



ANALYSE 1

CHAPITRE 1 : PROPRIÉTÉ DE LA DROITE REELLE IR



1) Propriétés algébriques: on va définir $\mathbb{R}$ de manière axiomatique

1.1) Loi $+$ et $\times$:

On définit dans $\mathbb{R}$ 2 lois $+$ et $\times$ vérifiant les axiomes suivants:

• Ax1: $+, \times : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

$$(x, y) \mapsto xy$$

• Ax2: Associativité

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(xy)z = x(yz)$$

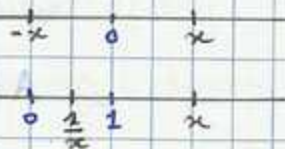
• Ax3: Existence d'un élément neutre: 0, 1

$$\begin{cases} x + 0 = 0 + x = x \\ x \times 1 = 1 \times x = x \end{cases}$$

• Ax4: Symétrisation de l'espace

$$\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x \times \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \times x = 1$$



• Ax5: Commutativité

$$\begin{cases} x + y = y + x \\ x \times y = y \times x \end{cases}$$

• Ax6: Distributivité de $\times$ par rapport à $+$

$$x \times (y + z) = xy + xz$$

Conclusion: $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Remarque: $(\mathbb{Q}, +, \times)$ aussi est un corps commutatif.

2) Loi de comparaison (relation d'ordre) :

Sur $\mathbb{R}$ on définit une relation binaire $x \leq y$ qui vérifie :

- Ax7: $x \leq x$ ($\leq$ est réflexive)
- Ax8: $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$ ($\leq$ est antisymétrique)
- Ax9: $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ ($\leq$ est transitive)
- Ax10: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors $x \leq y$ ou $y \leq x$ ($\leq$ est en ordre total)
- Ax11: Compatibilité de $+$ par rapport à $\leq$

$$\begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \Rightarrow x + z \leq y + t$$

- Ax12: Compatibilité de $\times$ par rapport à $\leq$ dans $\mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq t \end{cases} \Rightarrow xz \leq yt$$

Remarque: $(\mathbb{Q}, \leq, +, \times)$ vérifie aussi les mêmes propriétés

3) Propriétés géométriques :

3-1) Partie majorée, minorée, bornée :

- i) $A \subset \mathbb{R}$ est dite majorée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall x \in A ; x \leq M$$

• Géométriquement :



M s'appelle un majorant de A (il existe une infinité de majorants)

- ii) $A \subset \mathbb{R}$ est dite minorée ssi :

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall x \in A ; m \leq x$$

• Géométriquement :



m s'appelle un minorant de A (il y a une infinité de minorants)

iii) $A \subset \mathbb{R}$ est dite bornée ssi A est majorée et minorée

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 / \forall x \in A, \quad m \leq x \leq M$$

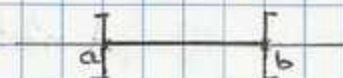
Exemple: $A = \emptyset$ est majorée par $M \in \mathbb{R}$ quelconque et minorée par $m \in \mathbb{R}$ quelconque.

4) Intervalles:

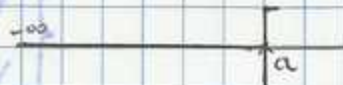
Il y a 9 types d'intervalles:

a) Intervalles ouverts:

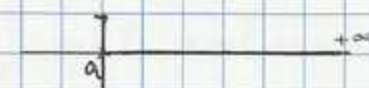
$$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



$$]-\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$



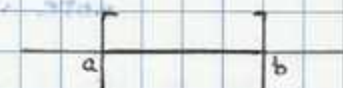
$$]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$



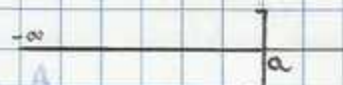
$$]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

b) Intervalles fermés:

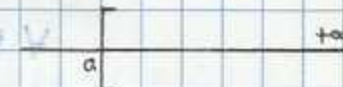
$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



$$]-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$



$$[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$



$$]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$$

c) Intervalle semi ouvert à droite:

$$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

d) Intervalle semi ouvert à gauche:

$$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

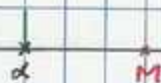
5) Borne supérieure, borne inférieure :

Définition :

i) α est dite une borne supérieure de A notée :

$$\alpha = \sup A \quad \text{ssi : } \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha, \alpha \text{ est un majorant} \\ \forall M \text{ majorant de } A \text{ alors } \alpha \leq M \end{cases}$$

α est le plus petit des majorants :



Si $\alpha \in A$, α est appelé le plus grand élément de A et se note : $\alpha = \max A$

ii) β est dite une borne inférieure de A ssi :

$$\begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x, \beta \text{ est un minorant} \\ \forall m \text{ minorant de } A \text{ alors } m \leq \beta \end{cases}$$



$\beta = \inf A$ est le plus grand des minorants si $\beta \in A$ on parlera de plus petit élément de A et se note : $\beta = \min A$

Remarques :

i) A n'est pas majorée ssi :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A / M < a$$

si A n'est pas majorée on note $+\infty = \sup A$

ii) A n'est pas minorée ssi :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists a \in A / a < m$$

on note $-\infty = \inf A$

iii) $A = \emptyset$: $\mathbb{R}$ est tout l'ensemble des minorants et aussi

de majorants : $-\infty = \sup \emptyset$

$$+\infty = \inf \emptyset$$

SMIA2

6) Axiome de la borne supérieure (borne inférieure) :

Axiome de Hilbert :

Toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure)

Remarques :

a) $\mathbb{Q}$ ne vérifie l'axiome de Hilbert

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$$

$$0 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$$

$$\alpha = \sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

b) $(\mathbb{R}, +, \times, \leq, \text{Axiome de Hilbert})$ est le seul espace qui est un corps commutatif totalement ordonné et vérifiant l'axiome de Hilbert.

c) unicité de $\sup A, \inf A$:

Proposition : La borne supérieure (inférieure) est unique

Preuve : Soient $\alpha = \sup A$ et $\beta = \sup A$, montrons que $\alpha = \beta$

$$\text{on a } \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha (\leq \beta) \\ \forall M \text{ majorant } \alpha \leq M (\beta \leq M) \end{cases}$$

$$\text{donc : } \begin{cases} \alpha (= \sup A) \leq \beta \text{ (majorant)} & (M = \beta) \\ \beta (= \sup A) \leq \alpha \text{ (majorant)} & (M = \alpha) \end{cases}$$

d) Caractérisation de $\alpha = \sup A$ ($\beta = \inf A$) :

• Caractérisation analytique :

Situation géométrique :



Propositions On a équivalence:

i) $\alpha = \sup A$ ($\beta = \inf A$)

ii) $\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A / \alpha - \varepsilon < a_\varepsilon \leq \alpha \\ \alpha \text{ majorant de } A \end{array} \right. \quad (\beta \text{ minorant})$

Preuve:

($\Rightarrow$) β est un minorant car $\beta = \inf A$

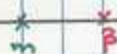
soit $\varepsilon > 0 \exists a_\varepsilon \in A / a_\varepsilon < \beta + \varepsilon$

or $\beta < \beta + \varepsilon \Rightarrow \beta + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A
 $\Rightarrow \exists a_\varepsilon \in A / a_\varepsilon < \beta + \varepsilon$

($\Leftarrow$) β est évidemment un minorant

Montrons que : soit m un minorant de A

alors : $m \leq \beta$



par l'absurde: (qui s'impose)

on suppose que $\beta < m$ on pose $\varepsilon = m - \beta > 0$

donc par hypothèse $\exists a_\varepsilon \in A / a_\varepsilon < \beta + \varepsilon$

$\Rightarrow a_\varepsilon < \beta + m - \beta = m$

donc m n'est pas un minorant de A

Ce qui est absurde

Caractérisation séquentielle:

Proposition: on a équivalence

i) $\alpha = \sup(A)$ ($\beta = \inf A$)

ii) $\left\{ \begin{array}{l} \alpha: \text{majorant} \quad (\beta \text{ minorant}) \\ \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \end{array} \right.$

(espace des suites dans A), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha(\beta)$

Preuve:

($\Rightarrow$) On doit construire une suite (a_n) d'éléments de A de limite α

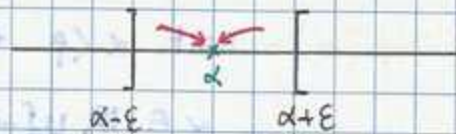
D'après la caractérisation analytique:

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \exists a_n \in A / \alpha - \frac{1}{n} < a_n \leq \alpha$$

"gendarmes" $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

$$(\Leftrightarrow) \text{ Soit } \varepsilon > 0, \exists ? b_\varepsilon \in A / \alpha - \varepsilon < b_\varepsilon \leq \alpha$$

Hypothèse $\lim a_n = \alpha$



$$\exists N \in \mathbb{N} / |a_N - \alpha| = \alpha - a_N < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_n$$

$$\text{on prend } b_\varepsilon = a_N$$

7) Conséquences de l'axiome de Hilbert:

Partie majorée (minorée) dans $\mathbb{Z}$:

a) Conséquence 1: $\forall A \subset \mathbb{Z}, A \neq \emptyset$ majorée (minorée) admet un plus grand (petit) élément $\sup A = \max A$ ($\inf A = \min A$)

- En effet: soit $\alpha = \sup A$ existe

le problème $\alpha \in A$?

$$\text{on sait que } \forall \varepsilon > 0,]\alpha - \varepsilon, \alpha] \cap A \neq \emptyset$$

$$\text{Pour } \varepsilon = \frac{1}{2}: \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_1 \in A, \alpha - \frac{1}{2} < \alpha_1 \leq \alpha$$



$$\text{Si } \alpha_1 \neq \alpha \exists \alpha_2 \in]\alpha_1, \alpha[\cap A$$

$$\text{or } 0 < \alpha_2 - \alpha_1 < \alpha - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Ce qui est impossible car α_1 et α_2 sont des entiers

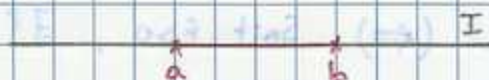
b) Consequence 2: Caractérisation des intervalles.

Proposition: En équivalence:

i) $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle

ii) $\forall (a, b) \in \mathbb{I}^2, \forall t \in [0, 1]; x = (1-t)a + tb \in I$

iii) $\forall (a, b) \in \mathbb{I}^2, a < b$ alors $[a, b] \subset I$



Preuve: On va montrer: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow$ (ii): Soit $\alpha < \beta$ les extrémités de I

$$\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}; \beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\text{soit } \alpha \leq a \leq b \leq \beta$$

$$\text{et soit } t \in [0, 1] \text{ et } x = (1-t)a + tb$$

$$\Rightarrow x = a + t(b-a)$$

$$\text{on a: } 0 \leq t \leq 1$$

$$0 \leq t(b-a) \leq b-a$$

$$\alpha \leq a \leq x = a + t(b-a) \leq b \leq \beta \Rightarrow x \in I$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Soit $x \in [a, b] \Rightarrow x \in I$?

$$x = a + \frac{x-a}{b-a} (b-a)$$

$$\Rightarrow t = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\text{on a: } a \leq x \leq b$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x-a \leq b-a$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq t = \frac{x-a}{b-a} \leq 1$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): $I \neq \emptyset$ car sinon $\emptyset =]a, a[$

$$\text{on pose: } \begin{cases} \alpha = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \beta = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \end{cases}$$
$$(\alpha \leq \beta)$$

SMIA 2

Problème: I est un intervalle d'extrémité

α et β ? si $\forall x \in]\alpha; \beta[\Rightarrow x \in I$?

x n'est pas un minorant de $A \Rightarrow \exists a \in I / \alpha < a < x$



x n'est pas un majorant de $A \Rightarrow \exists b \in I / x < b \leq \beta$



Par Hypothèse: $x \in [a, b] \subset I \Rightarrow x \in I$

c) Conséquence 3: Axiome d'Archimède:

Axiome d'Archimède:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / nx \geq y$$

qui est équivalent à: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / n \geq a \quad (a = \frac{y}{x})$

En effet: supposons par l'absurde

$\exists a \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{car si } a \leq 0 \text{ on prend } x=0) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ alors } n < a$

on pose $N \subset A = \{n \in \mathbb{N} / n < a\} \subset \mathbb{N}$

$A \neq \emptyset$, A majoré par a

Aussi d'après la conséquence 1, $\exists \alpha = \max A$

$$\alpha < a \Rightarrow \alpha + 1 \in \mathbb{N} \cap A$$

$$\Rightarrow \alpha + 1 \leq \alpha \Rightarrow 1 \leq 0 \text{ absurde}$$

d) Conséquence 4: Théorème des segments emboîtés de Cantor:



Soit $[a_n; b_n]$ une suite des segments qui s'emboîtent

$$[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$$

alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] = [a; b]$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{l\}$
(théorème des suites adjacentes)

En effet: $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

on sait $\forall n \in \mathbb{N}, a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$

A majorée par b_0 et B minorée par a_0 .

Soit $a = \sup A$ et $b = \inf B$

Soit $x \in [a; b]$, montrons que $x \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$

En effet: x majorant de A $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq x$

x minorant de B $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \leq b_n$

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] \Rightarrow x \in [a; b]$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; a_n \leq x \leq b_n$$

donc: x majore A $\Rightarrow a = \sup A \leq x$

x minore B $\Rightarrow x \leq b = \inf B$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a \leq b \leq b_n$

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n$$

$$\Rightarrow b - a = 0$$

e) Conséquence 5: **Partie entière:**

Proposition: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}$ tel que:

$$n \leq x < n+1$$

on note ce entier par $E(x)$ ou $[x]$

et s'appelle "partie entière de x"

Preuve: unicité,

on suppose qu'il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} n_1 \leq x < n_1 + 1 \\ n_2 \leq x < n_2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n_1 \leq x < n_1 + 1 \\ -n_2 - 1 < -x \leq -n_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n_1 - n_2 - 1 < 0 < n_1 - n_2 + 1$$

$$\Rightarrow -1 < n_1 - n_2 < 1$$

$$\Rightarrow n_1 - n_2 = 0$$

Existence:

Soit $A = \{p \in \mathbb{Z} / p \leq x\} \subset \mathbb{Z}$

alors: A est majorée par x :



$A \neq \emptyset$ car d'après l'axiome d'Archimède

$$\exists k \in \mathbb{N} / k \geq -x \Rightarrow -k \leq x$$

$$\Rightarrow -k \in A$$

SMIA 2

Conclusion: A partie majorée de $\mathbb{Z}$ donc admet

un maximum $n = \max A \in A$

d'où n convient car

$$\bullet n \in A \Rightarrow n \leq x$$



$$\bullet n+1 \notin A \Rightarrow x < n+1$$

Remarques:

①



$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in [E(x); E(x)+1[\Leftrightarrow E(x) \leq x < E(x)+1$$

②

$$\text{on a } \mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k; k+1[$$



Soit $x \in \mathbb{R}$ si on prend $k = E(x) \in \mathbb{Z}$

$$\text{et } x \in [E(x); E(x)+1[\subset \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [p; p+1[$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \subset \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [p; p+1[\subset \mathbb{R}$$

③ Approximation décimale d'un réel.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! P_n \in \mathbb{Z} \quad / \quad \frac{P_n}{10^n} \leq x < \frac{P_n+1}{10^n}$$

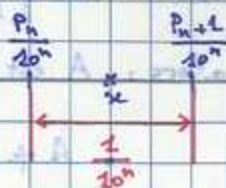
En effet : soit $y_n = 10^n x$

$\exists! P_n = E(y_n) \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$P_n \leq 10^n x = y_n < P_n + 1$$

$$\Rightarrow \frac{P_n}{10^n} \leq x < \frac{P_n+1}{10^n} = \frac{P_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x - \frac{P_n}{10^n} < \frac{1}{10^n} \\ 0 \leq \frac{P_n+1}{10^n} - x < \frac{1}{10^n} \end{cases}$$



$\frac{P_n}{10^n}$ = Approximation décimale de x par défaut

$\frac{P_n+1}{10^n}$ = Approximation décimale de x par excès

$$\text{erreur décimale} = \frac{1}{10^n}$$

On remarque que $\frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car :

$\forall \varepsilon > 0$ (trop petit) $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \frac{1}{10^n} \leq \varepsilon$



On sait que $\frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^N} \leq \varepsilon, \forall n \geq N$

$$\Leftrightarrow 10^N \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow N \ln 10 \geq -\ln \varepsilon \Leftrightarrow N \geq -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 10}$$

N existe grâce à l'axiome d'Archimède

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{10^n} = x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(10^n x)}{10^n}$

Exemple : $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$

$$n=0 : 1 \leq \sqrt{2} < 2$$

$$n=1 : \frac{14}{10} = 1,4 \leq \sqrt{2} < 1,5 = \frac{15}{10}$$

$$n=2 : \frac{141}{10^2} \leq \sqrt{2} < \frac{142}{10^2}$$

$$n=8 : 1,414213562 \leq \sqrt{2} < 1,41421356$$

Donc tout réel supérieur ou égal à 0 (≥ 0) (de même pour ≤ 0) s'écrit : $x = p_0, p_1 p_2 p_3 p_4 \dots p_n \dots$

avec $p_0, p_1 p_2 p_3 \dots p_n$: approximation par défaut de x à 10^{-n}

⚠ Attention : cette écriture n'est pas unique car :

$$1 = 0,999999\dots 9\dots = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \left(\frac{1}{10} \right)^n$$

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^n} = \frac{9 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10^{n+1}} \right)}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

de même $13,45 = 13,44999\dots 9\dots$

SMIA 2