| الثانية ب ع ر | الأعداد العقدية | ح.بوعيون |
|---|---|---|

## I) عموميات:

### 1) تعريف:

نقبل الخاصية التالية:

توجد مجموعة نرمز لها ب $\mathbb{C}$ تحتوي على $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$ وتحقق ما يلي:

1) تحتوي المجموعة $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي نرمز له ب $i$ ويحقق $i^2=-1$

2) كل عنصر $z$ من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل: $z=a+ib$ مع $a,b\in\mathbb{R}$

3) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعملتي الجمع والضرب اللتان تمددان عمليتي الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ ولهما نفس الخاصيات.

**ملاحظات:**

*) $\mathbb{C}=\{z=a+ib/a,b\in\mathbb{R};i^2=-1\}$.

*) $\mathbb{C}$ تسمى مجموعة الأعداد العقدية وكل عنصر من $\mathbb{C}$ يسمى عدد عقدي.

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$.
هذه الكتابة تسمى الشكل الجبري للعدد $z$.
العدد $a$ يسمى الجزء الحقيقي ل $z$. نكتب $Ré(z)=a$.
العدد $b$ يسمى الجزء التخيلي ل $z$. نكتب $\operatorname{Im}(z)=b$.
إذا كان $b=0$ فإن $z=a\in\mathbb{R}$
إذا كان $a=0$ فإن $z=ib$ ونقول $z$ تخيلي صرف: $z\in i\mathbb{R}$.

**أمثلة:**

*) $z=2-3i$ لدينا $Ré(z)=2$ و $\operatorname{Im}(z)=-3$

*) $z=-4i$ $Ré(z)=0$ و $\operatorname{Im}(z)=-4$
لدينا $z\in i\mathbb{R}$.

### 2) قواعد الحساب في $\mathbb{C}$.

#### a) تساوي عددين عقديين:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$
بما أن كل عدد عقدي يكتب بطريقة وحيدة على شكله الجبري.
فإن: $z=z'\Leftrightarrow a=a';b=b'$.

لدينا $\begin{cases}z=a+ib\\0=0+i0\end{cases}$ من $z=0\Leftrightarrow a=0;b=0$

**خاصية:**

ليكن $a,b,a',b'$ من $\mathbb{R}$ لدينا:

*) $a+ib=a'+ib'\Leftrightarrow a=a';b=b'$ هذا يعني:
$$z=z'\Leftrightarrow\begin{cases}Ré(z)=Ré(z')\\\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(z')\end{cases}$$

*) $a+ib=0\Leftrightarrow a=0;b=0$

هذا يعني: $z=0\Leftrightarrow\begin{cases}Ré(z)=0\\\operatorname{Im}(z)=0\end{cases}$

#### b) بنية $(\mathbb{C},+,\times)$

*) الجمع تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$.

*) الجمع يقبل عنصرا محايدا هو $0$: $0+z=z+0=z$

*) كل عنصر $z$ من $\mathbb{C}$ يقبل مقابلا نرمز له ب $-z$: $z+(-z)=(-z)+z=0$.

*) نلخص الخاصيات السابقة بقولنا $(\mathbb{C},+)$ زمرة تبادلية.

*) الضرب تجميعي وتبادلي في $\mathbb{C}$.

*) الضرب توزيعي بالنسبة للجمع: $z(z'+z'')=zz'+zz''$

$\leftarrow$ نلخص الخاصيات السابقة بقولنا:
$(\mathbb{C},+,\times)$ حلقة تبادلية.

*) العدد $1$ هو العنصر المحايد في $\mathbb{C}$ بالنسبة للضرب.

*) كل عنصر من $\mathbb{C}^*$ يقبل مقلوبا نرمز له ب $\frac{1}{z}$ أو $z^{-1}$
$\frac{1}{z}\times z=z\times\frac{1}{z}=1$.

$\leftarrow$ نلخص كل الخاصيات السابقة بقولنا: $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

**خاصية:** $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

#### c) الجمع والضرب في $\mathbb{C}$:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ مع $a,b,a',b'$.

*) لدينا: 
$$\begin{aligned}z+z'&=(a+ib)+(a'+ib')\\&=a+ib+a'+ib'\\&=a+a'+ib+ib'\\&=a+a'+i(b+b')\end{aligned}$$

*) لدينا:
$$\begin{aligned}zz'&=(a+ib)(a'+ib')\\&=aa'+ib'a+iba'-bb'\\&=(aa'-bb')+i(b'a+ba')\end{aligned}$$

**خاصية:**

ليكن $a,b,a'$ و $b'$ من $\mathbb{R}$. لدينا:

*) $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$

*) $(a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$

#### d) مقابل ومقلوب عدد عقدي:

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$.
لنبحث عن $z'$ بحيث $z+z'=0$
نضع $z'=a'+ib'$
$$z+z'=0\Leftrightarrow(a+a')+i(b+b')=0$$
لدينا: $\Leftrightarrow\begin{cases}a+a'=0\\b+b'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=-a\\b'=-b\end{cases}$

إذن: $z'=-a+i(-b)$

إذن مقابل $z=a+ib$ هو: $-z=-a+i(-b)$

*) ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$
لنبحث عن $z'$ بحيث $zz'=1$
نضع $z'=a'+ib'$
$$zz'=1\Leftrightarrow(aa'-bb')+i(ab'+ba')=1$$
لدينا: $\Leftrightarrow\begin{cases}aa'-bb'=1\\ba'+b'a=0\end{cases}$
$$\Delta=\begin{vmatrix}a&-b\\b&a\end{vmatrix}=a^2+b^2$$
ولدينا $z\in\mathbb{C}^*$ إذن $a\neq0$ أو $b^2\neq0$
إذن $a^2\rangle0$ أو $b^2\rangle0$ إذن $\Delta\neq0$

$$\Delta^*_{a'}=\begin{vmatrix}1 & -b\\ 0 & a\end{vmatrix}=a \qquad \Delta_{b'}=\begin{vmatrix}a & 1\\ b & 0\end{vmatrix}=-b$$

إذن $b'=\dfrac{-b}{a^2+b^2}\ ;\ a'=\dfrac{a}{a^2+b^2}$

إذن: $z'=\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$

إذن مقلوب $z=a+ib$ هو: $\boxed{\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}}$

### ملاحظة:

عمليا للحصول على مقلوب عدد عقدي يتبع ما يلي:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$
$$=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

### e) متطابقات هامة:

جميع المتطابقات الهامة التي نعرفها في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$ .

f) قوى العدد $i$ :

لدينا: $i^2=-1 \qquad i^3=i^2.i=-i$

$i^4=i^2.i^2=1$

$i^5=i^4.i=i$

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

*) إذا كان $n=4k$ : $\quad i^n=i^{4k}=\left(i^4\right)^k=1$

*) إذا كان $n=4k+1$ : $\quad i^n=i^{4k+1}=i^{4k}.i=i$

*) إذا كان $n=4k+2$ : $\quad i^n=i^{4k+2}=i^{4k}.i^2=-1$

*) إذا كان $n=4k+3$ : $\quad i^n=i^{4k+3}=i^{4k}.i^3=-i$

إذن: $i^n=\begin{cases}1; & n=4k\\ i; & n=4k+1\\ -1; & n=4k+2\\ -i; & n=4k+3\end{cases}$

### تمرين تطبيقي:

*)حساب:

$$z=\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{100}=\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^2\right)^{50}$$
$$=\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{50}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{50}=i^{50}=i^{4\times12+2}$$
$$=\left(i^4\right)^{12}\times i^2=-1$$

### ملاحظة:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt2}\right)^{100}=\left(\frac{1-i}{\sqrt2}\right)^{100}$$
$$\frac{1+i}{\sqrt2}\neq-\frac{1-i}{\sqrt2}\ \text{و}\ \frac{1+i}{\sqrt2}\neq\frac{1-i}{\sqrt2}$$
$$u^n=v^n \not\Rightarrow u=v\ \text{أو}\ u=-v$$

## II) مرافق عدد عقدي:

### 1) تعريف.

> ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$.
> نسمي مرافق العدد $z$ العدد الذي نرمز له ب $\overline{z}$ المعرف بما يلي:
> $\overline{z}=a-ib$ .

### أمثلة:

*) $z=2-4i \qquad \overline{z}=2+4i$

*) $z=-1-i \qquad \overline{z}=-1+i$

*) $z=2i-4 \qquad \overline{z}=-2i-4$

*) $z=5 \qquad \overline{z}=5$

*) $z=2i \qquad \overline{z}=-2i$

### 2) خاصيات:

1- ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$ .

*) $\overline{z}=a-ib$

$$z=\overline{z}\Leftrightarrow a+ib=a-ib$$
$$\Leftrightarrow 2ib=0\Leftrightarrow 2b=0\Leftrightarrow b=0$$
$$\Leftrightarrow z=a$$
$$\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$$

*) ولدينا:

$$\overline{z}=-z\Leftrightarrow a-ib=-a-ib$$
$$\Leftrightarrow 2a=0$$
$$\Leftrightarrow a=0$$
$$\Leftrightarrow z=ib$$
$$\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}$$

إذن $\boxed{\begin{array}{l} z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\\ z=-\overline{z}\Leftrightarrow z\in i\mathbb{R}\end{array}}$

2) $\boxed{\overline{\overline{z}}=z \quad ; \quad z=z'\Leftrightarrow \overline{z}=\overline{z'}}$

3) ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$

لدينا: $z+z'=(a+a')+i(b+b')$

إذن:

$$\overline{z+z'}=(a+a')-i(b+b')$$
$$=a-ib+a'-ib'$$
$$=\overline{z}+\overline{z'}$$

إذن $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}\\ \text{و: } \overline{z_1+z_2+....+z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+....+\overline{z_n}\end{array}}$

4) ليكن $z=x+iy$ من $\mathbb{C}$ مع $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$

لدينا: $\overline{z}=x-iy$

$$\boxed{\begin{array}{ll} z+\overline{z}=2x & =2R\acute{e}(z)\\ z-\overline{z}=2iy & =2i\,\mathrm{Im}(z)\\ z.\overline{z}=x^2+y^2 & \end{array}}$$

5) ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ من $\mathbb{C}$ مع $a,b,a',b'$ من $\mathbb{R}$ .

لدينا:

$$z.z'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$$

إذن $\overline{zz'}=(aa'-bb')-i(ab'+ba')$

ولدينا:

$$\overline{z}.\overline{z'}=(a-ib)(a'-ib')$$
$$=aa'-ib'a-iba'-bb'$$
$$=(aa'-bb')-i(ab'+ba')$$

إذن: $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$

إذن: $\boxed{\begin{array}{l}\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'\\ \overline{z_1.z_2......z_n}=\bar{z}_1.\bar{z}_2......\bar{z}_n\\ \overline{z^n}=(\bar{z})^n\ (n\in\mathbb{N})\end{array}}$

6) ليكن $z$ و $z'$ من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq 0$

لدينا: $\frac{z}{z'}.z'=z$

إذن: $\overline{\frac{z}{z'}.z'}=\bar{z}$

يعني: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}.\bar{z}'=\bar{z}$

إذن: $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}\\ \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z}'}\end{array}}$$

7) نعتبر الحدودية $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+....+a_1z+a_0$

حيث المعاملات $a_i$ حقيقية. $(a\in\mathbb{R})$.

نفترض أن $\alpha$ حل للمعادلة $p(z)=0$ $(\alpha\in\mathbb{C})$

لنبين أن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z)=0$ يعني $P(\bar{\alpha})=0$

لدينا $\alpha$ حل ل $P(z)=0$ يعني: $P(\alpha)=0$

يعني: $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0=0$

يعني: $\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+...+a_1\alpha+a_0}=\bar{0}$

يعني: $\overline{a_n}\,\overline{\alpha^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}}+...+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\overline{a_0}=0$

ولدينا $a_i\in\mathbb{R}$ إذن $\overline{a_i}=a_i$

ومنه: $a_n\bar{\alpha}^n+a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1}+...+a_1\bar{\alpha}+a_0=0$

يعني: $P(\bar{\alpha})=0$

إذن $\bar{\alpha}$ حل للمعادلة $P(z)=0$ .

**خاصية:**

لتكن $P(z)$ حدودية معاملاتها حقيقية.
إذا كان $\alpha$ حلا للمعادلة $P(z)=0$ فإن $\bar{\alpha}$ حل ل $P(z)=0$ .

**تمارين تطبيقية:**

**تمرين1**

نعتبر العددين:

$u=(a+2i)^n+(a-2i)^n\ ,\ v=(a+2i)^n-(a-2i)^n$

حيث $a\in\mathbb{R}$

* بين أن $u$ حقيقي و $v$ تخيلي صرف:

لدينا: $\bar{u}=\overline{(a+2i)^n+(a-2i)^n}$

$=\overline{(a+2i)^n}+\overline{(a-2i)^n}$

$=\left(\overline{a+2i}\right)^n+\left(\overline{a-2i}\right)^n$

$=(a-2i)^n+(a+2i)^n \quad (a\in\mathbb{R})$

$=u$

$u=\bar{u}$ إذن $u\in\mathbb{R}$

طريقة أخرى:

$u=(a+2i)^n+(a-2i)^n$

$=(a+2i)^n+\left(\overline{a+2i}\right)^n$

$=(a+2i)^n+\overline{(a+2i)^n}=2R\acute{e}\left((a+2i)^n\right)$

إذن $u\in\mathbb{R}$

لدينا: $\bar{v}=\overline{(a+2i)^n-(a-2i)^n}$

$=\left(\overline{a+2i}\right)^n-\left(\overline{a-2i}\right)^n$

$=(a-2i)^n-(a+2i)^n=-v$

$v=-\bar{v}$ إذن $v\in i\mathbb{R}$

طريقة (2):

$v=(a+2i)^n-(a-2i)^n$

$=(a+2i)^n-\left(\overline{a+2i}\right)^n$

$=(a+2i)^n-\overline{(a+2i)^n}=2i\,\mathrm{Im}\left((a+2i)^n\right)$

إذن $v\in i\mathbb{R}$

**تمرين2**

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية

1) $(1+i)z-2iz+1-i=3z-i$

2) $(1+i)z-(2i+1)\bar{z}+1-i=3z-i$

3) $iz\bar{z}-(2i+1)\bar{z}+2-i=1+i$

## III- معيار عدد عقدي: Module d'un complexe

### 1- تعريف:

ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$
نسمي معيار العدد $z$ العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$
و المعرف بما يلي: $|z|=\sqrt{z.\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

**أمثلة:**

*) $z=1-i$ : $|z|=\sqrt{2}$

*) $z=3+4i$ : $|z|=5$

*) $z=-4$ : $|z|=4$

*) $z=3$ : $|z|=3$

*) $z=-5i$ : $|z|=5$

**ملاحظات:**

*) $|z|\in\mathbb{R}^+$ $(\forall z\in\mathbb{C})$

*) إذا كان $z=a\in\mathbb{R}$ قيمة مطلقة $\to$ $|z|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|$ $\to$ معيار .

*) إذا كان: $z=ib$ $(b\in\mathbb{R})$ $|z|=\sqrt{b^2}=|b|$

*) ليكن $z=x+iy$ مع $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$

$|z|^2=z.\bar{z}=x^2+y^2$

*) $|z|^2\neq z^2$ لأن $z^2\in\mathbb{C}$ و $|z|^2\in\mathbb{R}^+$

*) ليكن $z$ و $z'$ من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq 0$

لدينا: $\frac{z}{z'}=\frac{z\bar{z}'}{z'\bar{z}'}=\frac{z\bar{z}'}{|z'|^2}$

**مثال:**

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{|c+id|^2}$$
$$=\frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

## 2) خاصيات:

1- ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$

لدينا $\begin{cases} a^2\le a^2+b^2 \\ b^2\le a^2+b^2 \end{cases}$ إذن $\begin{aligned} |a|\le\sqrt{a^2+b^2} \\ |b|\le\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$

إذن $\begin{aligned} a\le|a|\le\sqrt{a^2+b^2} \\ b\le|b|\le\sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$

**خاصية:**

$$\boxed{\begin{aligned} Ré(z)\le|Ré(z)|\le|z| \\ \operatorname{Im}(z)\le|\operatorname{Im}(z)|\le|z| \end{aligned}}$$

2- ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$

$$|z|=0\Leftrightarrow|z|^2=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2=0\Leftrightarrow a^2=0 \text{ و } b^2=0$$
$$\Leftrightarrow a=0 \text{ و } b=0$$

**خاصية:** $\boxed{(\forall z\in\mathbb{C})\ |z|=0\Leftrightarrow z=0}$

3- ليكن $z$ و $z'$ من $\mathbb{C}$

$$|zz'|^2=zz'.\overline{zz'}=zz'.\bar{z}.\bar{z}'$$
$$=z.\bar{z}.z'.\bar{z}'=|z|^2.|z'|^2$$
$$=(|z|.|z'|)^2$$

إذن: $|zz'|=|z|.|z'|$

**خاصية:**

$$\boxed{\begin{aligned} &|z.z'|=|z|.|z'| \\ &\left|\prod_{i=1}^{n}z_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|z_i| \\ &|z^n|=|z|^n\quad(n\in\mathbb{N}) \end{aligned}}$$

4- ليكن $z$ و $z'$ من $\mathbb{C}$ بحيث $z'\neq0$

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2=\left(\frac{z}{z'}\right)\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$$
$$=\frac{z}{z'}.\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}=\frac{z\bar{z}}{z'\bar{z}'}=\frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

إذن: $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

**خاصية:**

$$\boxed{\begin{aligned} &z \text{ و } z' \text{ من } \mathbb{C} \text{ بحيث } z'\neq0 \\ &\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}\qquad\left|\frac{1}{z'}\right|=\frac{1}{|z'|} \end{aligned}}$$

5- ليكن $z$ و $z'$ من $\mathbb{C}$

لنبين أن $|z+z'|\le|z|+|z'|$

لدينا:

$$|z+z'|^2=(z+z').(\overline{z+z'})$$
$$=(z+z').(\bar{z}+\bar{z}')$$
$$=z\bar{z}+z\bar{z}'+z'\bar{z}+z'\bar{z}'$$
$$=|z|^2+z\bar{z}'+z'\bar{z}+|z'|^2$$

لنبين أن $z\bar{z}'+z'\bar{z}\le2|z||z'|$

لدينا: $z\bar{z}'+z'\bar{z}=z\bar{z}'+\overline{z\bar{z}'}=2Ré(z\bar{z}')$

ونعلم أن: $Ré(z\bar{z}')\le|z\bar{z}'|$

يعني: $2Ré(z\bar{z}')\le2|z\bar{z}'|$

$$z\bar{z}'+z'\bar{z}\le2|z||\bar{z}'|$$
$$|z|^2+|z'|^2+z\bar{z}'+z'\bar{z}\le|z|^2+|z'|^2+2|z||z'|$$

إذن: $|z+z'|^2\le(|z|+|z'|)^2$

**خاصية:** $\boxed{|z+z'|\le|z|+|z'|}$

## تمارين تطبيقية:

**تمرين 1** أحسب معيار العدد $z$ في الحالات التالية :

*) $z=(1-i)^3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{100}$

لدينا:

$$|z|=\left|(1-i)^3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}\right|$$
$$=\left|(1-i)^3\right|\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}\right|$$
$$=|1-3|^3\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{100}$$
$$=\sqrt{3}^2.1^{100}=2\sqrt{2}$$

*) $z=\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\times i}{(3-4i)^2}$

$$|z|=\frac{\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right|\times|i|}{\left|(3-4i)^2\right|}$$
$$=\frac{1^n.1}{25}=\frac{1}{25}$$

**تمرين 2** ليكن $z\in\mathbb{C}-\left\{\frac{-i}{2}\right\}$

ونعتبر العدد $u=\dfrac{z+2i}{2z+i}$

بين أن: $|u|=1\Leftrightarrow|z|=1$

لدينا:

$$|u|=1 \Leftrightarrow |u|^2=1$$
$$\Leftrightarrow u.\overline{u}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i}.\overline{\frac{z+2i}{2z+i}}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{z+2i}{2z+i}.\frac{\overline{z}-2i}{2\overline{z}-i}=1$$
$$\Leftrightarrow (z+2i)(\overline{z}-2i)=(2z+i)(2\overline{z}-i)$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}-2iz+2i\overline{z}-4=4z\overline{z}-2iz+2i\overline{z}+1$$
$$\Leftrightarrow 3z\overline{z}=3$$
$$\Leftrightarrow z\overline{z}=1$$
$$\Leftrightarrow |z|^2=1$$
$$\Leftrightarrow |z|=1$$

## IV- التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

نفترض في كل ما يلي أن المستوى منسوب إلى م.م.م.م $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

### 1- لحق نقطة: affixe d'un point

#### a) تعريف:

*) لكل نقطة $M(a,b)$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق النقطة $M$

ونكتب: $aff(M)=z$

*) لكل $z=a+ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة $z$ في المستوى العقدي. ونكتب $M(z)$.

**أمثلة:**

*) صورة العدد $1+i$ هي $A(1,1)$

*) صورة العدد $1-2i$ هي $B(1,-2)$

*) صورة العدد $2$ هي $C(2,0)$

*) صورة العدد $-2$ هي $D(-2,0)$

*) صورة العدد $2i$ هي $E(0,2)$

*) صورة العدد $-3i$ هي $F(0,-3)$

**ملاحظة:**

المستوى $(P)$ منسوب إلى م $(o,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ يسمى مستوى عقدي.

محور الأفاصيل مكون من صور لأعداد الحقيقية ويسمى محور حقيقي.

محور الأراتيب مكون من صور الأعداد التخيلية صرف ويسمى محور تخيلي.

$$M\in(o,\vec{e}_1) \Leftrightarrow aff(M)\in\mathbb{R}$$
$$M\in(o,\vec{e}_2) \Leftrightarrow aff(M)\in i\mathbb{R}$$

#### b) خاصيات:

1- التطبيق $f:\mathbb{C}\to P$ تقابل.
$$z\to M(z)$$
$$aff(M)=aff(M')\Leftrightarrow M=M'$$

2- لتكن $M(z)$ مع $z=a+ib$

لدينا $\overline{z}=a-ib$ إذن $M'(\overline{z})$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لمحور الأفاصيل.

ولدينا $-z=-a-ib$ إذن $M''(-z)$ هي مماثلة $M(z)$ بالنسبة لأصل المعلم.

$$M'=S_{(o,\vec{e}_1)}(M)\Leftrightarrow aff(M'')=\overline{aff(M)}$$
$$M'=S_0(M)\Leftrightarrow qff(M')=-aff(M)$$

3- لتكن $M$ لحقها $z=a+ib$ $M(a,b)$

لدينا:
$$OM=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$

**خاصية**

لكل $M$ من $P$: $OM=|aff(M)|$

**تمارين تطبيقية:**

1- نعتبر النقطة $A(-3+4i)$. بين أن $A$ تنتمي إلى الدائرة $(\xi)$ التي مركزها $o$ وشعاعها 5.

لدينا:
$$OA=|aff(A)|=|-3+4i|$$
$$=\left|\sqrt{9+16}\right|=5$$

إذن: $A\in(\xi)$

2- نعتبر المجموعة: $E=\{M(z)/2|z|=5\}$

حدد طبيعة $E$ و عناصرها المميزة.

$$M(z)\in E\Leftrightarrow 2|z|=5$$
$$\Leftrightarrow |z|=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow OM=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow M\in\xi\left(0,\frac{5}{2}\right)$$

إذن $E$ هي الدائرة $(\xi)$ التي مركزها $o$ وشعاعها $\frac{5}{2}$.

طريقة $(2)$:

لنحدد معادلة ديكارتية لـ $E$:

نضع $z=x+iy$. إذن:

$$M(z)\in E\Leftrightarrow 2|z|=5$$
$$\Leftrightarrow |z|=\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow |z|^2=\frac{25}{4}$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{25}{4}$$

وهذه معادلة دائرة مركزها $o$ وشعاعها $\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

إذن $E$ على $\xi\left(o,\frac{5}{2}\right)$.

### 2) لحق متجهة:

#### a) تعريف:

لكل متجهة $\vec{u}(a,b)$ العدد $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u})=z$

ولكل $z=a+ib$ المتجهة $\vec{u}(a,b)$ تسمى صورة العدد $z$ في المستوى المتجهي $V_2$. نكتب $\vec{u}(z)$.

## b) خاصيات:

1- $\boxed{\begin{array}{c} \text{التطبيق } f:\mathbb{C}\to V_2 \text{ تقابل.} \\ z\to \vec{u}(z) \\ \vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow aff(\vec{u})=aff(\vec{v}) \\ z=z'\Leftrightarrow \vec{u}(z)=\vec{v}(z') \end{array}}$

2- لتكن $\vec{u}(z)$ و $\vec{v}(z')$

مع $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$

لدينا $\vec{u}(a,b)$ و $\vec{v}(a',b')$ إذن $\vec{u}+\vec{v}(a+a',b+b')$

$aff(\vec{u}+\vec{v})=a+a'+i(b+b')$

إذن: $=a+ib+a'+ib'$

$=z+z'=aff(\vec{u})+aff(\vec{v})$

ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$ : $\alpha\vec{u}(\alpha a,\alpha b)$

$aff(\alpha\vec{u})=\alpha a+\alpha ib=\alpha(a+ib)=\alpha z$

$=\alpha aff(\vec{u})$

**خاصية:**

$\boxed{\begin{array}{l} \text{لتكن } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ من } V_2 \text{ و } \alpha \text{ و } \beta \text{ من } \mathbb{R} \\ \text{لدينا: } aff(\vec{u}+\vec{v})=aff(\vec{u})+aff(\vec{v}) \\ aff(\alpha\vec{u})=\alpha aff(\vec{u}) \\ aff(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})=\alpha aff(\vec{u})+\beta aff(\vec{v}) \end{array}}$

3- لتكن $\vec{u}(z)$ مع $z=a+ib$ $\vec{u}(a,b)$

لدينا: $\|\vec{u}\|=\sqrt{a^2+b^2}=|z|=|aff(\vec{u})|$

لكل $\vec{u}$ من $V_2$ لدينا: $\boxed{\|\vec{u}\|=|aff(\vec{u})|}$

4- لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ مع $M(a,b):z=a+ib$

$M'(a',b'):z'=a'+ib'$

$\overrightarrow{MM'}(a'-a,b'-b)$

$aff(\overrightarrow{MM'})=a'-a+i(b'-b)$

$=a'+ib'-(a+ib)=z'-z=aff(M')-aff(M)$

ولدينا: $MM'=\|\overrightarrow{MM'}\|=|aff(\overrightarrow{MM'})|$

$=|aff(M')-aff(M)|$

**خاصية:**

$\boxed{\begin{array}{l} \text{لكل } M \text{ و } M' \text{ من } P: \\ aff(\overrightarrow{MM'})=aff(M')-aff(M) \\ MM'=|aff(M')-aff(M)| \end{array}}$

**تمارين تطبيقية:**

**تمرين 1** نعتبر النقط $A(i);B(1+2i);C(3+i);D(2)$

بين أن $ABCD$ متوازي أضلاع.

لنبين أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

لدينا:

$aff(\overrightarrow{AB})=aff(B)-aff(A)$

$=1+2i-i=1+i$

$aff(\overrightarrow{DC})=aff(C)-aff(D)$

$=3+i-2=1+i$

إذن $aff(\overrightarrow{AB})=aff(\overrightarrow{DC})$

ومنه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

وبالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

**تمرين 2**

نعتبر النقط $A(1)$ ; $B(j)$ ; $C(\bar{j})$ مع $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن $ABC$ متساوي أضلاع.

لدينا: $AB=|aff(B)-aff(A)|$

$=\left|-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|=\left|-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$=\sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

$AC=|aff(C)-aff(A)|=\left|-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|$

$=\left|-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

$BC=|aff(C)-aff(B)|=\left|-\frac{1}{2}--i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

$=\left|-2i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

إذن: $AB=BC=AC$

ومنه $ABC$ متساوي الأضلاع.

5- ليكن $z_1$ عدد عقدي صورته $A_1$

ليكن $z_2$ عدد عقدي صورته $A_2$

لنحدد صورة $z_1+z_2$.

لدينا:

$z_1+z_2=aff(\overrightarrow{OA_1})+aff(\overrightarrow{OA_2})$

$=aff(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})$

لتكن $A$ النقطة بحيث $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$

( $OA_1AA_2$ متوازي أضلاع )

إذن $z_1+z_2=aff(\overrightarrow{OA})=aff(A)$

**خاصية:**

$\boxed{\text{إذا كان } z_1 \text{ لحق النقطة } A_1 \text{ و } z_2 \text{ لحق } A_2 \text{ فإن: } z_1+z_2 \text{ هو لحق النقطة } A \text{ بحيث } \overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2} \text{ أي } OA_1AA_2 \text{ متوازي أضلاع.}}$

6- ليكن $z$ عدد عقدي صورته $A$ . وليكن $\alpha\in\mathbb{R}$

– لنحدد صورة $\alpha z$.

لدينا $\alpha z=\alpha aff(\overrightarrow{OA})$

$=aff(\alpha\overrightarrow{OA})$

لتكن $A'$ نقطة بحيث $\overrightarrow{OA'}=\alpha\overrightarrow{OA}$

لدينا $\alpha z=aff(\overrightarrow{OA'})=aff(A')$

**خاصية:**

$\boxed{\text{إذا كان } z \text{ لحق النقطة } M \text{ و } \alpha \text{ عدد حقيقي فإن } \alpha z \text{ هو لحق } M' \text{ بحيث } \overrightarrow{OM'}=\alpha\overrightarrow{OM}}$

## c) تطبيقات:

### 1- التأويل الهندسي للتطبيق $(a\in\mathbb{C})\ z\to z+a$

نعتبر التطبيق:

$$f:\ P\to P \qquad M(z)\to M'(z')/z'=z+a$$ مع $a\in\mathbb{C}$

لنحدد طبيعة $f$

لتكن $M(z)$ نقطة من $P$ و $M'(z')$ صورتها.

لدينا: $z'=z+a$

لدينا: $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(M')-aff(M)$
$=z+a-z=a$

لتكن $\vec{u}$ لحقها $a$.

إذن $aff\left(\overrightarrow{MM'}\right)=aff(\vec{u})$

يعني $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

إذن $f$ إزاحة متجهتها $\vec{u}(a)$

**خاصية:**

لتكن $a\in\mathbb{C}$ التطبيق $f:\ P\to P$
$M(z)\to M'(z')/z'=z+a$
إزاحة متجهتها $\vec{u}$ التي لحقها $a$

### 2- لحق منتصف قطعة:

لتكن $I$ منتصف $[AB]$ يعني $I$ مرجح $\{(A,1)(B,1)\}$

لدينا: $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

إذن: $aff(I)=aff\left(\overrightarrow{OI}\right)=aff\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\right)$
$=\frac{1}{2}\left(aff\left(\overrightarrow{OA}\right)+aff\left(\overrightarrow{OB}\right)\right)$

إذن: $aff(I)=\frac{1}{2}\left(aff(A)+aff(B)\right)$

**خاصية:**

إذا كان $I$ منتصف $[AB]$ فإن:
$$aff(I)=\frac{1}{2}\left(aff(A)+aff(B)\right)$$

**ملاحظة:**

إذا كان $G$ مرجح $\{(B,\beta)(A,\alpha)\}$
فإن: $aff(G)=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha aff(A)+\beta aff(B)\right)$

### 3- شرط استقامية ثلاث نقط:

لتكن $A$ و$B$ و$C$ ألحاقها $z_C,z_B,z_A$ بحيث $A\neq B$

( $A$ و$B$ و$C$ مستقيمة ) $\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):\ \overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):aff\left(\overrightarrow{AC}\right)=\alpha aff\left(\overrightarrow{AB}\right)$
$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):z_C-z_A=\alpha(z_B-z_A)$
$\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\mathbb{R}):\alpha=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$
$\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

**خاصية:**

لتكن $A$ و $B$ و $C$ 3 نقط ألحاقها $z_C,z_B,z_A$ بحيث $A\neq B$
تكون النقط $A$ و $B$ و $C$ مستقيمة إذا وفقط إذا كان:
$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}.$$

**تمرين تطبيقي:**

نعتبر النقط $A(i),M(z),M'(iz)$ حيث $z\in\mathbb{C}$
حدد مجموعة النقط M التي تكون من أجلها $A$ و $M$ و $M'$ مستقيمية.

## V- الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

### 1) عمدة عدد عقدي غير منعدم

**تعريف:**

ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ و $M$ صورة العدد $z$.
كل قياس للزاوية الموجهة $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$
يسمى عمدة للعدد $z$.

**ملاحظة:**

إذا كان $\alpha$ قياسا للزاوية $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$ فإن كل عدد على شكل $\alpha+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ هو قياس ل $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM}\right)$.

إذن: إذا كان $\alpha$ عمدة ل $z$ فإن كل عدد على شكل: $\alpha+2k\pi$ هو عمدة ل $z$

نكتب: $\arg(z)=\alpha+2k\pi$ أو $\arg(z)=\alpha[2\pi]$

**أمثلة:**

حدد عمدة لكل من الأعداد: $1+3i;1-i;1+i;-2i;3i;-3;2$
لتكن $G,F,E,D,C,B,A$ صور لهذه الأعداد على التوالي:
لدينا:

$$*\arg(2)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]\equiv0[2\pi]$$
$$*\arg(-3)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]\equiv\pi[2\pi]$$
$$*\arg(3i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OC}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$*\arg(-2i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OD}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$*\arg(1+i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OE}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$$
$$*\arg(1-i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OF}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$$
$$*\arg(1+3i)\equiv\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OG}\right)[2\pi]\equiv\alpha[2\pi]$$

حيث $\tan\alpha=3$.

**ملاحظة:**

(* $z\in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv 0[2\pi]$

(* $z\in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \pi[2\pi]$

(* $z\in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

(* $z\in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z)\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

(* $z\in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \arg(z)\equiv k\pi(k\in\mathbb{Z})$

(* $z\in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \arg(z)\equiv \frac{\pi}{2}+k\pi$

## 2) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

**تعريف:**

ليكن $z\in\mathbb{C}$ . لتكن $\theta$ عمدته و $r$ معياره: $|z|=r$

$\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$

لتكن $M$ صورة $z$.

لدينا $OM=|aff(M)|=|z|=r$

لدينا أحداثيات $M$:

$M(r\cos\theta, r\sin\theta)$

إذن $aff(M)=r\cos\theta+ir\sin\theta$

$aff(M)=z$

إذن $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

**خاصية وتعريف:**

كل عدد عقدي غير منعدم $z$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $|z|=r$ و $\theta\equiv\arg(z)[2\pi]$
و هذه الكتابة تسمى الشكل المثلثي للعدد $z$ . ونكتب $z=[r,\theta]$

**ملاحظة:**

(* $z=0$ ليست له لا عمدة و لا شكل مثلثي.

(* إذا كان $z=[r,\theta]$ و $M$ صورة $z$ فإن $(r,\theta)$ يسمى زوج الأحداثيات القطبية ل $M$.

(* $[r,\theta]=[r',\theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r=r' \\ \theta\equiv\theta'[2\pi] \end{cases}$

يعني: $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z|=|z'| \\ \arg(z)=\arg(z')[2\pi] \end{cases}$

(* ليكن $z=a+ib$ من $\mathbb{C}^*$ للحصول على ش المثلثي ل $z$ نتبع ما يلي

$$z=a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

ولدينا $\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$

إذن يوجد $\alpha$ بحيث: $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

إذن: $z=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

**خاصية:**

الشكل المثلثي ل $z$ من $\mathbb{C}^*$ $z=a+ib$ هو $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$
حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$ و $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

## تمارين تطبيقية

**تمرين1**

حدد الشكل المثلثي للأعداد التالية:

(* $z=5$ لدينا $|z|=5$ و $\arg(z)\equiv 0[2\pi]$

إذن $z=[5,0]$

(* $z=-3$

إذن $\arg(z)\equiv\pi[2\pi], |z|=3$ $\quad z=[3,\pi]$

(* $z=2i$

إذن $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi], |z|=2$ $\quad z=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$

(* $z=-3i$

إذن $\arg(z)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]; |z|=3$ $\quad z=\left[3,-\frac{\pi}{2}\right]$

(* $z=1+i\sqrt{3}$

$|z|=2$

$$\begin{aligned} z&=1+i\sqrt{3} \\ &=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ z&=\left[2,\frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

(* $z=\sqrt{3}-i$ ; $|z|=2$

لدينا:

$$\begin{aligned} z&=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right) \\ &=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &=2\left(\cos-\frac{\pi}{6}+i\sin-\frac{\pi}{6}\right) \\ z&=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right] \end{aligned}$$

(* $z=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$

$$\begin{aligned} z&=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}i\right) \\ &=2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ z&=\left[2\sqrt{2},\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

*) $z=-\sqrt{6}-i\sqrt{2}$ $\quad |z|=2\sqrt{2}$

$$z=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

إذن: $z=\left[2\sqrt{2},\frac{7\pi}{6}\right]$

*) $z=\sin\alpha+i\cos\alpha$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$

لدينا $|z|=1$

$$z=\sin\alpha+i\cos\alpha$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$z=\left[1,\frac{\pi}{2}-\alpha\right]$$

*) $z=-\sin\alpha-i\cos\alpha$ لدينا $|z|=1$

$$z=-\sin\alpha-i\cos\alpha$$
$$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$
$$=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$$

إذن: $z=\left[1,\frac{3\pi}{2}-\alpha\right]$

*) $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ مع $\alpha\in\mathbb{R},a\in\mathbb{R}^*$

لدينا $|z|=|a|$

إذا كان $a\rangle 0$ فإن $|z|=a$

ولدينا $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

إذن $z=[a,\alpha]$

إذا كان $a\langle 0$ فإن $|z|=-a$

$$z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=-a(-\cos\alpha-i\sin\alpha)$$
$$=-a(\cos(\pi+\alpha)+i\sin(\pi+\alpha))$$

إذن: $z=[-a,\pi+\alpha]$

**ملاحظة:**

إذا كان: $z=a(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ مع $a\rangle 0$ فإن $z=[a,\alpha]$

**تمرين 2**

$z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ مع $\alpha\in[0,2\pi]$

حدد معيار وعمدة $z$

$$z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

لدينا $|z|=\left|2\cos\frac{\alpha}{2}\right|$

– لندرس إشارة $\cos\frac{\alpha}{2}$ في $[0,2\pi]$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\pi}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$
$$\Leftrightarrow\alpha=\pi+2k\pi$$

ولدينا $\alpha\in[0,2\pi]$ إذن: $\alpha=\pi$.

– إذا كان $\alpha\in[0,\pi[$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}\rangle 0$ إذن $|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$

إذن $z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$

ومنه $z=\left[2\cos\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right]$

$|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$ و $\arg(\ )\equiv\frac{\alpha}{2}[2\pi]$

– إذا كان $\alpha\in]\pi,2\pi]$ فإن $\cos\frac{\alpha}{2}\langle 0$ إذن $|z|=-2\cos\frac{\alpha}{2}$

$$z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}-i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=-2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
$$z=\left[-2\cos\frac{\alpha}{2},\pi+\frac{\alpha}{2}\right]$$

إذن $\arg(z)\equiv\left(\pi+\frac{\alpha}{2}\right)[2\pi]$ و $|z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$

– إذا كان $\alpha=\pi$ فإن $|z|=0$ يعني $z=0$

إذن $z$ ليس له عمدة.

## 3) عمدة العدد $\bar{z}$ و $z$

ليكن $z=[r,\theta]$

* لدينا: $\bar{z}=\overline{[r,\theta]}=\overline{r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$$=r(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$$

إذن $\bar{z}[r,-\theta]$

$$\arg(\bar{z})=-\theta[2\pi]$$
$$=-ar(z)[2\pi]$$

* ولدينا: $-z=-r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=r(-\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=r(\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta))$$
$$-z=[r,\pi+\theta]$$
$$\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]$$

**خاصية:**

*) $\arg(\bar{z})=-\arg(z)[2\pi]\ ;\ \overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$

*) $\arg(-z)=\arg(z)+\pi[2\pi]\ ;\ -[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$

## 4) العمدة و العمليات في $\mathbb{C}$

### a) الجداء:

ليكن $z=[r,\theta]$ و $z'=[r',\theta']$

$$zz'=r(\cos\theta+i\sin\theta)r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$$
$$=rr'\left[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')\right]$$
$$=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$$

إذن $zz'=[rr',\theta+\theta']$

$$\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$$

**خاصية:**

*) $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$

*) $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

**ملاحظة:**

*) $\prod_{i=1}^{n}[r_i,\theta_i]=\left[\prod_{i=1}^{n}r_i,\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right]$

*) $\arg\left(\prod_{i=1}^{n}z_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\arg(z_i)[2\pi]$

*) $(n\in\mathbb{N})\ [r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$

*) $(n\in IN)\quad \arg(z^n)=n\arg(z)\ [2\pi]$

### b) المقلوب:

ليكن $z=[r,\theta]$

$$\frac{1}{[r,\theta]}=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{r}\left(\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{1}\right)$$
$$=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]=\frac{1}{z}$$
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$$

**خاصية:**

*) $\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$

*) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg(z)[2\pi]$

**ملاحظة:** $(n\in\mathbb{N})$

$$[r,\theta]^{-n}=\frac{1}{[r,\theta]^n}=\frac{1}{[r^n,n\theta]}=\left[\frac{1}{r^n},-n\theta\right]$$

إذن $[r,\theta]^{-n}=[r^{-n},-n\theta]$

$$\arg(z^{-n})\equiv-n\arg(z)[2\pi]$$

إذن:

$(\forall n\in\mathbb{Z})\ [r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$

$\arg(z^n)\equiv n\arg(z)[2\pi]$

### c) الخارج:

$$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=[r,\theta]\times\frac{1}{[r',\theta']}$$
$$=[r,\theta].\left[\frac{1}{r'},-\theta'\right]=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg\left(z\times\frac{1}{z'}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg(z)+\arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$$

**خاصية:**

$\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$

### تمارين تطبيقية:

#### تمرين1

حدد الشكل المثلثي ل $z$ في الحالات التالية:

$$z=2i\frac{(1-i)^4(\sqrt{3}+i)}{5(\sqrt{3}-3i)^2}$$

لدينا:

$$*\ 2i=\left[2,\frac{\pi}{2}\right]$$
$$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos-\frac{\pi}{4}+i\sin-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$*\ 1-i=\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]$$
$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$*\ \sqrt{3}+i=\left[2,\frac{\pi}{6}\right]$$
$$*\ 5=[5,0]$$
$$*\ \sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos-\frac{\pi}{3}+i\sin-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sqrt{3}-3i=\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن:

$$z=\frac{\left[2,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]^n\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]}{[5,0]\times\left[2\sqrt{3},-\frac{\pi}{3}\right]^2}=\frac{\left[2,\frac{\pi}{2}\right]\times[4,-\pi]\times\left[2,\frac{\pi}{6}\right]}{[5,0]\times\left[12,-2\frac{\pi}{3}\right]}$$
$$=\frac{\left[16,-\frac{\pi}{3}\right]}{\left[60,-2\frac{\pi}{3}\right]}=\left[\frac{16}{60},\frac{\pi}{3}\right]$$

#### تمرين2

ليكن $z_1=1+i\sqrt{3}$ ، $z_2=1+i$ ، $z=\frac{z_1}{z_2}$

– حدد الشكل المثلثي لكل من $z_1$ و $z_2$

– استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

لدينا $z_1 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \left[2,\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$$

*) لدينا: $z = \left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \quad (1)$$

ولدينا $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2}$

$$= \frac{1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = z \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

أي $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

**ملاحظة:** $[r,\alpha] = [r,\alpha+2k\pi]$

**تمرين**

نعتبر العدد $z = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) أحسب $z^{2000}$

2) حدد قيم العدد النسبي $n$ التي يكون من أجلها $z^n \in IR$

3) حدد حسب قيم العدد الطبيعي $n$ $z^n$ .

## 5) زاوية متجهتين:

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين لحقاهما على التوالي $z_{\vec{u}}$ و $z_{\vec{v}}$

لتكن $A$ و $B$ النقطتين بحيث $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$

$$aff(A) = aff\left(\overrightarrow{OA}\right) = aff(\vec{u}) = z_{\vec{u}}$$

$$aff(B) = aff\left(\overrightarrow{OB}\right) = aff(\vec{v}) = z_{\vec{v}}$$

لدينا:

$$\left(\vec{u},\vec{v}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \left(\overrightarrow{OA},\vec{e}_1\right)+\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OB}\right)-\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(aff(B)\right)-\arg\left(aff(A)\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(z_{\vec{v}}\right)-\arg\left(z_{\vec{u}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv \arg\left(aff(\vec{v})\right)-\arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]$$

**خاصية:**

$$\boxed{\left(\vec{u},\vec{v}\right) \equiv \arg\left(aff(\vec{v})\right)-\arg\left(aff(\vec{u})\right)[2\pi]}$$

**حالات خاصية:**

*) $\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(aff\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)-\arg(1)[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(aff(B)-aff(A)\right)$$
$$\equiv \arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]$$

$$\boxed{\left(\vec{e}_1,\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]}$$

*) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(aff\left(\overrightarrow{CD}\right)\right)-\arg\left(aff\left(\overrightarrow{AB}\right)\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(z_D-z_C\right)-\arg\left(z_B-z_A\right)[2\pi]$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)[2\pi]}$$

**تمارين تطبيقية:**

**تمرين 1**

نعتبر النقط $A(i), B(z_1), C(z_2)$ حيث $z_1$ و $z_2$ من $\mathbb{C}$ يحققان: $z_2 = iz_1+i+1$ .

بين أن المثلث $ABC$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين في $A$ .

لدينا: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$

ولدينا:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A} = \frac{iz_1+i+1-i}{z_1-i}$$
$$= \frac{iz_1+1}{z_1-i}$$
$$= \frac{i(z_1-i)}{z_1-i} = i = \left[1,\frac{\pi}{2}\right]$$

ومنه:

$$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

وبالتالي: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

إذن $ABC$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين في $A$ .

**تمرين 2**

حدد وانشئ المجموعة

$$E = \left\{M(z) \;/\; \arg(z-i)^2 \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$$

## 6) صيغة موافر وتطبيقاتها:

ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}$ $\quad [1,\theta]^n=[1,n\theta]$

يعني: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$

**خاصية:**

$$\boxed{\begin{array}{c}(\forall\theta\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{Z})\\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\end{array}}$$

**تطبيقات:**

حساب $\cos(nx)$ و $\sin(nx)$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

– لدينا: $(\cos nx+i\sin nx)=(\cos x+i\sin x)^n$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x)^k.(i\sin x)^{n-k}$$

ومنه:

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos(nx)=R\acute{e}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x)^k.(i\sin x)^{n-k}\right]\\ \sin(nx)=\mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\cos x)^k.(i\sin x)^{n-k}\right]\end{array}}$$

**مثال:**

احسب $\cos 5x$ و $\sin 5x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$

$$\begin{aligned}\cos 5x+i\sin 5x&=(\cos x+i\sin)^5\\ &=\cos^5 x+5\cos^4(i\sin x)+10\cos^3 x(i\sin x)^2\\ &\quad+10\cos^2 x(i\sin x)^3+5\cos(i\sin x)^4+(i\sin x)^5\\ &=\cos^5 x+5\cos^4 x(i\sin x)-10\cos^3 x\sin^2 x\\ &\quad-10i\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+i\sin^5 x\\ &=(\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x)\\ &\quad+i(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x)\end{aligned}$$

ومنه:

$$\cos 5x=(\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x)$$

$$\sin 5x=(5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x)$$

## 7) الترميز الأسي لعدد عقدي:

### a) الترميز:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{نرمز للعدد } [1,\theta] \text{ بالرمز: } e^{i\theta}\\ e^{i\theta}=[1,\theta]=\cos\theta+i\sin\theta\end{array}}$$

**ملاحظة:**

$$[r,\theta]=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

$$\boxed{[r,\theta]=re^{i\theta}}$$

**أمثلة:**

*) $e^{i\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

*) $e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

*) $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

*) $\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

### b) خاصيات:

$$\boxed{\begin{array}{ll}(* & e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}\\ (* & \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}\\ (* & \dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}\\ (* & (\forall n\in\mathbb{Z})\ (e^{i\theta})^n=e^{in\theta}\\ (* & \left(\overline{e^{i\theta}}\right)=e^{-i\theta}\\ (* & -e^{i\theta}=e^{i\pi}.e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}\end{array}}$$

## 8) صيغتا أولير Euler:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\quad (1)\ e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)$$

$$(2)\ e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

من $(1)+(2)$ نستنتج أن:

$$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$$

إذن $\quad \cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$

ومن $(1)-(2)$ نستنتج أن:

$$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$$

إذن $\quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

**خاصية:**

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\end{array}}$$

**ملاحظة:**

$$\boxed{\begin{array}{l}e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x\\ e^{ix}-e^{-ix}=2i\sin x\end{array}}$$

**تطبيق:** اخطاط حدودية مثلثية:

يعني كتابتها بدلالة $\cos x$ و $\sin x$.

**تمرين:**

اخطط الحدودية: $\quad P(x)=\cos^3 x\sin^3 x$

نعلم أن $\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}+e^{-ix})\end{cases}$

إذن:

$$P(x)=\frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{3}\times\left(\frac{-1}{4}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{2}\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{2}$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)^{2}$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{4ix}+e^{-4ix}-2\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left(e^{i5x}+e^{-3ix}-2e^{ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}+-2e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{-1}{32}\left[\left(e^{i5x}+e^{-i5x}\right)+\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)-2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right]$$
$$=\frac{-1}{32}\left(2\cos(5x)+2\cos(3x)-4\cos(x)\right)$$

إذن
$$P(x)=\frac{-1}{16}\left(\cos(5x)+\cos(3x)-2\cos(x)\right)$$

**ملاحظة:** طريقة البحث عن الشكل المثلثي لمجموع عددين لعقديين لهما نفس المعيار:

**طريق1**

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta}=(\cos\alpha+\cos\beta)+i\,(\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})+i\,2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$=2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\left[\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})+i\,\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=(\cos\alpha-\cos\beta)+i\,(\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$=-2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})+i\,2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$
$$=2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\left[-\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})+i\,\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\right]$$

**طريقة2**

$$*)\ e^{i\alpha}+e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\times 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$*)\ e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)$$
$$=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\times 2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.e^{i\left(\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)}$$
$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta+\pi}{2}\right)$$

## VI- الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم:

### 1) تعريف:

ليكن $z$ من $\mathbb{C}$ و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
نسمي الجذر النوني أو الجذر من الرتبة $n$ للعدد $z$ كل عدد عقدي $z$ يحقق $z^n=Z$

**أمثلة:**

*) $i^2=-1$ , $(i)^2=1$
كل من $i$ و $-i$ جذر من الرتبة 2 للعدد $-1$.

*) $(-i)^4=1$ , $i^4=1$ , $(-1)^4=1$ , $1^4=1$
الأعداد $-i,i,-1,1$ جذور من الرتبة 4 للعدد 1.

### 2) تحديد الجذور من الرتبة $n$.

ليكن: $z=re^{i\theta}$ مع $r\rangle 0$
نضع $z=ee^{iq}$ مع $q\rangle 0$
لدينا: $z^n=Z \Leftrightarrow e^n e^{in\ell}=re^{i\theta}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}e^n=r\\ n\ell\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}e=\sqrt[n]{r}\\ \ell\equiv\frac{\theta}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ell=\sqrt[n]{r}\\ \ell=\frac{\theta}{n}+\frac{2k}{n}(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\ell=\sqrt[n]{r}\\ \ell\equiv\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}[2\pi]/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z=\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}$$

إذن هناك $n$ جذر نوني.

**خاصية:**

ليكن $Z=re^{i\theta}$ (مع $r\rangle 0$) و $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
العدد $Z$ يقبل $n$ جذر نوني. وهذه الجذور النونية هي الأعداد:
$$z_k=\sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}/k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}$$

**مثال:**

لنحدد الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$
- لنحدد الشكل المثلثي ل $Z$

لدينا:
$$Z=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$
$$=2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

إذن:
$$Z=2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

إذن الجذور من الرتبة 3 ل $Z$ هي الأعداد:

$$z_k = \sqrt[3]{2}.e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)} \quad k\in\{0,1,2\}$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{3\pi}{12}}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{21\pi}{12}} = \sqrt[3]{2}.e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

## 3) صور الجذور النونية:

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $\quad (r\rangle 0)$

الجذور النونية ل $Z$ هي الأعداد

$$z_k = \sqrt[n]{r}.e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \;/\; k\in\{0,1,2,...,(n-1)\}$$

لتكن $M_0, M_1, ..., M_{n-1}$ صور $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ على التوالي

$$OM_k = |aff(M_k)| = |z_k| = \sqrt[n]{r}$$

إذن النقط $M_k$ تنتمي إلى الدائرة $\zeta$ التي مركزها $o$ وشعاعها $\sqrt[n]{r}$

ولدينا:

$$\left(\overline{OM}_k, \overline{OM}_{k+1}\right) \equiv \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\theta}{n}+\frac{2(k+1)\pi}{n}-\frac{\theta}{n}-\frac{2k\pi}{n}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{2\pi}{n}[2\pi]$$

إذن الزاوية $\left(\overline{OM}_k, \overline{OM}_{k+1}\right)$ ثابتة.

إذن النقط $M_k$ تكون مضلعا منتظما.

**خاصية:**

> ليكن $Z = re^{i\theta}$ $\quad (r\rangle 0)$
> صور الجذور النونية للعدد $Z$ تكون مضلعا منتظما ذو $n$ ضلع محاط بالدائرة التي مركزها $o$ وشعاعها $\sqrt[n]{r}$.

## 4) الجذور من الرتبة $n$ للوحدة: unité

### a) تحديد الجذور من الرتبة $n$ للوحدة

ليكن $z=1$

لدينا $z = e^{io}$

إذن الجذور من الرتبة $n$ ل $1$ هي الأعداد:

$$w_k = \sqrt[n]{1}\, e^{i\left(\frac{o}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k\in\{0,1,...,(n-1)\}$$

**خاصية:**

> الجذور من الرتبة $n$ للعدد $1$ ( للوحدة ) هي الأعداد:
> $$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k\in\{0,1,...,(n-1)\}$$

**أمثلة:**

1) الجذور المربعة للعدد $1$ هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{2}} = e^{ik\pi} \;/\; k\in\{0,1\}$$

هذان الجذران هما:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\pi} = -1$$

2) الجذور من الرتبة $3$ للوحدة هي الأعداد:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}} \;/\; k\in\{0,1,2\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$w_1 = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = j \qquad j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن

> الجذور المكعبة ل $1$ هي $1, j, \bar{j}$

**ملاحظة:**

*) $j^3 = 1$ ; $j^2 = \bar{j}$

*) $1+j+\bar{j} = 0$ إذن $1+j+j^2 = 0$

*) $j^2 = -1-j$

3) الجذور من الرتبة $4$ ل $1$:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}} = e^{i\frac{k\pi}{2}} \;/\; k\in\{0,1,2,3\}$$

هذه الجذور هي:

$$w_0 = e^{io} = 1$$

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$w_2 = e^{i\pi} = -1$$

$$w_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i-\frac{\pi}{2}} = -i$$

إذن

> الجذور من الرتبة $4$ ل $1$ هي: $1,-1,i,-i$

### b) خاصيات:

1- لتكن $w_k$ الجذور من الرتبة $n$ ل $1$:

$$w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

لدينا:

$$= \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = w_1^k$$

**خاصية**

> لتكن $w_k$ الجذور النونية لـ $1$:
> $\forall k\in\{0,1,...,(n-1)\}$ $w_k = w_1^k$ مع $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$
> إذن الجذور من الرتبة $n$ لـ $1$ هي: $1, w_1, w_1^2, w_1^3, ..., w_1^{n-1}$

2– لتكن $w_k$ الجذور النونية ل 1:

$$w_0+w_1+w_2+...+w_{n-1}=1+w_1+w_1^2+...+w_1^{n-1}$$
$$=\frac{(1-w_1)\left(1+w_1+w_1^2+...+w_1^{n-1}\right)}{(1-w_1)}$$
$$=\frac{1-w_1^n}{1-w_1}=\frac{1-1}{1-w_1}=0$$

( $w_1^n=1$ ، $w_1$ جذر نوني ل 1.)

**خاصية**

مجموع الجذور النونية للعدد 1 منعدم.

**ملاحظة:**

*) إذا كان $w$ جذر نوني للعدد 1 فإن كل من $\bar{w}$ و $\frac{1}{w}$ جذر نوني للعدد 1.

*) إذا كان $w$ و $w'$ جذرين نونيين للعدد 1 فإن كل من $ww'$ و $\frac{w}{w'}$ جذر نوني للعدد 1.

### c) العلاقة بين الجذور النونية ل 1 والجذور النونية لعدد من $\mathbb{C}^*$

ليكن $Z$ من $\mathbb{C}^*$

نفترض أن $a\neq 0$ جذر نوني ل $Z$ $\left(a^n=Z\right)$

– لتحديد الجذور الأخرى:

$$z^n=Z\Leftrightarrow z^n=a^n$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^n=1$$

هذا يعني أن $\frac{z}{a}$ جذر نوني ل 1

يعني: $\frac{z}{a}=w_k\ /\ k\in\{0,1,...,(n-1)\}$

يعني: $z=aw_k\ /\ k\in\{0,1,...,(n-1)\}$

**خاصية:**

ليكن $Z$ من $\mathbb{C}^*$ و $a$ جذر نوني ل $Z$
نحصل على الجذور النونية ل $Z$ بضرب $a$ في الجذور النونية للوحدة 1.

**مثال:**

أحسب $(1+2i)^3$ واستنتج الجذور من الرتبة 3 للعدد $Z=-1+2i$

لدينا:

$$(1+2i)^3=(1+2i)^2(1+2i)$$
$$=(1+4i-4)(1+2i)=1+2i+4i-8-4-8i$$
$$=-11-2i$$

– لدينا $(1+2i)^3=Z$

إذن $1+2i$ جذر من الرتبة 3 ل $Z$

ونعلم أن الجذور من الرتبة 3 ل 1 هي: $1, j, \bar{j}$

– إذن الجذور من الرتبة 3 ل $Z$ هي:

$$z_0=1(1+2i)=1+2i$$
$$z_1=j(1+2i)=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i)$$
$$z_2=\bar{j}(1+2i)$$

## 5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

### a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z=re^{i\theta}$ $(r>0)$

لنحدد الجذرين المربعين ل $Z$.

$$z^2=Z\Leftrightarrow z^2=re^{i\theta}$$
$$\Leftrightarrow z^2=\left(\sqrt{r}\right)^2\left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases} z=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\\ z=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}\end{cases}$$

إذن الجذران المربعان ل $Z$ هما: $\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$

### b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $Z=a\in\mathbb{R}_+^*$

لدينا: $Z=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$

إذن $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ هما الجذران المربعان للعدد $Z$:

2) إذا كان $Z=-a\left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=-a=i^2\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(i\sqrt{a}\right)^2$$

إذن جذرا $Z$ هما: $i\sqrt{a}$ و $-i\sqrt{a}$

3– إذا كان $Z=ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=ib=2i.\frac{b}{2}=(1+i)^2\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$
$$=\left((1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا $Z$ هما $z=(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

4) إذا كان $Z=-ib\left(b\in\mathbb{R}_+^*\right)$

$$Z=-ib=-2i.\frac{b}{2}=\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2(1-i)^2$$
$$=\left((1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

إذن جذرا $Z$ هما $z=(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-z$

## 5) إذا كان $\boxed{Z = a+ib}$ مع $(a \neq 0$ و $b \neq 0)$

**مثال:**

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z = -3+4i$$

نضع $z = x+iy$ ( مع $x$ و $y$ من $\mathbb{R}$ )

$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ و $|z|^2 = x^2+y^2$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2+y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

من $(1)+(3)$ نستنتج أن $2x^2 = 2$ يعني $x=1$ أو $x=-1$

ومن $(3)-(1)$ نستنتج أن $2y^2 = 8$

يعني $y^2 = 4$

أي $y = 2$ أو $y=-2$

ومن خلال $(2)$ لدينا $xy = 2 \rangle 0$ إذن $x$ و $y$ لهما نفس الإشارة

إذن $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$

إذن جذرا $Z$ هما:

$z = 1+2i$ و $-z$

## VII) المعادلات من الدرجة II:

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a \neq 0$

لدينا: $(E): az^2+bz+c=0$

$$\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

نضع $\Delta = b^2-4ac$

$$(E) \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

*) إذا كان $\Delta = 0$ فإن:

$$(E) \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

إذن: $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

*) إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $\Delta$ يقبل جذرين مربعين $u$ و $-u$

إذن:

$$(E) \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{u^2}{4a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}+\frac{u}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{u}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-b-u}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b+u}{2a}$$

**خاصية:**

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a \neq 0$

نضع $\Delta = b^2-4ac$

1- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z = -\frac{b}{2a}$.

2- إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن $\Delta$ يقبل جذرين مربعين $u$ و $-u$

يكون للمعادلة حلان: $z = \frac{-b+u}{2a}$ و $z = \frac{-b-u}{2a}$.

**ملاحظات:**

*) نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a \neq 0$

إذا كان $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases} z_1+z_2 = \frac{-b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

*) نعتبر المعادلة $az^2+2b'z+c=0$ مع $a \neq 0$

من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

1- إذا كان $\boxed{\Delta' = 0}$ المعادلة لها حل وحيد $z = -\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\boxed{\Delta' \neq 0}$ المعادلة لها حلان:

$z_1 = \frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b'-u}{2a}$. حيث $u$ جذر مربع $\Delta'$.

**تمرين تطبيقي:**

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

1) $z^2+z+1=0$

$$\Delta = 1-4 = -3 = i^2 3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$$

إذن جذرا $\Delta$ هما $u = i\sqrt{3}$ و $-u$

إذن:

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j$$

$$z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$$

إذن: $S = \{j, \overline{j}\}$

2) $(2+i)z^2 - (3+2i)z + 1 - \frac{i}{2} = 0$

$$\Delta = (3+2i) - 4(2+i)\left(1-\frac{i}{2}\right)$$

$$= -5+12i$$

$$= 2^2 + (3i)^2 + 2.2.3i$$

$$= (2+3i)^2$$

إذن جذرا $\Delta$ هما $u = 2+3i$ و $-u$

إذن:

$$z_1 = \frac{(3+2i)-(2+3i)}{2(2+i)} \quad ; \quad z_2 = \frac{(3+2i)+(2+3i)}{2(2+i)}$$

$$= \frac{1-i}{2(2+i)} = \frac{(1-i)(2-i)}{10} \quad ; \quad = \frac{5+5i}{2(2+i)} = \frac{(5+5i)(2-i)}{10}$$

$$z_1 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i \quad ; \quad z_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

إذن: $S = \{z_1, z_2\}$

## VIII) الدوران في المستوى:

### 1) التمثيل العقدي للدوران:

ليكن $R$ دوران مركزه $\Omega(g)$ وزاويته $\theta$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $M \neq \Omega$

$$R(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M=\Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z-w|=|z'-w'| \\ \arg\left(\dfrac{z'-w}{z-w}\right)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|z-w|}{|z'-w'|}=1 \\ \arg(\quad)\equiv\theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'-w}{z-w}=e^{i\theta}$$

$$\Leftrightarrow z'-w=e^{i\theta}(z-w)$$

$$\Leftrightarrow z'=e^{i\theta}(z-w)+w$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تبقى صحيحة كذلك بالنسبة ل $\Omega$.

**خاصية:**

> ليكن $R$ دوران مركزه $\Omega(w)$ وزاويته $\theta$
> لكل $M(z)$ و $M'(z')$ من $P$ لدينا:
> $R(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\theta}(z-w)+w$
> الكتابة $z'=e^{i\theta}(z-w)+w$ تسمى التمثيل العقدي ل $R$.

**مثال:**

ليكن $R$ دوران مركزه $\Omega(1+i)$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$

لنحدد صورة $R(1-i)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$. نعلم أن:

$$R(M)=M' \Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z+(1+i)\left(1-e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z'=iz+(1+i)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow z'=iz+2$$

لتكن $A'(z')$ صورة $A(1-i)$

لدينا:

$$\begin{aligned} z'&=i(1-i)+2 \\ &=i+3 \end{aligned}$$

إذن $A'(3+i)$

### 2) التأويل الهندسي للتطبيق $z - az - b$ $(a\neq1\,;\,|a|=1)$

نعتبر التطبيق $f: \quad P \to P$

$$M(z)\to M'(z')/\,z'=az+b$$

(مع $a$ و $b$ من $\mathbb{C}$ و $|a|=1$ و $a\neq1$)

لنبين أن $f$ دوران:

* لنبحث عن النقطة الصامدة:

لتكن $M(z)$:

$$f(M)=M \Leftrightarrow z=az+b$$
$$\Leftrightarrow z(1-a)=b$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{b}{(1-a)}$$

إذن $f$ يقبل نقطة صامدة وحيدة هي $\Omega(w)$ مع $w=\dfrac{b}{1-a}$

* لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ من $P$ بحيث $M\neq\Omega$

$$f(M)=M' \Leftrightarrow z'=az+b$$

ولدينا $\Omega(w)$ صامدة إذن $w=aw+b$

يعني $b=w-aw$

إذن $f(M)=M' \Leftrightarrow z'=az+w-aw$

$$\Leftrightarrow z'-w=a(z-w)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w|=|a(z-w)| \\ \arg(z'-w)\equiv\arg(a(z-w))[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w|=|a||z-w| \\ \arg(z'-w)\equiv\arg(a)+\arg(z-w)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z'-w|=|z-w| \\ \arg(z'-w)-\arg(z-w)\equiv\arg(a)[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M \\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\arg(a)[2\pi] \end{cases}$$

إذن $f$ دوران مركزه $\Omega$ وزاويته $\arg(a)$.

**خاصية:**

> ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{C}$ بحيث $a\neq1$ و $|a|=1$
> التطبيق: $f: \quad P\to P$
> $M(z)\to M'(z')/\,z'=az+b$
> دوران مركزه $\Omega(w)$ بحيث $w=\dfrac{b}{1-a}$ وزاويته $\arg(a)$

**تمرين تطبيقي:**

نعتبر التطبيق $f: \quad P\to P$

$$M(z)\to M'(z')/\,z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+1$$

حدد طبيعة التطبيق $f$.

* لدينا:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\neq1 \\ \left|\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=1 \end{cases}$$

إذن $f$ دوران مركز $\Omega(w)$ بحيث:

$w=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ أي: $w=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$$w=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وزاويته $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$$

إذن $\arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

وبالتالي $f$ دوران مركزه $\Omega\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$ .