



ANALYSE 1

CHAPITRE 2 : PREMIER PAS VERS LA TOPOLOGIE

MR HILALI



1) Introduction :

On veut donner un sens aux termes : voisin, proche, limite, tend vers, ouvert, fermé.

Ceci on va l'obtenir à partir d'une distance (distance canonique) sur $\mathbb{R}$.

2) Distance canonique.

2-1) Définition :

La distance canonique sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \longmapsto |x - y| = \max \{x - y, y - x\}$$

2-2) Propriétés naturelles :

Ax1: Séparation :

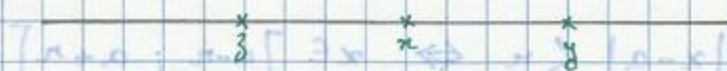
$$|x - y| = 0 \iff x = y$$

$$\text{car : } \max \{x - y, y - x\} = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$$

Ax2: Symétrie : $|x - y| = |y - x|$

Ax3: Inégalité triangulaire :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad ; \quad |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$



Ax4: $|xy| = |x| |y|$

$$\text{En effet : } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad |y| = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ -y, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$|xy| = \begin{cases} xy = |x||y| & ; x \geq 0, y \geq 0 \\ -xy = (x)(-y) = |x||y| & ; x \geq 0, y \leq 0 \\ -xy = (-x)y = |x||y| & ; x \leq 0, y \geq 0 \\ xy = (-x)(-y) = |x||y| & ; x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$

Propriété 5: $||x| - |y|| \leq |x - y|$

En effet: $|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$
 $\Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$



En changeant x par y :

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

$$\Rightarrow \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Propriété 6: $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$



Car: $|x - a| \leq r \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \leq r \text{ et} \\ a - x \leq r \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a + r \text{ et} \\ a - r \leq x \end{cases}$

Remarque:

• $\{x / |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$ intervalle du centre a et de rayon r .

• $[a, b] = \{x / |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2}\}$



Propriété 7: $|x - a| < r \Leftrightarrow x \in]a - r; a + r[$

$\Leftrightarrow \{x / |x - a| < r\} =]a - r; a + r[$ intervalle ouvert

Remarque:

$]a, b[= \{x / |x - \frac{b+a}{2}| < \frac{b-a}{2}\}$

D'où les intervalles ouverts ou fermés sont en relation avec la distance canonique.

Propriété 8: $|x-a| \geq r (>r) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a+r \\ \text{ou} \\ x \leq a-r \end{cases}$



3) Boule ouverte, boule fermée (intervalle)

3-1) Définition:

(a) On définit la boule (intervalle) ouverte de centre a et de rayon r est définie par:

$$B(a, r) = \{ x / d(x, a) = |x-a| < r \}$$

$$=]a-r; a+r[$$



Remarque: Pour des rayons r petits, on remplace r par $\varepsilon, \alpha, \eta$.
Les intervalles (boules) ouverts constituent les atomes de la topologie.

$$]a, b[= B\left(\frac{b+a}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$$

(b) On définit la boule (intervalle) fermée du centre a et de rayon par:

$$B_f(a, r) = \{ x / d(x, a) \leq r \}$$

$$= [a-r; a+r]$$

Remarque: $[a, b] = B_f\left(\frac{b+a}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$

4) Ouvert, fermé, voisinage

4-1) Ouvert:

Définition: $U \subset \mathbb{R}$ est dit un ouvert ssi $\forall x \in U$

$$\exists r > 0 \quad]x-r; x+r[\subset U$$

4-2) Fermé:

$F \subset \mathbb{R}$ est dit un fermé ssi F^c est un ouvert

4-3) Voisinage:

a) $V \subset \mathbb{R}$ est dit un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ ssi:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que }]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\subset V$$

b) V voisinage à droite de a ssi $\exists \varepsilon > 0, [a, a+\varepsilon[\subset V$

c) V voisinage à gauche de a ssi $\exists \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a] \subset V$

d) V est dit un voisinage de $+\infty$ ssi: $\exists A > 0;]A, +\infty[\subset V$

e) V est dit un voisinage de $-\infty$ ssi: $\exists A > 0;]-\infty, -A[\subset V$

Remarques:

a) U est un ouvert ssi $U = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$

En effet:

$$U \text{ est un ouvert} \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists r_x > 0 /]x-r_x; x+r_x[\subset U$$

$$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U}]x-r_x; x+r_x[$$

b) U est un ouvert ssi $\forall x \in U, U$ voisinage de x

U ouvert $\Leftrightarrow U$ voisinage de chacun de ses points.

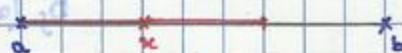
c) $\emptyset, \mathbb{R}$ sont les seuls ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Exemples:

a) $]a, b[$ ouvert? car soit $a < x < b$

$$\exists ? r > 0 /]x-r, x+r[\subset]a, b[$$

on prend $r = \min\{x-a, b-x\}$



$$\begin{cases} r \leq x-a \\ r \leq b-x \end{cases}$$

$+r$ convient car:

$$x - (x-a) \leq x-r < x+r \leq x + (b-x)$$

$$\Rightarrow a \leq x-r < x+r \leq b$$

$$\Rightarrow]x-r, x+r[\subset]a, b[$$

b) $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$ sont des ouverts car:

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n \geq E(a)+1}]-n, a[\text{ ouvert}$$

$$]a, +\infty[= \bigcup_{n \geq E(a)+1}]a, n[\text{ ouvert}$$

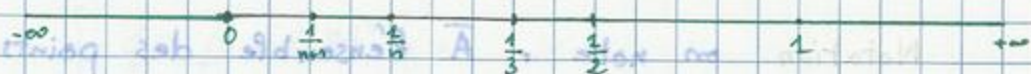
c) $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ fermés car:

$$[a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\text{ ouvert}$$

$$]-\infty, a] =]a, +\infty[\text{ ouvert}$$

$$[a, +\infty[=]-\infty, a[\text{ ouvert}$$

d) $A = \{0, \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$ fermé car:



$$A^c =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[: \text{ouvert}$$

$$n = E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = n+1$$

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$$

$$e) V = [1, 4[\cup]5, 6] \cup \{10\}$$

V voisinage de tous les points $a \in [1, 4[\cup]5, 6]$

V n'est pas un voisinage de 10

V voisinage à droite (à gauche) de 1 (de 6)

f) Dans $\mathbb{N}$, $\{n\}$ est isolé

$$\exists n > 0 /]n-n, n+n[\cap \mathbb{N} = \{n\}$$

en $+\infty$: $[[N, +\infty[= [N, +\infty[\cap \mathbb{N}$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$

ceci donne un sens à $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

par contre: $\lim_{n \rightarrow p} u_n = u_p$ (n'a pas d'importance)



Remarques: Une topologie n'est que l'ensemble des ouverts:

5) Point adhérent, Adhérence:

Parfois, on a $D_f =]-\infty, 1[\cup]2, 3[$

D_f voisinage de tous les points $x \in]-\infty, 1[\cup]2, 3[$

1, 2 et 3 sont des points particuliers (appelés points adhérents)

Définition: soit $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ est dit un point adhérent à A ssi:

$$\forall \varepsilon > 0, [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap A \neq \emptyset$$

Négation: a n'est pas adhérent ssi:

$$\exists \varepsilon > 0 \mid]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap A = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A^c$$

$$\Leftrightarrow \{^A \text{voisinage de } a\} = A^c$$

Notation: on note: $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents appelé

"l'adhérence de A "

Exemples: a) $\overline{[a, b]} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b[} = \overline{]a, b[} = [a, b]$

en effet: montrons que $\overline{]a, b[} = [a, b]$, $A =]a, b[$



d'abord: $\forall x \in]a, b[, x \in \bar{A}$

car $\forall \varepsilon > 0; x \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$

$a \in \bar{A}$ car $\forall \varepsilon > 0;]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap]a, b[=]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap]a, b[$
 $=]a, \min\{b, a + \varepsilon\}[$
 $\neq \emptyset$

$b \in \bar{A}$ car $\forall \varepsilon > 0;]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\cap]a, b[=]\max\{a, b - \varepsilon\}, b[$
 $\neq \emptyset$

Conclusion: $[a, b] \subset \bar{A}$

soit: $x \notin [a, b]$

SMIA 2

$x < a$:

pour $n = a - x$

$$]x - n, x + n[=]2x - a, a[$$

$$\text{donc }]x - n, x + n[\cap]a, b[= \emptyset \Rightarrow x \notin \bar{A}$$

on prend $n = x - b$ alors : $]x - n, x + n[=]b, 2x - b[$

$$]a, b[\cap]x - n, x + n[= \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$$

finalement: $\bar{A} \subset [a, b]$

$$b) \overline{]-\infty, a]} =]-\infty, a[=]-\infty, a[$$

$$\overline{[a, +\infty[} = [a, +\infty[= [a, +\infty[$$

$$c) A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$



$$\text{on a } \bar{A} = A \cup \{0\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \in \bar{A}$ car $\forall \epsilon > 0, \frac{1}{n} \in]\frac{1}{n} - \epsilon, \frac{1}{n} + \epsilon[\cap A \neq \emptyset$

$0 \in \bar{A}$ car soit $\epsilon > 0,]0 - \epsilon, 0 + \epsilon[\cap A \neq \emptyset$?

$$\exists ? N \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{N} < \epsilon$$

on cherche N tel que : $N > \frac{1}{\epsilon}$

il suffit de prendre $N = E\left(\frac{1}{\epsilon}\right) + 1$

soit $x \notin A \cup \{0\}$ alors

- Si $x < 0$:

on prend $n = -x > 0$; $]x - n, x + n[=]2x, 0[$

$$]x - n, x + n[\cap A = \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$$

- Si $x > 1$ on prend $n = x - 1$

- Si $x \in]0, 1[$: $n = E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

$$n < \frac{1}{x} < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n + 1} < x < \frac{1}{n}$$



on prend $\epsilon = \min \left\{ x - \frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n} - x \right\} \Rightarrow]x-\epsilon ; x+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$

Propriétés de $\bar{A}$:

(P₁) $A \subset \bar{A}$ car $\forall \epsilon > 0, \forall a \in A, a \in]a-\epsilon ; a+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$

(P₂) $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

si $a \in \bar{A} \Rightarrow \forall \epsilon > 0,]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$

or $]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap A \subset]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap B \neq \emptyset$

$\Rightarrow a \in \bar{B}$

(P₃) $a \in \bar{A}$ ssi $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$
(caractérisation séquentielle de $\bar{A}$)



Preuve:

($\Rightarrow$) Hypothèse $\forall \epsilon > 0 \exists x_n \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap A$

d'où $\forall \epsilon = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*) \exists x_n \in]a-\frac{1}{n}, a+\frac{1}{n}[\cap A$

on a : $\begin{cases} x_n \in A \\ a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

($\Leftarrow$) Hypothèse : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ avec $x_n \in A$

$\forall \epsilon > 0 ; \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N ; |x_n - a| < \epsilon$

$\Leftrightarrow x_n \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow a \in \bar{A}$

(P₄) A fermé $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ (à faire)

6) Densité de :

Définition: A dense dans B ssi $\bar{A} = B$

$\forall x \in B, x$ est limite d'une suite d'éléments de A

Proposition: $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$

Preuve: Soit $x \in \mathbb{R}$

D'après l'approximation décimale

$$\exists! p_n \in \mathbb{Z} \quad / \quad \frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_{n+1}}{10^n} \quad ; \quad p_n = E(10^n x)$$

$$\text{soit} \quad r_n = \frac{p_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

$$0 \leq x - r_n < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$$

$$+ \quad \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} ?$$

$$\text{soit } x \in \mathbb{R} \quad \text{on prend } y = x - \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$$\exists r_n \in \mathbb{Q} \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = y = x - \sqrt{2}$$

$$\text{donc } x = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n + \sqrt{2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\text{où } x_n = r_n + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

