ثانوية ابن خلدون التأهيلية
عين بني مطهر

مذكرة رقم : 2
الأستاذ : عثماني نجيب

المادة: الرياضيات

ملخص لدرس نهاية متتالية

مستوى:السنة الثانية من سلك البكالوريا

- **شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية**
- **شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية**

محتوى الدرس	القدرات المنتظرة	المكتسبات السابقة	الامتدادات
❖ **نهايةالمتتاليات المرجعية :** (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) $p \geq 3$ و $p \in \mathbb{N}$ ❖ **نهايةالمتتاليات المرجعية :** $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p \geq 3$ و $p \in \mathbb{N}$ ❖ **نهاية متتالية هندسية:** (a^n) حيث $a \in \mathbb{R}$	استعمال نهاية المتتاليات المرجعية لتحديد نهاية متتالية	○ نهايات الدوال العددية ○ المتتاليات الهندسية و المتتاليات الحسابية ○ المتتاليات من صنف $U_{n+1} = aU_n + b$	دراسة وضعيات متقطعة من مجالات مختلفة

I. متتاليات مرجعية نهايتها $+\infty$

تمرين1

]حسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to +\infty} x \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} 9x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{8}x^4 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} 3x^6 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} 7\sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -x \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} -x^2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} -x^3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} -4x^7 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} -6\sqrt{x}$$

ولكون المتتالية العددية هي نوع من الدوال العددية معرفة على $\mathbb{N}$ أو جزء من $\mathbb{N}$ فإننا نحصل على نتائج مشابهة :

1. خاصية :

المتتاليات المرجعية : (n) و (n^2) و (n^3) و $(\sqrt{n})$ و (n^p) حيث $p \in \mathbb{N}$ و $p \geq 4$ تؤول الى $+\infty$ عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} n^p=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$

2. خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية مرجعية نهايتها $+\infty$ فان المتتالية $(-u_n)$ تؤول الى $-\infty$

II. متتاليات مرجعية نهايتها 0

خاصية

المتتاليات المرجعية : $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ و $\left(\frac{1}{n^p}\right)$ و $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ حيث $p\in\mathbb{N}$ و $p\geq 4$ تؤول الى 0 عندما تؤول n الى $+\infty$

ونكتب : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^p}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

تمرين

]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n^3}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-6}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

III. متتاليات نهايتها عدد

مثال :

]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+3$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{-4}{n^3}-7$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{n}}+5$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^7}$

$\lim_{n\to+\infty}-3n^5$ و $\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{2}n^6$ و $\lim_{n\to+\infty}2n^9$

ملاحظات :

- كل متتالية تكون نهايتها عددا حقيقيا تسمى متتالية متقاربة
- كل متتالية غير متقاربة تسمى متتالية متباعدة

IV. نهاية المتتالية $\left(a^n\right)$

خاصية: ليكن a عددا حقيقيا

1. إذا كان : $a\succ 1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى $+\infty$
2. إذا كان : $a=1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 1
3. إذا كان : $-1\prec a\prec 1$ فان : $\left(a^n\right)$ تؤول إلى 0
4. إذا كان : $a\leq -1$ فان : المتتالية $\left(a^n\right)$ ليست لها نهاية

أمثلة :]حسب النهايات التالية :

$\lim_{n\to+\infty} 2^n$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\lim_{n\to+\infty}(-5)^n$

تمرين : أحسب النهايات التالية : $\lim_{n\to+\infty}(0,7)^n$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n$, $\lim_{n\to+\infty}(3)^n-\frac{1}{2^n}$,

$\lim_{n\to+\infty}(-2)^n$, $\lim_{n\to+\infty}(4)^{-n}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(5)^n}{(4)^n}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(3)^n+(2)^n}{(2)^n}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{5}{n^2}-1$, $\lim_{n\to+\infty} n^2-n$, $\lim_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

V. العمليات على النهايات

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين و l و l' و α أعدادا حقيقية

العمليات على المتتاليات العددية هي نفسها على الدوال العددية

1. الجمع و الضرب:

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$l+l'$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	∞
$\lim v_n$	l'	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$l\succ 0$	$l\prec 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim(u_n\times v_n)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

2. المقلوب:

$\lim u_n$	$l\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

3. الخارج:

$\lim u_n$	l	$l \succ 0$	$l \prec 0$	$l \succ 0$	$-\infty$	$l \prec 0$	l	∞	0
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$l \prec 0$	$-\infty$	∞	∞	0
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	0^+	0^-	0^-	$+\infty$	0^+	0	شكل غير محدد	شكل غير محدد

مثال : أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-2n$

تمرين : أحسب النهايات التالية : , $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n^2}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^3-5n^2+3n-1$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} 6n^3-2n^5+7n-9$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{9n-3}{3n+5}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2-9}{3n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n^5+3n-4}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^2-(n-1)^2$

ملاحظة :

- نهاية متتالية حدودية هي نهاية حدها الأكبر درجة
- نهاية متتالية جذرية هي خارج نهاية حديها الأكبر درجة.

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{2} \\ u_0=3 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=u_n+1$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1}=3u_n+\frac{3}{2} \\ u_0=\frac{1}{3} \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=u_n+\frac{3}{4}$

1. أحسب u_1 و u_2 و v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\frac{13}{12}\times 3^n-\frac{3}{4}$

5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$

ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \frac{8}{3}$

1. أحسب v_0 و v_1
2. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها : $\frac{1}{4}$
3. أكتب v_n بدلالة n
4. استنتج u_n بدلالة n
5. أحسب : $\lim_{n\to+\infty} v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} u_n$
6. بين أن: $v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} = -\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$
7. بين أن: $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = -\frac{44}{9}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) + \frac{8}{3}n$