

Cours Analyse I

S1

Chapitre IV Fonctions de la variable réelle

MR HILALI

1) Généralité:

Soit f une fonction dépendant d'une variable réelle notée x et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f: x \mapsto f(x)$$

On peut définir:

(i) Domaine de définition D_f de f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ a un sens}\}$$

Exemple:

(a) $f: [-1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{\sqrt{x+8}}$$

$$D_f = \{x \in [-1, 4] / x+8 > 0\}$$

$$= [-1, 4]$$

(b) $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} n+1 & x=1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & , x=1 \\ \frac{1}{1-x} & , |x| < 1 \\ +\infty & , x > 1 \end{cases}$$

n'existe pas

$$D_f =]-1, 1[$$

Remarque: On exige que D_f est une réunion d'intervalle = domaine

Exemple: $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 3 & , x = -1 \end{cases}$

$$D_f = [0, +\infty[\cup \{-1\}$$



puisque D_f soit un domaine on écart -1

On prend alors $D_f = [0, +\infty[$ pour qu'il soit un domaine.

2) Voisinage.

On rappelle que si $x_0 \in [-\infty; +\infty]$

(a) D_f voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi $\exists \alpha > 0 /]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset D_f$

(b) D_f voisinage de $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) ssi $\exists A > 0 / [A, +\infty[\subset D_f$
(resp. $]-\infty, A] \subset D_f$)

(c) D_f est un voisinage pointé de $x_0 \in \mathbb{R}$ ssi

$$\exists \alpha > 0 /]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \subset D_f, x_0 \notin D_f$$

(d) D_f voisinage à droite (resp. à gauche) de $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\text{ssi } \exists \alpha > 0 / [x_0, x_0 + \alpha[\subset D_f$$

$$(\text{resp. }]x_0 - \alpha, x_0] \subset D_f)$$

(e) D_f voisinage pointé à droite (resp. à gauche)

$$\text{de } x_0 \text{ ssi } \exists \alpha > 0 /]x_0, x_0 + \alpha[\subset D_f$$

$$(\text{resp. }]x_0 - \alpha, x_0[\subset D_f)$$

f qu'en veut analyser au voisinage x_0 doit être définie sur l'un de type des domaines ci-dessus.

Exemple.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x(x-1) > 0\} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

D_f voisinage de tous les $x_0 \in D_f$



D_f voisinage de $\pm\infty$

D_f voisinage pointé à gauche de 0

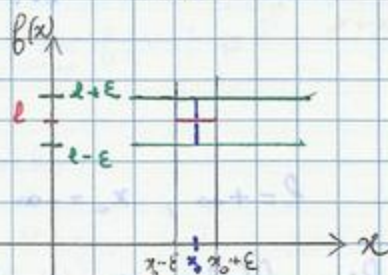
D_f voisinage pointé à droite de 1

3) Limite de f en x_0 :

3-1) Limite finie en $x_0 \in \mathbb{R}$

On veut donner un sens à $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Géométriquement:



Définition: $f(x)$ admet la limite l quand x tend vers x_0

et on note: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

ssi: $\forall \epsilon > 0$ ($f(x)$ voisin de l) $\exists \alpha > 0$ (x voisin de x_0)

tel que: $\forall x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \cap D_f$ alors $f(x) \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall |x - x_0| < \alpha, x \neq x_0 \quad |f(x) - l| < \epsilon$

3-2) Autres définitions

(a) Par les voisinages: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ssi

$\forall V_\epsilon$ voisinage élémentaire de l ($V_\epsilon =]l - \epsilon, l + \epsilon[$)

alors $\bar{f}^{-1}(V_\epsilon) = \{x \in D_f / f(x) \in V_\epsilon\}$ et un voisinage de x_0

En effet:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ ($V_\epsilon =]l - \epsilon, l + \epsilon[$) $\exists \alpha > 0 /$
 $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \cap D_f : |f(x) - l| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \forall V_\epsilon =]l - \epsilon, l + \epsilon[, \exists \alpha > 0 \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$

on a $f(x) \in]l - \epsilon, l + \epsilon[\Leftrightarrow x \in \bar{f}^{-1}(]l - \epsilon, l + \epsilon[)$

$\Leftrightarrow \forall V_\epsilon =]l - \epsilon, l + \epsilon[\exists \alpha > 0 /]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \subset \bar{f}^{-1}(V_\epsilon)$

$\Leftrightarrow \forall V_\epsilon =]l - \epsilon, l + \epsilon[\Rightarrow \bar{f}^{-1}(V_\epsilon)$ voisinage pointé de x_0 .

Extension de la limite :

on prend $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Alors d'après 3-2 on peut étendre la limite de la façon suivante :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ssi $\forall V$ voisinage élémentaire de l alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0

Exemple : $l = +\infty$, $x_0 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0 \quad (V =]A; +\infty[\text{ voisinage élémentaire de } +\infty)$

$\exists B > 0 /]-\infty, -B[\subset f^{-1}(V)$

$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 / \forall x < -B \Rightarrow f(x) > A$

(b) Caractérisation séquentielle de la limite :

$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $l \in \{\pm\infty\}$ alors on a :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (U_n) \text{ une suite qui converge vers } x_0$
alors la suite $(f(U_n))$ converge vers l

En effet :

$(\Rightarrow)$ Soit $(U_n) / \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = x_0$

Montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(U_n) = l$?

on prend par exemple $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N \quad |f(U_n) - l| < \varepsilon$

Hypothèse :

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Rightarrow \exists \alpha > 0 / \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} : |f(x) - l| < \varepsilon$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = x_0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N : |U_n - x_0| < \alpha$

N convient.

Si $n \geq N \xRightarrow{(ii)} U_n \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \xRightarrow{(i)} |f(U_n) - l| < \varepsilon$

($\Leftarrow$) Par l'absurde supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n = \frac{1}{n} \quad \exists U_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[\quad / \quad |f(U_n) - l| \geq \varepsilon$$

$$\text{or } \forall n \quad |U_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(U_n) - l| \geq \varepsilon$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(U_n) \neq l \quad (\text{Contradiction})$$

(c) par le critère de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \left(\begin{array}{l} \exists V \text{ voisinage élémentaire pointé} \\ \text{de } x_0 \text{ tel que :} \\ \forall (x, y) \in V^2 \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \end{array} \right)$$

la propriété s'appelle "le critère de Cauchy"

En effet:

($\Rightarrow$) Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists ? V$ voisinage élémentaire de x_0 tel que :

$$\forall (x, y) \in V^2 \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Hypothèse: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \exists V$ voisinage pointé de x_0 .

$$\text{tel que : } \forall x \in V \quad |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

V convient car si $(x, y) \in V^2$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |l - f(y)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Montrons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe par la caractérisation séquentielle.

Soit (U_n) avec $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = x_0$ ($U_n \neq x_0$) alors $(f(U_n))_n$ converge vers une même limite notée l ?

Hypothèse: Soit $\varepsilon > 0$

$$(i) \quad \exists V \text{ voisinage de } x_0 \quad / \quad \forall (x, y) \in V \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = x_0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall n \geq N \quad U_n \in V$$

$$\text{donc : } \forall n \geq N, \forall m \geq N \quad |f(U_n) - f(U_m)| < \varepsilon$$



Conclusion: $f(u_n)$ est de Cauchy $\Rightarrow \exists l_1 / \lim f(u_n) = l_1$

Soit (v_n) une autre suite qui converge vers x_0 alors :

$$\lim f(v_n) = l_2$$

Problème : $l_1 = l_2$?

$$\text{Or: soit } \varepsilon > 0 \quad \left| \begin{array}{ll} \exists N_1 & \forall n \geq N_1 & u_n \in V \\ \exists N_2 & \forall n \geq N_2 & v_n \in V \end{array} \right.$$

$N = \max \{N_1, N_2\}$ alors :

$$\forall n \geq N \xrightarrow{(i)} |f(u_n) - f(v_n)| < \varepsilon$$

$$n \rightarrow \infty \quad |l_1 - l_2| \leq \varepsilon \Rightarrow l_1 = l_2$$

3-3) Exemples :

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$?

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists ? x > 0 / \forall x \in]1-x, 1+x[- \{e\}$

$$|e^x - e| < \varepsilon$$

$$|e^x - e| = |e(e^{x-1} - 1)| < 3 |e^{x-1} - 1|$$

$$(e^u - 1 = u e^c \quad c \in [0, 1[)$$

$$\Rightarrow |e^x - e| < 3 |x-1| e^c \quad (x \ll 1)$$

$$< 3 |x-1| e$$

$$< \varepsilon$$

$$\text{Si } |x-1| < \frac{\varepsilon}{3e}$$

$$\text{on prend } \alpha = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3e} \right\}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$



$$\text{Aire (OAB)} < \text{Aire (OAB)} < \text{Aire (OAC)}$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2} < \frac{x}{2} \times 1^2 < \frac{1 \times \tan \alpha}{2}$$

$$\frac{\sin x \cos x}{x} < \frac{x}{x} < \frac{\sin x}{x \cos x} \quad (x > 0)$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\text{Car } |\cos x - 1| \leq |x - 1| \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\text{Conclusion: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



4) Opérations sur les limites:

4-1) Combinaison linéaire:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$$

$$\text{Problème: } \lim_{x \rightarrow x_0} [a f(x) + b g(x)] = a \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + b \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}, \quad l_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\} \quad (i = 1, 2)$$

pourvu qu'on n'a pas la forme indéterminée $+\infty - \infty$

En effet: on va utiliser la caractérisation séquentielle:

si (U_n) , $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = x_0$ ($U_n \in D_f \setminus \{x_0\}$) alors:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f(U_n) = l_1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} g(U_n) = l_2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a f(U_n) + b g(U_n)) = a l_1 + b l_2$$

si $a l_1 + b l_2 \neq +\infty - \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (a f + b g)(x) = a l_1 + b l_2$$

4-2) Produit:

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \times l_2$$

pourvu qu'on n'a pas la forme déterminée: $0 \times \infty$

$$\text{En effet: } U_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_1 \\ g(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(U_n) g(U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f g)(U_n) = l_1 \times l_2$$

si $l_1 \times l_2 \neq 0 \times \infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = l_1 \times l_2$$



4-3) Quotient:

On suppose $g(x) \neq 0$ sur un voisinage pointé de x_0

On a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

pourvu qu'on n'a pas $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{l_1}{0}$ (pas de problème si $l_2 = 0^+$ ou 0^-)

En effet: $U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow \begin{cases} f(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_1 \\ g(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(U_n)}{g(U_n)} \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$

si $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ou $\frac{l_1}{0}$ $l_i \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

5) Composition:

$$D_f \ni \{x_0\} \xrightarrow{f} D_g \ni \{y_0\} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \end{cases} \Rightarrow x_0, y_0, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Alors: $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l$

En effet: Soit $(U_n)_n$ ($U_n \in D_f \setminus \{x_0\}$) telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = x_0$$

Problème: $\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(U_n) = l$?

$$U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow V_n = f(U_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 \Rightarrow g(V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l$$

Corollaire: si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f^k(x) = l^k$

En effet :

$$\text{i) } g(y) = |y| \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = |y_0| \text{ car}$$
$$|g(y) - g(y_0)| = ||y| - |y_0|| \leq |y - y_0| \quad \text{si } y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{si } y_0 = \pm\infty \quad \lim_{y \rightarrow y_0} |y| = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = |l| \quad \text{car } y = f(x) \rightarrow l = y_0$$

$$\text{ii) on prend } g(y) = y^k$$
$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = y_0^k \quad (\text{liste du produit})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = l^k$$

6) Limite des fonctions monotones:

Soit f une fonction monotone.

Théorème:

ona

$$\text{(i) si } f \text{ est croissante, } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \inf_{x > x_0} f$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \sup_{x < x_0} f$$

$$\text{ii) si } f \text{ est décroissante alors } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x > x_0} f \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf_{x < x_0} f \end{cases}$$

iii) si f est monotone sur un intervalle I

alors si: $f(I) = J$ intervalle et $x_0 \in I$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Preuve:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \stackrel{?}{=} \inf_{x > x_0} f$$

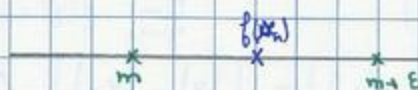
$$\text{on pose } A = \{f(x), x > x_0\}$$

$$\text{si } A \text{ est minorée soit } m = \inf A = \inf_{x > x_0} f$$



Soit $\varepsilon > 0$, $\exists ? W$ voisinage pointé de x_0 tel que:
 $\forall x \in W \quad |f(x) - m| < \varepsilon$

Hypothèse: $m = \inf A$ d'après la caractérisation analytique de l'inf



$$\exists x_1 > x_0 / m \leq f(x_1) < m + \varepsilon$$

$$f \text{ croissante} \Rightarrow \forall x_0 < x \leq x_1$$

$$m - \varepsilon < m \leq f(x) \leq f(x_1) < m + \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon \quad \forall x \in W =]x_0, x_1[$$

on peut de la même manière prendre $x_0 = -\infty$ ou A non minorée.

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$?

si f est croissante, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) = l_1$

$l_1 \in \mathbb{R}$ car $\forall x > x_0, f(x_0) \leq f(x)$

$$\Rightarrow A = \{f(x), x > x_0\} \text{ est minorée par } f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0) \leq l_1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f = \sup B = l_2$$

$$B = \{f(x), x < x_0\}$$

$$\forall x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

$$B \text{ majorée par } f(x_0) \Rightarrow l_2 \in \mathbb{R} \text{ et } l_2 \leq f(x_0)$$

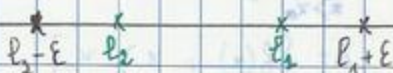
$$\text{on a } l_2 \leq f(x_0) < l_1$$

Problème: A-t-on: $l_1 \stackrel{?}{=} l_2 = f(x_0)$

Dans ce cas: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Par l'absurde: si $l_2 < l_1$



Soit ε assez petit, $\exists x_1 > x_0$, $l_2 \leq f(x_1) < l_1 + \varepsilon$

$\exists x_2 < x_0$, $l_2 - \varepsilon < f(x_2) \leq l_2$

$f[x_2, x_1]$ intervalle $\Rightarrow [f(x_2), f(x_1)] \subset f[x_2, x_1]$

or $\forall y \in]l_2, l_1[$, $\forall x \in I$, $f(x) \neq y$



SMIA2

7) Continuité:

Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ avec D_f un domaine

7-1) Définition:

Soit $x_0 \in D_f$, on dit que f est continue en x_0

ssi: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ / $\forall x \in D_f \cap]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$

on dit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

7-2) Caractérisation séquentielle:

on a l'équivalence:

i) f continue en x_0

ii) $\forall (u_n) \in D_f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(x_0)$

Il suffit d'appliquer la caractérisation séquentielle de la limite.

7-3) Continuité des fonctions monotones:

Si on applique 6) on aura:

f monotone sur un intervalle I et $f(I)$ est un intervalle
alors f continue en tout point x_0 de I .

Remarque:

La réciproque est un cas particulier du théorème
des valeurs intermédiaires (TVI).

7-4) Théorèmes fondamentaux:

7-4.1) Si f et g continue en x_0 alors:

- i) $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0
- ii) f/g est continue en x_0
- iii) $\frac{f}{g}$ continue en $x_0 \iff g(x_0) \neq 0$



7-4.2) Composition.

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{f} & J & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x_0 & \xrightarrow{f} & y_0 & \xrightarrow{g} & (g \circ f)(x_0) \end{array}$$

si f est continue en x_0 et g continue en y_0 alors $g \circ f$ est
continue en x_0 .

7-4.3) Fonction Lipschitzienne:

Définition: f est dite Lipschitzienne sur I , $\forall k \geq 0$ tel que:

$$\forall (x, y) \in I^2 \text{ alors } |f(x) - f(y)| \leq k$$

$$\bullet \text{ si } k=0 \iff f = \text{cte}$$

$\bullet$ si $0 \leq k < 1$: on dit que f est contractante.

Proposition: si f est lipschitzienne sur I alors f est continue
en tout point x_0 de I .

Preuve: Soit $x_0 \in I$, soit $\epsilon > 0 \exists ? \alpha > 0$ tel que:

$$\forall x, |x - x_0| < \alpha \text{ alors } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Hypothèse: $\exists k \mid \forall n \in I, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$

on prend $\frac{\epsilon - E}{k}$

7-4.5) Théorème des valeurs intermédiaires (TVI):

Soit $f: I \text{ intervalle} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Approche algébrique:

Soit l'équation $f(x) = c$, $x \in I$, l'inconnue: x , c est donné

Problème:

Dans quelle condition on peut trouver au moins une solution?

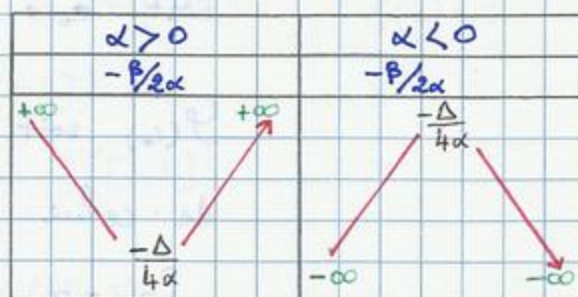
Exemple:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$$

$f(x) = 0$ admet une solution $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$$\cdot \text{ si } \alpha > 0 \quad \begin{cases} \sup f = +\infty \\ \inf f = -\frac{\Delta}{4\alpha} \end{cases}$$

$$\cdot \text{ si } \alpha < 0 \quad \begin{cases} \sup f = -\frac{\Delta}{4\alpha} \\ \inf f = -\infty \end{cases}$$



$f(x) = 0$ admet une solution $c > 0 \in]m, M[$

on veut généraliser cette solution et avoir $f(x) = c$ admettre au moins une solution si $c \in]m, M[$

Prenons: $m = \inf f \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$M = \sup f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Théorème de valeurs intermédiaires:

Si $a \in]m, M[$ alors l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution.

Approche géométrique de TVI:

Passage du domaine soit la droite horizontale $y = c$.



TVI dit que pour aller de la région 1 vers la région 2, il est obligé de passer par la domaine.

Preuve: par dichotomie (subdivisé par 2)

on pose $g(x) = f(x) - c$

$f(x) = c \Leftrightarrow g(x) = 0$ g est continue $\begin{cases} m_1 = \inf g \\ M_1 = \sup g \end{cases}$

$c \in]m_1, M_1[\Leftrightarrow 0 \in]m_1, M_1[$

$m_1 < 0$ et $M_1 > 0$

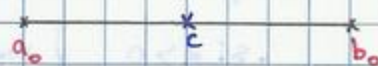
donc $\exists [a_0, b_0] \in I^2$ / $a_0 < b_0$ et $g(a_0)g(b_0) < 0$

car $m_1 = \inf \{g(x) / x \in I\} < 0$

$\forall x_2 \in]m_1, 0[$, m_1 n'est pas un minirant de $\{g(x) / x \in I\}$

$\Rightarrow \exists a / m_1 \leq g(a) < m_2 < 0$

soit $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$



$g(c_0)$ soit ≥ 0 , soit ≤ 0 donc son image de $g(c_0) \neq 0$

de celui de $g(a_0)$ ou $g(b_0)$ on note $[a_1, b_1]$ avec:

$$\begin{cases} a_1 = a_0 & , & b_1 = c_0 & \text{si } g(a_0)g(c_0) \leq 0 \\ a_1 = c_0 & \text{et } b_1 = b_0 & & g(b_0)g(c_0) \leq 0 \end{cases}$$

$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$, on continue de cette façon

on peut construire $[a_n, b_n]$ avec : $g(a_n) \cdot g(b_n) \leq 0$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

donc (a_n) et (b_n) solution adjacentes $\Rightarrow$ elles convergent

vers une même limite $\alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$

g continue $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n)g(b_n) = g^2(\alpha) \leq 0 \Rightarrow g(\alpha) = 0$

Remarque:

La preuve donne uniquement une application de solution et non pas exactement une expression de la solution.

Exemple:

$$f(x) = 5e^{\sqrt{x}} = (1+x^3 + 7x^2) + \sqrt{e^{2x}}$$



$$f(x) = f, \quad x \geq 0$$

$$f(0) = 6 \Rightarrow m \leq 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow M = \sup f = +\infty$$

$$\forall \varepsilon \in]m, M[\Rightarrow f(x) = \varepsilon \text{ admette une solution.}$$

Corollaire.

si f est continue sur un segment $[a, b]$

alors $f([a, b]) = [m, M]$: l'image d'un segment est un segment.

Preuve: $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow f([a, b]) \subset [m, M]$

TVI: $\forall c \in]m, M[\xrightarrow{\text{TVI}} \exists x \in [a, b], \quad f(x) = c$

$$\Rightarrow c \in f([a, b])$$

$$\Rightarrow]m, M[\subset f([a, b])$$

Problème: $m \in f([a, b])$ et $M \in f([a, b])$

D'après la caractérisation séquentielle de sup et inf

$$\Rightarrow \exists (a_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}, \quad \lim f(a_n) = m$$

$$\exists (b_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}, \quad \lim f(b_n) = M$$

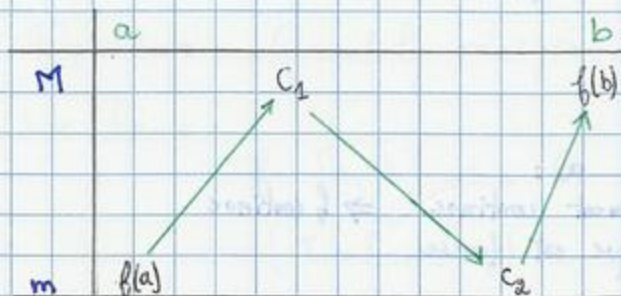
(a_n) et (b_n) suites bornées $\Rightarrow$ D'après Bolzano Weierstrass

$$\exists a_{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \in \overline{[a, b]} = [a, b], \quad \exists b_{q_n} \rightarrow \beta$$

$$m = l \quad f(a_{p_n}) = f(\alpha) \text{ donnée } P, \quad f(b_{q_n}) = f(P) = M$$

$$M = \max \{c_1, f(b)\}$$

$$m = \min \{c_2, f(a)\}$$



8)

8-1) Continuité uniforme.

f uniformément continue $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Différence avec la continuité réside dans l'existence de α

Dans la continuité : α dépend de ε et du point où on étudie la continuité

Dans l'uniforme continuité : α dépend uniquement de ε .

Négation:

f n'est pas uniformément continue ssi :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0 \quad \exists (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$$

$$|y_n - x_n| \leq \alpha \text{ et } |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

$$\text{Si : } \alpha = \frac{1}{n} \Rightarrow (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2, |y_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{et } |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$$

Exemples.

(a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue : $x \mapsto \sqrt{x}$

$$|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists ? \alpha > 0$, $\forall |y - x| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

$$\text{or : } |f(y) - f(x)| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|} \leq \sqrt{\alpha} = \varepsilon$$

(b) $f: \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue.
 $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\forall ? \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, \exists (x_n, y_n), |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{et } \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| \geq \varepsilon$$

$$\text{Soit } x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{2n}$$

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| = n \geq 1 = \varepsilon$$

8-2) Propriétés:

Théorème 1: On a :

i) f uniformément continue $\Rightarrow f$ continue
la réciproque est fausse

ii) f lipschitzienne $\Rightarrow f$ uniformément continue
la réciproque est fausse.

Preuve:

i) Soit $x_0 \in I$, f continue en x_0

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Hypothèse: $\exists \alpha > 0$, $\forall (y, x) : |y - x| < \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$
 α convient et on prend $y = x_0$

Réciproque: $g(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $I = \mathbb{R}^{*+}$ mais
non uniformément continue:

$$|f(y) - f(x)| \leq k |y - x| < k \alpha = \varepsilon$$

on prendra: $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$

Réciproque: $f(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue mais
non lipschitzienne.

Rappel: f lipschitzienne $\Leftrightarrow \forall y \neq x ; \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| =$
 $= |\text{Taux d'accroissement relatif}|$ est borné
 $\Leftrightarrow \sup_{y \neq x} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \in \mathbb{R}$

SMIA 2

Pour: $f(x) = \sqrt{x}$

$$y = 0, x = \frac{1}{n}, \left| \frac{f(y) - f(x)}{x - 0} \right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

donc: $\left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} ; y \neq x \right\}$ n'est pas borné.

Problème: Quand la réciproque de (1) est vraie?

8-3) Théorème de Heine:

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

($I = [a, b]$ est un segment), alors:

f continue $\Leftrightarrow f$ uniformément continue

Preuve:

($\Leftarrow$) Déjà vu.

($\Rightarrow$) Par l'absurde, on suppose que f n'est pas uniformément continue donc :

$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \eta > 0, \exists (x_n, y_n) \in [a, b] \mid |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$

$(x_n) \in [a, b]$ suite bornée $\xrightarrow{\text{TBW}} \exists (x_{p_n})$ qui converge vers $c_1 \in [a, b]$

$(y_n) \in [a, b]$ suite bornée $\xrightarrow{\text{TBW}} \exists (y_{p_n})$ qui converge vers c_2 .

(x_{p_n}) est aussi une sous suite de $(x_n) \Rightarrow \lim x_{p_n} = c_1$

$$|x_{p_n} - y_{p_n}| < \frac{1}{p_n} \rightarrow 0 = |c_1 - c_2| \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$|f(x_{p_n}) - f(y_{p_n})| \geq \varepsilon$$

$$n \rightarrow \infty \quad , \quad f(x_{p_n}) \rightarrow f(c_1)$$

$$f(y_{p_n}) \rightarrow f(c_1)$$

$$\Rightarrow |f(x_{p_n}) - f(y_{p_n})| \rightarrow 0 \geq \varepsilon > 0 \text{ absurde.}$$

9) Prolongement par continuité :

9-1) Définition.

Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ avec D_f voisinage de x_0 (à gauche, à droite)

Exemple:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 2\left(\frac{1 - \cos^2 x}{x^2}\right) & , x < 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^*$ voisinage pointé de 0

Définition: On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 ssi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

et le prolongement par continuité est défini



par : $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq x_0 \\ l & , x = x_0 \end{cases}$

Exemple : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} & , x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \frac{(1 - \cos x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \\ 2 \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) & , x < 0 \end{cases}$$



10) Fonction réciproque :

$$f: I \rightarrow J \quad , \quad I, J \text{ intervalles.}$$

10-1) Définition :

On dit que $g: J \rightarrow I$ est la fonction réciproque de f ssi :

$$\begin{cases} (g \circ f)(x) = x, & \forall x \in I \\ (f \circ g)(y) = y, & \forall y \in J \end{cases}$$

Remarque : Interprétation Algébrique :

f admet une fonction réciproque ssi l'équation :

$f(x) = y, \quad x \in I, \quad y \in J$ admet une unique solution

par rapport à x notée $g(y)$.

Exemple:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

$$f(x) = y = x^2 - 3x + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 - y = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(2 - y) = 1 + 4y, \quad y \in J = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1+4y}}{2} \geq \frac{3}{2}, \quad x_1 = g(y)$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{1+4y}}{2} \leq \frac{3}{2}, \quad \text{fausse}$$



Problème: Sous quelles conditions f admet une fonction réciproque?

10-2) Caractérisation des fonctions réciproques:

$f: I \rightarrow J$ continue.

Théorème: f admet une fonction réciproque ssi f est strictement monotone (et continue).

Preuve:

($\Rightarrow$) Soit: $g: J \rightarrow I$ $\begin{cases} f \circ g(y) = y, \forall y \in J \\ g \circ f(x) = x, \forall x \in I \end{cases}$

On suppose que f n'est pas strictement monotone sur I

donc $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ ne garde pas un signe constant ou nul.

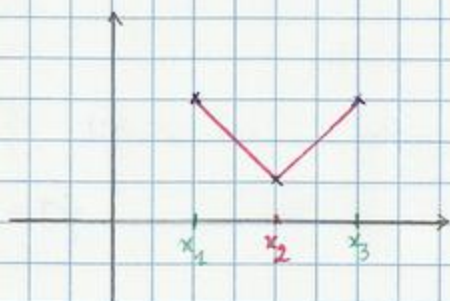
(a) s'il existe $x_1 \neq x_2$ avec $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow g \circ f(x_1) = x_1 = g \circ f(x_2) = x_2 \quad (\text{absurde } x_1 \neq x_2)$$

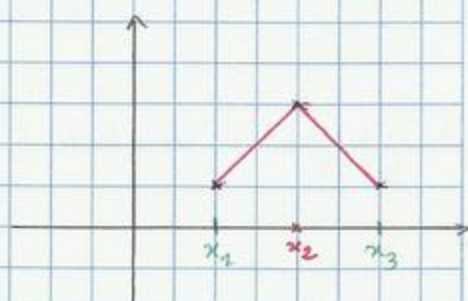
(b) $\exists x_1 < x_2 < x_3$ tel que: $\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) \cdot \left(\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \right) < 0$

$$\Rightarrow (f(x_2) - f(x_1)) (f(x_3) - f(x_2)) < 0$$

cas 1



cas 2



TVI : Pour $c \in \begin{cases} [f(x_2), \min\{f(x_1), f(x_3)\}] & \text{cas 1} \\ [\max\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2)] & \text{cas 2} \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \exists y_1 \in]x_1, x_2[\quad / \quad f(y_1) = c \\ \exists y_2 \in]x_2, x_3[\quad / \quad f(y_2) = c \end{array} \quad \Rightarrow \quad f(y_1) = f(y_2)$$

impossible c'est le cas (a)

SMIA 2