

Cours Analyse I

S1

Chapitre V Dérivabilité

MR HILALI

1) Problème :

Soit f définie sur un voisinage D_f (voisinage à droite ou voisinage à gauche) de $x_0 \in D_f$.

1-1) Approche analytique :

Soit $\Delta x = x - x_0$ un accroissement de la variable en x_0 ($\Delta x \geq 0$ ou $\Delta x \leq 0$)

Alors f subit un accroissement.

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x) - f(x_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\end{aligned}$$

L'accroissement relatif de f est donné par $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ($\Delta x \neq 0$)

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$: mesure le rapport de la variation de f par rapport à celle de la variable.

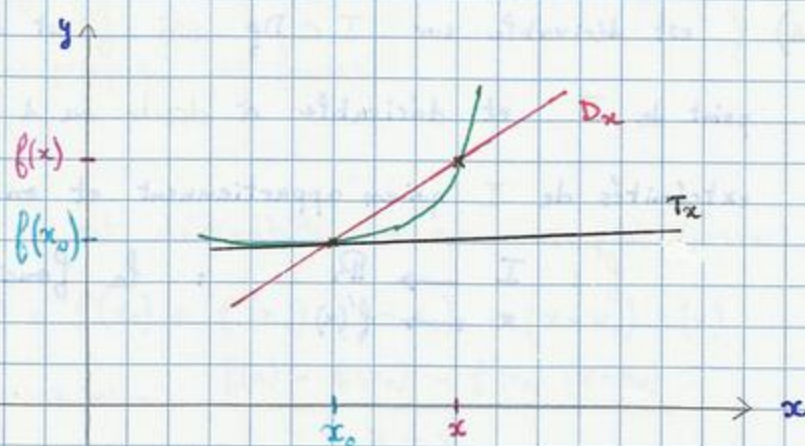
On veut étudier ce rapport quand $\Delta x \rightarrow 0$

Quand cette limite existe, cette quantité s'appellera la dérivée de f en x_0 .

1-2) Approche géométrique.

On note le graphe de f : E_f par :

$$E_f = \{ (x, f(x)) ; x \in D_f \} \subset \mathbb{R}^2$$



$$D_x: y = ax + b, \quad a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{tg } \alpha = \text{pente de } (D_x)$$

Quand $x \rightarrow x_0$ les droites (D_x) peuvent :

- * soit tendre vers une position limite (T_{x_0}) appelée la tangente en $M_0(x_0; f(x_0))$
- * soit ne pas tendre vers aucune position limite.

2) Définitions:

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in D_f.$$

On dit : i) f dérivable en x_0 ssi $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$.

on notera $l = f'(x_0)$ appelée "la dérivée de f en x_0 "

$$\text{ou aussi : } l = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (h = \Delta x)$$

ii) f est dite dérivable à droite (resp. à gauche) ssi :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l^+ \in \mathbb{R}$$

$$(\text{resp. } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l^- \in \mathbb{R})$$

on notera : $l^+ = f'_d(x_0)$ = dérivée à droite de f en x_0 .

$l^- = f'_g(x_0)$ = dérivée à gauche de f en x_0 .

iii) f est dérivable sur $I \subset D_f$ ssi f est dérivable en tout point de I et dérivable à droite ou à gauche sur les extrémités de I qui en appartiennent et on note :

$$f': \begin{matrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{matrix} : \text{ la fonction dérivée.}$$

iv) f est dite de classe C^1 sur $I \subset Df$ ssi la fonction dérivée est de classe C^0 (c'est-à-dire continue).

Exemple :

a) $f(x) = \sin x$; $Df = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right) \cos x_0 + \sin x_0 \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right) \cos x_0 - \sin x_0 \left(\frac{2 \sin^2 \frac{h}{2}}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin h}{h} \right) \cos x_0 - \left(\sin x_0 \sin \frac{h}{2} \right) \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) \\ &= \cos x_0. \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $n \geq 2$

• $x_0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin \frac{1}{x} = 0$
car : $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ est bornée.

3) Propriétés :

3-1) Dérivabilité et continuité :

P_1 : Si f est dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ est continue en x_0

La réciproque est fautive.

Preuve :

• Si f est dérivable en x_0 , on peut écrire ; $\forall x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

$$\text{où : } \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

on a $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Réciproque:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ continue en 0

D'autre part : $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Caractérisation séquentielle de la limite:

$$U_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$V_n = -\frac{1}{n} \rightarrow 0 ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(-\frac{1}{n}) - f(0)}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ n'existe pas

ou bien : utiliser la limite à droite et à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

P_2 : f est dérivable en x_0 ssi $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable à droite et à gauche} \\ \text{de } x_0 \text{ et } f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{array} \right.$

En effet: c'est évident en: $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ existe $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x)$

on applique : $h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

4) Opérations:

4-1) Combinaison linéaire:

Si U et V sont dérivables en x_0 alors :

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, $\alpha U + \beta V$ est dérivable en x_0 et :

$$(\alpha U + \beta V)'(x_0) = \alpha U'(x_0) + \beta V'(x_0)$$

car: $\Delta(\alpha U + \beta V) = \alpha \Delta U + \beta \Delta V$

$$\frac{\Delta(\alpha U + \beta V)}{\Delta x} = \alpha \frac{\Delta U}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

4-2) Produit:

On a la formule de Leibniz

Si U, V dérivables en x_0 alors UV est dérivable en x_0

et $(UV)'(x_0) = U'(x_0) V(x_0) + U(x_0) V'(x_0)$

car: $\Delta UV = U(x)V(x) - U(x_0)V(x_0)$

$$= U(x)V(x) - U(x)V(x_0) + U(x)V(x_0) - U(x_0)V(x_0)$$

$$= U(x)\Delta V + V(x_0)\Delta U$$

$$\Delta(UV) = U\Delta V + V(x_0)\Delta U$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta(UV)}{\Delta x} = U(x) \frac{\Delta V}{\Delta x} + V(x_0) \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Si $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$ donc :

$$U(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} U(x_0) \quad (P_1)$$

$$\begin{cases} \frac{\Delta V}{\Delta x} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} V'(x_0) \\ \frac{\Delta U}{\Delta x} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} U'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta(UV)}{\Delta x} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} U(x_0) V'(x_0) + U'(x_0) V(x_0)$$

4-3) Quotient:

Si U et V sont dérivables en x_0 alors $\frac{U}{V}$ est dérivable en x_0 et,

$$\left(\frac{U}{V}\right)'(x_0) = \frac{U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{V^2(x_0)}$$

En effet

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\left(\frac{U}{V}\right)}{\Delta x} &= \frac{\frac{U}{V}(x) - \frac{U}{V}(x_0)}{\Delta x} = \frac{U(x)V(x_0) - U(x_0)V(x)}{V(x)V(x_0)\Delta x} \\ &= \frac{U(x)V(x_0) - U(x_0)V(x_0) + U(x_0)V(x_0) - U(x_0)V(x)}{V(x)V(x_0)\Delta x} \\ &= \frac{V(x_0)\Delta U - U(x_0)\Delta V}{V(x)V(x_0)\Delta x} \\ &= \frac{V(x_0)\frac{\Delta U}{\Delta x} - U(x_0)\frac{\Delta V}{\Delta x}}{V(x)V(x_0)} \end{aligned}$$

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta U}{\Delta x} \rightarrow U'(x_0) \\ \frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow V'(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta\left(\frac{U}{V}\right)}{\Delta x} = \frac{V(x_0)U'(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{(V(x_0))^2}$$

4-4) Composition:

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

On suppose $\begin{cases} f \text{ dérivable en } x_0 \\ g \text{ dérivable en } y_0 = f(x_0) \end{cases}$

Alors: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$

En effet:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(g \circ f)}{\Delta x} &= \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ \Rightarrow y = f(x) &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \times \frac{y - y_0}{x - x_0} \end{aligned}$$

SMIA2

$$= \frac{\Delta g}{\Delta y} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{\Delta g}{\Delta y} \times \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Si $x \rightarrow x_0$ alors :

$$\begin{cases} y = f(x) \xrightarrow{\text{continuité}} f(x_0) = y_0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \\ \frac{\Delta g}{\Delta y} \rightarrow g'(y_0) \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \end{cases}$$

Exemple :

a) $f(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$g(y) = \sin y$$



$$h(x) = g \circ f(x)$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t + \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{2}}{t - x} = \frac{t - x}{t - x} = 1$$

$$g'(y) = \cos y$$

$$\Rightarrow h'(x) = \cos f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

b) $h(x) = x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) = x$$

$$h_n(x) = f(x) \times \dots \times f(x) = f^{n-1}(x) \times f(x)$$

$$h'_n(x) = (f^{n-1})'(x) \times x + f^{n-1}(x)$$

$$h'_n(x) = x h'_{n-1}(x) + h_{n-1}(x)$$

Pour $n=2$: $h'_2(x) = 2x$

Par récurrence, on montre que : $h'_n(x) = n x^{n-1}$

* Autre façon :

$$\begin{aligned}(f_1 \dots f_n)' &= f_1' f_2 \dots f_n + f_2' f_1 f_3 \dots f_n + \dots + f_1 \dots f_{n-1} f_n' \\ &= \sum_{k=1}^n f_k' f_1 \dots f_{k-1} f_{k+1} \dots f_n\end{aligned}$$

$$(fgh)' = f'gh + g'fh + h'fg$$

$$\begin{aligned}\text{donc : } (x^n)' &= (x \times \dots \times x)' \\ &= x' x^{n-1} + x x^{n-2} \dots + x x^{n-1} \\ &= n x^{n-1}\end{aligned}$$

* Autre façon :

$$\begin{aligned}h_n'(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{h_n(t) - h_n(x)}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t-x)(t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1})}{t(-x)} \\ &= n x^{n-1}\end{aligned}$$

c) $h(x) = \sin u(x)$

$$\begin{aligned}h'(x) &= (\sin \circ u)'(x) \\ &= \sin' u(x) \times u'(x)\end{aligned}$$

$$(\sin u)'(x) = u'(x) \cos u(x)$$



4-5) Dérivé de la fonction réciproque :



Soit $y_0 \in J$ tel que : $f'(\tilde{f}^1(y_0)) \neq 0$ ($x_0 = \tilde{f}(y_0)$)

$$\text{Alors : } (\tilde{f}^1)'(y_0) = \frac{1}{f'(\tilde{f}^1(y_0))}$$

Preuve : $\frac{\Delta \tilde{f}^1}{\Delta y} = \frac{\tilde{f}^1(y) - \tilde{f}^1(y_0)}{y - y_0}$

Si on pose : $y = f(x) \Rightarrow y_0 = f(x_0)$

$$\frac{\Delta \bar{f}^{-1}}{\Delta y} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{\Delta x}{\Delta f}$$

$$= \frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

$$y \rightarrow y_0 \Rightarrow x \rightarrow x_0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) = f'(\bar{f}^{-1}(y_0)) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\Delta f}{\Delta x}} \Rightarrow \frac{1}{f'(\bar{f}^{-1}(y_0))}$$

ou bien :

$$(\bar{f}^{-1} \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow (\bar{f}^{-1} \circ f)'(x) = x' = 1$$

$$\text{or: } (\bar{f}^{-1} \circ f)'(x_0) = (\bar{f}^{-1})'(f(x_0)) \times f'(x_0) = 1$$

