,3)$ و $\vec{AB}(-6,3,-4)$

$\vec{AC}\cdot\vec{AB}=-18+30-12=0$

إذن $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

3) لدينا: $\vec{AC}=\vec{BD}$ و $\vec{AC}\perp\vec{AB}$

ولدينا: $AC=\sqrt{9+100+9}=\sqrt{118}$

$AB=\sqrt{36+9+16}=\sqrt{61}$

يعني $AC\neq AB$

إذن الرباعي $ABDC$ مستطيل

تمرين رقم 14

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j,\vec k)$

1) $C(1,-2,2)$ ، $B(2,0,-2)$ ، $A(1,1,1)$

لدينا: $\vec{AB}(1,-1,-3)$ و $\vec{AC}(0,-3,1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0+3-3=0$

إذن: $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

إذن المثلث ABC قائم الزاوية في A.

2) $C(6,3,0)$ ، $B(3,2,-1)$ ، $A(2,-1,0)$

لدينا: $\vec{AB}(1,3,-1)$ ، $\vec{AC}(4,4,0)$ ، $\vec{BC}(3,1,1)$

$AB=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$

$BC=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

$AC=\sqrt{16+16}=4\sqrt2$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B

تمرين رقم 15

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j,\vec k)$

$B(\sqrt2,-\sqrt2,0)$ ، $A(1,1,\sqrt2)$

نحدد إحداثيات C

لدينا C مماثلة A بالنسبة لـ O

يعني: $\vec{OC}=-\vec{OA}$

يعني: $\vec{OC}(-1,-1,-\sqrt2)$

إذن $C(-1,-1,-\sqrt2)$

لدينا: $\vec{AB}(\sqrt2-1,-\sqrt2-1,-\sqrt2)$

$\vec{AC}(-2,-2,-2\sqrt2)$

$\vec{BC}(-1-\sqrt2,-1+\sqrt2,-\sqrt2)$

ولدينا: $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=-(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)-(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)+2$

$=-1-1+2=0$

$AB=\sqrt{(\sqrt2-1)^2+(\sqrt2+1)^2+(-\sqrt2)^2}=2\sqrt2$

$BC=\sqrt{(1+\sqrt2)^2+(\sqrt2-1)^2+(-\sqrt2)^2}=2\sqrt2$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B وقائم الزاوية في B.

تمرين رقم 16

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec i,\vec j,\vec k)$

$D(-\frac{\sqrt3}{2},-\frac12,0)$, $C(\frac{\sqrt3}{2},\frac{-1}{2},0)$, $B(0,1,0)$, $A(0,0,\sqrt2)$

1) لدينا: $\vec{AD}(-\frac{\sqrt3}{2},-\frac12,-\sqrt2)$ و $\vec{BC}(\frac{\sqrt3}{2},\frac{-3}{2},0)$

$\vec{AD}\cdot\vec{BC}=-(\frac{\sqrt3}{2})^2+\frac12\cdot\frac32-\sqrt2\cdot0$

$=0$

إذن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدين.

2) لدينا: $\vec{AB}(0,1,-\sqrt2)$ إذن: $AB=\sqrt3$

$\vec{AC}(\frac{\sqrt3}{2},-\frac12,-\sqrt2)$ إذن: $AC=\sqrt{\frac34+\frac14+2}=\sqrt3$

$\vec{AD}(-\frac{\sqrt3}{2},-\frac12,-\sqrt2)$ إذن: $AD=\sqrt{\frac34+\frac14+2}=\sqrt3$

$\vec{BC}(\frac{\sqrt3}{2},-\frac32,0)$ إذن: $BC=\sqrt{\frac34+\frac94}=\sqrt3$

$\vec{BD}(-\frac{\sqrt3}{2},-\frac32,0)$ إذن $BD=\sqrt{\frac34+\frac94}=\sqrt3$

$\vec{CD}(-\sqrt3,0,0)$ إذن $CD=\sqrt3$

ومنه فإن $ABCD$ رباعي أوجه منتظم.

تمرين رقم 17

1) $(P): 2x+y-z+7=0$

$\vec n(2,1,-1)$ متجهة منظمية على (P)

2) $(P): x+z+3=0$

$\vec n(1,0,1)$ متجهة منظمية على (P)

3) $(P): x-y=4z+2$

$\vec n(1,-1,-4)$ متجهة منظمية على (P)

تمرين رقم 18

1) نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(1,-2,3)$ و $\vec n(1,-3,-2)$ متجهة منظمية عليه

الطريقة الأولى:

بما أن $\vec n(1,-3,-2)$ متجهة منظمية على (P)

فإن معادلة (P) تكتب على شكل

$x-3y-2z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

وبما أن $A(1,-2,3)\in(P)$

فإن $1+6-6+d=0$

يعني $d=-1$

إذن $(P): x-3y-2z-1=0$

الطريقة الثانية:

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(P)\Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec n=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(1)+(y+2)(-3)+(z-3)(-2)=0$

$\Leftrightarrow x-3y-2z-1=0$

إذن: $(P): x-3y-2z-1=0$

2) نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(-1,2,4)$ و $\vec n(2,-3,-5)$ متجهة منظمية عليه:

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(2) + (y-2)(-3) + (z-4)(-5) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 3y - 5z + 28 = 0$

إذن : $(P) : 2x - 3y - 5z + 28 = 0$

3) نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من $A(1,1,2)$ و $\vec{n}(2,-1,4)$ متجهة منظمية عليه.

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2) + (y-1)(-1) + (z-2)(4) = 0$

$\Leftrightarrow x - y + 4z - 9 = 0$

إذن $(P) : x - y + 4z - 9 = 0$

تمرين رقم 19

1) $(P) : 2x - 3y + z + 1 = 0$

المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) يعني أن (D) موجه بالمتجهة $\vec{n}(2,-3,1)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{AM} = k\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = -3k + 1 \\ z = k + 2 \end{cases} \ / (k \in \mathbb{R})$$

2) $(P) : x + 2z - 2 = 0$

المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) يعني أن (D) موجه بالمتجهة $\vec{n}(1,0,2)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{AM} = k\vec{n}$

$$\Leftrightarrow (D) : \begin{cases} x = k \\ y = 1 \\ z = 2k - 1 \end{cases} \ / (k \in \mathbb{R})$$

3) $(P) : x + y - 1 = 0$

المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) يعني أن (D) موجه بالمتجهة $\vec{n}(1,1,0)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (D) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \ \overrightarrow{AM} = k\vec{n}$

$$\Leftrightarrow (D) : \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 2 \end{cases} \ / (k \in \mathbb{R})$$

تمرين رقم 20

1) $$(D) : \begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) :

نضع $z = k$

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2k + 3 \\ 2x - y = 3k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5k - 3 \\ y = 7k - 6 \\ z = k \end{cases}$$

ومنه فإن

$$(D) \begin{cases} x = 5k - 3 \\ y = 7k - 6 \\ z = k \end{cases} \ / (k \in \mathbb{R})$$

وبالتالي فإن (D) موجه بالمتجهة $\vec{n}(5,7,1)$

وبما أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (P)

فإن المتجهة $\vec{n}(5,7,1)$ منظمية على (P)

إذن $(P) : 5x + 7y + z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

$A(4,-3,2) \in (P) \Leftrightarrow 20 - 21 + 2 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -1$

إذن : $(P) : 5x + 7y + z - 1 = 0$

2) $$(D) : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \ / (t \in \mathbb{R})$$

لدينا $\vec{n}(-3,1,-2)$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

وبما أن المستقيم (D) عمودي على المستوى (P)

فإن $\vec{n}(-3,1,-2)$ متجهة منظمية على (P)

إذن : $(P) : -3x + y - 2z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

$A(4,1,0) \in (P) \Leftrightarrow -12 + 1 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 11$

إذن : $(P) : -3x + y - 2z + 11 = 0$

تمرين رقم 21

1) $(P) : 2x + z - 1 = 0$ ، $(Q) : x - 2y - 2z + 1 = 0$

لدينا : $\vec{n_1}(2,0,1)$ متجهة منظمية على (P)

و $\vec{n_2}(1,-2,-2)$ متجهة منظمية على (Q)

وبما أن $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

يعني أن $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$

فإن $(P) \perp (Q)$

2) $(P) : x - y - 4z + 1 = 0$ ، $(Q) : 4x - y - 2z - 3 = 0$

لدينا : $\vec{n_1}(1,-1,-4)$ متجهة منظمية على (P)

و $\vec{n_2}(4,-1,-2)$ متجهة منظمية على (Q)

وبما أن $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 18$

يعني أن $\vec{n_1} \not\perp \vec{n_2}$

فإن (P) و (Q) مستويين غير متعامدين

3) $(P) : 2x - 5y - z = 0$ ؛ $$(Q) : \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = k \\ z = t \end{cases} \ / ((k,t) \in \mathbb{R}^2)$$

لدينا : $\vec{n}(2,-5,-1)$ متجهة منظمية على (P)

و $\vec{u}(-2,0,1)$ و $\vec{v}(0,1,0)$ متجهتين موجهتين للمستوى (Q)

بما أن : $\vec{n} \cdot \vec{u} = -5 \neq 0$

يعني أن $\vec{n} \not\perp \vec{u}$

فإن (P) و (Q) مستويين غير متعامدين

تمرين رقم 22

1) $A(2,2,2)$; $B(0,-2,0)$, $(Q): x-2y+3z-7=0$

لدينا: $\vec{n}(1,-2,3)$ متجهة منظمية على (Q)

بما أن $(Q)\perp(P)$

فإن (P) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{n}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(P) \Leftrightarrow \det(\vec{AM},\vec{AB},\vec{n})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -2 & 1\\ y-2 & -4 & -2\\ z-2 & -2 & 3\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix}-4 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -4x+y+2z+2=0$

إذن: $(P): -4x+y+2z+2=0$

2) $A(2,1,1)$, $B(3,2,2)$, $(Q): x+2y-5z-3=0$

لدينا $\vec{n}(1,2,-5)$ متجهة منظمية على (Q)

وبما أن $(Q)\perp(P)$

فإن (P) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{n}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(P) \Leftrightarrow \det(\vec{AM},\vec{AB},\vec{n})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1\\ y-1 & 1 & 2\\ z-1 & 1 & -5\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -5\end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -5\end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow -7x+6y+z+7=0$

إذن: $(P): -7x+6y+z+7=0$

3) $A(1,2,-2)$, $B(2,0,-2)$, $(Q): 3x+y+2z=0$

لدينا: $\vec{n}(3,1,2)$ متجهة منظمية على (Q)

وبما أن: $(Q)\perp(P)$

فإن (P) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{n}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(P) \Leftrightarrow \det(\vec{AM},\vec{AB},\vec{n})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3\\ y-2 & -2 & 1\\ z+2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow 4x+2y-7z+2=0$

إذن: $(P): 4x+2y-7z+2=0$

تمرين رقم 23

1) $A(1,1,1)$, $(P): x-y+2z-1=0$

نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A والعمودي على (P)

لدينا $\vec{n}(1,-1,2)$ متجهة منظمية على (P)

بما أن $(P)\perp(D)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن:

$$(D): \begin{cases} x=t+1\\ y=-t+1\\ z=2t+1\end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$$

بما أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)

فإن H هي تقاطع (D) و (P)

إذن احداثيات H هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=t+1\\ y=-t+1\\ z=2t+1\\ x-y+2z-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)-(-t+1)+2(2t+1)-1=0\\ x=t+1\\ y=-t+1\\ z=2t+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-\frac{1}{3}\\ x=t+1\\ y=-t+1\\ z=2t+1\end{cases}$$

إذن: $H\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$

2) $A(0,1,2)$; $(P): 2x+y-z+2=0$

نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من A والعمودي على (P)

لدينا: $\vec{n}(2,1,-1)$ متجهة منظمية على (P)

بما أن: $(P)\perp(D)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن:

$$\begin{cases} x=2t\\ y=t+1\\ z=-t+2\end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$$

بما أن H هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)

فإن H هي تقاطع (D) و (P)

إذن احداثيات H هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=2t\\ y=t+1\\ z=-t+2\\ 2x+y-z+2=0\end{cases} \Leftrightarrow t=-\frac{1}{6}$$

إذن: $H\left(-\frac{1}{3},\frac{5}{6},\frac{13}{6}\right)$

تمرين رقم 24

$A(1,0,-1)$, $B(2,2,3)$, $C(3,1,-2)$

1) لدينا $\vec{AB}(1,2,4)$ و $\vec{AC}(2,1,-1)$

بما أن المتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مستقيميتين

فإن النقط A و B و C غير مستقيمية

2) لدينا: $\vec{n}\cdot\vec{AB}=2-6+4=0$

إذن: $\vec{n}\perp\vec{AB}$

و $\vec{n}\cdot\vec{AC}=4-3-1=0$

إذن $\vec{n}\perp\vec{AC}$

بما أن $\vec{n}$ متجهة عمودية على متجهتين موجهتين للمستوى (ABC)

فإن $\vec{n}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)-3y+z+1=0$

$\Leftrightarrow 2x-3y+z-1=0$

اذن : $(ABC): 2x-3y+z-1=0$

3) بما أن $(ABC)//(P)$

وان $\vec{n}$ متجهة منظمية على (P)

اذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل

$2x-3y+z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا : $D\in(P)\Leftrightarrow -4-6-1+d=0$

$\Leftrightarrow d=11$

اذن : $(P): 2x-3y+z+11=0$

تمرين رقم 25

1) $A(1,1,1)$, $(P): x+2y+2z-1=0$

$$d(A,(P))=\frac{|1+2+2-1|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

2) $A(0,-2,-1)$, $(P): x+y-z+1=0$

$$d(A,(P))=\frac{|0-2+1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=0$$

3) $A(2,0,1)$, $(P): x-1=0$

$$d(A,(P))=\frac{|2-1|}{\sqrt{1}}=1$$

تمرين رقم 26

نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow -(x-1)+(y-2)+2(z-3)=0$

$\Leftrightarrow -x+y+2z-7=0$

اذن، $(P): -x+y+2z-7=0$

$$d(A,(P))=\frac{|-1-2+2-7|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

تمرين رقم 27

1) $R=6$, $\Omega(1,-2,1)$

نعتبر $M(x,y,z)$ من الفضاء

$M\in S(\Omega,6)\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=36$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-30=0$

اذن ; $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-30=0$

2) $R=5$, $\Omega(0,-3,-4)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in S(\Omega,5)\Leftrightarrow x^2+(y+3)^2+(z+4)^2=25$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+6y+8z=0$

اذن : $(S): x^2+y^2+z^2+6y+8z=0$

تمرين رقم 28

1) $A(3,5,2)$, $\Omega(-1,4,5)$

نحدد R شعاع الفلكة (S)

لدينا ، $\overrightarrow{\Omega A}(4,1,-3)$

اذن : $R=\Omega A=\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in S(\Omega,\sqrt{26})\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=26$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-8y-10z+16=0$

اذن : $(S): x^2+y^2+z^2+2x-8y-10z+16=0$

2) $A(0,-1,1)$, $\Omega(1,-2,1)$

نحدد R شعاع الفلكة (S)

لدينا : $\overrightarrow{\Omega A}(-1,1,0)$

اذن : $R=\Omega A=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in S(\Omega,\sqrt{2})\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0$

اذن : $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+4=0$

3) $A\left(\frac{3}{4},\frac{4}{3},2\right)$, $\Omega(1,-2,1)$

نحدد شعاع الفلكة (S)

لدينا : $\overrightarrow{\Omega A}\left(-\frac{1}{4},\frac{10}{3},1\right)$

إذن : $R=\Omega A=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{100}{9}+1}=\frac{\sqrt{1753}}{12}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in S\left(\Omega,\frac{\sqrt{1753}}{12}\right)\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\frac{1753}{144}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-\frac{889}{144}=0$

اذن : $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-\frac{889}{144}=0$

تمرين رقم 29

1) $B(2,5,-4)$, $A(-1,0,3)$

الطريقة ①

الفلكة (S) التي أحد أقطارها $[AB]$ هي الفلكة $S(I,R)$

حيث I هو منتصف $[AB]$ و $R=\frac{AB}{2}$

اذن لدينا : $I\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right)$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}(3,5,-7)$

$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{83}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(S)\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{83}{4}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x-5y+z-14=0$

اذن ; $(S): x^2+y^2+z^2-x-5y+z-14=0$

الطريقة ②

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)+y(y-5)+(z-3)(z+4)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x-5y+z-14=0$

إذن : $(S): x^2+y^2+z^2-x-5y+z-14=0$

2) $B(-3,1,0)$, $A(1,2,5)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(S)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)+(y-2)(y-1)+z(z-5)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-3y-5z-1=0$$

اذن : $(S): x^2+y^2+z^2+2x-3y-5z-1=0$

تمرين رقم 30

1) $M\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y+4=0$
$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+z^2=1$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+z^2=1$$

اذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,2,0)$ وشعاعها $R=1$

2) $M\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x+2y-2z+\frac{11}{4}=0$
$$\Leftrightarrow (x^2-x+\frac{1}{4})+(y^2+2y+1)+(z^2-2z+1)=-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y+1)^2+(z-1)^2=-\frac{1}{2}$$

وهذا غير ممكن اذن $(S)=\emptyset$

3) $M\in(S) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+2z+5=0$
$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4)+y^2+(z^2+2z+1)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2+(z+1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow x+2=y=z+1=0$$

اذن $(S)=\{\Omega(-2,0,-1)\}$

تمرين رقم 31

1) $R=1$ ، $\Omega(2,1,0)$ ، $(P): x+2y+2z-1=0$

بما أن $d(\Omega,(P))=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{1+4+4}}=1=R$

فإن (P) مماس للفلكة (S)

2) $R=2$ ، $\Omega(2,\sqrt{3},4)$ ، $(P): x+\sqrt{3}y-1=0$

بما أن $d(\Omega,(P))=\frac{|2+3-1|}{\sqrt{1+3}}=2=R$

فإن (P) مماس للفلكة (S)

3) $R=\sqrt{3}$, $\Omega(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$, $(P): x+y+z+1=0$

بما أن : $d(\Omega,(P))=\frac{|\sqrt{3}+\sqrt{3}-1+1|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2>R$

فإن (P) ليس مماسا للفلكة (S)

تمرين رقم 32

1) $A(0,-2,1)$; $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$

* نعوض احداثيات A في المعادلة الديكارتية للفلكة (S)
$$(-1)^2+(-2+2)^2+(1-1)^2=1$$

اذن $A\in(S)$

* نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس للفلكة (S) في A

لدينا : $(S)=S(\Omega,R)$ حيث $\Omega(1,-2,1)$ و $R=1$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

بما أن $\vec{A\Omega}(1,0,0)$ متجهة منظمية على (P) و A نقطة من (P)

فإن $M\in(P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{A\Omega}=0$
$$\Leftrightarrow x=0$$

اذن $(P): x=0$

2) $A(0,0,0)$ ، $(S): x^2+y^2+z^2-4x+y+2z=0$

لدينا : $(S): x^2+y^2+z^2-4x+y+2z=0$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+1)^2=\frac{21}{4}$$

اذن : $(S)=S(\Omega,R)$ حيث $\Omega(2,-\frac{1}{2},-1)$ و $R=\frac{\sqrt{21}}{2}$

* نعوض احداثيات A في المعادلة الديكارتية للفلكة (S)
$$(-2)^2+(\frac{1}{2})^2+1^2=\frac{21}{4}$$

اذن $A\in(S)$

* نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس للفلكة (S) في A

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

بما أن : $\vec{A\Omega}(2,-\frac{1}{2},-1)$ متجهة منظمية على (P) و A نقطة من (P)

فإن $M\in(P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{A\Omega}=0$
$$\Leftrightarrow 2x-\frac{1}{2}y-z=0$$

اذن : $(P): 4x-y-2z=0$

3) $A(-3,1,0)$ ، $(S): x^2+y^2+z^2+6x-y+9=0$

لدينا : $(S): x^2+y^2+z^2-4x+y+2z=0$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2=\frac{1}{4}$$

اذن : $(S)=S(\Omega,R)$ حيث $\Omega(-3,\frac{1}{2},0)$ و $R=\frac{1}{2}$

* نعوض احداثيات A في المعادلة الديكارتية للفلكة (S) :
$$(-3+3)^2+(1-\frac{1}{2})^2+0=\frac{1}{4}$$

إذن، $A\in(S)$

* نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المماس للفلكة (S) في A

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

بما أن $\vec{A\Omega}(0,-\frac{1}{2},0)$ متجهة منظمية على (P) و A نقطة من (P)

فإن $M\in(P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot\vec{A\Omega}=0$
$$\Leftrightarrow (y-1)(-\frac{1}{2})=0$$
$$\Leftrightarrow y-1=0$$

اذن $(P): y-1=0$

تمرين رقم 33

لدينا : $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+4=0$
$$\Leftrightarrow (x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)+z^2=5$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=5$$

اذن : $(S)=S(\Omega,R)$ حيث

$\Omega(2,-1,0)$ و $R=\sqrt{5}$

1) $(P_1): x+y+z-4=0$

بما أن : $d(\Omega,(P_1))=\frac{|2+1-4|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}<\sqrt{5}$

فإن (P_1) يقطع (S) في دائرة $C(H,r)$

حيث H هو المسقط العمودي لـ Ω على (P_1)

و $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{5-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{14}{3}}$

* نحدد احداثيات H

نعتبر (D) المستقيم العمودي على (P_1) المار من Ω

بما أن $\vec{n}(1,1,1)$ متجهة منظمية على (P_1) و $(D) \perp (P_1)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن لدينا :

$$(D)\begin{cases} x = t+2 \\ y = t-1 \\ z = t \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

وبما أن H هي نقطة تقاطع (D) و (P_1) فإن إحداثيات H هي حل النظمة :

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = t-1 \\ z = t \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t+2 \\ y = t-1 \\ z = t \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

إذن : $H\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

ج) $(P_2) : 2x+3y+z+1=0$

بما أن : $d(\Omega,(P_2)) = \frac{|4+3+1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{8}{\sqrt{14}} < \sqrt{5}$

فإن (P_2) يقطع (S) في دائرة $\mathcal{C}(H,r)$ حيث :

H هو المسقط العمودي لـ Ω على (P_2)

و $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

* نحدد إحداثيات H

نعتبر (D) المستقيم العمودي على (P_2) المار من Ω

بما أن $\vec{n}(2,3,1)$ متجهة منظمية على (P_2) و $(D) \perp (P_2)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن لدينا :

$$(D) : \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 3t-1 \\ z = t \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

وبما أن H هي نقطة تقاطع (D) و (P_2) فإن إحداثيات H هي حل النظمة :

$$\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 3t-1 \\ z = t \\ 2x+3y+z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 3t-1 \\ z = t \\ t = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

إذن : $H\left(\frac{12}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-1}{7}\right)$

3) $(P_3) : 2x+y-2z-8=0$

بما أن : $d(\Omega,(P_3)) = \frac{|4-1-8|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{5}{3} < \sqrt{5}$

فإن (P_3) يقطع (S) في دائرة $\mathcal{C}(H,r)$ حيث

H هو المسقط العمودي لـ Ω على (P_3)

و $r = \sqrt{R^2-d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

* نحدد إحداثيات H

نعتبر (D) المستقيم العمودي على (P_3) المار من Ω

بما أن $\vec{n}(2,1,-2)$ متجهة منظمية على (P_3) و $(D) \perp (P_3)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن

$$(D)\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = t-1 \\ z = -2t \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

وبما أن H هي نقطة تقاطع (D) و (P_3) فإن إحداثيات H هي حل النظمة :

$$\begin{cases} x = 2t+2 \\ y = t-1 \\ z = -2t \\ 2x+y-2z-8=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = t-1 \\ z = -2t \\ t = \frac{5}{9} \end{cases}$$

إذن : $H\left(\frac{28}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-10}{9}\right)$

تمرين رقم 34

* نحدد تقاطع (D) و (S_1)

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = t+2 \\ x^2+y^2+z^2+2x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = t+2 \\ 3t^2+4t+5=0 \end{cases}$$

$$3t^2+4t+5=0$$

$$\Delta = -44$$

إذن $(D) \cap (S_1) = \emptyset$

* نحدد تقاطع (D) و (S_2)

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = t+2 \\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\frac{31}{3}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = t+2 \\ 9t^2-12t-5=0 \end{cases}$$

$$9t^2-12t-5=0$$

$$\Delta = 324 = (18)^2$$

$$t_1 = -\frac{1}{3} \quad , \quad t_2 = \frac{5}{3}$$

إذن (D) يقطع (S_2) في النقطتين $B\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)$ و $A\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$

تمرين رقم 36

$H(1,-1,2)$ المسقط العمودي للنقطة $O(0,0,0)$ على المستوى (Q)

لدينا (OH) عمودي على (Q)

يعني أن $\vec{OH}(1,-1,2)$ متجهة منظمية على (Q)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل

$x-y+2z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا : $H \in (Q) \iff 6+d=0 \iff d=-6$

إذن $(Q) : x-y+2z-6=0$

تمرين رقم 37

(E) مجموعة النقط M من الفضاء التي مسافتها عن (P) هي 3

$M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (E) \iff d(M,(P)) = \frac{|4x-4y-2z+3|}{\sqrt{16+16+4}} = 3$$

$\Leftrightarrow |4x-4y-2z+3| = 18$

$\Leftrightarrow 4x-4y-2z+3=18$ أو $4x-4y-2z+3=-18$

$\Leftrightarrow 4x-4y-2z-15=0$ أو $4x-4y-2z+21=0$

إذن: $(E) = (Q_1) \cup (Q_2)$

حيث $(Q_1): 4x-4y-2z-15=0$

و $(Q_2): 4x-4y-2z+21=0$

تمرين رقم 38

1) لدينا: $\vec{AB}(-3,2,-4)$ ، $\vec{AC}(1,-4,-2)$ ، $\vec{AD}(-3,-6,0)$

فإن: $\det[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

$= -3\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}$

$= 120 \neq 0$

إذن المتجهات $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ غير مستوائية

إذن النقط A و B و C و D غير مستوائية

2) بما أن النقط A و B و C غير مستقيمية فإنها تحدد مستوى (ABC) موجه بالمتجهتين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

لدينا: $\vec{CD}(-4,-2,2)$

فإن: $\vec{CD}\cdot\vec{AC} = -4+8-4=0$

و $\vec{CD}\cdot\vec{AB} = 12-4-8=0$

فإن $\vec{CD}\perp\vec{AB}$ و $\vec{CD}\perp\vec{AC}$

إذن (CD) عمودي على المستوى (ABC)

إذن C هو المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC)

تمرين رقم 39

1) نعتبر المستوى (Q) بحيث

$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ d(A,(Q)) = 2 \end{cases}$

بما أن $(P)\parallel(Q)$ فإن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل: $6x+3y-2z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا: $d(A,(Q)) = \frac{|d|}{\sqrt{49}} = \frac{|d|}{7} = 2$

$\Leftrightarrow |d| = 14$

$\Leftrightarrow d=14$ أو $d=-14$

إذن: $(Q_1): 6x+3y-2z+14=0$

$(Q_2): 6x+3y-2z-14=0$

2) نعتبر المستوى (Q) بحيث

$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ d(A,(Q)) = 3 \end{cases}$

بما أن $(P)\parallel(Q)$ فإن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل: $3x-6y-2z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا: $d(A,(Q)) = \frac{|d|}{\sqrt{49}} = \frac{|d|}{7} = 3$

$\Leftrightarrow |d| = 21$

$\Leftrightarrow d=21$ أو $d=-21$

إذن $(Q_1): 3x-6y-2z+21=0$

$(Q_2): 3x-6y-2z-21=0$

3) نعتبر المستوى (Q) بحيث

$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ d(A,(Q)) = 4 \end{cases}$

بما أن $(P)\parallel(Q)$ فإن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل: $4x-4y+7z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا: $d(A,(Q)) = \frac{|16-4-14+d|}{\sqrt{16+16+49}}$

$= \frac{|d-2|}{9} = 4$

$\Leftrightarrow |d-2| = 36$

$\Leftrightarrow d-2=36$ أو $d-2=-36$

$\Leftrightarrow d=38$ أو $d=-34$

إذن $(Q_1): 4x-4y+7z+38=0$

$(Q_2): 4x-4y+7z-34=0$

4) نعتبر المستوى (Q) بحيث

$\begin{cases} (P) \parallel (Q) \\ d(A,(Q)) = \sqrt{2} \end{cases}$

بما أن $(P)\parallel(Q)$ فإن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل: $x-y+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا: $d(A,(Q)) = \frac{|1-1+d|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |d| = 2$

$\Leftrightarrow d=2$ أو $d=-2$

إذن: $(Q_1): x-y+2=0$

$(Q_2): x-y-2=0$

تمرين رقم 40

$(P): 2x-5y+z+3=0$

1) بما أن $(P)\parallel(Q)$ فإن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل: $2x-5y+z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا: $A\in(Q) \Leftrightarrow 2+5+1+d=0$

$\Leftrightarrow d=-8$

إذن: $(Q): 2x-5y+z-8=0$

2) لدينا المحور (Oz) مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{k}(0,0,1)$

وبما أن (R) عمودي على (Oz)

فإن $\vec{k}$ متجهة منظمية على (R)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (R) تكتب على شكل: $z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

وبما أن: $A\in(R) \Leftrightarrow 1+d=0$

$\Leftrightarrow d=-1$

إذن $(R): z-1=0$

تمرين رقم 41

$A(2,0,3)$ ، $B(0,4,-3)$ ، $C(0,0,3)$ ، $D(0,0,-3)$

1) لدينا $\vec{DC}(0,0,6)$ ، $\vec{DB}(0,4,0)$

وبما أن: $\vec{DB}\cdot\vec{DC}=0$

فإن $\vec{DB}\perp\vec{DC}$

اذن المثلث BCD قائم الزاوية في D

* نحسب مساحة المثلث BCD

لدينا : $DC = 6$ و $DB = 4$

اذن : $S_{BCD} = 12$

ج) لدينا : $\overrightarrow{AC}(-2,0,0)$

فان : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$

وبما أن : المستوى (BCD) موجه بالمتجهتين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DB}$

فان المستقيم (AC) عمودي على المستوى (BCD)

د) $V = \frac{1}{3} S \times AC$

$= \frac{1}{3} \cdot 12 \times 2 = 8$

تمرين رقم 42

1) لدينا المحور $(x'x)$ مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{i}(1,0,0)$

المستوى (P) الموازي للمحور $(x'x)$ والمار من النقطتين $A(0,4,0)$ و $B(0,0,-2)$ هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\vec{i}(1,0,0)$ و $\overrightarrow{AB}(0,-4,-2)$

وبما أن $\vec{n}\cdot\vec{i} = 0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

فان $\vec{n}$ متجهة منظمية على المستوى (P)

2) بما أن $\vec{n}$ متجهة منظمية على (P) فان المعادلة الديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل

$y - 2z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا : $A \in (P) \Leftrightarrow 4 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = -4$

اذن $(P) : y - 2z - 4 = 0$

تمرين رقم 43

$A(3,0,2)$ ، $(P) : 2x - y - 1 = 0$

1) $d(A,(P)) = \frac{|6-1|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$

2) لدينا : $(xOy) : z = 0$

المستقيم (D) الذي معادلته : $y = 2x - 1$ في المستوى (xOy) هو تقاطع المستويين (P) و (xOy)

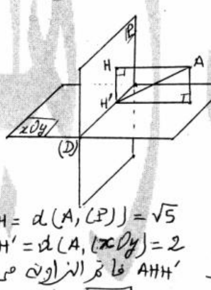
اذن : $(D) : \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

ولدينا $\vec{n_1}(2,-1,0)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

و $\vec{n_2}(0,0,1)$ متجهة منظمية على المستوى (xOy)

وبما أن : $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$

فإن $(P) \perp (xOy)$



لدينا : $AH = d(A,(P)) = \sqrt{5}$

$HH' = d(A,(xOy)) = 2$

المثلث AHH' قائم الزاوية في H

اذن $d(A,(D)) = \sqrt{5+4} = 3$

تمرين رقم 44

$A(1,2,0)$ ، $B(2,1,0)$ ، $C\left(0,0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

1) أ) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,-1,0)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(-1,-2,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{2}}{2}(x-1) - \frac{3\sqrt{2}}{2}(y-2) - 3z = 0$

$\Leftrightarrow x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$

اذن : $(ABC) : x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$

ب) $d(O,(ABC)) = \frac{|-3|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{3}{2}$

2) I منتصف $[AB] \Leftrightarrow I\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$

أ) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,-1,0)$ ، $\overrightarrow{IC}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

فان $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 0 = 0$

فان $(IC) \perp (AB)$

ب) لدينا : $\overrightarrow{OC}\left(0,0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $\overrightarrow{OI}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},0\right)$

فان : $OI = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$OC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$

فإن : OIC مثلث قائم الزاوية O ومتساوي الساقين رأسه O

تمرين رقم 45

$A(3,-2,1)$ ، $(D) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

1) نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / M(2-t, 2-3t, 1+t)$

اذن لدينا : $\overrightarrow{AM}(2-t-3, 2-3t+2, 1+t-1)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(-1-t, 4-3t, t)$

اذن : $AM = \sqrt{(1+t)^2 + (4-3t)^2 + t^2}$

$= \sqrt{11t^2 - 22t + 17}$

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بمايلي

$f(t) = \sqrt{11t^2 - 22t + 17}$

$d(A,(D))$ هي القيمة الدنوية للدالة f على $\mathbb{R}$

لكل t من $\mathbb{R}$ لدينا :

$f'(t) = \frac{11(t-1)}{\sqrt{11t^2 - 22t + 17}}$

لدينا ، $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

إذن $f(1) = \sqrt{6} = d(A,(D))$

تمرين رقم 46

1) لدينا: $\vec{n}(-2,1,5)$ متجهة منظمية على المستوى (P)
و $\vec{n}'(1,2,0)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

وبما أن $\vec{n}\cdot\vec{n}' = -2+2+0 = 0$

فإن $\vec{n} \perp \vec{n}'$

إذن $(P) \perp (Q)$

2) نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (P)

لدينا: $\vec{n}(-2,1,5)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

إذن: معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل:

$-2x+y+5z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $B \in (P) \Leftrightarrow -2-2+5+d=0$

$\Leftrightarrow d=-1$

إذن: $(P): 2x+y+5z-1=0$

نعتبر المستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q)

إذن: $(\Delta): \begin{cases} -2x+y+5z-1=0 \\ x-2y-7=0 \end{cases}$

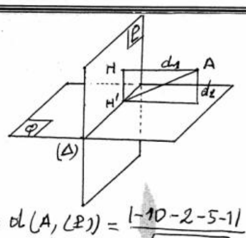
وبوضع: $z=t$ لدينا:

$$(\Delta): \begin{cases} -2x+y=-5t+1 \\ x+2y=7 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+3 \\ z=t \end{cases}$$

إذن $\vec{u}(2,-1,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

وبوضع $t=-1$ نحصل على: $C(-1,4,-1)$

3)



$$d_1 = d(A,(P)) = \frac{|-10-2-5-1|}{\sqrt{4+1+25}} = \frac{18}{\sqrt{30}}$$

$$d_2 = d(A,(Q)) = \frac{|5-4-7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

4) لدينا المثلث AHH' قائم الزاوية في H

إذن

$$d(A,(\Delta)) = \sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

تمرين رقم 47

$(P): 2x+y-z+6=0$ ، $A(0,2,2)$ ، $B(1,2,-1)$

1) لدينا: $\vec{n}(2,1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

وبما أن: $(D) \perp (P)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن

$$(D): \begin{cases} x=2t \\ y=t+2 \\ z=-t+2 \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$$

2) إحداثيات I نقطة تقاطع (P) و (D) هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=2t \\ y=t+2 \\ z=-t+2 \\ 2x+y-z+6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2t \\ y=t+2 \\ z=-t+2 \\ 2(2t)+(t+2)-(-t+2)+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=t+2 \\ z=-t+2 \\ t=-1 \end{cases}$$

إذن $I(-2,1,-3)$

ب) $$d(A,(P)) = \frac{|0+2-2+6|}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{6}$$

3) أ) نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (Q) \Leftrightarrow \det(\vec{AM},\vec{u},\vec{v})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ y-2 & 1 & 1 \\ z+1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow -x+4y+2z+7=0$

إذن: $(Q): -x+4y+2z+7=0$

ب) لدينا: $\vec{n}(2,1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)
و $\vec{n}'(-1,4,2)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

وبما أن $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$

فإن $(P) \perp (Q)$

تمرين رقم 48

1) أ)

$$(D): \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t+3 \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$$

ب) نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (P) \Leftrightarrow \det(\vec{OM},\vec{u},\vec{i})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow y-z=0$

إذن، $(P): y-z=0$

ج) بما أن (D) موجه بالمتجهة $\vec{u}$ فإن: $(D)//(P)$

* نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) العمودي على (D) والمار من O

لدينا: $\vec{u}(1,1,1)$ متجهة منظمية على (Q)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل

$x+y+z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

وبما أن: $O \in (Q)$

فإن: $d=0$

إذن: $(Q): x+y+z=0$

* نحدد إحداثيات O' تقاطع (Q) و (D)

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t+3 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t+3 \\ t=-1 \end{cases}$$

ادن $O'(-1,-1,2)$

ولدينا : $\overrightarrow{OO'}(-1,-1,2)$

ادن : $d(O,(D)) = OO' = \sqrt{6}$

2) أ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

هي المستوى (H) المار من A والموجه $\vec{u}$ منظمية عليه

ادن معادلة ديكارتية للمستوى (H) تكتب على شكل

$x+y+z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا : $A\in H \Leftrightarrow d=-3$

ادن $(H): x+y+z-3=0$

ب) لدينا : $\vec{u}(1,1,1)$ متجهة منظمية على المستوى (H)

و $\vec{n}(0,1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

وبما أن المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير مستقيميتين

فان (H) و (P) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

حيث $(\Delta)\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

و بوضع $z=t$ نحصل على

$$(\Delta)\begin{cases} x=2t+3 \\ y=t \\ z=t \end{cases} / (t\in\mathbb{R})$$

تمرين رقم 49

$A(1,1,-1)$ ، $B(-1,1,1)$

1) نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

M نقطة من الفلكة (S) التي أحد أقطارها [AB]

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)+(y-1)(y-1)+(z+1)(z-1)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2y-1=0$

ادن : $(S): x^2+y^2+z^2-2y-1=0$

* نحدد مركز وشعاع (S)

لدينا : $(S): x^2+y^2+z^2-2y-1=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+z^2=2$

$\Leftrightarrow (S)=S(\Omega(0,1,0),\sqrt{2})$

2) لدينا : $(P): z-1=0$

بما أن : $d(\Omega,(P))=\frac{|-1|}{1}=1<\sqrt{2}$

فان (P) يقطع (S) وفق دائرة $\mathcal{C}(H,r)$

حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P)

و $r=\sqrt{2-1}$

* نحدد احداثيات H

نعتبر المستقيم (D) العمودي على المستوى (P) والمار من Ω

بما أن $\vec{n}(0,0,1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

فان $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

ادن $(D):\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=t \end{cases} / (t\in\mathbb{R})$

وبما أن H هي تقاطع (D) و (P)

فان احداثيات H هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=t \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

اذن : $H(0,1,1)$

تمرين رقم 50

1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

$\Leftrightarrow (S): (x^2-2x+1)+y^2+(z^2+2z+1)=1$

$\Leftrightarrow (S): (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$

$\Leftrightarrow (S)=S(\Omega(1,0,-1),1)$

2) بما أن : $d(\Omega,(P))=\frac{|1-2-2|}{\sqrt{9}}=1$

فان (P) مماس للفلكة (S)

3) نعتبر المستقيم (D) المار من Ω والعمودي على المستوى (P)

لدينا : $\vec{n}(1,-2,2)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

بما أن $(D)\perp(P)$

فان $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

ادن : $(D):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \\ z=2t-1 \end{cases} / (t\in\mathbb{R})$

احداثيات النقطة H نقطة تقاطع (S) و (P) هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \\ z=2t-1 \\ x-2y+2z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \\ z=2t-1 \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$$

ادن : $H\left(\frac{4}{3},\frac{-2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

تمرين رقم 51

$A(2,0,2)$ ، $(P): x+y-z+3=0$

1) لدينا : $\vec{n}(1,1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

بما أن $(D)\perp(P)$

فان $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

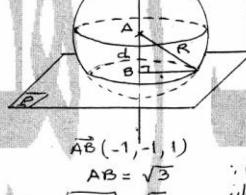
اذن $(D):\begin{cases} x=t+2 \\ y=t \\ z=-t+2 \end{cases} / (t\in\mathbb{R})$

2) احداثيات B هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=t+2 \\ y=t \\ z=-t+2 \\ x+y-z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+2 \\ y=t \\ z=-t+2 \\ t=-1 \end{cases}$$

اذن $B(1,-1,3)$

3)



لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1,-1,1)$

ادن : $AB=\sqrt{3}$

ومنه فان $R=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}$

ادن : $(S)=S(A,\sqrt{7})$

$\Leftrightarrow (S): (x+1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=7$

$\Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z-4=0$

تمرين رقم 52

1) أ) بما أن $A \in (S)$ فإن شعاع (S) هو: ΩA

لدينا: $\overrightarrow{\Omega A}(0,1,0)$

إذن: $\Omega A = 1$

إذن $(S) : x^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow (S) : x^2+y^2+z^2-2y-2z+1 = 0$

ب) بما أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) في A

فإن $\overrightarrow{\Omega A}$ متجهة منظمية على المستوى (P)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل

$y+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $A \in (P) \Leftrightarrow 2+d=0$

$\Leftrightarrow d=-2$

إذن: $(P) : y-2=0$

ج) بما أن $(\Delta) \perp (P)$

فإن $\overrightarrow{\Omega A}$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

إذن: $(\Delta) : \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$

* نحدد تقاطع (S) و (Δ)

$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \\ (t-1)^2+1=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

ومنه فإن (Δ) يقطع (S) في نقطة وحيدة هي B

إذن (Δ) مماس للفلكة (S) في B

تمرين رقم 53

$A(0,1,1)$ ، $B(0,0,2)$ ، $C(3,0,0)$

1) لدينا: $\vec{u}(1,1,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

و $\overrightarrow{AB}(0,-1,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (AB)

وبما أن: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0-1+1 = 0$

فإن: $(D) \perp (AB)$

2) أ) المستوى (ABC) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}(0,-1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(3,-1,-1)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 2x+3y+3z-6=0$

إذن: $(ABC) : x+y+z-2=0$

ب) لدينا: $\overrightarrow{AB}(0,-1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(3,-1,-1)$

بما أن: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

فإن: $(AC) \perp (AB)$

إذن: $d(B,(AC)) = AB = \sqrt{2}$

3) أ) $(S) : x^2+y^2+z^2-4z+2=0$

$\Leftrightarrow (S) : x^2+y^2+(z-2)^2 = 2$

$\Leftrightarrow (S) = S(B(0,0,2), \sqrt{2})$

ب) * نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AC)

لدينا: $\overrightarrow{AC}(3,-1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (AC)

إذن: $(AC) : \begin{cases} x=3t \\ y=-t+1 \\ z=-t+1 \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$

* نحدد تقاطع (AC) و (S)

$$\begin{cases} x=3t \\ y=-t+1 \\ z=-t+1 \\ x^2+y^2+(z-2)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3t \\ y=-t+1 \\ z=-t+1 \\ t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

إذن (AC) يقطع (S) في نقطة وحيدة هي $A(0,1,1)$

ج) لدينا: $d(B,(ABC)) = \frac{|0+0+2-2|}{\sqrt{3}} = 0$

إذن المستوى (ABC) يقطع (S) في الدائرة $\mathcal{C}(B, \sqrt{2})$

تمرين رقم 54

1) بما أن $\vec{u}(1,0,2)$ متجهة منظمية على (P) فإن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل:

$x+2z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $A \in (P) \Leftrightarrow 2+d=0$

$\Leftrightarrow d=-2$

إذن: $(P) : x+2z-2=0$

2) أ) $(S) : x^2+y^2+z^2+4x-4y-4z+\frac{34}{3}=0$

$\Leftrightarrow (S) : (x^2+4x+4)+(y^2-4y+4)+(z^2-4z+4) = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow (S) : (x+2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow (S) = S\left(\Omega(-2,2,2), \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

ب) لدينا: $-2+4-2=0$

إذن: $\Omega \in (P)$

3) $(Q) : 2x+y-z+6=0$

أ) لدينا: $\vec{n}(2,1,-1)$ متجهة منظمية على (Q)

بما أن $(D) \perp (Q)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن: $(D) : \begin{cases} x=2t-2 \\ y=t+2 \\ z=-t+2 \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$

ب) $d(\Omega,(Q)) = \frac{|-4+2-2+6|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

فإن (Q) مماس للفلكة (S)

وإحداثيات H نقطة تقاطع (Q) و (S) هي حل النظمة.

$$\begin{cases} x = 2t-2 \\ y = t+2 \\ z = -t+2 \\ 2x+y-z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t-2 \\ y=t+2 \\ z=-t+2 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{8}{3} \\ y=\frac{5}{3} \\ z=\frac{7}{3} \end{cases}$$

اذن $H\left(-\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

تمرين رقم 55

$(S) : x^2+y^2+z^2-8x-6y=0$

$A(2,-1,0) \quad B(-1,2,0) \quad C(\sqrt{2},1,1)$

1) $(S): x^2+y^2+z^2-8x-6y=0$

$\Leftrightarrow (S): (x^2-8x+16)+(y^2-6y+9)+z^2=25$

$\Leftrightarrow (S): (x-4)^2+(y-3)^2+z^2=25$

$\Leftrightarrow (S)=S(\Omega(4,3,0),5)$

2) المستوى (ABC) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\vec{AB}(-3,3,0)$ و $\vec{AC}(\sqrt{2}-2,2,1)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -3 & \sqrt{2}-2 \\ y-1 & 3 & 2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{2}-2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -3 & \sqrt{2}-2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 3x+3y-3\sqrt{2}z-9=0$

$\Leftrightarrow x+y-\sqrt{2}z-3=0$

إذن: $(ABC): x+y-\sqrt{2}z-3=0$

3) نعتبر المستقيم (D) المار من Ω والعمودي على المستوى (ABC)

لدينا $\vec{n}(1,1,-\sqrt{2})$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

بما أن $(D) \perp (ABC)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن:

$$(D) : \begin{cases} x=t+4 \\ y=t+3 \\ z=-\sqrt{2}t \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

4) بما أن: $d(\Omega,(ABC)) = \frac{|4+3-3|}{\sqrt{1+1+2}} = 2 < 5$

فإن (ABC) يقطع (S) في دائرة: $\mathcal{C}(H,r)$

حيث H هي نقطة تقاطع المستوى (ABC) والمستقيم (D)

و $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

* إحداثيات H هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=t+4 \\ y=t+3 \\ z=-\sqrt{2}t \\ x+y-\sqrt{2}z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+4 \\ y=t+3 \\ z=-\sqrt{2}t \\ t=-1 \end{cases}$$

إذن: $H(3,2,\sqrt{2})$

تمرين رقم 56

$A(2,1,0) \cdot B(4,2,2) \cdot (P): 2x+y+2z-5=0$

1) نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

M نقطة من الفلكة التي أحد أقطارها $[AB]$

$\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-4)+(y-1)(y-2)+z(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6x-3y-2z+10=0$

2) نحدد مركز وشعاع الفلكة (S):

$(S): x^2+y^2+z^2-6x-3y-2z+10=0$

$\Leftrightarrow (S): (x^2-6x+9)+(y^2-3y+\frac{9}{4})+(z^2-2z+1)=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow (S): (x-3)^2+(y-\frac{3}{2})^2+(z-1)^2=\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow (S)=S\left(\Omega\left(3,\frac{3}{2},1\right),\frac{3}{2}\right)$

بما أن: $d(\Omega,(P)) = \frac{|6+\frac{3}{2}+2-5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{2}$

فإن: (P) مماس للفلكة (S)

ولدينا: $A \in (S)$

وبما أن: $4+1-5=0$ فإن $A \in (P)$

إذن: (P) مماس للفلكة (S) في A

3) أ) لدينا: $\vec{n}(2,1,2)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

و $\vec{u}(0,2,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

وبما أن: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

فإن $(\Delta) // (P)$

وبما أن $B \notin (P)$

فإن (Δ) يوازي قطعا (P)

ب) لدينا:

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2t+2 \\ z=-t+2 \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

نحدد تقاطع (S) و (Δ)

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2t+2 \\ z=-t+2 \\ (x-3)^2+(y-\frac{3}{2})^2+(z-1)^2=\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2t+2 \\ z=-t+2 \\ t=0 \end{cases}$$

اذن المستقيم (Δ) يقطع (S) في نقطة وحيدة هي $B(4,2,2)$

ومنه فإن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في B

4) بما أن: $d(\Omega,(Q)) = 1 < \frac{3}{2}$

فإن المستوى (Q) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة $\mathcal{C}(H,r)$

حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (Q)

و $r=\sqrt{\frac{9}{4}-1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

نحدد إحداثيات H

نعتبر المستقيم (D) المار من Ω والعمودي على (Q)

لدينا $\vec{n}(0,0,1)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

وبما أن $(D) \perp (Q)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

اذن:

$$(D) \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=t+1 \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

إحداثيات H هي حل النظمة

$$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=t+1 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=t+1 \\ t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}$$

إذن: $H\left(3,\frac{3}{2},0\right)$

تمرين رقم 57

1)
$(S) = S(\Omega(1,0,-2), 2)$

$\Leftrightarrow (S): (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$

$\Leftrightarrow (S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$

2) أ) لدينا: $(0-1)^2+(\sqrt{2})^2+(-1+2)^2=4$

إذن $A \in (S)$

ب) بما أن: $\overrightarrow{\Omega A}(-1,\sqrt{2},1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

فإن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل

$-x+\sqrt{2}y+z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $A \in (P) \Leftrightarrow 2-1+d=0$

$\Leftrightarrow d=-1$

إذن: $(P): -x+\sqrt{2}y+z-1=0$

3) أ) لدينا: $\vec{n}(-1,\sqrt{2},1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

وبما أن $(D) \perp (P)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن:

$$(D): \begin{cases} x=-t \\ y=\sqrt{2}t \\ z=t \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

ب) نحل النظمة:

$$\begin{cases} x=-t \\ y=\sqrt{2}t \\ z=t \\ (x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=\sqrt{2}t \\ z=t \\ 4t^2+6t+1=0 \end{cases}$$

$4t^2+6t+1=0$

$\Delta=20$, $t_1=\frac{-3-2\sqrt{5}}{4}$ ، $t_2=\frac{-3+2\sqrt{5}}{4}$

إذن (D) يقطع الفلكة (S) في النقطتين

$$M\left(\frac{3+2\sqrt{5}}{4}, -\frac{(3+2\sqrt{5})\sqrt{2}}{4}, -\frac{(3+2\sqrt{5})}{4}\right)$$

$$N\left(\frac{3-2\sqrt{5}}{4}, \frac{(-3+2\sqrt{5})\sqrt{2}}{4}, \frac{-3+2\sqrt{5}}{4}\right)$$

تمرين رقم 58

1)
$(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-19=0$

$\Leftrightarrow (S): (x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z^2-2z+1)=25$

$\Leftrightarrow (S): (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$

$\Leftrightarrow (S)=S(\Omega(1,-2,1), 5)$

2) لدينا:
$$\begin{cases} 1-1=0 \\ \frac{-2-4}{3}=\frac{1-9}{4} \end{cases}$$

إذن: $\Omega \in (\Delta)$

ونختار نقطة أخرى A تنتمي إلى (Δ) وذلك مثلا بوضع $y=4$ نحصل على $z=9$

إذن: $A(1,4,9)$

إذن: $\overrightarrow{\Omega A}(0,6,8)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

3) نحدد نقطتي تقاطع (S) و (Δ)

لدينا:
$$(\Delta): \begin{cases} x=1 \\ y=6t-2 \\ z=8t+1 \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

نحل النظمة:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=6t-2 \\ z=8t+1 \\ (x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6t-2 \\ z=8t+1 \\ 4t^2=1 \end{cases}$$

إذن (Δ) يقطع (S) في النقطتين

$M_1(1,1,5)$ و $M_2(1,-5,-2)$

* نحدد معادلتين ديكارتيتين للمستويين (P_1) و (P_2)

لدينا $\overrightarrow{\Omega A}$ متجهة منظمية على المستويين (P_1) و (P_2)

إذن معادلتي ديكارتيتي المستويين تكتبان على شكل

$6y+8z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $M_1 \in (P_1) \Leftrightarrow d=-46$

إذن: $(P_1): 3y+4z-23=0$

ولدينا: $M_2 \in (P_2) \Leftrightarrow d=54$

إذن: $(P_2): 3y+4z+27=0$

تمرين رقم 59

1)
$(S): x^2+y^2+z^2-x\sqrt{3}-z-3=0$

$\Leftrightarrow (S): (x^2-x\sqrt{3}+\frac{3}{4})+y^2+(z^2-z+\frac{1}{4})=4$

$\Leftrightarrow (S): (x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=4$

$\Leftrightarrow (S)=S(\Omega(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}), 2)$

2) أ) لدينا: $(\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})^2=4$

إذن $A \in (S)$

ب) لدينا $\overrightarrow{\Omega A}(\sqrt{3},1,0)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل

$\sqrt{3}x+y+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $A \in (P) \Leftrightarrow d=-\frac{11}{2}$

إذن: $(P): \sqrt{3}x+y-\frac{11}{2}=0$

ج) لدينا:
$$(\Delta): \begin{cases} x=2\sqrt{3}t \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

نعتبر $B(x,y,z)$ حيث $(\Delta) \cap (D)=\{B\}$

لإيجاد إحداثيات النقطة B نحل النظمة

$$\begin{cases} x=2\sqrt{3}t \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z=t \\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega A}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{3}t \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z=t \\ \sqrt{3}x+y-\frac{11}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2\sqrt{3}t \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z=t \\ t=1 \end{cases}$$

إذن: $B(2\sqrt{3},-\frac{1}{2},1)$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن:
$$(D): \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2}t+2\sqrt{3} \\ y=-\frac{3}{2}t-\frac{1}{2} \\ z=\frac{1}{2}t+1 \end{cases} \quad / (t \in \mathbb{R})$$

تمرين رقم 60

1) لدينا المستوى (P) هو المستوى المار من النقطة A والموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}(-2,-1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,-1,0)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x - y + z + 1 = 0$

اذن : $(\mathcal{P}) : x - y + z + 1 = 0$

ج) بما أن $\vec{n}(1,-1,1)$ متجهة منظمية على المستويين $(\mathcal{P})$ و (Q)

فان $(\mathcal{P}) // (Q)$

3) أ) $d(A,(Q)) = \frac{|1-1-1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

ب) بما أن $A \in (\mathcal{P})$ و $d(A,(Q)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

فإن المسافة بين $(\mathcal{P})$ و (Q) هي : $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

وبما أن $(\mathcal{P})$ و (Q) مستويان متوازيين ومماسان للفلكة (S)

فان $r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

* نحدد A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (Q)

نعتبر (D) المستقيم المار من A والعمودي على (Q)

لدينا :

$(D) : \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = t-1 \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

بما أن A' هي نقطة تقاطع (D) و (Q)

فان احداثيات A' هي حل النظمة

$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = t-1 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t+1 \\ z = t-1 \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$

اذن : $A\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

* نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (R) الموازي للمستويين $(\mathcal{P})$ و (Q) والمار من $I\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ منتصف $[A,A']$

بما أن : $\vec{n}(1,-1,1)$ متجهة منظمية على (R)

فان معادلة ديكارتية للمستوى (R) تكتب على شكل

$x - y + z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا : $I \in (R) \Leftrightarrow d = 0$

اذن : $(R) : x - y + z = 0$

الفلكة (S) تكون مماسة للمستويين $(\mathcal{P})$ و (Q)

$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\Omega \in (R)$

$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $a - b + c = 0$

$\Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $b = a + c$

تمرين رقم 61

$(\mathcal{P}) : x - 2y - 2z = 0$ ، $(Q) : 2x + 2y - z = 0$

1) أ) لدينا : $\vec{n}(1,-2,-2)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$

و $\vec{n'}(2,2,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

وبما أن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ متجهتين غير مستقيميتين فان المستويين $(\mathcal{P})$ و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) حيث :

$(\Delta) \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$

ب) بوضع $y = t$ نحصل على :

$(\Delta) : \begin{cases} x - 2z = 2t \\ 2x - z = -2t \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta) : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

اذن $\vec{u}(-2,1,-2)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

ج) بما أن المستوى (R) عمودي على المستويين $(\mathcal{P})$ و (Q)

فإن المستقيم (Δ) تقاطع $(\mathcal{P})$ و (Q) عمودي على المستوى (R)

إذن $\vec{u}(-2,1,-2)$ متجهة منظمية على المستوى (R)

أذن معادلة ديكارتية للمستوى (R) تكتب على شكل

$-2x + y - 2z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا : $A \in (R) \Leftrightarrow d = 9$

اذن : $(R) : -2x + y - 2z + 9 = 0$

2) أ) بما أن $(D) // (\Delta)$ و $\vec{u}(-2,1,-2)$ متجهة موجهة ل (Δ)

فان $\vec{u}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

اذن :

$(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -2t - 1 \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

ب) نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = -2t - 1 \end{cases}$

اذن :

$d(M,(P)) = \frac{|-2t+1-2t-2(-2t-1)|}{\sqrt{9}} = 1$

$d(M,(Q)) = \frac{|2(-2t+1)+2t-(-2t-1)|}{\sqrt{9}} = 1$

إذن : $\forall M \in (D) \; ; \; d(M,(P)) = d(M,(Q))$

تمرين رقم 62

1) المستوى (ABC) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AB}(-1,1,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,-4)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z+3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 4y + z = 0$

اذن : $(ABC) : 3x + 4y + z = 0$

2) أ) $(\mathcal{E}) : \begin{cases} y = 3 \\ x^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (\mathcal{E}) : \begin{cases} y = 3 \\ (x^2 - 2x + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (\mathcal{E}) : \begin{cases} y = 3 \\ (x-1)^2 + (z-1)^2 = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow (\mathcal{E}) = \mathcal{C}(\Omega'(1,3,1), 3)$

ب) نعتبر المستوى $(\mathcal{P}) : y = 3$

بما أن $(\mathcal{E}) : \begin{cases} y = 3 \\ x^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$

فإن المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة $(\mathcal{E})$

نعتبر المستقيم (D) العمودي على $(\mathcal{P})$ والمار من Ω'

* نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

لدينا $\vec{n}(0,1,0)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

بما أن $(D) \perp (P)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن :

$$(D) : \begin{cases} x = 1 \\ y = t+3 \\ z = 1 \end{cases} \quad / \ (t \in \mathbb{R})$$

* لدينا : $(D) \cap (ABC) = \{\Omega\}$

إذن إحداثيات Ω هي حل النظمة

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t+3 \\ z = 1 \\ 3x+4y+z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t+3 \\ z = 1 \\ t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

إذن : $\Omega(1,-1,1)$

* نحدد شعاع (S)

لدينا : $\overrightarrow{\Omega D'}(0,4,0)$

إذن : $R = \sqrt{\Omega D'^2 + 3} = 5$

إذن : $(S) = S(\Omega(1,-1,1), 5)$

تمرين رقم 63

1) أ) المستوى (ABC) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين : $\overrightarrow{AC}(-1,1,0)$ و $\overrightarrow{AB}(-1,1,-1)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y-1 = 0$$

إذن : $(ABC) : x+y-1 = 0$

ب) نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

$$(D) : \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t \end{cases} \quad / \ (t \in \mathbb{R})$$

لتحديد Ω نقطة تقاطع (D) و (ABC) نحل النظمة

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t \\ x+y-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \\ z = -t \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن : $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2) لدينا : $\vec{n}(1,1,0)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

المستوى (P) هو المستوى المار من Ω والموجه بالمتجهتين $\vec{n}$ و $\vec{u}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{u}, \vec{n}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ y-\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ z-\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \left(y-\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \left(z-\tfrac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y = 0$$

إذن : $(P) : x-y = 0$

3) أ) : $(S) = S\left(\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow (S) : \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow (S) : x^2+y^2+z^2-x-y-z = 0$$

ب) $d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{2}} = 0$

إذن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة : $\mathcal{C}\left(\Omega, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ولدينا : $\overrightarrow{\Omega A}\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ ، $\overrightarrow{\Omega B}\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

$\overrightarrow{\Omega C}\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

بما أن : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

فإن $(\mathcal{C})$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تمرين رقم 64

1) أ) * نحدد إحداثيات A و B و I

لدينا : $\overrightarrow{DA} = 1.\overrightarrow{DA} + 0\overrightarrow{DC} + 0\overrightarrow{DH}$

إذن $A(1,0,0)$

لدينا ، $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

إذن $B(1,1,0)$

لدينا : $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}$

$= \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + DH$

إذن : $I\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$

المستوى (AIB) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين : $\overrightarrow{AI}\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ و $\overrightarrow{AB}(0,1,0)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ y & \frac{1}{2} & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0$$

إذن ، $(AIB) : x-1 = 0$

ب) نحدد إحداثيات G

لدينا : $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$

إذن : $G(0,1,1)$

ومنه : $d(G, (AIG)) = \dfrac{|-1|}{1} = 1$

ج) $V_{ABIG} = \frac{1}{3} S h$

حيث S هي مساحة القاعدة ABI

و $h = d(G, (AIB))$

إذن : $V_{ABIG} = \dfrac{1}{3} \dfrac{AB \times BF}{2} . h = \dfrac{1}{6}$

2) أ) نحدد إحداثيات J

لدينا : $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH})$

إذن $J\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

المستوى (AIG) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين $\overrightarrow{AG}(-1,1,1)$ و $\overrightarrow{AI}\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

ولدينا : $\overrightarrow{BJ}\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$

بما أن : $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$ و $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

فإن (BJ) مستقيم عمودي على المستوى (AIG)

* نحدد معادلة ديكارتية للمستوى (AIG)

لدينا معادلة ديكارتية للمستوى (AIG) تكتب على شكل $-\frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z + d = 0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $A \in (AIG) \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}$

اذن: $(AIG): x + 2y - z - 1 = 0$

ب) $d(B,(AIG)) = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

3) أ) $V_{ABIG} = \frac{1}{3} S_{AIG}\, d(B,(AIG))$

$= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot S_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{9} S_{AIG}$

ب) $\frac{\sqrt{6}}{9} S_{AIG} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow S_{AIG} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

تمرين رقم 65

1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$

$\Leftrightarrow (S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

$\Leftrightarrow (S) = S(\Omega(1,1,2), 3)$

2) لدينا: $d(\Omega,(P)) = \frac{|1+2+4+2|}{\sqrt{1+4+4}} = 3$

اذن المستوى (P) مماس للفلكة (S)

3) لدينا: $\overrightarrow{\Omega B}(2,1,-2)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

اذن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل $2x+y-2z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $B \in (Q) \Leftrightarrow d = -8$

اذن: $(Q): 2x+y-2z-8=0$

4) لدينا: $\vec{n}(1,2,2)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

$\vec{n}'(2,1,-2)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

وبما أن: $\vec{n}\cdot\vec{n}' = 0$ فإن $(P) \perp (Q)$

5) لدينا: (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

وبما أن المستقيم (D) يوازي المستويين (P) و (Q)

فإن $(\Delta) \parallel (D)$

* نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ)

لدينا: $(\Delta): \begin{cases} x+2y+2z+2=0 \\ 2x+y-2z-8=0 \end{cases}$

بوضع: $z=t$ نحصل على

$(\Delta): \begin{cases} x+2y=-2t-2 \\ 2x+y=2t+8 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x=2t+6 \\ y=-2t-4 \\ z=t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

بما أن $(D) \parallel (\Delta)$

فإن $\vec{u}(2,-2,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن: $(D): \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=t+1 \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

د) نعتبر المستوى (R) المار من Ω والعمودي على المستقيم (D)

لدينا: $\vec{u}(2,-2,1)$ متجهة منظمية على المستوى (R)

اذن معادلة ديكارتية للمستوى (R) تكتب على شكل $2x-2y+z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $\Omega \in (R) \Leftrightarrow d=-2$

اذن: $(R): 2x-2y+z-2=0$

* نحدد إحداثيات Ω' نقطة تقاطع (R) و (D)

$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=t+1 \\ 2x-2y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t+1 \\ z=t+1 \\ t=\frac{1}{9} \end{cases}$

اذن: $\Omega'\left(\frac{11}{9}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}\right)$

ولدينا: $\overrightarrow{\Omega\Omega'}\left(\frac{2}{9}, \frac{-2}{9}, \frac{-8}{9}\right)$

و $\Omega\Omega' = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{8}}{3} < 3$

ج) بما أن: $\Omega\Omega' < R$

فإن (D) يقطع الفلكة (S) في نقطتين

تمرين رقم 66

1) أ) لدينا: $\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

اذن المتجهات $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ غير مستوائية

اذن النقط O و A و B و C غير مستوائية

ب) المستوى (ABC) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين: $\overrightarrow{AB}(-1,0,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-4,1,4)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -4 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x+z-2=0$

إذن $(ABC): x+z-2=0$

ج) لدينا: $\vec{n}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

و $\vec{n}'(1,0,1)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

بما أن $\vec{n}\cdot\vec{n}'=0$ فإن $(ABC) \perp (P)$

2) أ) لدينا: $\vec{n}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

وبما أن $(\Delta) \perp (P)$

فإن $\vec{n}(1,-1,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

إذن $(\Delta): \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases} / (t \in \mathbb{R})$

ب) لتحديد تقاطع (Δ) و (P) نحل النظمة

$\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \\ x-y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-t \\ t=-\frac{2}{3} \end{cases}$

اذن (Δ) و (P) يتقاطعان في النقطة $H\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

3) أ) $(S): x^2+y^2+z^2=2$

$\Leftrightarrow (S) = S(O(0,0,0), \sqrt{2})$

ب) بما أن: $d(O,(ABC)) = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

فإن (ABC) مستوى مماس للفلكة (S)

ج) بما أن: $d(O,(P)) = \frac{|2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$

فإن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة: $\mathcal{C}(H, r)$

حيث $H\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ و $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$

تمرين رقم 67

1) أ) بما أن المتجهتين $\vec{AC}(0,-2,3)$ و $\vec{AB}(1,0,0)$ غير مستقيميتين
فإن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب) بما أن $\vec{BC}(-1,-2,3)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)
فإن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل
$-x-2y+3z+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا: $A\in(Q) \Leftrightarrow d=4$

إذن $(Q): x+2y-3z-4=0$

ج) نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (BC)

لدينا: $\vec{BC}(-1,-2,3)$ متجهة موجهة للمستقيم (BC)

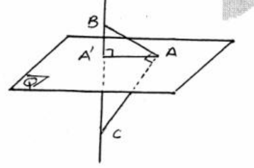
إذن: $(BC): \begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=3t+3 \end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$

مثلوث إحداثيات A' نقطة تقاطع المستوى (Q) والمستقيم (BC) هو حل النظمة:

$$\begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=3t+3 \\ x+2y-3z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=3t+3 \\ t=-\frac{13}{14} \end{cases}$$

إذن $A'\left(\frac{13}{14},\frac{13}{7},\frac{3}{14}\right)$

د)



لدينا: $\vec{AA'}\left(\frac{13}{14},\frac{-1}{7},\frac{3}{14}\right)$ ، $\vec{BC}(-1,-2,3)$

$$AA'=\sqrt{\left(\frac{13}{14}\right)^2+\left(\frac{-1}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{14}\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{14}}$$

$BC=\sqrt{14}$

بما أن $\vec{AA'}\cdot\vec{BC}=0$

فإن $S_{ABC}=\frac{1}{2}AA'\cdot BC=\frac{\sqrt{13}}{2}$

2) المستوى (ABC) هو المستوى المار من A والموجه بالمتجهتين
$\vec{AC}(0,-2,3)$ و $\vec{AB}(1,0,0)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(ABC) \Leftrightarrow \det(\vec{AM},\vec{AB},\vec{AC})=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y-2 & 0 & -2 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow 3y+2z-6=0$

إذن $(ABC): 3y+2z-6=0$

3) لدينا: $\vec{n}(0,3,2)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)
و $\vec{n'}(1,0,0)$ متجهة منظمية على المستوى (R) ذي المعادلة: $x=0$

بما أن: $\vec{n}\cdot\vec{n'}=0$

فإن: (ABC) و (R) مستويين متعامدين

4) أ) نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

M نقطة من الفلكة التي أحد أقطارها [BC]

$\Leftrightarrow \vec{BM}\cdot\vec{CM}=0$

$\Leftrightarrow x(x-1)+y(y-2)+z(z-3)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$

إذن: $(S): x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$

ب) نحدد مركز وشعاع (S)

$(S): x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$

$\Leftrightarrow (S): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$

$\Leftrightarrow (S)=S\left(\Omega\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right),\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

وبما أن: $d(\Omega,(ABC))=\frac{|3+3-6|}{\sqrt{13}}=0$

فإن المستوى (ABC) يقطع الفلكة (S) وفق الدائرة: $\mathcal{C}\left(\Omega,\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

لدينا: $\vec{\Omega A}\left(\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$ ، $\vec{\Omega B}\left(-\frac{1}{2},-1,\frac{3}{2}\right)$

$\vec{\Omega C}\left(\frac{1}{2},1,-\frac{3}{2}\right)$

وبما أن: $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\sqrt{\frac{7}{2}}$

فإن الدائرة: $\mathcal{C}\left(\Omega,\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

تمرين رقم 68

1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y=0$

$\Leftrightarrow (S): (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2$

$\Leftrightarrow (S)=S(\Omega(1,1,0),\sqrt{2})$

2) بما أن: $d(\Omega,(P))=\frac{|1-1-1|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}<\sqrt{2}$

فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة: $\mathcal{C}(w,r)$

حيث w هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P)

و $r=\sqrt{2-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$

* نحدد إحداثيات w

نعتبر المستقيم (D) المار من Ω والعمودي على المستوى (P)

بما أن $\vec{n}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

و $(D)\perp(P)$

فإن $\vec{n}$ متجهة موجهة للمستقيم (D)

إذن $(D): \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+1 \\ z=-t \end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$

وبما أن w هي تقاطع (D) والمستوى (P)

فإن مثلوث إحداثيات w هو حل النظمة

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+1 \\ z=-t \\ x-y-z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+1 \\ z=-t \\ t=\frac{1}{3} \end{cases}$$

إذن: $w\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3) أ) لدينا: $\vec{O\Omega}$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (Q) تكتب على شكل
$x+y+d=0$ حيث $d\in\mathbb{R}$

ولدينا، $O\in(Q) \Leftrightarrow d=0$

إذن: $(Q): x+y=0$

ب) $(\Delta): \begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

نضع $y=t$

$\Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-2t-1 \end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$

4) أ) نعتبر (R) المستوى المار من O والعمودي على المستقيم (Δ)

لدينا، $\vec{u}(-1,1,2)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و $(\Delta)\perp(R)$

إذن $\vec{u}(-1,1,2)$ متجهة منظمية على المستوى (R)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (R) تكتب على شكل
$-x+y+2z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

ولدينا: $O \in (R) \Leftrightarrow d = 0$

إذن: $(R): -x+y+2z=0$

ولدينا: H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (R)

إذن مثلوث إحداثيات H هو حل النظمة:

$$\begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-2t-1 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-2t-1 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

إذن: $H\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

ب) نعتبر (R') المستوى المار من W والعمودي على المستقيم (Δ)
لدينا معادلة ديكارتية للمستوى (R') تكتب على شكل
$-x+y-2z+d=0$ حيث $d \in \mathbb{R}$

و $W \in (R') \Leftrightarrow d = 0$

إذن $(R) = (R')$

إذن H هي المسقط العمودي للنقطة W على (Δ)

ج) نعتبر (K) المستوى العمودي على المستويين (P) و (Q) والمار من H

بما أن $\vec{n}(1,1,0)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)
و $\vec{n'}(1,-1,-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

و $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

فإن $(P) \perp (Q)$

وبما أن (K) عمودي على المستويين (P) و (Q)

فإن $(\Delta) \perp (K)$

وبما أن H هو المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (Δ)

فإن $(OH) \subset (K)$

وبما أن H هو المسقط العمودي للنقطة W على المستقيم (Δ)

فإن $(WH) \subset (K)$

إذن المستوى (K) هو المستوى المار من O والموجه بالمتجهتين
$\overrightarrow{OW}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ و $\overrightarrow{OH}\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (K) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OW}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ y & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ z & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0$$

إذن: $(K): x-y+z=0$

وبما أن: $\Omega \in (K)$

فإن النقط Ω و W و O و H مستوائية

* نبين أن النقط Ω و W و O و H متداورة

لدينا: $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{O\Omega} = 0$

إذن المثلث $O\Omega H$ قائم الزاوية في O

إذن المثلث $O\Omega H$ محاط بالدائرة $\mathcal{C}$ التي أحد أقطارها $[\Omega, H]$

ولدينا: $\overrightarrow{W\Omega}\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ و $\overrightarrow{WH}(-1,-1,0)$

وبما أن: $\overrightarrow{WH} \cdot \overrightarrow{W\Omega} = 0$

فإن المثلث $(WH\Omega)$ قائم الزاوية في W

إذن المثلث $WH\Omega$ محاط بالدائرة $\mathcal{C}$ التي أحد أقطارها $[\Omega, H]$

إذن النقط W و Ω و O و H مستوائية وتنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$ التي أحد أقطارها $[\Omega, H]$

تمرين رقم 69

$$(S_m): x^2+y^2+z^2+mx+2(m-1)y+(m+4)z+1=0$$

$$\Leftrightarrow (S_m): \left(x^2+mx+\frac{m^2}{4}\right)+\left(y^2+2(m-1)y+(m-1)^2\right)+$$
$$+\left(z^2+(m+4)z+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2\right) = \frac{m^2}{4}+(m-1)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-1$$

$$\Leftrightarrow (S_m): \left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y+(m-1)\right)^2+\left(z+\frac{m}{2}+2\right)^2 =$$
$$= \frac{3m^2}{2}+4$$

$$\Leftrightarrow (S_m) = S\left(\Omega_m\left(\frac{-m}{2}, -m+1, \frac{-m}{2}-2\right), \frac{3m^2}{2}+4\right)$$

ج) لدينا: $\Omega_m\left(\frac{-m}{2}, -m+1, \frac{-m}{2}-2\right)$

نلاحظ أن إحداثيات Ω_m تحقق العلاقة

$$x-y+z+3=0$$

يعني: $\forall m \in \mathbb{R}; \left(\frac{-m}{2}\right)-(m+1)+\left(\frac{-m}{2}-2\right)+3=0$

إذن المحل الهندسي للنقط Ω_m عندما يتغير m في $\mathbb{R}$

هو المستوى $(P): x-y+z+3=0$

3) $\forall m \in \mathbb{R}; x^2+y^2+z^2+mx+2my-2y+mz+4z+1=0$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}; \left(x^2+y^2+z^2-2y+4z+1\right)+m(x+2y+z)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}; \left(x^2+(y-1)^2+(z+2)^2-4\right)+m(x+2y+z)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

إذن: $(Q): x+2y+z=0$ و $\mathcal{C}(W(0,1,-2), 2)$

4) نعتبر $A(x_A, y_A, z_A)$

$A \in (S_m) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists m_0 \in \mathbb{R}; \left(x_A^2+y_A^2+z_A^2-2y_A+4z_A+1\right)+m_0\left(x_A+2y_A+z_A\right)=0$$

وبما أن: $A \notin (Q) \Leftrightarrow x_A+2y_A+z_A \neq 0$

فإن: $m_0 = \dfrac{x_A^2+y_A^2+z_A^2-2y_A+4z_A+1}{x_A+2y_A+z_A}$

12 الجداء المتجهي

1

انشر ثم بسط:

1) $(\vec{i}+\vec{j})\wedge(2\vec{i}+\vec{j})$ ... $(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\wedge(2\vec{i}+\vec{j})$ (2 $(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\wedge(\vec{i}+3\vec{k})$

3) $(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\wedge(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

2

حدد إحداثيات المتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$. 2) $\vec{u}(1;0;1)$ و $\vec{v}(3;2;5)$.

3) $\vec{u}(-1;0;3)$ و $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

4) $\vec{u}=2\vec{i}$ و $\vec{v}=\vec{i}+3\vec{j}+7\vec{k}$.

3

نعتبر النقط: $A(1;0;3)$ و $B(-1;0;0)$ و $C(1;2;1)$ و $D(-1;-2;1)$ و $E(-3;2;0)$. حدد إحداثيات المتجهات التالية:

1) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{BE}$ 2) $(\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD})\wedge(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE})$

3) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{DE}$ 4) $\overrightarrow{AE}\wedge(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$

4

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين و $\vec{w}$ المتجهة بحيث: $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.

عبر بدلالة المتجهة $\vec{w}$ عن كل متجهة من المتجهات التالية:

1) $(2\vec{u}-3\vec{v})\wedge(\vec{u}+\vec{v})$ 2) $(2\vec{u}+\vec{v})\wedge(-\vec{u}+2\vec{v})$

3) $(4\vec{u}-\vec{v})\wedge(\vec{u}-2\vec{v})$

5

نعتبر المتجهات: $\vec{u}(1;-2;4)$ و $\vec{v}(-3;2;0)$ و $\vec{w}(2;-3;5)$.

1) بيّنْ أن المتجهتين $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و $\vec{u}\wedge\vec{w}$ مستقيميتان.

2) استنتج أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية.

6

نعتبر المتجهات $\vec{u}(3;-2;-1)$ و $\vec{v}(-2;5;3)$ و $\vec{w}(1;2;-1)$.

1) حدد إحداثيات المتجهتين: $\vec{a}=\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$ و $\vec{b}=(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$.

2) ماذا تستنتج؟

7

نعتبر المتجهات التالية: $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ و $\vec{w}\left(\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{2\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

1) بيّنْ أن: $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ أساس متعامد ممنظم.

2) هل $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ أساس مباشر؟

8

ليكن ABC مثلثا. نضع: $a=BC$ و $b=AC$ و $c=AB$

1) بيّنْ أن: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}$

2) استنتج العلاقة: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

9

نعتبر النقط $A(-1;1;2)$ و $B(1;2;0)$ و $C(0;4;6)$.

1) احسب $\cos\widehat{BAC}$ و $\sin\widehat{BAC}$.

2) استنتج قيمة $\widehat{BAC}$.

10

احسب مساحة المثلث ABC في كل حالة من الحالات التالية:

1) $A(2;0;0)$ و $B(2;-2;0)$ و $C(0;2;1)$.

2) $A(-1;1;0)$ و $B(1;2;1)$ و $C(-1;0;1)$.

3) $A(-3;1;4)$ و $B(1;1;5)$ و $C(3;-2;1)$.

11

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء.

بيّنْ أن: $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ تكافئ $\vec{u}\perp\vec{v}$.

12

نعتبر النقط $A(1;1;-2)$ و $B(2;4;0)$ و $C(0;3;1)$.

1) حدد إحداثيات النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

2) احسب مساحة $ABCD$.

13

في كل حالة من الحالات التالية، حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$، ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

1) $A(1;2;-1)$ و $B(2;0;-1)$ و $C(0;1;2)$.

2) $A(0;0;1)$ و $B(1;2;0)$ و $C(1;5;5)$.

3) $A(6;3;9)$ و $B(-2;-3;0)$ و $C(1;1;1)$.

4) $A(-2;-3;1)$ و $B(5;2;0)$ و $C(3;5;-1)$.

14

احسب مسافة النقطة $M(2;1;0)$ عن المستقيم (D) المار من النقطة $A(1;1;1)$ والموجه بالمتجهة $\vec{u}(2;2;1)$.

19

احسب مسافة النقطة $M(3;0;2)$ عن المستقيم (AB) حيث $A(1;6;-1)$ و $B(3;7;1)$.

20

في كل حالة من الحالات التالية، حدد إحداثيات المتجهة $\vec{u}\wedge\vec{v}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقطة A والموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

1) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ و $A(1;0;1)$.

2) $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{j}-\vec{k}$ و $A(0;-2;1)$.

3) $\vec{u}=\vec{i}$ و $\vec{v}=2\vec{j}+3\vec{k}$ و $A(0;0;-1)$.

21

نعتبر في الفضاء المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتاهما الديكارتية على التوالي هما:

$(P):2x-3y-z-4=0$ و $(Q):-3x-4y+5z-7=0$

1) حدد متجهة $\vec{n}_1$ منظمية على (P) و متجهة $\vec{n}_2$ منظمية على (Q).

2) حدد إحداثيات المتجهة $\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$.

3) حدد تقاطع (P) و (Q).

22

نفس أسئلة التمرين السابق،

1) $(P):4x-4y+2z-5=0$ و $(Q):x+2y-2z+3=0$

2) $(P):2x-5y-2z+3=0$ و $(Q):-4x+10y+4z-6=0$

23

نعتبر المتجهتين $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

1) حدد المتجهة $\vec{w}$ بحيث يكون $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ أساسا متعامدا ممنظما مباشرا.

2) حدد المتجهة $\vec{w}$ بحيث يكون $(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ أساسا متعامدا ممنظما غير مباشر.

24

نعتبر النقط: $A(2;0;0)$ و $B(2;2;0)$ و $D(2;2;1)$ و $E(0;0;1)$.

1) احسب مسافة النقطة A عن المستقيم (BE).

2) احسب مساحة المثلث ABE.

3) بيّنْ أن $OBDE$ متوازي أضلاع ثم احسب مساحته.

25

احسب مسافة النقطة M عن المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية:

1) $M(1;1;0)$ و $(D):\begin{cases}x=1+t\\y=-2t\\z=1+2t\end{cases}\ /t\in IR$

2) $M(2;1;-1)$ و $(D):\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=z$

3) $M(2;1;1)$ و $(D):\begin{cases}x+y+z-1=0\\3x+2y+z+3=0\end{cases}$

4) $M(3;-2;1)$ و $(D)=(AB)$ حيث $A(1;0;1)$ و $B(-1;1;3)$.

26

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء.

1) بيّنْ أن العبارتين التاليتين متكافئتان:

- A و B و C و D نقط مستوائية.
- $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}=0$.

2) في هذا السؤال، إحداثيات النقط A و B و C و D هي على التوالي: $(1;1;-2)$ و $(0;1;0)$ و $(-1;2;3)$ و $(4;3;-6)$

بيّنْ أن النقط A و B و C و D مستوائية.

27

نعتبر المتجهات $\vec{u}(1;-2;4)$ و $\vec{v}(-3;2;0)$ و $\vec{w}(2;-3;5)$.

1) بيّنْ أن المتجهتين $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و $\vec{u}\wedge\vec{w}$ مستقيميتان.

2) استنتج أن المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية.

28

احسب مسافة النقطة M عن المستقيم (AB) ثم احسب حجم رباعي الأوجه $MABC$ في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $A(-1;-1;2)$ و $B(2;-1;1)$ و $C(-1;2;1)$ و $M(1;1;1)$.

2) $A(2;-3;-3)$ و $B(3;-2;2)$ و $C(1;1;0)$ و $M(-1;0;-1)$.

29

احسب أطوال ارتفاعات المثلث ABC حيث: $A(3;1;0)$ و $B(1;1;0)$ و $C(1;0;1)$.

30

A و B و C و D أربع نقط من الفضاء.

حدد في كل حالة من الحالات التالية، مجموعة النقط M التي تحقق المتساوية:

1) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

2) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\wedge(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})=\vec{0}$

31

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء.

1) حدد مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\wedge\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

2) حدد مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

32

ليكن (AB) و (CD) مستقيمين متقاطعين في نقطة O من الفضاء.

1) بيّنْ أن لكل نقطة M من الفضاء: $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}\iff\overrightarrow{MO}\wedge(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})=\vec{0}$.

2) استنتج مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}$

33

لتكن A و B نقطتين من الفضاء و I منتصف القطعة $[AB]$. نضع $AI=a$.

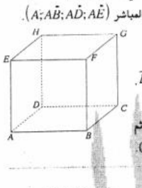
1) لتكن M نقطة من الفضاء مختلفة عن I و α قياسا للزاوية $\widehat{AIM}$. بيّنْ أن: $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|=2a.IM.\sin\alpha$.

2) حدد مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\frac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|}{\|\overrightarrow{IM}\|}=2a$.

34

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ الممثل في الشكل أسفله.

الفضاء موجه بالمعلم المتعامد الممنظم المباشر $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.



نعتبر النقطة I منتصف القطعة $[EF]$ و K مركز المربع $ADHE$.

1) أ- تحقق من أن: $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$.

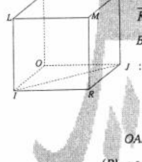
ب- استنتج مساحة المثلث IGA.

2) احسب حجم رباعي الأوجه $ABIG$ ثم استنتج مسافة النقطة B عن المستوى (AIG).

35

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$.

نعتبر المكعب $OIRJKLMN$ (انظر الشكل أسفله)



لتكن A منتصف القطعة $[IL]$ و B النقطة المعرفة بما يلي: $\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$ و (P) المستوى المحدد بالنقط O و A و B

1) حدد إحداثيات المتجهة $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$

2) استنتج مساحة المثلث OAB

3) أ) احسب حجم رباعي الأوجه $OABK$

ب) استنتج مسافة النقطة K عن المستوى (P).

تمرين رقم 1

1) $(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})\wedge(2\vec{i}+\vec{j}) =$
$= 2\vec{i}\wedge\vec{i}+\vec{i}\wedge\vec{j}-2\vec{j}\wedge\vec{i}-\vec{j}\wedge\vec{j}+4\vec{k}\wedge\vec{i}+2\vec{k}\wedge\vec{j}$
$= \vec{0}+\vec{k}-2(-\vec{k})-\vec{0}+4\vec{j}+2(-\vec{i})$
$= -2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$

2) $(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\wedge(\vec{i}+3\vec{k}) =$
$= 2\vec{i}\wedge\vec{i}+6\vec{i}\wedge\vec{k}+\vec{j}\wedge\vec{i}+3\vec{j}\wedge\vec{k}+\vec{k}\wedge\vec{i}+3\vec{k}\wedge\vec{k}$
$= \vec{0}+6(-\vec{j})+(-\vec{k})+3\vec{i}+\vec{j}+\vec{0}$
$= 3\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}$

3) $(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\wedge(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) =$
$= \vec{i}\wedge\vec{i}-\vec{i}\wedge\vec{j}+\vec{i}\wedge\vec{k}+\vec{j}\wedge\vec{i}-\vec{j}\wedge\vec{j}+\vec{j}\wedge\vec{k}-\vec{k}\wedge\vec{i}+\vec{k}\wedge\vec{j}-\vec{k}\wedge\vec{k}$
$= \vec{0}-\vec{k}+(-\vec{j})+(-\vec{k})-\vec{0}+\vec{i}-\vec{j}+(-\vec{i})-\vec{0}$
$= -2\vec{j}-2\vec{k}$

تمرين رقم 2

1) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$
$= \vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

2) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 5\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$

3) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$
$= 3\vec{i}+7\vec{j}+\vec{k}$

4) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}0 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 7\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}\vec{k}$

$= -14\vec{j}+6\vec{k}$

تمرين رقم 3

1) لدينا: $\vec{AB}(-2,0,-3)$ ، $\vec{AC}(0,2,-2)$
$\vec{BE}(-2,2,0)$ ، $\vec{AB}+\vec{AC}(-2,2,-5)$

$(\vec{AB}+\vec{AC})\wedge\vec{BE} = \begin{vmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-2 & -2\\ -5 & 0\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$
$= 10\vec{i}+10\vec{j}$

2) $\vec{AB}(-2,0,-3)$ ، $\vec{CD}(-2,-4,0)$
$\vec{BD}(0,-2,1)$ ، $\vec{AE}(-4,2,-3)$
$\vec{AB}-2\vec{CD}(2,8,-3)$ ، $\vec{BD}+\vec{AE}(-4,0,-2)$

$(\vec{AB}-2\vec{CD})\wedge(\vec{BD}+\vec{AE}) =$
$= \begin{vmatrix}8 & 0\\ -3 & -2\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}2 & -4\\ -3 & -2\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}2 & -4\\ 8 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -16\vec{i}+16\vec{j}+32\vec{k}$

3) $\vec{AB}(-2,0,-3)$ ، $\vec{CD}(-2,-4,0)$
$\vec{CB}(-2,-2,-1)$ ، $\vec{DE}(-2,4,-1)$

$\vec{AB}\wedge\vec{CD} = \begin{vmatrix}0 & -4\\ -3 & 0\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-2 & -2\\ -3 & 0\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-2 & -2\\ 0 & -4\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -12\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}$

$\vec{CB}\wedge\vec{DE} = \begin{vmatrix}-2 & -4\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-2 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -4\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -4\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

اذن: $\vec{AB}\wedge\vec{CD}+\vec{CB}\wedge\vec{DE} = -16\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$

4) $\vec{AE}(-4,2,-3)$ ، $\vec{CB}(-2,-2,-1)$
$\vec{CD}(-2,-4,0)$ ، $\vec{CB}+\vec{CD}(-4,-6,-1)$

$\vec{AE}\wedge(\vec{CB}+\vec{CD}) = \begin{vmatrix}2 & -6\\ -3 & -1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-4 & -4\\ -3 & -1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-4 & -4\\ 2 & -6\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -20\vec{i}+8\vec{j}+32\vec{k}$

تمرين رقم 4

1) $(2\vec{u}-3\vec{v})\wedge(\vec{u}+\vec{v}) =$
$= 2\vec{u}\wedge\vec{u}+2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v}\wedge\vec{u}-3\vec{v}\wedge\vec{v}$
$= \vec{0}+2\vec{u}\wedge\vec{v}+3\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{0}$
$= 5\vec{u}\wedge\vec{v} = 5\vec{w}$

2) $(2\vec{u}+\vec{v})\wedge(-\vec{u}+2\vec{v}) =$
$= -2\vec{u}\wedge\vec{u}+4\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{v}\wedge\vec{u}+2\vec{v}\wedge\vec{v}$
$= \vec{0}+4\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{0}$
$= 5\vec{u}\wedge\vec{v} = 5\vec{w}$

3) $(4\vec{u}-\vec{v})\wedge(\vec{u}-2\vec{v}) =$
$= 4\vec{u}\wedge\vec{u}-8\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{v}\wedge\vec{u}+2\vec{v}\wedge\vec{v}$
$= \vec{0}-8\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{0}$
$= -7\vec{u}\wedge\vec{v} = -7\vec{w}$

تمرين رقم 5

1) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}-2 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 0\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -8\vec{i}-12\vec{j}-4\vec{k}$

$\vec{u}\wedge\vec{w} = \begin{vmatrix}-2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix}\vec{k}$
$= 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$

فإن: $\vec{u}\wedge\vec{v} = -4(\vec{u}\wedge\vec{w})$
فإن $\vec{u}\wedge\vec{v}$ و $\vec{u}\wedge\vec{w}$ متجهين مستقيميين

2) لدينا: $\vec{u}\wedge\vec{v}+4(\vec{u}\wedge\vec{w}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \vec{u}\wedge(\vec{v}+4\vec{w}) = \vec{0}$
اذن $\vec{u}$ و $\vec{v}+4\vec{w}$ متجهين مستقيميين
اذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات مستوائية

تمرين رقم 6

1) $\vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -11\vec{i}+\vec{j}-9\vec{k}$

$\vec{a} = \vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -9\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}3 & -11\\ -1 & -9\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$
$= 19\vec{i}-29\vec{j}+\vec{k}$

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix}-2 & 5\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -\vec{i}-7\vec{j}+11\vec{k}$

$\vec{b} = (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = \begin{vmatrix}-7 & 2\\ 11 & -1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 11 & -1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}-1 & 1\\ -7 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$
$= -15\vec{i}+10\vec{j}+5\vec{k}$

2) لدينا: $\vec{a} \neq \vec{b}$
يعني: $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) \neq (\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w}$
ومنه نستنتج أن الجداء المتجهي غير تجميعي

تمرين رقم 7

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 1$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} = 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = \frac{\sqrt{12}}{12} - \frac{\sqrt{12}}{12} = 0$

$\vec{v}\cdot\vec{w} = -\frac{\sqrt{18}}{18} + 2\frac{\sqrt{18}}{18} - \frac{\sqrt{18}}{18} = 0$

اذن : $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس متعامد ممنظم .

2)

$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{3}/3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= -\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{i} - 2\frac{\sqrt{6}}{6}\vec{j} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{k} = -\vec{w}$

اذن : $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس غير مباشر

تمرين رقم 8

1)

$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = (\vec{AC}+\vec{CB})\wedge\vec{AC}$

$= \vec{AC}\wedge\vec{AC} + \vec{CB}\wedge\vec{AC} = \vec{CA}\wedge\vec{CB}$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \vec{AB}\wedge(\vec{AB}+\vec{BC})$

$= \vec{AB}\wedge\vec{AB} + \vec{AB}\wedge\vec{BC} = \vec{BC}\wedge\vec{BA}$

اذن : $\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \vec{CA}\wedge\vec{CB} = \vec{BC}\wedge\vec{BA}$

2) لدينا :

$\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = c.b\ \sin\hat{A}$

$\|\vec{CA}\wedge\vec{CB}\| = b.a.\sin\hat{C}$

$\|\vec{BC}\wedge\vec{BA}\| = a.c.\sin\hat{B}$

اذن : $cb\sin A = ba\sin C = ac\sin B$

$\Leftrightarrow \frac{1}{cb\sin A} = \frac{1}{ab\sin C} = \frac{1}{ac\sin B}$

نضرب في abc نحصل على :

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

تمرين رقم 9

1)

$\vec{AB}(2,1,-2)$ ، $\vec{AC}(1,3,4)$

$AB = \sqrt{4+1+4} = 3$ ، $AC = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2+3-8 = -3$

ولدينا : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

يعني : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{AB\times AC} = \frac{-1}{\sqrt{26}}$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 10\vec{i} - 10\vec{j} + 5\vec{k}$

$\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \sqrt{100+100+25} = 15$

ولدينا : $\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = AB\times AC\times \sin(\widehat{BAC})$

اذن : $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}{AB\times AC} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

2)

$\begin{cases} \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-1}{\sqrt{26}} \\ \sin(\widehat{BAC}) = \frac{5}{\sqrt{26}} \end{cases} \Leftrightarrow |\overline{BAC}| \simeq 101^{\circ}$

تمرين رقم 10

1)

$\vec{AB}(0,-2,0)$ ، $\vec{AC}(-2,2,1)$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= -2\vec{i} - 4\vec{k}$

$S = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+16} = \sqrt{5}$

2)

$\vec{AB}(2,1,1)$ ، $\vec{AC}(0,-1,1)$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

$S = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{4+4+4} = \sqrt{3}$

3)

$\vec{AB}(4,0,1)$ ، $\vec{AC}(6,-3,-3)$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= 3\vec{i} + 18\vec{j} - 12\vec{k}$

$S = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{9+324+144}$

$= \frac{\sqrt{477}}{2}$

تمرين رقم 11

لدينا : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

حيث θ هي أحد قياسات الزاوية $(\vec{u},\vec{v})$

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\| \Leftrightarrow \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

تمرين رقم 12

$A(1,1,-2)$, $B(2,4,0)$, $C(0,3,1)$

1) نعتبر $D(x,y,z)$ نقطة من الفضاء ؛

الرباعي ABCD متوازي أضلاع

$\Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -2 \\ y-1 = -1 \\ z+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

اذن $D(-1,0,-1)$

2) لدينا :

$\vec{AD}(-2,-1,1)$ ، $\vec{AB}(1,3,2)$

$\vec{AD}\wedge\vec{AB} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= -5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}$

$S_{ABCD} = \|\vec{AD}\wedge\vec{AB}\| = 5\sqrt{3}$

تمرين رقم 13

1)

$A(1,2,-1)$ ، $B(2,0,-1)$ ، $C(0,1,2)$

$\vec{AB}(1,-2,0)$ ، $\vec{AC}(-1,-1,3)$

$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= -6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء ؛

$M\in(ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$

$\Leftrightarrow -6(x-1)+3(y-2)-3(z+1) = 0$

اذن : $(ABC) : -2x + y - z - 1 = 0$

2)

$A(0,0,1)$ ، $B(1,2,0)$ ، $C(1,5,5)$

$\vec{AB}(1,2,-1)$ ، $\vec{AC}(1,5,4)$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 13\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 13x - 5y + 3(z-1) = 0$$

إذن: $(ABC): 13x - 5y + 3z - 3 = 0$

3)

$A(6,3,9)$ ، $B(-2,-3,0)$ ، $C(1,1,1)$

$\vec{AB}(-8,-6,-9)$ ، $\vec{AC}(-5,-2,-8)$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -9 & -8 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ -9 & -8 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ -6 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 30\vec{i} - 19\vec{j} - 14\vec{k}$$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 30(x-6) - 19(y-3) - 14(z-9) = 0$$

إذن: $(ABC): 30x - 19y - 14z + 3 = 0$

4)

$A(-2,-3,1)$ ، $B(5,2,0)$ ، $C(3,5,-1)$

$\vec{AB}(7,5,-1)$ ، $\vec{AC}(5,8,-2)$

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + 9\vec{j} + 31\vec{k}$$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{AB}\wedge\vec{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+2) + 9(y+3) + 31(z-1) = 0$$

إذن: $(ABC): -2x + 9y + 31z - 8 = 0$

تمرين رقم 14

$M(2,1,0)$ ، $A(1,1,1)$ ، $\vec{u}(2,2,1)$

$\vec{AM}(1,0,-1)$

$$\vec{AM}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$ ، $\|\vec{u}\| = 3$

إذن: $d(M,(D)) = \dfrac{\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$

تمرين رقم 19

لدينا: $\vec{AB}(2,1,2)$ ، $\vec{MA}(-2,6,-3)$

$$\vec{MA}\wedge\vec{AB} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 15\vec{i} + 2\vec{j} - 14\vec{k}$$

$\|\vec{MA}\wedge\vec{AB}\| = 5\sqrt{17}$ ، $\|\vec{AB}\| = 3$

إذن: $d(M,(AB)) = \dfrac{\|\vec{MA}\wedge\vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \dfrac{5\sqrt{17}}{3}$

تمرين رقم 20

1)

$\vec{u}(1,1,0)$ ، $\vec{v}(1,-2,1)$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) + y - 3(z-1) = 0$$

إذن: $(P): x + y - 3z + 2 = 0$

2)

$\vec{u}(2,1,1)$ ، $\vec{v}(0,1,-1)$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-2) + (y+2)(2) + (z-1)(2) = 0$$

إذن: $(P): -2x + 2y + 2z + 2 = 0$

3)

$\vec{u}(1,0,0)$ ، $\vec{v}(0,2,3)$

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -3\vec{j} + 2\vec{k}$$

نعتبر $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \vec{AM}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3y + 2(z+1) = 0$$

إذن: $(P): -3y + 2z + 2 = 0$

تمرين رقم 21

$(P): 2x - 3y - z - 4 = 0$ ، $(Q): -3x - 4y + 5z - 7 = 0$

1) $\vec{n_1}(2,-3,-1)$ متجهة منظمية على (P)

$\vec{n_2}(-3,-4,5)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

2)

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -19\vec{i} - 7\vec{j} - 17\vec{k}$$

3) نحدد نقطة A تنتمي إلى تقاطع (P) و (Q)

نضع $y=0$ ونحل النظمة

$$\begin{cases} 2x - z = 4 \\ -3x + 5z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ z = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

إذن: $A\left(\frac{13}{7}, 0, \frac{-2}{7}\right)$

و (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم المار من A والموجه بالمتجهة: $\vec{u}\wedge\vec{v}(-19,-7,-17)$

تمرين رقم 22

1)

$(P): 4x - 4y + 2z - 5 = 0$ ، $(Q): x + 2y - 2z + 3 = 0$

لدينا: $\vec{n_1}(4,-4,2)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

و $\vec{n_2}(1,2,-2)$ متجهة منظمية على المستوى (Q).

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k}$$

نحدد مثلوث إحداثيات A نقطة تنتمي إلى تقاطع المستويين (P) و (Q)

نضع $x=0$ ونحل النظمة:

$$\begin{cases} x+2y-2z+3=0 \\ 4x-4y+2z-5=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y-2z=-3 \\ -4y+2z=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن: $A(0,-1,\frac{1}{2})$

إذن المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم المار من A والموجه بالمتجهة $\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}(4,10,12)$

2) $(P): 2x-5y-2z+3=0$ ، $(Q): -4x+10y+4z-6=0$

لدينا: $\vec{n_1}(2,-5,-2)$ متجهة منظمية على المستوى (P)

و $\vec{n_2}(-4,10,4)$ متجهة منظمية على المستوى (Q)

$$\vec{n_1}\wedge\vec{n_2}=\begin{vmatrix}-5 & 10\\ -2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -4\\ -5 & 10\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\vec{0}$$

إذن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مستقيميتين

إذن $(P)//(Q)$

وبما أن المستويين (P) و (Q) نقطة مشتركة: $A(0,0,\frac{3}{2})$

فإن $(P)=(Q)$

تمرين رقم 23

$\vec{u}(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$ ، $\vec{v}(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

1) لدينا: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=1$ ، $\|\vec{v}\|=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}}=1$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{2\sqrt{2}}{6}-\frac{2\sqrt{2}}{6}=0$

لكي يكون $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ معلما متعامدا ممنظما مباشرا

يجب أن يكون $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ و $\|\vec{w}\|=1$

$$\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2}{3}\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{i}-\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{j}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k}$$

ولدينا: $\|\vec{w}\|=\sqrt{\frac{2}{36}+\frac{2}{36}+\frac{32}{36}}=1$

إذن: $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

2) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ معلم متعامد ممنظم غير مباشر

يعني أن: $\vec{w}=-\vec{u}\wedge\vec{v}$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{6}\vec{j}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\vec{k}$$

تمرين رقم 24

$E(0,0,1)$ ، $D(2,2,1)$ ، $B(2,2,0)$ ، $A(2,0,0)$

1) $\vec{AB}(0,2,0)$ ، $\vec{BE}(-2,-2,1)$

$$\vec{AB}\wedge\vec{BE}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}+4\vec{k}$$

$\|\vec{AB}\wedge\vec{BE}\|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$ ، $\|\vec{BE}\|=3$

إذن: $d(A,(BE))=\frac{\|\vec{AB}\wedge\vec{BE}\|}{\|\vec{BE}\|}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

2) $S_{ABE}=\frac{1}{2}\|\vec{BA}\wedge\vec{BE}\|=\frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{BE}\|=\sqrt{5}$

3) لدينا: $\vec{ED}(2,2,0)$ ، $\vec{OB}(2,2,0)$

إذن: $\vec{OB}=\vec{ED}$

إذن الرباعي OBDE متوازي أضلاع

ولدينا: $\vec{OB}\wedge\vec{OE}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}\vec{k}$
$$=2\vec{i}-2\vec{j}$$

إذن: $S_{OBDE}=\|\vec{OB}\wedge\vec{OE}\|=2\sqrt{2}$

تمرين رقم 25

1) المستقيم (D) يمر من النقطة $A(-1,0,1)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(1,-2,2)$

لدينا: $\vec{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$
$$=-\vec{j}-\vec{k}$$

$\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}$ ، $\|\vec{u}\|=3$

إذن: $d(M,(D))=\frac{\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

2) لدينا: $(D): \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=z$

نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

بوضع $z=t$ نحصل على:

$$(D): \begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t-1 \\ z=t \end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$$

ومنه فإن المستقيم (D) يمر من النقطة $A(1,-1,0)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(2,2,1)$

$$\vec{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=4\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

$\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$ ، $\|\vec{u}\|=3$

إذن: $d(M,(D))=\frac{\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{29}}{3}$

3) $(D)\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x+2y+z+3=0 \end{cases}$

نحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

بوضع $x=t$ نحصل على:

$$(D): \begin{cases} x=t \\ y=-2t-4 \\ z=t+5 \end{cases} \quad / (t\in\mathbb{R})$$

ومنه فإن المستقيم (D) يمر من النقطة $A(0,-4,5)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(1,-2,1)$

$$\vec{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}5 & -2\\ -4 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=-3\vec{i}-6\vec{j}-9\vec{k}$$

$\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{9+36+81}=3\sqrt{14}$ ، $\|\vec{u}\|=\sqrt{6}$

إذن: $d(M,(D))=\frac{\|\vec{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{6}}=3\sqrt{\frac{7}{3}}$

4) المستقيم (AB) يمر من النقطة $A(1,0,1)$ وموجه بالمتجهة $\vec{AB}(-2,1,2)$

لدينا: $\vec{AM}\wedge\vec{AB}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

$$= -4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+4} = 6 \quad ، \quad \|\overrightarrow{AB}\| = 3$$

إذن $d(\Pi, (AB)) = \dfrac{\|\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 2$

تمرين رقم 26

1) D نقطة من المستوى $(ABC) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

A و B و C و D نقط مستوائية $\Leftrightarrow$

2) $A(1,1,-2)$ ، $B(0,1,0)$ ، $C(-1,2,3)$ ، $D(4,3,-6)$

$\overrightarrow{AD}(3,2,-4)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,1,5)$ ، $\overrightarrow{AB}(-1,0,2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

وبما أن: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -6+2+4 = 0$

فإن النقط A و B و C و D مستوائية .

تمرين رقم 27

$\vec{u}(1,-2,4)$ ، $\vec{v}(-3,2,0)$ ، $\vec{w}(2,-3,5)$

1) $$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -8\vec{i} - 12\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

بما أن: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -4\,\vec{u} \wedge \vec{w}$

فإن المتجهتين $\vec{u} \wedge \vec{v}$ و $\vec{u} \wedge \vec{w}$ مستقيميتين

2) لدينا: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -4\,\vec{u} \wedge \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} + 4\,\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \wedge (\vec{v} + 4\vec{w}) = \vec{0}$$

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v} + 4\vec{w}$ متجهتين مستقيميتين

إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهات مستوائية

تمرين رقم 28

لتكن A و B و C ثلاث نقط مختلفة وغير مستقيمية من الفضاء و Π نقطة خارج المستوى (ABC)

بين أن:

$$d(M, (ABC)) = \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

ونستنتج مساحة رباعي الأوجه ΠABC

* نعتبر H المسقط العمودي للنقطة M على المستوى (ABC)

لدينا: المتجهتين $\overrightarrow{H\Pi}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظميتين على المستوى (ABC)

يعني أن المتجهتين $\overrightarrow{H\Pi}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ مستقيميتين

إذن: $|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{H\Pi}| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{H\Pi}\|$

(لأن: $|\cos(\overline{(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{H\Pi}})| = 1$)

ولدينا: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{H\Pi} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{A\Pi})$

$$= (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{HA} + (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}$$

$$= (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}$$

(لأن: $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{HA} = 0$)

إذن $|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}| = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{H\Pi}|$

$$= \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{H\Pi}\|$$

$$= \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \cdot d(\Pi, (ABC))$$

إذن: $d(\Pi, (ABC)) = \dfrac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \cdot d(M, (ABC))$$

$$= \frac{1}{6} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \frac{|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

$$= \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}|$$

1) $M(1,1,1)$ ، $C(-1,2,1)$ ، $B(2,-1,1)$ ، $A(-1,-1,2)$

$\overrightarrow{AB}(3,0,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,3,-1)$ ، $\overrightarrow{A\Pi}(2,2,-1)$

$$\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}$$

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi} = 6 + 6 - 9 = 3$$

$$\|\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{10}$$

إذن $d(\Pi, (AB)) = \dfrac{\|\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{\sqrt{41}}{\sqrt{10}}$

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}| = \frac{1}{2}$$

2) $M(-1,0,-1)$ ، $C(1,1,0)$ ، $B(3,-2,2)$ ، $A(2,-3,-3)$

$\overrightarrow{AB}(1,1,5)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1,4,3)$ ، $\overrightarrow{A\Pi}(-3,3,2)$

$$\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 13\vec{i} + 17\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -17\vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi} = 51 - 24 + 10 = 37$$

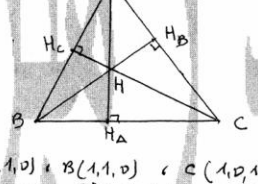
$$\|\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{494}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{27}$$

إذن $d(\Pi, (AB)) = \dfrac{\|\overrightarrow{A\Pi} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \sqrt{\dfrac{494}{27}}$

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{A\Pi}| = \frac{37}{6}$$

تمرين رقم 29



$A(3,1,0)$ ، $B(1,1,0)$ ، $C(1,0,1)$

$\overrightarrow{AB}(-2,0,0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2,-1,1)$ ، $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$AB = 2 \quad , \; AC = \sqrt{6} \quad , \; BC = \sqrt{2}$

لدينا : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \| = \sqrt{2}$

اذن : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times CH_C = CH_C = \sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH_B = \frac{\sqrt{6}}{2} BH_B = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow BH_B = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH_A = \frac{\sqrt{2}}{2} AH_A = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow AH_A = 2$

تمرين رقم 30

1) نعتبر I منتصف $[AB]$

$(\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{MI} \wedge \vec{AC} = \vec{0}$

$\vec{MI}$ و $\vec{AC}$ متجهتين مستقيميتين $\Leftrightarrow$

اذن مجموعة النقط M هي المستقيم المار من I والموجه بالمتجهة $\vec{AC}$

2) نعتبر I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BD]$

$(\vec{MA} + \vec{MB}) \wedge (\vec{MB} \wedge \vec{MD}) = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} \wedge 2\vec{MJ} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{MI} \wedge \vec{MJ} = \vec{0}$

$\vec{MI}$ و $\vec{MJ}$ متجهتين مستقيميتين $\Leftrightarrow$

اذن مجموعة النقط M هي المستقيم (IJ)

تمرين رقم 31

1) نعتبر I منتصف $[BC]$

$(\vec{AB} + \vec{AC}) \wedge \vec{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{AI} \wedge \vec{AM} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{AI} \wedge \vec{AM} = \vec{0}$

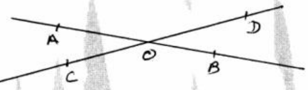
$\Leftrightarrow$ $\vec{AI}$ و $\vec{AM}$ متجهتين مستقيميتين

اذن مجموعة النقط M هي المستقيم المار من A والموجه بالمتجهة $\vec{AI}$

2) : $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM} = 0$

يعني أن مجموعة النقط M هي المستوى المار من A و $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ متجهة منظمية عليه

تمرين رقم 32



1) $\vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MD} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\vec{MO} + \vec{OA}) \wedge (\vec{MO} + \vec{OB}) = (\vec{MO} + \vec{OC}) \wedge (\vec{MO} + \vec{OD})$

$\Leftrightarrow \vec{MO} \wedge \vec{MO} + \vec{MO} \wedge \vec{OB} + \vec{OA} \wedge \vec{MO} + \vec{OA} \wedge \vec{OB} =$

$= \vec{MO} \wedge \vec{MO} + \vec{MO} \wedge \vec{OD} + \vec{OC} \wedge \vec{MO} + \vec{OC} \wedge \vec{OD}$

$\Leftrightarrow \vec{MO} \wedge \vec{OB} + \vec{OA} \wedge \vec{MO} = \vec{MO} \wedge \vec{OD} + \vec{OC} \wedge \vec{MO}$

$\Leftrightarrow \vec{MO} \wedge \vec{OB} + \vec{MO} \wedge \vec{AO} = \vec{MO} \wedge \vec{OD} + \vec{MO} \wedge \vec{CO}$

$\Leftrightarrow \vec{MO} \wedge (\vec{AO} + \vec{OB}) = \vec{MO} \wedge (\vec{CO} + \vec{OD})$

$\Leftrightarrow \vec{MO} \wedge \vec{AB} = \vec{MO} \wedge \vec{CD}$

$\Leftrightarrow \vec{MO} \wedge (\vec{AB} - \vec{CD}) = \vec{0}$

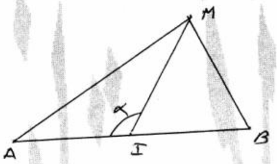
2) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق

$\vec{MA} \wedge \vec{MB} = \vec{MC} \wedge \vec{MD}$

هي المستوى المار من O و $(\vec{AB} - \vec{CD})$ متجهة منظمية عليه

تمرين رقم 33

I منتصف $[AB]$ ، $a = AI$



1) $\vec{MA} \wedge \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \wedge (\vec{MI} + \vec{IB})$

$= \vec{MI} \wedge \vec{MI} + \vec{MI} \wedge \vec{IB} + \vec{IA} \wedge \vec{MI} + \vec{IA} \wedge \vec{IB}$

$= \vec{MI} \wedge \vec{IB} + \vec{IA} \wedge \vec{MI}$

$= \vec{MI} \wedge \vec{IB} + \vec{MI} \wedge \vec{AI}$

$= \vec{MI} \wedge (\vec{AI} + \vec{IB})$

$= \vec{MI} \wedge \vec{AB}$

$\| \vec{MA} \wedge \vec{MB} \| = \| \vec{MI} \wedge \vec{AB} \| = MI \times AB \times \sin\alpha$

$= 2a \times IM \times \sin\alpha$

2) $\frac{\| \vec{MA} \wedge \vec{MB} \|}{\| \vec{IM} \|} = \frac{2a \times IM \times \sin\alpha}{IM}$

$= 2a \sin\alpha = 2a$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = 0$

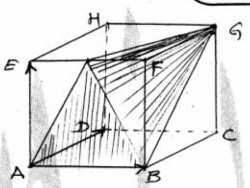
$\Leftrightarrow \alpha = k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

اذن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$\frac{\| \vec{MA} \wedge \vec{MB} \|}{\| \vec{IM} \|} = 2a$

هي المستقيم (AB) محروم من النقطة I

تمرين رقم 34



1) أ) $\vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK}$

$= -\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AE})$

$= -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$

$\vec{IG} = \vec{IF} + \vec{FG}$

$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{IA} = \vec{IE} + \vec{EA}$

$= -\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AE}$

إذن : $\vec{AK}\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $\vec{IG}\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ ، $\vec{IA}\left(-\frac{1}{2}, 0, -1\right)$

$\vec{IG} \wedge \vec{IA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$

$$= -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$$
$$= \vec{BK}$$

ب) $S_{IGA} = \frac{1}{2}\|\vec{IG} \wedge \vec{IA}\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ج) نعتبر رباعي الأوجه ABIG هو رباعي أوجه قاعدته المثلث ABI متساوي الساقين رأسه A وارتفاعه

$$h = d(G, (ABI)) = GF = 1$$

إذن: $V_{ABIG} = \frac{1}{3} S_{ABI} \cdot d(G, (ABI))$

$$= \frac{1}{3} \frac{BF \times AB}{2} = \frac{1}{6}$$

نعتبر رباعي الأوجه ABIG هو رباعي أوجه قاعدته المثلث IGA وارتفاعه

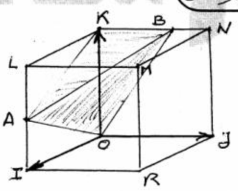
$$h' = d(B, (AIG))$$

لدينا: $V_{ABIG} = \frac{1}{3} S_{IGA} h'$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, h' = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow h' = d(B, (AIG)) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

تمرين رقم 35



1) لدينا: $\vec{OA} = \vec{OI} + \vec{IA} = \vec{OI} + \frac{1}{2}\vec{OK}$

$$\vec{OB} = \vec{OK} + \vec{KB} = \vec{OK} + \frac{2}{3}\vec{OJ}$$

إذن: $\vec{OA}(1, 0, \frac{1}{2})$ ، $\vec{OB}(0, \frac{2}{3}, 1)$

$$\vec{u} = \vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= -\frac{1}{3}\vec{i} - \vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$$

2) $S_{OAB} = \frac{1}{2}\|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\|$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9} + 1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{6}$$

3) أ) نعتبر رباعي الأوجه OABK هو رباعي أوجه قاعدته المثلث OAK وارتفاعه BK

المستقيم (BK) عمودي على المستوى (OAK)

المثلث OAK متساوي الساقين رأسه A

إذن: $V_{OABK} = \frac{1}{3} S_{OAK} \cdot BK$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OK \cdot OI \cdot BK$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

ب) نعتبر رباعي الأوجه OABK هو رباعي أوجه قاعدته المثلث OAB وارتفاعه: $h = d(K, (OAB))$

$$V_{OABK} = \frac{1}{3} S_{OAB} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{14}}{6} h = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

بالتوفيق والنجاح إن شاء الله تعالى

ولاتنسوني من خالص دعواتكم