

TD

Thermodynamique

S 1

TD intégrale

Thermodynamique

2012/2013



Serie n° 1

Outils mathématiques utilisés en
Thermodynamique :

Plan: fonction à plusieurs variables (2 variables)
- Conséquences (indépendance du chemin
suivi)

I) fonction à 2 variables

Rappels: cas d'une seule variable

$$u \in \mathbb{R} \rightarrow f(u) \in \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

exemple: fonction usuelles

$f(u)$ = polynôme en u , $\sin u$, $\cos u$, e^u , etc...

dérivée: $f'(u)$

$$f'(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u+h) - f(u)}{h}$$

$$u = u_0 \Rightarrow f'(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u_0+h) - f(u_0)}{h}$$

Cas variables :

$$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

exemple 1 :

$$f(x, y) = xy$$

exemple 2 :

$$f(x, y) = e^{xy}$$

exemple 3 :

$$f(x, y) = yx e^{xy}$$

exemple 4 :

P: pression, V: volume, T: température

n: nombre de mole, $R = 8,325 \text{ J}$

$$P \cdot V = RT \text{ si } n \text{ fixé} \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} = P(V, T)$$

* Dérivée dans cas de 2 variables :

$$(x, y) \rightarrow f(x, y)$$

f' $\begin{cases} 1) x \text{ sachant que } y \text{ est fixée} \\ 2) y \text{ sachant que } x \text{ est fixée} \end{cases}$

$$① \rightarrow f'_x(x, y) \rightarrow \text{dérivée partielle / } x$$

$$② \rightarrow f'_y(x, y) \rightarrow \text{dérivée partielle / } y$$

SMIA 2

Notation :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \rightarrow \text{"d" doit}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_y \rightarrow \text{"d" non}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

① y est fixée et on dérive / x , on $f(x, y) = g(x)$ pour y fixé

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$f'_x(x, y) = g'(x) \text{ si } y \text{ fixée}$$

$$g(x+h) = f(x+h, y)$$

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{df}{dx} \Big|_y$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \frac{df}{dy} \Big|_x$$

Exercice 1:

Calculer f'_x, f'_y pour les exemples

1, 2, 3, 4

① $f(x, y) = e^{xy}$ pour $u(x, y) = x \cdot y$

$f'_x, f'_y \mid f(x, y) = e^u$ pour $u = xy$

$$f'_x(x) = \frac{df}{dx} \Big|_y = \frac{de^u}{du} \Big|_y = u'_x e^u$$

$$u'_x = \frac{du}{dx} \Big|_y = \frac{dxy}{dx} \Big|_y = y$$

$$f'_x = ye^{xy}$$

$$f'_y(y) = \frac{df}{dy} \Big|_x = \frac{de^u}{du} \Big|_x = u'_y e^u$$

$$u'_y = \frac{du}{dy} \Big|_x = \frac{dxy}{dy} \Big|_x = x$$

$$f'_y = xe^{xy}$$



2^e méthode :

$$f'_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f(x, y) = e^{xy} ; f(x+h, y) = e^{(x+h)y}$$

or $h \rightarrow 0 \Rightarrow h$ petit

$$e^{xy} = 1 + h y, e^{(x+h)y} = e^{xy}(1 + h y)$$

$$f'_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{xy}(1 + h y) - e^{xy}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h y e^{xy}}{h} = y e^{xy}$$

$f'_x, f'_y \rightarrow$ dérivées partielles première.

* Dérivées partielles secondaires :

$$\begin{array}{l} f(x, y) \begin{cases} f'_x(x, y) \begin{cases} a) f''_{xx}(x, y) \\ b) f''_{xy}(x, y) \end{cases} \\ f'_y(x, y) \begin{cases} c) f''_{yx}(x, y) \\ d) f''_{yy}(x, y) \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

$$a) f''_{nu, n} = f''_{n^2}(u, y) = \frac{d^2 f}{dn^2} = \frac{d^2 f}{dn^2}$$

$$b) f''_{ny}(u, y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{du} \right)_y = \frac{d^2 f}{du dy}$$

$$c) f''_{yn}(u, y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dn} \right)_y = \frac{d^2 f}{dy dn}$$

$$d) f''_{yy}(u, y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dy} \right)_n = \frac{d^2 f}{dy^2}$$

Exercice 2

Calculer les dérivées secondes
des exemples : 1, 2, 3, 4

$$① f(u, y) = e^{uy} \quad \begin{cases} f'(u) = ye^{uy} \\ f'(y) = ue^{uy} \end{cases}$$

$$f''_{n^2} = \frac{d}{du} \left(\frac{df}{du} \right)_y = \frac{d}{du} [ye^{uy}]$$

$$= y \frac{de^{uy}}{du} = y u e^{uy}$$

$$= y \frac{du}{du} y e^{uy}$$

$$f''_{n^2} = y^2 e^{uy}$$

SMIA 2

$$u(n, y) = ny \Rightarrow u'_n = \frac{du}{dn} = \frac{d}{dn} [ny]_y = y$$

$$f''_{ny} = \frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dn} \right)_y = \frac{d}{dy} [ye^{uy}]_y$$

* Différentielle d'une fonction
à 2 variables

$$f(u, y) \Rightarrow df = f'_u du + f'_y dy$$

ici les variables sont $T, V \Rightarrow P(T, V)$

$$\text{donc } dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T dV \quad (2)$$

en comparant (1) et (2) on a

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{(V-b)}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{2a}{V^3} - \frac{RT}{(V-b)^2}$$

$$P'_{VT} = \left(\frac{-RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} \right)' = \frac{-R}{(V-b)^2}$$

$$P'_{TV} = \left(\frac{R}{V-b} \right)' = \frac{-R}{(V-b)^2}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \text{ donc } dP \text{ est une forme}$$

différentielle totale

(b) Recherche de P qui est solution de l'équation 1:

- La recherche de P nécessite une intégration: tout en choisissant une variable d'intégration sachant qu'on maintient cette 2^e variable.

- Ceci constitue la 1^{re} étape de calcul qui introduit en définitive une constante d'intégration propre fonction de la variable maintenue constante pendant la variation ex: si on intègre par rapport à v la constante K va être fonction de T.

- 2^e étape: utiliser la 2^e équation de la dérivée partielle et cette dernière va nous permettre de déterminer la constante d'intégration.

- Lors de la 1^{re} étape la solution obtenue est dite solution particulière il sera complète lors de la 2^e étape (détermination de la constante).

* conseil pratique: la 1^{re} étape est une intégration et la 2^e étape est une dérivation: généralement beaucoup plus délicat qu'une dérivation autant choisir lors de la 1^{re} étape l'équation la plus facile à intégrer.

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dP}{dv} \right)_T &= \frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3} \quad (a) \\ \left(\frac{dP}{dT} \right)_v &= \frac{R}{(v-b)} \quad (b) \end{aligned} \right.$$

1^{re} étape: intégration:

$$dP = \frac{R}{(v-b)} dt \Rightarrow P = \int \left[\frac{R}{(v-b)} \right] dt$$

$$P = \frac{R}{(v-b)} \int dt + K = \frac{R}{(v-b)} T + K(v) \quad (*)$$

* doit vérifier aussi eq (a)

$$\frac{d}{dv} \left[\frac{RT + K(v)}{(v-b)} \right] = \frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}$$

$$\frac{-RT}{(v-b)^2} + K'(v) = \frac{-RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}$$

$$K'(v) = \frac{2a}{v^3}$$

SMIA 2

si K existe $K' = \frac{2a}{V^3}$

$$K'(V) = \frac{2a}{V^3} = \frac{dK}{dV}$$

$$dK = \frac{2a}{V^3} dV$$

$$K = \int \frac{2a}{V^3} dV + \text{cte}$$

$$K = 2a \int V^{-3} dV + \text{cte} = \frac{2a}{-3+1} V^{-3+1}$$

$$K = -a V^{-2}$$

* solution principale de l'eq 1 :

$$p(t, V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \text{cte} \quad (\text{eq 3})$$

* vérification de l'eq 3 :

$$\left. \frac{dP}{dV} \right|_t = \frac{d}{dV} \left[\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \text{cte} \right] = \frac{R}{V-b} - \frac{2a}{V^3}$$

$$\left. \frac{dP}{dV} \right|_t = \frac{d}{dV} \left[\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \text{cte} \right] = \frac{R}{V-b} - \frac{2a}{V^3}$$

$$dP = \frac{R}{V-b} dT - \frac{R+1}{(V-b)^2} dV + \frac{2a}{V^3} dV$$

SMIA 2

Remarque: Avant de se lancer de la recherche de la fonction $f(u, y)$ solution de l'équation df il est conseillé de vérifier avant si c'est une différentiel totale exacte en effet la fonction f existe si et seulement si df est une différentiel exacte dans le cas contraire f n'existe pas.

Remarque:

exercice 3: - Quelque soit le gaz à très basse pression le produit $PV = RT$

$$\lim_{P \rightarrow 0} PV = RT \quad (a=1 \Rightarrow RT)$$

$$\lim_{P \rightarrow 0} \frac{RT}{P} = \infty$$

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} + \text{cte} = 0$$

volume ∞ les particules sont éloignées les uns des autres cela veut dire qu'on est à basse pression.

① dV est une différentielle totale exacte car V est l'une des variables d'état dont la différentielle est une différentielle totale variable d'état: (V, P, T)

- V est une variable d'état donc c'est une fonction d'état et sa différentielle est totale exacte.

$$② d(V(P, T)) = -\frac{R}{P^2} dP + \left[f(P) + \frac{2g}{R+3} \right] dT$$

$$V'_{TP} = \frac{d}{dT} \left[f(P) + \frac{2g}{R+3} \right]_T = f'(P)$$

$$V'_{PT} = \frac{d}{dT} \left[-\frac{R}{P^2} \right]_P = -\frac{R}{P^2}$$

$$f'(P) = -\frac{R}{P^2}$$

$$df = -\frac{R}{P^2} dP$$

$$f = R \int \frac{dP}{P^2} + \text{ste}$$

$$f = -R \left[\frac{1}{-2+1} P^{-2+1} \right] + \text{ste}$$

$$f = \frac{R}{P} + \text{ste}$$

SMIA 2

Indépendance du chemin suivi :

soy the m... official... it is...
soy the m... official... it is...
soy the m... official... it is...

$$S \cdot f = Ax + By$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_x = \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_y \text{ (si c'est vérifié)}$$

$$\int S \cdot f = f_F - f_I$$

- Une forme différentielle $A dx + B dy$ sont intégrale ne dépend du chemin suivi si seulement il vérifie $\frac{\partial A}{\partial y} \Big|_x = \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_y$

- Une forme différentielle ne dépend pas du chemin suivi si il vérifie le critère de Schwarz.

d'autre part si il vérifie le critère de Schwarz il dépend du chemin suivi.

- Une fonction d'état vérifie donc le critère de Schwarz, sa variation ne dépend pas du chemin suivi.

$$\begin{aligned} g_b V + T_b A &= w_b \\ g_b A + T_b V &= w_b \\ \frac{V}{T} &= \frac{g_b}{T_b} \cdot 0 = \frac{A_b}{g_b} \end{aligned}$$

Exercice 5:

- le travail ne dépend pas du chemin suivi si la forme différentielle n'est pas une différentielle exacte dans le cas contraire il dépend du trajet C.

- Démontrons est-ce que c'est une forme différentielle exacte:

Pour un gaz parfait:

$$PV = nRT \quad (n=1)$$

$$V = \frac{nRT}{P} = V(T, P)$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

$$= \frac{dT}{P} + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

$$\delta W = -P \frac{dV}{dT} \bigg|_P dT - P \frac{dV}{dP} \bigg|_T dP$$

or pour un gaz parfait

$$\delta W = -P \frac{R}{T} dT - P \left(-\frac{R}{P}\right) dP$$

$$\delta W = -R dT + V dP$$

$$\delta W = A dT + B dP$$

$$\frac{dA}{dP} \bigg|_T = 0, \quad \frac{dB}{dT} \bigg|_P = \frac{V}{T}$$

$$\text{car total } \delta W \neq dTE$$

La forme différentielle n'est pas une forme différentielle exacte on doit s'attendre que le travail va dépendre du chemin suivi.

On va intégrer suivant 2 chemins

* 1^{er} chemin:

$$\int_{C_1} \delta W = \int_{C_1} -P dV = \int_{1 \rightarrow a} -P dV + \int_{a \rightarrow 2} (-P dV)$$

1 → a : la pression = ste = P₁

a → 2 : le volume = ste = V₂

$$I_1 = \int_{1 \rightarrow a} (-P dV) = \int_{1 \rightarrow a} (-P dV)_P = -P \int_{V_1}^{V_2} dV = P_1 (V_2 - V_1)$$

$$I_2: \int_{a \rightarrow 2} -P dV = \int_{a \rightarrow 2} (-P dV)_{V=V_2=ste}$$

$$\int_{C_1} dW = W_{C_1} = P_1 (V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow W_{C_2} = -P_2 (V_2 - V_1)$$

|W_{C1}| < |W_{C2}| car

* 2^e chemin: P₂ > P₁

$$\int_{C_2} \delta W = \int_{I \rightarrow b \rightarrow F} (-P dV) = \int_{I \rightarrow b} (-P dV)_P =$$

$$-P_2 \int_{V_1}^{V_2} dV = P_2 (V_2 - V_1)$$



donc c'est pas une fonction d'état $\Rightarrow$
 dépend de la nature du chemin suivi
 "C₁" s'effectue en deux temps la première
 transformation s'effectue à pression p = ste
 c'est à dire isobare

"C₂" s'effectue à volume ste $\Rightarrow$ isochore
 la transformation C₂ de même et d'un
 isotherme $\rightarrow$ isobare

$$dP = A dx + B dy$$

1) voir le critère de schwarz $\rightarrow \frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$
 si c'est bon $\rightarrow$ on peut la trouver.

$$2) dP = f_x - f_y \cdot v \cdot e$$

3) P = fonction d'état $\rightarrow$ D.T.E

SMIA2

Notion de température et de pression

Dans un gaz parfait : $PV = nRT$

Température : La température est liée
 à la notion du chaud et du froid : si la
 température est élevée le corps est dit chaud
 dans le cas contraire est dit froid ceci
 constitue une description qualitatif. Pour
 une description quantitativ il faut introduire
 un instrument de mesure pour évaluer
 quantitativement cette température l'instrument
 est appelé thermomètre.

- Principe du fonction du thermomètre : la
 mesure de la température ne s'effectue
 pas d'une manière directe.

Exercice 6 :

① $L_{25} \text{ à } \theta = 25^\circ \Rightarrow \text{Ecluse.}$

$L_{250} \text{ à } \theta = 250^\circ \Rightarrow \text{eau bouillante.}$

$L = L_0(1 + \alpha t); L_0 = L_0(1 + \alpha \theta)$

$L_{25} = L_0(1 + \alpha 25) \quad (1)$

$L_{250} = L_0(1 + \alpha 250) \quad (2)$

① $\rightarrow L_{25} - L_0 = L_0 \alpha 25$

② $\rightarrow L_{250} - L_0 = L_0 \alpha 250$

$L_0 - L_{25} = L_0 \alpha (0 - 25)$

$\Rightarrow \frac{L_0 - L_{25}}{L_{250} - L_{25}} = \frac{0 - 25}{250}$

$\Rightarrow \frac{L_0 - L_{25}}{L_{250} - L_{25}} = \frac{0 - 25}{250}$

$\Rightarrow L_0 = 1,075 \text{ m}$

cela nécessite pour construire l'instrument 2 températures de référence: θ_{25} , θ_{250} la glace et l'eau bouillante, l'échelle de T est donnée par convention.

② $\frac{L_0 - L_{25}}{L_{250} - L_{25}} = \frac{0 - 25}{250} \Rightarrow L_0 = 1,075 \text{ m}$

Un thermomètre peut être construit à partir d'une grandeur physique reliée à la température cette grandeur physique est dite une grandeur thermométrique.

2320 Dans cette exercice, la grandeur thermométrique c'est l'allongement d'une barre métallique qui est

relié à la température.

Pour l'échelle C° les 2 températures de référence pour la glace c'est $0^\circ C$ et pour l'eau bouillante c'est $100^\circ C$, ceci constitue le thermomètre de Celsius ou le thermomètre centigrade.

exercice 7: Notion sur la pression:

- Si D_A est diamètre du piston en A:

$S_A = \pi R_A^2 = \pi \left(\frac{D_A}{2}\right)^2$

- Si D_B est diamètre du piston en B:

$S_B = \pi \left(\frac{D_B}{2}\right)^2$

- le piston T est en équilibre:

$\sum \vec{F} = \vec{0}$

- Recherche des forces agissant sur T :

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (poids)

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

- la pression A : $P_A = \frac{|\vec{F}_1|}{S_A}$

- la pression B : $P_B = \frac{|\vec{F}_2|}{S_B}$



la force $\vec{F}_3$ est appliqué sur la surface S

$$S = S_A - S_B$$

$$P_{ext} = \frac{|\vec{F}_3|}{S} = \frac{|\vec{F}_3|}{S_A - S_B} \quad |\vec{F}_3| = (S_A - S_B) P_{ext}$$

$$= -S_A P_A \vec{k}$$

$$\vec{F}_1 = -|\vec{F}_1| \vec{k} = -S_A P_A \vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \vec{k} = S_B P_B \vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = |\vec{F}_3| \vec{k} = (S_A - S_B) P_{ext} \vec{k}$$

$$P_{oids} = m \cdot \vec{g} \quad \vec{g} = -g \vec{k}$$

$$\vec{0} = -P_A P_A \vec{k} + P_B P_B \vec{k} + (P_A - P_B) P_{ext} \vec{k} - mg \vec{k}$$

en projetant suivant $\vec{k}$

$$-P_A P_A + P_B P_B + (P_A - P_B) P_{ext} = mg$$

$$P_B = (mg - (P_A - P_B) P_{ext} + P_A P_A) \times 1/S_B$$

$$P_B = \Delta g \text{ bar}$$

SMIA 2

Exercice 8 : ① $P_0 = -\rho \cdot g \cdot h_0$ $P' = f(P \dots)$

Application de statique des fluides :

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dz$$

avant (P équilibre) :

$$\int_3^{z+\Delta h} dP = \int_3^{z+\Delta h} -\rho g dz$$

$$P(z) = -\rho g \int_3^{z+\Delta h} dz = -\rho g \cdot \Delta h$$

$$P(z+\Delta h) - P(z) = -\rho g \cdot \Delta h$$

$$P(z) = -p \text{ et } P(z+\Delta h) = -p_0$$

Après (2 équilibre) $P(z) = -p_0 = -\rho g \cdot \Delta h$

$$\Rightarrow P = P_0 + \rho g \cdot \Delta h$$

$$\int_2^{z+\Delta h} dP = \int_2^{z+\Delta h} -\rho g dz$$

$$P(z+\Delta h) - P(z) = -\rho g \cdot \Delta h$$

$$P' - P_0 = -\rho g \cdot \Delta h$$

$$P' = P_0 - \rho g \cdot \Delta h$$

$$P' = P_0 - \rho g \cdot \Delta h$$

$$\text{Avant : } P = P_0 + \rho g \cdot \Delta h = \rho g H_0 + \rho g \Delta h$$

$$\text{Après : } P' = P_0 - \rho g \Delta h = \rho g H_0 - \rho g \Delta h$$

$$P_0 = \rho g \cdot H_0$$

* Remarque :

Se résultats était mesurable sans calcul : On doit s'attendre que h' soit plus grand que h qualitativement.
Pourquoi ? Avant l'air est soumis à deux contraintes l'effet de la pression extérieure et la masse au-dessus. Après cette même quantité d'air n'est plus soumise à la masse de mercure d'avant donc la pression s'agrandit donc h' s'agrandit.

Air gaz parfait donc :

$$P \cdot V = n R \cdot T$$

T est fixé avant et après

T = sté pendant toute l'expérience.

$$\text{Avant } \left| \frac{P}{V} \right| \text{ après } \left| \frac{P'}{V'} \right| \Rightarrow PV = P'V'$$

$$PV = nRT \quad P'V' = nRT$$

$$V = \Delta h \text{ et } V' = \Delta h'$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{P}{P'} = \frac{H_0 + \Delta h}{H_0 - \Delta h}$$

$$h' = h_0 \frac{H_0 + \Delta h}{H_0 - \Delta h}$$

② calcul d'incertitude :

$$P_n h' = P_n h + P_n (H_0 + \Delta h) - P_n (H_0 - \Delta h)$$

$$\frac{dh'}{h'} = \frac{dh}{h} + \frac{d(H_0 + \Delta h)}{H_0 + \Delta h} - \frac{d(H_0 - \Delta h)}{H_0 - \Delta h}$$

$$\frac{\Delta h'}{h'} = \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \Delta h' = h' \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow \Delta h' \approx 1 \text{ mm}$$

Application 2 :

① Hypothèse : A. R vérifie l'équation : $\frac{P}{P_0} = e^{-\alpha z}$
avec $\alpha = \frac{R}{mT_0}$

$$T(z) = T(z_0) - a(z - z_0) \text{ avec } a \text{ sté } > 0$$

on remarque : $gdz \hat{=} T \downarrow \Rightarrow$ donc sur les sommets des montagnes $\rightarrow T$ faible $\rightarrow$ Refroidissement $\rightarrow$ neige.

$$a) \quad dP = -\rho g dz \quad (*)$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\alpha z} = e^{-\alpha (T_0 - a(z - z_0))}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{e^{\alpha (T_0 - a(z - z_0))}} \quad (**)$$

$$P(z) = \frac{P_0}{e^{\alpha (T_0 - a(z - z_0))}}$$

$$P(z) = \frac{P_0}{e^{\alpha (T_0 - a(z - z_0))}}$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow dP = \frac{P(z) g dz}{\alpha [T_0 - a(z - z_0)]}$$

$$(*) \text{ et } (**) \Rightarrow dP = \frac{P(z) g dz}{\alpha [T_0 - a(z - z_0)]}$$

SMIA 2



$$\frac{dP}{P} = -g dz$$

$$P(z) = P_0 \left[\frac{T_0 - a(z-z_0)}{T_0} \right]^{\frac{g}{R a}}$$

$$u(z) = T_0 - a(z-z_0)$$

$$dU(z) = -a dz \rightarrow dz = \frac{-dU(z)}{a}$$

$$\frac{dP}{P(z)} = \left(\frac{-g}{a} \right) \left[\frac{dU(z)}{a} \right] \times \frac{1}{U(z)}$$

$$\frac{dP}{P(z)} = m \frac{dU}{U} \text{ avec } m = \frac{g}{R a} = \text{ste}$$

$$\int_{z_0}^z \frac{dP}{P} = \int_{z_0}^z m \frac{dU}{U} \Rightarrow \ln P(z) - \ln P(z_0) = m [\ln U(z) - \ln U(z_0)]$$

$$\ln(P(z)) - \ln(P(z_0)) = m [\ln U(z) - \ln U(z_0)]$$

$$\ln \left(\frac{P(z)}{P(z_0)} \right) = m \ln \left(\frac{U(z)}{U(z_0)} \right) = \ln \left(\frac{U(z)}{U(z_0)} \right)^m$$

$$\frac{P(z)}{P(z_0)} = \left[\frac{U(z)}{U(z_0)} \right]^m \Rightarrow P(z) = P(z_0) \left[\frac{U(z)}{U(z_0)} \right]^m$$

$$U(z) = T_0 - a(z-z_0) \quad U(z) = T_0$$

$$P(z) = P(z_0) \left[\frac{T_0 - a(z-z_0)}{T_0} \right]^{\frac{g}{R a}}$$

$$P(z) = P(z_0) \left[1 - \frac{a}{T_0} (z-z_0) \right]^{\frac{g}{R a}}$$

$$z > z_1 \Rightarrow T = T(z_1) = \text{ste}$$

$$dP = -\rho g dz$$

$$P = \rho R T \Rightarrow \frac{P}{\rho} = R T \Rightarrow P = \rho R T$$

$$dP = -\frac{P(z)}{R T} g dz$$

$$\ln \frac{P(z)}{P(z_0)} = -\frac{g}{R T(z_0)} (z-z_0)$$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{R T} dz \text{ pour } z > z_1 \Rightarrow T = T(z_1) = \text{ste}$$

$$\int_{z_1}^z \frac{dP}{P} = -\int_{z_1}^z \frac{g}{R T} dz = -\frac{g}{R T(z_1)} \int_{z_1}^z dz$$

$$\frac{P(z)}{P(z_0)} = e^{-\frac{g}{R T(z_1)} (z-z_0)}$$

- on remarque que pour $z > z_1$ le gaz se raréfie exemple pour ce qui pratique le sport des planeurs doivent donc tenir compte de ces conditions atmosphériques, l'équipement de base doit comporter nécessairement le gaz oxygène pour convaincre cette raréfaction d'oxygène.

inversement si on descend dans la profondeur de mer c'est le cas des plongeurs aussi il faut un équipement spécial car la descente en profondeur fait augmenter la pression, en réalité il s'agit l'effet de la pression

extérieure plus la pression qui applique la
manche qui est au dessus. La pression
augmente 1 atm / 10 m donc il faut
compenser cette pression supplémentaire qui
agit sur la cage torosique alors on
ramène l'air de la plongée une bouteille
d'hélium dont le rôle est de compenser
cette pression supplémentaire.

SMIA 2

la fin de la Série n° 2

exercice 1 : Selon la loi de la statique des fluides:

$$\Delta P = -\rho \cdot g \cdot dh$$

$$P_p - P_0 = -\rho \cdot g \cdot h$$

$$\int_0^h dP = -\rho \cdot g \cdot h$$

$$P(h) - P(0) = -\rho \cdot g \cdot h$$

$$P(h) - P(0) = -\frac{1}{V} \cdot g \cdot h$$

$$P(h) = \left(\frac{1}{V}\right) \cdot g \cdot h + P(0)$$

exercice 3 : Le v étant inférieur à v_c quand on
chauffe à $v = v_c$ alors on passe de l'état
initial a à l'état finale b se situe dans
la phase liquide. On au départ on a un
mélange liquide vapeur arrivé à B la
disparition complète de la vapeur qui se
transforme en liquide. Or les liquides
sont incompressibles par conséquent
n'y avait pas place de prévu pour
cette augmentation y a risque d'explosion.

- Si le volume du mélange est inférieur au volume critique et s'il n'y a pas de place de prévu pour tout rajout de liquide dont la place n'est pas prévue.

- Si le volume du mélange est supérieur au volume critique alors le risque est minime car cette fois-ci c'est le liquide qui disparaît au détriment de la vapeur. Et la vapeur est compressible et on retient dans cet exercice les risques posés par la conservation des produits liquides/vapeurs à l'intérieur des récipients fermés.

SMIA 2

exercice 4:

① $P_F = P_L + P_{\text{remor}} = 4,33 \text{ MPa}$

② T_F (table)

$P \approx 4 \text{ MPa} \rightarrow T = 250^\circ \text{C}$

$N_F = 2 N_I$; $\bar{v} = \frac{V_F}{m} = \frac{2 V_I}{m} = 0,002 \text{ m}^3/\text{kg}$

$v_L < \bar{v} < v_g \Rightarrow$ mélange liquide/vapeur

état finale : mélange liquide/vapeur

$v_L \text{ à } 4 \text{ MPa} = 0,001258 \text{ m}^3/\text{kg}$

$v_g \text{ à } 4 \text{ MPa} = 0,04978 \text{ m}^3/\text{kg}$

③ $x = \frac{B \bar{m}}{A \bar{B}} = \frac{\bar{v} - v_g}{v_g - v_L} = \frac{\bar{v} - 0,00125}{0,04978 - 0,00125} = 0,2$

$V_g ?$; $x = \frac{m_g}{m}$ et $v_g = \frac{V_g}{m_g}$

$V_g = m_g \cdot v_g \Rightarrow V_g = x m \cdot v_g$

$m_g = x m$ donc $V_g = 0,9956 \text{ m}^3$

$\frac{V_A}{p_A} = \frac{V_B}{p_B} = \frac{V_C}{p_C} = \frac{V_D}{p_D}$

donc on a :

$\frac{V_A}{p_A} = \frac{V_B}{p_B}$

Exercice 5 :

$$n_L = \frac{V_L}{m_L} \Rightarrow V_L \rightarrow m_L$$

$$n_g = \frac{V_g}{m_g} \Rightarrow V_g \rightarrow m_g$$

$$\Delta V \rightarrow \begin{cases} \Delta m_g \\ \Delta m_L \end{cases}$$

$$V_L \rightarrow m_L$$

$$\Delta V_L \rightarrow \Delta m_L \Rightarrow \Delta m_L = m_L \cdot \frac{\Delta V}{V_L} = \frac{\Delta V}{\frac{V_L}{m_L}} = \frac{\Delta V}{n_L}$$

$$\Delta m_L = \frac{\Delta V}{n_L}$$

et d'autre part : la règle de 3

$$\left. \begin{array}{l} \Delta V_g \rightarrow \Delta m_g \\ V_g \rightarrow m_g \end{array} \right\} \Rightarrow m_g \Delta V_g = V_g \Delta m_g$$

$$\Delta m_g = \frac{\Delta V}{\frac{V_g}{m_g}} = \frac{\Delta V}{n_g} \quad \Delta m_g = m_g \cdot \frac{\Delta V}{V_g}$$

$$\Delta m_g = \frac{\Delta V}{n_g}$$

- la masse liquide évacuée :

masse d'eau	masse vapeur
$\frac{\Delta V}{n_L}$	$\frac{\Delta V}{n_g}$

$$\Delta m = \Delta V \left[\frac{1}{n_L} - \frac{1}{n_g} \right]$$

Série n° 3 :

Exercice 1 : ① Théorème cinétique des gaz :

$$P = \frac{1}{3} n m \overline{c^2} \Rightarrow P = \frac{1}{3} n [3 k T]$$

avec $\overline{c^2}$ vitesse quadratique moyenne

$$P = n k T \Rightarrow n = \frac{P}{k T}$$

② - l'énergie cinétique moyenne : $\langle E \rangle = \frac{m}{2} \overline{u^2} = \frac{3}{2} k T$
 : $\frac{1}{2} m \overline{u^2} = \frac{3}{2} k T$

$$P = \frac{1}{3} n k T \Rightarrow n = \frac{P}{k T}$$

$$P = \frac{1}{3} n m \overline{u^2} \Rightarrow \overline{u^2} = \frac{3 P}{n m} = \frac{3 P}{n \cdot \frac{M}{N_A}}$$

$$\overline{u^2} = \frac{3 P N_A}{n M} \Rightarrow \overline{u^2} = \frac{3 P N_A}{\frac{P}{k T} M} = \frac{3 k T}{M}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{P} = \frac{1}{3} n m \overline{u^2} \Rightarrow \overline{u^2} = \frac{3 P N_A}{n m}$$

$$\Rightarrow \overline{u} = \sqrt{\frac{3 \cdot m k T}{m m}} = \sqrt{\frac{3 k T}{m}}$$

$$\Rightarrow \overline{u} = 9,41 \text{ m/s}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\Delta P}{P} = 10\% = \frac{\Delta n}{n} + \frac{d(c^2)}{c^2} = \frac{\Delta n}{n} + \frac{2 dc}{c} = \frac{\Delta n}{n} + 2 \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{200}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 0,5 \cdot 10^{-2}$$

une variation relative de la vitesse quadratique varie de 0,5% si la pression



augmente de 10%.

Exercice 2: ① air gaz parfait:

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$$

Si $p = p_I = \text{cte}$

alors: $\frac{nRT}{V} = \text{cte}$ donc $\frac{T}{V} = \text{cte}$
en particulier:

$$\left(\frac{T}{V}\right)_I = \left(\frac{T}{V}\right)_F = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{V_I}{V_F} = \frac{V_F}{V_F} \Rightarrow T_F = \frac{V_F}{V_I} \cdot T_I$$

$$\text{donc } T_F = \frac{T_I}{2} = \frac{500 + 273,15}{2}$$

$$T_F = 386,5 \text{ K}$$

SMIA2

Exercice 3: ① $V_T = V_A + V_B$

$$m_T = m_A + m_B$$

$$PV = nRT \text{ avec } n = \frac{m}{M}$$

$$\text{donc } V_A = \frac{m_A}{M} \cdot \frac{RT_A}{P_A}$$

et:

$$V_B = \frac{m_B}{M} \cdot \frac{RT_B}{P_B}$$

② même molaire de l'air = 29 g/mole

$$P_F \cdot V_T = n_T R T_F$$

$$\frac{P_F}{P_I} = \frac{n_T R T_F}{n_I R T_I} = \frac{T_F}{T_I}$$

Exercice 6:

$$① (T, P, V) \Rightarrow f(P, V, T) = 0$$

$$\Rightarrow V = V(P, T) \Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

$$② dV = A dP + B dT \quad dV = D.F.E \Rightarrow \frac{dA}{dT} = \frac{dB}{dP}$$

$$① \frac{d[T f(P)]}{dT} = f(P) \frac{dT}{dT} + T \frac{df(P)}{dT}$$

$$② \frac{d\left[\frac{P}{T} + \frac{A}{RT^2}\right]}{dP} = \frac{d\left[\frac{P}{T}\right]}{dP} + \frac{d\left[\frac{A}{RT^2}\right]}{dP}$$

$$\text{donc: } -\frac{R}{P^2} \Rightarrow f(P) = -\frac{R}{P^2}$$

③ On remplace $f(P)$ dans $dV = T f(P) dP$

$$dV = T f(P) dP + \left(\frac{R}{P} + \frac{a}{RT^2} \right) dT$$

$$dV = -T \frac{R}{P^2} dP + \left(\frac{R}{P} + \frac{a}{RT^2} \right) dT = dV(P, T)$$

$$dV = \frac{dV}{dP} \bigg|_T dP + \frac{dV}{dT} \bigg|_P dT$$

$$\frac{dV}{dP} \bigg|_T = \frac{-RT}{P^2} \quad (a) \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dT} \bigg|_P = \frac{R}{P} + \frac{a}{RT^2} \quad (b)$$

$$(a) \Rightarrow dV = \frac{-RT}{P^2} dP \quad \text{à } T = \text{ste}$$

$$\int dV = \int \left[\frac{-RT}{P^2} \right]_T dP + K(T)$$

$$V = RT \int P^{-2} dP + K(T)$$

$$V = RT \int P^{-2} dP + K(T)$$

$$\int P^{-2} dP = \frac{1}{-2+1} P^{-2+1} = -\frac{1}{P} \Rightarrow V = \frac{RT}{P} + K(T)$$

$$\frac{1}{-2+1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\frac{1}{-2+1} = \frac{1}{-1} = -1$$



la solution particulière : $V = \frac{RT}{P} + K(T)$

$$\frac{dV}{dT} \bigg|_P = \frac{d \left[\frac{RT}{P} + K(T) \right]}{dT} \bigg|_P = \frac{R}{P} + K'(T)$$

$$\frac{R}{P} + K'(T) = \frac{R}{P} + \frac{a}{RT^2} \Rightarrow K'(T) = \frac{a}{RT^2}$$

$$\text{donc : } K = \int dK = K(T) = \int \frac{a}{RT^2} dT$$

$$K = \int \frac{a}{RT^2} dT + b \Rightarrow K = \frac{a}{R} \int T^{-2} dT$$

$$\Rightarrow K = \frac{a}{RT} + b$$

② On a : $PV = 1664 + 1,17 \cdot 10^{-6} P$

$$\text{et } PV = RT + P \left(b - \frac{a}{RT} \right)$$

on déduit que :

$$RT_0 = 1664$$

$$T_0 = \frac{1664}{R} =$$

condition de Mariotte :

$$PV = \lambda RT = \text{ste} \quad (P, V, T = T_0)$$

$$\frac{d(PV)}{dP} \bigg|_T = 0$$

$$\frac{d[PV]}{dP} \bigg|_{T=T_0} = b$$

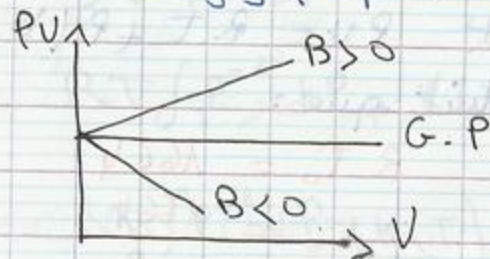
$$\frac{d}{dP} \left[RT + P \left(b - \frac{a}{RT} \right) \right]_{T=T_0}$$

$$= \frac{d}{dP} \left[P \left(b - \frac{a}{RT_0} \right) \right] = \left(b - \frac{a}{RT_0} \right) \frac{dP}{dP}$$

$$\text{donc : } b - \frac{a}{RT_0} \Rightarrow \frac{a}{RT_0} = b \Rightarrow T_0 = \frac{a}{bR}$$

$$\textcircled{c} T_0 = \frac{a}{bR} \Rightarrow b = \frac{a}{RT_0}$$

dans cet exercice $PV = A + PB$
ce diagramme d'Angeon nous donne
si c'est un gaz parfait ou pas.



SMIA 2

Série n° 4 :

exercice 1 :

état initial : $T = \text{ste}$ état finale
 $\xrightarrow{\text{isotherme}}$

Travail (transformation réversible)

travail des forces de pression : $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{gaz}} = P$$

$$G.P. \Rightarrow PV = aRT$$

$$P = \frac{aRT}{V}$$

$$W = \int_{V_0}^{V_1} \left(-\frac{aRT}{V} \right) dV = -aRT \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V}$$

$$W_{\text{réversible}} = -aRT \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right) = aRT$$

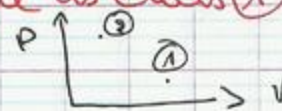
avec $T = \text{ste}$ on a :

$$PV = aRT = P_0 V_0 = P_1 V_1$$

$$W = P_1 V_1 \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right) = P_0 V_0 \cdot \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right)$$

* transformation réversible (lente) on connaît le chemin d'aller et du retour et chaque point représente un état d'équilibre.

* transformation irréversible (Rapide) on a que les états ① et ② on ignore le chemin



$$C_p - C_v = nR$$

$$C_{mp} - C_{mv} = R \quad \gamma = \frac{C_{mp}}{C_{mv}}$$

$$C_{mv} = \frac{R}{\gamma - 1} \quad C_{mp} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 \\ &= \phi_2 - w_2 \\ &= C_v dT \\ &= n C_{mv} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

isobar: $w = -P_0 (V_2 - V_1)$

isotherme: $w = nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$

Adiabatique: $P = \frac{k}{V^\gamma} \Rightarrow w = \frac{k}{\gamma - 1} \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right)$

isochore: $w = 0$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T$$

SMIA 2

* exercices du chapitre V :

exercice 4 :

(A) 1- transformation irréversible adiabatique

$$u = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} - 1$$

$$m = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1 - m}$$

* Premier principe: $\Delta U = \phi + w$

$$U_2 - U_1 = \phi_2 - w_2$$

$$\phi_2 = 0 \text{ (adiabatique)}$$

$$w_2 = -P_2 (V_2 - V_1) \text{ (irréversible)}$$

$$w_2 = -P_2 V_2 \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right) = + 2RT_2 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \quad (1)$$

état initial: $P_1 V_1 = nRT_1$

état final: $P_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow$

$$\frac{P_1}{P_2} \frac{V_1}{V_2} = \frac{nRT_1}{nRT_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_1}{T_2} (u + 1)$$

$$(1) \Rightarrow w_2 = -2RT_2 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = -2RT_2 \left(\frac{T_1}{T_2} (u + 1) - 1 \right)$$

$$w_2 = 2RT_1 (u + 1) - 2RT_2$$

$$(km + 1) T = 2T$$

$$U_2 - U_1 = n C_{MV} (T_2 - T_1)$$

$$C_{MV} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$w_2 = nRT_2 \left(\frac{T_1}{T_2} (u+1) - 1 \right)$$

$$w_2 = nRT_1 (u+1) - nRT_2$$

$$w, q = 0$$

$$U_2 - U_1 = n C_{MV} (T_2 - T_1) = \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = T_1 (u+1) - T_2$$

$$\left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) T_2 = T_1 \left(u+1 + \frac{1}{\gamma - 1} \right)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} T_2 = T_1 \left(\frac{(\gamma - 1)(u+1) + 1}{\gamma - 1} \right)$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{\gamma_2 + \gamma - u - 1 + 1}{\gamma} \right)$$

$$\gamma T_2 = T_1 (u(\gamma - 1) + \gamma) \Rightarrow T_2 = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} u \right)$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 (1 + m u)$$

② Dans une transformation quasi-statique : Transformation réversible.

on a : $P_2 = P'_2$ mais $T_2 \neq T'_2$ et $V_2 \neq V'_2$

Transformation adiabatique $Q_2 = 0$

$$P V^\gamma = \text{cte}$$

$$P V^\gamma = \text{cte} \Rightarrow P \left(\frac{\pi}{\rho} \right)^\gamma = \text{cte} \Rightarrow P^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{cte}$$

$$P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = \text{cte} \Rightarrow P T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{cte}$$

$$\text{on a : } m = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Rightarrow -m = \frac{1 - \gamma}{\gamma}$$

$$P_1^{-m} T_1 = P_2^{-m} T_2$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{-m} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^m$$

$$\Rightarrow T_2' = T_1 (u+1)^m$$

SMIA2

2011 :

exercice 1:

Deux réservoirs rigide sont séparés par une paroi. Le réservoir A contient 2 kg d'eau à la pression 1 MPa et à la température 300°C. Le réservoir B volume 0,537 m³ contient 3 kg d'eau à la température de 150°C.

1) Quel est l'état physique, le volume et l'énergie interne du réservoir A ?

2) Quel est l'état physique, la pression et l'énergie interne du réservoir B ?

Réponse :

①

1 MPa → 179,91°C

→ 300°C

vapeur surchauffée

- Volume massique à 1 MPa et 300°C :

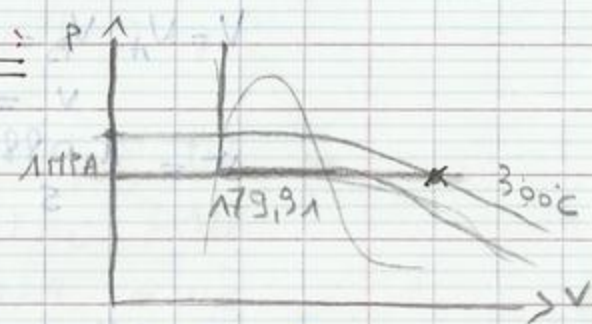
$$v_a = 0,2579 \text{ m}^3/\text{kg} \quad V = m \cdot v_a$$

- énergie interne à 1 MPa et 300°C :

$$u_A = 2793,2 \text{ kJ/kg}$$

- énergie interne totale :

$$U_T = U_A \cdot m = 2 \times u_A = 5586,4 \text{ kJ}$$



$$\textcircled{2} N = \frac{0,537}{3} = 0,179 \text{ mol/kg}$$

état physique : mélange liq/vap

$$P = 0,1468 \text{ MPa}$$

$$U = 4 \times 3 = 19,27,9 \times 3 = 5783,7 \text{ kJ}$$

On retire la paroi qui les sépare. Si l'équilibre mécanique et thermique est atteint lorsque les deux réservoirs se trouvent à la pression 200 kPa.

3) Calculer la température et le titre vapeur à l'état final.

$$V = V_A + V_B = 0,5158 + 0,173$$

$$V = 1,0888 \text{ m}^3$$

$$N = \frac{1,0888}{5} = 0,21776$$

$$x = \frac{0,21776 - 0,001061}{0,8857 - 0,001061}$$

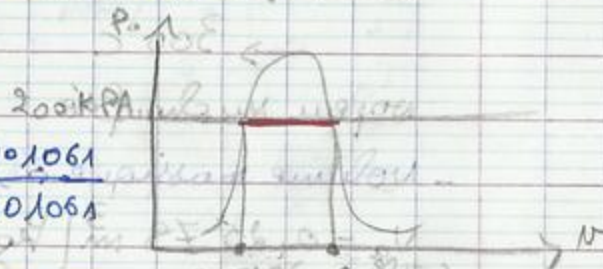
$$x = 0,224987547$$

$$U = U_L + x U_{Hg} (U_g - U_L) \Rightarrow \text{mélange}$$

$$x = 504,49 + x 2025,0 = 1000,5 \text{ kJ/kg}$$

$$U = 5 \times u = 5 \times 1000,5 = 5002,5 \text{ kJ}$$

$$T_f = 120,32^\circ\text{C}$$



4) Calculer la chaleur perdue par le système formé par les deux réservoirs.

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = -5282,9 \text{ kJ}$$

$$\text{donc : } W = 0$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$T_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_b \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

SMIA2

$$u_b \left(\frac{P_b}{T_b} + \frac{T_b}{d-b} \right) = u_a \left(\frac{P_a}{T_a} + \frac{T_a}{d-a} \right)$$

3) Pour le gaz d'équation (F) donner l'expression de la différentielle de l'énergie interne molaire en fonction de T , V la constante a et la différentielle dT et dV

4) On fait subir à ce gaz une transformation réversible isotherme du volume molaire V_1 au volume molaire V_2 . Déterminer lors de cette transformation le travail molaire échangé par ce gaz.

$$\delta q = C_V dT + T \left(\frac{dP}{dT} \right)_V dV$$

$$dU = \delta q + \delta w = -P dV$$

$$dU = C_V dT + \left(T \left(\frac{dP}{dT} \right)_V - P \right) dV$$

$$\delta w = -P dV$$

$$\delta w = \left(-\frac{aT}{V-b} + \frac{a}{TV^2} \right) dV$$

$$P = \frac{aT}{V-b} - \frac{a}{TV^2}$$

$$w = \int_{V_1}^{V_2} \left(-\frac{aT}{V-b} + \frac{a}{TV^2} \right) dV = -aT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V-b} + \frac{a}{T} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^2}$$

$$w = -aT \ln \left(\frac{V_2-b}{V_1-b} \right) + \frac{a}{T} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

b)

$$Q = \Delta U - w \quad \text{la chaleur}$$

$$Q = C_V (T_2 - T_1) + 2T \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} - \frac{a}{T} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$$

