

Cours Analyse I

S1

Chapitre III

Suites numériques

MR HILALI

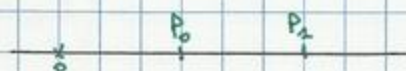
1) Définition: Une suite est la donnée d'une fonction:

$$u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) \stackrel{\text{noté}}{=} u_n$$

Remarque: Une suite peut être définie sur une partie $\mathbb{N}_1$ infinie de $\mathbb{N}$. cette suite peut être réarrangée pour qu'elle soit définie sur $\mathbb{N}$ tout entier:

On pose $p_0 = \min \mathbb{N}_1$



on prend aussi $p_1 = \min (\mathbb{N}_1 \setminus \{p_0\}) \in \mathbb{N}_1$

par récurrence on définit $p_n = \min (\mathbb{N}_1 \setminus \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\})$

$$p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n$$

d'où: $\mathbb{N}_1 = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots\}$

on pose $v_n = u_{p_n}$ $v: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto v_n$

Exemple: $U: 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $2n \mapsto u_{2n}$

on note: $v_n = u_{2n}$

2) Exemples:

(a) suite constante: défini par: $u_n = C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

(b) suite stationnaire: donnée par $u_n = C, \forall n \geq N$

$u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$ sont quelconques.

(c) suite géométrique de raison $q \neq 1$: $u_n = \lambda q^n; (u_0 = \lambda \in \mathbb{R})$

on sait:
$$\begin{cases} u_n = u_m q^{n-m} \\ u_p + \dots + u_n = \frac{u_p - q u_n}{1 - q} \end{cases}$$

(d) suite arithmétique de raison $r \neq 0$: $U_n = a + nr$ ($a = U_0 \in \mathbb{R}$)

On sait :

$$\begin{cases} U_n = U_m + (n-m)r \\ U_p + \dots + U_n = \frac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2} \end{cases}$$

e) Suite arithmético-géométrique :

$$U_{n+1} = a U_n + b, \quad a \neq 1, b \neq 0$$

calculer U_n ?

si on pose $V_n = U_n - l$ où $l = \frac{b}{1-a}$

$$\Rightarrow l = \frac{b}{1-a}$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - l$$

$$= a U_n + b - l$$

$$= a(V_n + l) + b - l$$

$$= a V_n + a l + b - l$$

$$= a V_n + l(a-1) + b$$

$$V_{n+1} = a V_n$$

$$\Rightarrow V_n = V_0 a^n = (U_0 - l) a^n$$

$$\text{d'où : } U_n = V_n + l = (U_0 - l) a^n + l$$

f) Série harmonique :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

g) suite récurrente :

$$\begin{cases} U_0 \text{ donné} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \text{ tel que } f : \text{fonction}$$

Exemple : • si $f(x) = c \Rightarrow (U_n)$ suite stationnaire : $U_n = c \quad \forall n \geq 1$

• si $f(x) = x + a \Rightarrow (U_n)$ arithmétique

• si $f(x) = ax \Rightarrow (u_n)$ géométrique

• si $f(x) = ax + b \Rightarrow$ suite arithmético-géométrique

Souvent on utilise la récurrence pour démontrer

une propriété $(P_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} (P_0) \text{ vraie} \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \text{ vraie} \end{cases}$$

B) suite récurrente d'ordre p : ($p \geq 2$)

$$\begin{cases} u_0, \dots, u_{p-1} \text{ données} \\ u_{n+p} = f(u_n, \dots, u_{n+p-1}) \end{cases}$$

Pour $p=1$ c'est une suite récurrente

Souvent ici on utilise la récurrence forte (d'ordre p)

$$\begin{cases} (P_0), \dots, (P_{p-1}) \text{ vraie} \\ \{(P_n), (P_{n+1}), \dots, (P_{n+p-1})\} \Rightarrow P(n+p) \text{ vraie} \end{cases}$$

Exemples: i) $\begin{cases} u_0, \dots, u_{p-1} \text{ données} \\ u_{n+p} = C_0 u_n + C_1 u_{n+1} + \dots + C_{p-1} u_{n+p-1} \end{cases}$
appelée "suite récurrente linéaire d'ordre p "

* Calcul de u_n = ?

On cherche u_n sous forme de $u_n = x^n$

$$\text{donc: } x^{n+p} = C_0 x^n + C_1 x^{n+1} + \dots + C_{p-1} x^{n+p-1}$$

$$\Leftrightarrow x^p - C_{p-1} x^{p-1} - C_{p-2} x^{p-2} - \dots - C_1 x - C_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 0 \text{ où } P \text{ polynôme de degré } p.$$

+ Si $p=1$

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = a u_n : \text{ suite géométrique} \end{cases}$$

$$P(x) = x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

$$\text{d'où : } u_n = \lambda a^n$$

+ si $p=2$

(Suite de Lucas) $\begin{cases} U_0, U_1, \dots \text{ données} \\ U_{n+2} = a U_n + b U_{n+1} \end{cases} \quad (C_0 = a, C_2 = b)$

$$P(x) = x^2 - b x - a$$

$$\Delta = b^2 + 4a$$

• $\Delta > 0$, $x_1 = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2}$, $x_2 = \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2}$

$$U_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = U_0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = U_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha, \beta$$

• $\Delta = 0$, $x_1 = \frac{b}{2}$

$$U_n = (\alpha n + \beta) x_1^n$$

$$\begin{cases} \beta = U_0 \\ (\alpha + \beta) x_1 = U_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha, \beta$$

• $\Delta < 0$, $x_1 = r e^{i\theta}$, $x_2 = r e^{-i\theta}$ ($\sin \theta \neq 0$)

$$U_n = (\alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta) r^n$$

$$\begin{cases} \alpha = U_0 \\ (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta) r = U_1 \end{cases}$$

+ Si : $\begin{cases} U_0, U_1 \text{ données} \\ U_{n+2} = U_n + U_{n+1} \end{cases} \quad (\text{Suite de Fibonacci})$

$$\Delta = 5$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$$

$$U_n = \alpha \varphi^n + (-1)^n \frac{\beta}{\varphi^n}$$

3) Suites et relation d'ordre:

a) Suites monotones:

(U_n) est dite (resp. strictement) monotone ssi elle vérifie



l'une des 2 propriétés :

- i) (U_n) croissante (resp. strictement), $\forall n, U_n \leq U_{n+1}$ ($U_n < U_{n+1}$)
- ii) (U_n) décroissante (resp. strictement), $\forall n, U_{n+1} \leq U_n$ ($U_{n+1} < U_n$)

Remarque: Une suite constante est à la fois croissante et décroissante.

Exemples:
$$\begin{cases} U_0 \text{ donnée} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

- Si f est strictement croissante $\Rightarrow (U_n)$ est monotone plus précisément :

$$\begin{cases} \bullet U_0 < U_1 \Rightarrow (U_n) \text{ strictement croissante} \\ \bullet U_0 = U_1 \Rightarrow (U_n) \text{ constante} \\ \bullet U_0 > U_1 \Rightarrow (U_n) \text{ strictement décroissante} \end{cases}$$

En effet: par récurrence

$$(P_n) \quad U_{n+1} < U_n$$

- pour $n=0$ on a $U_1 < U_0$ vraie

- on suppose $U_{n+1} < U_n$ montrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$

$$\text{or : } U_{n+1} < U_n \Rightarrow f(U_{n+1}) = U_{n+2} < f(U_n) = U_{n+1}$$

- Si f est décroissante alors $(V_n = U_{2n})$ et $(W_n = U_{2n+1})$ sont contrairement monotones.

$$\begin{aligned} \text{En effet: } V_{n+1} &= U_{2n+2} \\ &= f(U_{2n+1}) \\ &= (f \circ f)(V_n) \\ &= g(V_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= U_{2n+3} \\ &= f(U_{2n+2}) = (f \circ f)(U_{2n+1}) = g(W_n) \end{aligned}$$

$g = f \circ f$ croissante

$$\begin{cases} V_0 = U_0, V_1 = U_2 \\ V_{n+1} = g(V_n) \end{cases} \quad \begin{cases} W_0 = U_1 = f(U_0), W_1 = U_3 = f(U_2) \\ W_{n+1} = g(W_n) \end{cases}$$

donc : $(V_n), (W_n)$ monotones de plus

$$\begin{cases} V_0 < V_1 \Rightarrow W_0 > W_1 \\ V_0 = V_1 \Rightarrow W_0 = W_1 \\ V_0 > V_1 \Rightarrow W_0 < W_1 \end{cases}$$

b) Suites majorées, minorées, bornées :

Soit (U_n) une suite

Définition: i) on dit que (U_n) est majorée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$$



ii) (U_n) est dite minorée ssi :

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq U_n$$



iii) (U_n) est dite bornée ssi :

$$\exists m, \exists M / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M$$



Exemple : (a) $U_n = (-1)^n$, $\forall n$ $-1 \leq U_n \leq 1$

(b) $U_n = \sin n - n$

$$\forall n, U_n \leq 1$$

(U_n) est majorée mais non bornée

car si $m \leq U_n \leq 1-n \Rightarrow \forall n, n \leq 1-m$

D'après l'axiome d'Archimède : $\exists n_0 \in \mathbb{N} / 1-m < n_0$

d'où : $n_0 \leq 1-m < n_0$ absurde

4) Convergence des suites.

On veut étudier le comportement de U_n (U_n voisin de l)

quand n est voisin de $+\infty$ ($n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket$)

Ainsi, si on a ce phénomène $\exists l$ où tous les termes de U_n s'entassent autour de l quand $n \gg N$, on l'appelle la convergence.

Sinon on aura la divergence

4-1) Définition: (i) On dit que la suite (U_n) converge ssi :

$\exists l \in \mathbb{R}$ tel que : U_n se trouve dans un voisinage arbitraire quand l devient voisin de $+\infty$,
($\exists N, n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket$).

+ Traduction Mathématique : $\forall \varepsilon > 0$ (voisinage de l), $\exists N \in \mathbb{N}$ (Voisinage de $+\infty$)

telque : $\forall n \geq N$ ($n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket$) $U_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$
($|U_n - l| < \varepsilon$)

on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$

ii) (U_n) diverge ssi $\forall l \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq l$

$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p_n \geq N$ et $|U_{p_n} - l| \geq \varepsilon$

Remarque: Problème d'unicité

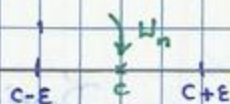
Peut-on avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l'$ avec $l \neq l'$

Réponse: Non, si $l \neq l'$



4-3) Exemples:

(a) $U_n = c, \forall n$



$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = c ?$

Soit $\epsilon > 0, \exists ? N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - c| < \epsilon$

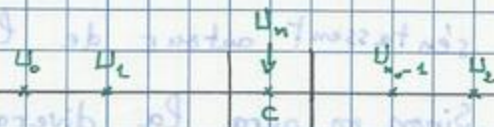
Réolvons l'inéquation en n.

$|U_n - c| < \epsilon$

$|U_n - c| = |c - c| = 0 \quad \forall n \geq 0$

on prend $N = 0$

(b) $U_n = c \quad \forall n \geq n_0$



$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = c ?$

Soit $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - c| < \epsilon$

or $|U_n - c| = 0 < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

on prend $N = n_0$

(c) $U_n = \lambda^n, \quad 0 < \lambda < 1$

$U_n = e^{n \ln \lambda}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 ?$

Soit $\epsilon > 0, \exists ? N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - 0| < \epsilon$

or l'inéquation $|U_n - 0| < \epsilon$ s'écrit : $\lambda^n < \epsilon$

$\lambda^n < \epsilon \Leftrightarrow n \ln \lambda < \ln \epsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \epsilon}{\ln \lambda} \quad (\ln \lambda < 0)$

on prend $N = E\left(\frac{\ln \epsilon}{\ln \lambda}\right) + 1$

(d) $U_n = \lambda^n, \quad \lambda > 1, \quad (U_n) \text{ diverge ?}$

Par l'absurde, supposons qu'il existe l tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$

Soit $\epsilon = 1$ on résout l'inéquation : $|U_n - l| < 1$

or $|U_n - l| \leq |U_n - l| < 1$

$|l - 1| \leq |U_n| \leq |l| + 1$

$\lambda^n \leq |l| + 1$



$$\Rightarrow n \ln \lambda < p_n (|l|+1) \Rightarrow n < \frac{p_n (|l|+1)}{\ln \lambda}$$

la solution $\subset \left[0, E \left(\frac{p_n (|l|+1)}{\ln \lambda} \right) \right]$ qui n'est pas un voisinage de $+\infty$.

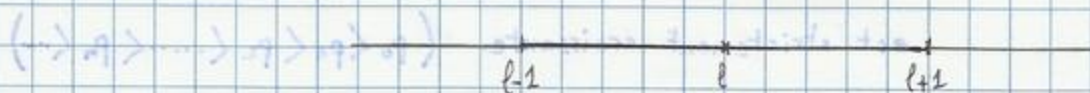
Propriétés:

P₁: Si (u_n) converge alors (u_n) est bornée

En effet: $\exists ? m, \exists ? M / \forall n, m \leq u_n \leq M$

Hypothèse: Soit $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

Soit $\varepsilon = 1, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in]l-1, l+1[$



on prend: $m = \min \{ u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, l-1 \}$

$M = \max \{ u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, l+1 \}$

Remarque: La réciproque est fautive

par exemple: $u_n = (-1)^n; -1 \leq u_n \leq 1$

(u_n) diverge car soit $l \in \mathbb{R}, \lim u_n \neq l$



• $l \leq -1$

$$\varepsilon = \frac{-1-l}{2} > 0$$

$$\forall n, |u_n - l| > \varepsilon$$

• $l = -1$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, |u_{2n} - l| > \frac{1}{2}$$

• $l \in]-1, 1[$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min(l+1, 1-l)$$

donc $\forall n, |U_n - l| > \varepsilon$

$l = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}$

$l > 1, \varepsilon = \frac{l-1}{2}$

P₂: Si (U_n) converge vers l alors toutes ses sous-suite (U_{p_n}) converge vers l .

Définition d'une sous-suite ou suite extraite:

Une sous-suite ou suite extraite d'une suite (U_n) est la donnée d'une suite (V_n) de la forme: $V_n = U_{p_n}$

où: $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$n \mapsto p(n) = p_n$

est strictement croissante $(p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots)$

Remarque: Par récurrence on montre que $\forall n, p_n \geq n$

Preuve: À montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_{p_n} = l$?

Soit $\varepsilon > 0 \exists ? N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - l| < \varepsilon$

Hypothèse: $\lim U_n = l$

$\exists N \in \mathbb{N} / \forall m \geq N, |U_m - l| < \varepsilon$

N convient, en effet

Soit $n \geq N, m = p_n \geq n \geq N \Rightarrow |U_m - l| = |U_{p_n} - l| < \varepsilon$

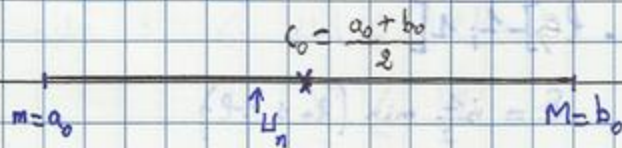
P₃: Théorème de Bolzano-Weierstrass:

Théorème (B.W) de toute suite bornée (U_n)

on peut extraire une sous-suite (U_{p_n}) qui converge

Preuve: Par dichotomie

(U_n) bornée $\Leftrightarrow \exists m, \exists M / \forall n, U_n \in [m, M]$



on pose $a_0 = m$, $b_0 = M$

Soit $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ le milieu de $[a_0, b_0]$

On pose $N_1 = \{n / U_n \in [a_0, c_0]\}$

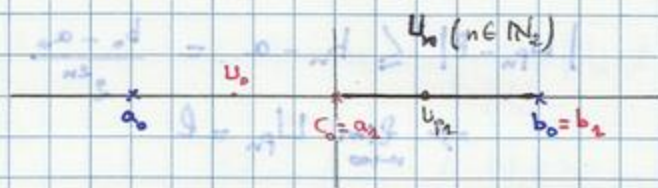
$N_2 = \{n / U_n \in [c_0, b_0]\}$

$$N = N_1 \cup N_2$$

Au moins un, parmi N_1 et N_2 est infini

Supposons par exemple c'est N_2

soit $p_0 = 0$, soit $p_1 > p_0$, $p_1 \in N_2$



on pose: $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}, a_1 \leq U_{p_1} \leq b_1$$

on répète le procédé à $[a_1, b_1]$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

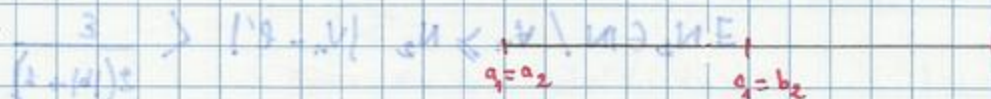
$N'_1 = \{n \in N_2 / U_n \in [a_1, c_1]\}$

$N'_2 = \{n \in N_2 / U_n \in [c_1, b_1]\}$

$$N_2 = N'_1 \cup N'_2$$

Au moins N'_1 ou N'_2 est infini

Supposons par exemple c'est N'_1



on pose: $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$$

on choisit $p_2 \in N'_1$ avec $p_2 > p_1$

$$a_2 \leq U_{p_2} \leq b_2$$

de cette manière on construit a_n, b_n, p_n avec:

$$a_{n-2} \leq a_n \leq U_{p_n} \leq b_n \leq b_{n-1}$$

avec une infinité de $k / U_k \in [a_n, b_n]$

et $p_0 < p_1 < \dots < p_{n-1} < p_n$

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Axiome de Cantor: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$



$$|U_{p_n} - l| \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^{2n}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_{p_n} = l$$

P_4 : Si $(U_n), (V_n)$ convergent vers l et l' respectivement alors:

i) $(W_n = aU_n + bV_n)_n$ converge vers $al + bl'$

ii) $(Z_n = U_n V_n)_n$ converge vers ll'

iii) $(t_n = \frac{U_n}{V_n})$ ($l' \neq 0$) converge vers $\frac{l}{l'}$

En effet: i) $|aU_n + bV_n - al - bl'| \leq |a||U_n - l| + |b||V_n - l'|$

Soit $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |aU_n + bV_n - al - bl'| < \varepsilon$

Hypothèse: $\exists N_1 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_1, |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_2, |V_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ convient

$$n \geq N, |aU_n + bV_n - al - bl'| < \frac{\varepsilon|a|}{2(|a|+1)} + \frac{\varepsilon|b|}{2(|b|+1)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\left(\frac{|a|}{|a|+1} < 1, \frac{|b|}{|b|+1} < 1 \right)$$



SMIA 2

$$\begin{aligned} \text{ii) } |u_n v_n - e e'| &\leq |u_n v_n - u_n e' + u_n e' - e e'| \\ &\leq |u_n| |v_n - e'| + |e'| |u_n - e| \\ &\leq M |v_n - e'| + |e'| |u_n - e| \end{aligned}$$

où $\forall n, |u_n| \leq M$ où (u_n) bornée

$$\begin{aligned} \text{iii) } \left| \frac{u_n}{v_n} - \frac{e}{e'} \right| &= \frac{|u_n e' - e v_n|}{|v_n e'|} \\ &= \frac{|u_n e' - e e' + e e' - e v_n|}{|v_n e'|} \leq A \end{aligned}$$

avec $A = \frac{1}{|v_n|} |u_n - e| + \frac{|e|}{|e' v_n|} |v_n - e'|$

$$\exists 0 < m / |v_n| \geq m, \forall n \geq N_2$$

$$\text{car } \varepsilon = \frac{|e'|}{2} > 0$$

$$\exists N_2 / \forall n \geq N_2 \quad |v_n - e'| \leq |v_n - e| < \frac{|e'|}{2}$$

$$0 < m = \frac{|e'|}{2} < |v_n| < \frac{3|e'|}{2}$$

6) Suites de Cauchy:

Définition: u_n est dite suite de Cauchy ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N \text{ alors } |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Propriétés:

P_1 : Une suite de Cauchy est bornée.

$$\text{Car: } \varepsilon = 1 \quad \exists N / \forall n \geq N, \quad |u_n - u_N| < 1$$

$$(m = N)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: \quad u_N - 1 \leq u_n \leq 1 + u_N$$

$$M = \max \{u_0, \dots, u_{N-1}, 1 + u_N\}$$

$$m = \min \{u_0, \dots, u_{N-1}, u_N - 1\}$$

$$\forall n, \quad m \leq u_n \leq M$$

P₂: Si une suite de Cauchy admet une sous-suite (U_{p_n}) qui converge vers l .

Preuve: À montrer: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$?

Soit $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - l| < \varepsilon$

Hypothèses: • (U_n) de Cauchy $\exists N_1 \forall n \geq N_1, \forall m \geq N_1, |U_n - U_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

• (U_{p_n}) converge $\exists N_2, \forall n \geq N_2, |U_{p_n} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ convient

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \geq N \quad |U_n - l| &\leq |U_n - U_{p_n}| + |U_{p_n} - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

P₃: (U_n) converge $\Leftrightarrow (U_n)$ de Cauchy

Preuve:

$(\Rightarrow)$ (U_n) converge vers l

À montrer: Soit $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall m \geq N, |U_n - U_m| < \varepsilon$

Hypothèse: (U_n) converge vers l

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |U_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

N convient car $n \geq N, m \geq N$

$$\begin{aligned} |U_n - U_m| &= |U_n - l + l - U_m| \leq |U_n - l| + |U_m - l| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ (U_n) est de Cauchy $\xrightarrow{(P_1)}$ (U_n) est bornée

$\xrightarrow{B-W} \exists (U_{p_n})$ converge

$\xrightarrow{(P_2)} (U_n)$ converge

Avantage des suites de Cauchy:

On n'a pas besoin de connaître la limite l .

Exemples: (i) $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned} U_{n+p} - U_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \end{aligned}$$



$$k \geq 2 : \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq U_{n+p} - U_n &\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

soit $\varepsilon > 0$: $\exists ? N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$ $m = n+p$

$$|U_{n+p} - U_n| \leq \varepsilon$$

$$|U_{n+p} - U_n| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

$$N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$$

$$E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$$

SMIA 2

(ii) $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ série harmonique.

(U_n) diverge ?

Négation de suite de Cauchy:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p_n \geq n \quad \exists q_n \geq n, |U_{p_n} - U_{q_n}| > \varepsilon$$

$$p_n = 2n, \quad q_n = n$$

$$\begin{aligned} U_{2n} - U_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &\geq \frac{1}{2n} \\ + \quad \frac{1}{n+2} &\geq \frac{1}{2n} \\ &\vdots \\ \frac{1}{n+n} &\geq \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$U_{2n} - U_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \forall n, \quad p_n = 2n, \quad q_n = n \quad \text{vérifie} \quad |U_{p_n} - U_{q_n}| > \frac{1}{3}$$

7) Règles de convergence:

7-1) Monotonie:

On suppose que (U_n) est monotone

$$(R_1) \quad (U_n) \text{ converge} \Leftrightarrow (U_n) \text{ bornée de plus} \begin{cases} \lim U_n = \sup U_n, & (U_n) \text{ croissante} \\ \lim U_n = \inf U_n, & (U_n) \text{ décroissante} \end{cases}$$

Preuve:

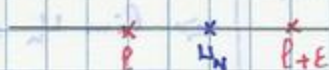
$(\Rightarrow)$ déjà vu

$(\Leftarrow)$ on suppose (U_n) décroissante minorée

Soit $l = \inf (U_n) \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0 \quad \exists ? N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |U_n - l| < \varepsilon$

D'après la caractérisation analytique



$$\exists N \in \mathbb{N} \quad l \leq U_n < l + \varepsilon$$

N convient ? car $n \geq N, l - \varepsilon < l \leq U_n \leq U_N < l + \varepsilon$

7-2) Règles des gendarmes:

$$(R_2) \quad \begin{cases} V_n \leq U_n \leq W_n \\ (V_n), (W_n) \text{ convergent vers } l \end{cases} \Rightarrow (U_n) \text{ converge vers } l.$$

Preuve:

$$-|V_n - l| \leq V_n - l \leq U_n - l \leq W_n - l \leq |W_n - l|$$

$$-|W_n - l| \leq l - W_n \leq l - U_n \leq l - V_n \leq |V_n - l|$$

$$\text{donc: } -\max\{|V_n - l|, |W_n - l|\} \leq U_n - l \leq \max\{|V_n - l|, |W_n - l|\}$$

$$\Rightarrow |U_n - l| \leq \max\{|V_n - l|, |W_n - l|\}$$

7-3) Comparaison:

$$(R_3) \quad \begin{cases} |U_n - l| \leq r_n \\ \lim r_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim U_n = l$$

$$\text{car } V_n = l - r_n \leq U_n \leq l + r_n = W_n$$

7-4)

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_n) \text{ bornée} \\ (v_n) \text{ converge vers } 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim u_n v_n = 0$$

car: $\exists M > 0 / \forall n \quad |u_n| \leq M$

$$|u_n v_n| \leq M |v_n| = \pi_n$$

$$\lim \pi_n = 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = 0$$

Exemple: $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

$$\begin{cases} u_n = \sin n \\ v_n = \frac{1}{n} \end{cases}$$

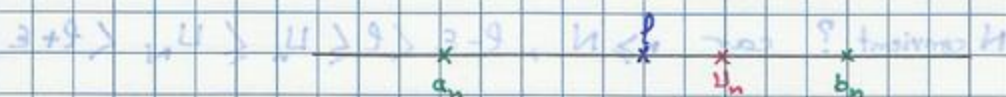
7-5)

$$(u_n) \text{ converge vers } l \Rightarrow (|u_n|) \text{ converge vers } |l|$$

En effet: $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| = \pi_n$

7-6) Suites adjacentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq u_n \leq b_n \\ \bullet (a_n) \text{ croissante} \\ \bullet (b_n) \text{ décroissante} \\ \bullet \lim (b_n - a_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim u_n = \sup a_n = \inf b_n$$



$$|u_n - l| \leq b_n - a_n = \pi_n \rightarrow 0$$

$$\{l\} = \bigcap_n [a_n, b_n]$$

7-7) Règles des sous-suites:

Si (u_n) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l .

alors (u_n) converge

En effet, soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n - l| < \varepsilon$

Hypothèses:

$$\exists N_1 / \forall n \geq N_1, |u_{2n} - l| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 / \forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - l| < \varepsilon$$

$N = \max \{2N_1, 2N_2 + 1\}$ convient car:

si $n \geq N$ (il y en a 2 cas)

$$\begin{cases} n = 2k \geq 2N_2 \Rightarrow k \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2k} - l| < \varepsilon \\ n = 2k+1 \geq 2N_2+1 \Rightarrow k \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| = |u_{2k+1} - l| < \varepsilon \end{cases}$$

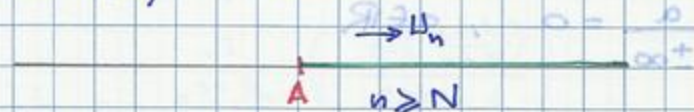
8) Extension de la limite :

Problème : Définir $\lim u_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$ ou

donc (u_n) doit être voisin de $\pm\infty$ quand n est voisin de $+\infty$.

Rappel : u_n voisinage élémentaire de $+\infty$ ou (resp $-\infty$) est de la forme $V_{+\infty} = [A; +\infty[$ ou $]A; +\infty[$ ($A > 0$) (resp $]-\infty; -A]$ ou $] -\infty; -A[$)

8-1) Définition : (i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



$\forall A > 0$ (u_n voisin de $+\infty$), $\exists N \in \mathbb{N}$ (n voisin de $+\infty$) tel que :
 $\forall n \geq N$ ($n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket$) $u_n \geq A$ ($u_n \in [A, +\infty[$)

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N \Rightarrow u_n \leq -A$

Exemple : $u_n = e^n$

$\lim u_n = +\infty$

Soit $A > 0$, $\exists ? N \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ alors $u_n = e^n \geq A$

$$e^n \geq A \Leftrightarrow n \geq \ln A$$

$$N = E(\ln A) + 1 \text{ convient}$$

8-2) Opérations et convention :

On a le théorème suivant :

(i) $+\infty + \infty = +\infty$



$$ii) a(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} (+\infty)(+\infty) = +\infty \\ (-\infty)(+\infty) = -\infty \end{cases} \quad \begin{cases} +\infty + c = +\infty \\ -\infty + c = -\infty \end{cases}$$

$$iv) \frac{a}{0^+} = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$v) \frac{a}{0^-} = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$vi) \frac{+\infty}{0^+} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$vii) \frac{+\infty}{0^-} = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$$

$$viii) \frac{a}{+\infty} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

SMIA2

8-3) Formes indéterminées.

Cas où on ne sait pas conclure directement.

Dans ce cas on réécrit l'expression sur une autre forme

"lever l'indétermination"

$$(a) +\infty - \infty$$

$$(b) 0 \times \infty$$

$$(c) \frac{0}{0}$$

$$(d) \frac{\infty}{\infty}$$

$$(e) 0^0 = e^{0 \times \infty}$$

$$(f) 1^\infty = e^{0 \times \infty}$$

Exemple:

$$(a) U_n = \sqrt{n^2 - n + 5} - \sqrt{n^2 + 3n - 2}$$

$$+ \lim U_n = \sqrt{+\infty - \infty + 5} - \sqrt{+\infty + \infty - 2}$$

$$U_n = n \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} - n \sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}$$

$$+ \lim U_n = +\infty - \infty$$

$$U_n = n \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2} - 1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}} = \frac{-4 + \frac{7}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}}$$

$$\lim U_n = \frac{-4}{2} = -2$$

$$(b) U_n = \left(\frac{n+2}{n+5} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1^{+\infty} \quad \text{FI}$$

$$U_n = e^{n \ln \left(\frac{n+2}{n+5} \right)}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \right)$$

$$x = \frac{n+2}{n+5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\begin{aligned} n \ln \frac{n+2}{n+5} &= n(x-1) \times \frac{\ln x}{x-1} \\ &= n \left(\frac{n+2}{n+5} - 1 \right) \times \frac{\ln \left(\frac{n+2}{n+5} \right)}{\frac{n+2}{n+5} - 1} \\ &= \frac{n(-3)}{n+5} \times \frac{\ln(x)}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{-3}{1+\frac{5}{n}} \times \frac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -3$$

$$\Rightarrow U_n = e^{\frac{-3}{1+\frac{5}{n}}} \left(\frac{\ln \left(\frac{n+2}{n+5} \right)}{\frac{n+2}{n+5} - 1} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = e^{-3 \times 1} = e^{-3}$$

SMIA 2