

Cours Algèbre I

S1

Chapitre IV

Lois de composition

MR BOUHAMZA

I] Lois de composition:

1) Définition: Soit E un ensembleOn appelle: Loi de composition interne dans E toute application:

$$T: E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow T((x, y))$$

Pour tout $(x, y) \in E \times E$, l'image $T((x, y))$ s'appelle le composé de x et y par T et on le note: xTy

Exemples:

i) Soit E l'un des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit l'application:

$$f: E \times E \rightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

"+" est une loi de composition interne dans E .

De même la multiplication est une loi de composition dans E .

ii) Soit E un ensemble:

$$\cap: \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$(X, Y) \rightarrow X \cap Y$$

$\cap$ est une loi de composition dans $\mathcal{P}(E)$

$$\cup: \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$(X, Y) \rightarrow X \cup Y$$

$\cup$ est une loi de composition dans $\mathcal{P}(E)$

$$\text{iii)} \quad \begin{aligned} T : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\rightarrow xy + x + y \end{aligned}$$

T est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}$

$$\text{iv)} \quad \begin{aligned} * : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ (x, y) &\rightarrow x^y \end{aligned}$$

$*$ est une loi de composition dans $\mathbb{N}^*$

2) Commutativité:

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne T .

On dit que T est commutative si pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\text{on a : } xTy = yTx.$$

Exemples: i) L'addition $(+)$ et la multiplication $(\times)$ sont commutatives dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

ii) Dans $\mathcal{P}(E)$, $\cap$ et $\cup$ sont commutatives.

iii) Dans $\mathbb{N}^*$, la loi de composition $*$ définie par:

$$x * y = x^y \text{ n'est pas commutative}$$

$$\text{car : } 2 * 1 = 2^1 = 2$$

$$1 * 2 = 1^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2 * 1 \neq 1 * 2$$

SMIA 2

3) Associativité:

Définition: Soit T une loi de composition interne dans un ensemble E

On dit que T est associative si pour tous x, y et z de E ,

$$\text{on a } (xTy)Tz = xT(yTz)$$

Exemples: i) L'addition $(+)$ et la multiplication $(\times)$ sont associatives dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

ii) Dans $\mathcal{P}(E)$, $\cap$ et $\cup$ sont associatives.

iii) Dans $\mathbb{N}^*$, la loi de composition définie par :

$x * y = x^y$ n'est pas associative car :

$$(2 * 1) * 3 = 2^1 * 3 = 2 * 3 = 2^3 = 8$$

$$2 * (1 * 3) = 2 * 1^3 = 2 * 1 = 2^1 = 2$$

$$\Rightarrow (2 * 1) * 3 \neq 2 * (1 * 3)$$

4) Élément neutre :

Définition : Soit T une loi de composition interne dans E

On dit qu'un élément e de E est neutre pour T si partout $x \in E$ on a :

$$x T e = e T x = x$$

Exemples : i) Dans $(\mathcal{P}(E), \cap)$, E est un élément neutre.

Dans $(\mathcal{P}(E), \cup)$, $\emptyset$ est un élément neutre.

ii) $(\mathbb{N}^*, *)$, $x * y = x^y$

Si $e \in \mathbb{N}^*$ est neutre pour $*$ on aura :

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, x^e = e^x = x$$

$$\text{en particulier : } 1^e = e^1 = 1$$

$$\Rightarrow e = 1$$

$$\text{or : } 2 * 1 = 2^1 = 2 \text{ alors } 1 * 2 = 1^2 = 1$$

$$\Rightarrow 1 \text{ n'est pas neutre}$$

Donc : $*$ n'a pas d'élément neutre.

Théorème 1 :

Soit T une loi de composition interne dans E

Si T admet un élément neutre alors celui-ci est unique

5) Éléments inversibles :

Définition: Soit T une loi de composition interne dans E admettant un élément neutre

On dit qu'un élément x de E est **inversible** pour T s'il existe un élément $y \in E$ tel que :

$$x T y = y T x = e$$

Si y existe, on l'appelle l'inverse de x pour T et on le note x^{-1} .

Exemples: i) Soit T une loi de composition interne dans E admettant un élément neutre e .

Alors e est inversible pour T et $e^{-1} = e$.

ii) Dans $(\mathcal{P}(E), \cap)$ seul E est inversible.

Dans $(\mathcal{P}(E), \cup)$ seul $\emptyset$ est inversible.

iii) Dans $(\mathbb{Z}, +)$ tout élément x est inversible et $x^{-1} = -x$.

Théorème 2:

Soit T une loi de composition interne dans E associative et admettant un élément neutre e .

i) Si un élément de E est inversible pour T alors son inverse est unique.

ii) Si x et y sont deux éléments de E inversibles pour T alors $x T y$ est inversible pour T et $(x T y)^{-1} = y^{-1} T x^{-1}$.

6) Distributivité:

Définition: Soit E un ensemble muni de deux lois de composition interne $*$ et τ

On dit que $*$ est distributive par rapport à τ si:

$$\forall x, y, z \in E, \quad x * (y \tau z) = (x * y) \tau (x * z) \\ \text{et } (y \tau z) * x = (y * x) \tau (z * x)$$

Exemples:

i) Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition

Mais l'addition n'est pas distributive par rapport à la multiplication:

$$2 + (3 \times 5) = 2 + 15 = 17$$

$$(2 + 3) \times (2 + 5) = 5 \times 7 = 35$$

ii) Soit E un ensemble

Dans $\mathcal{P}(E)$, $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$

$\cup$ est distributive par rapport à $\cap$

7) Stabilité:

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne τ et soit F une partie de E

On dit que F est stable pour τ si:

$$\forall x, y \in F, \quad x \tau y \in F$$

Exemples: i) $2\mathbb{Z} = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$

$2\mathbb{Z}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ stable pour $+$.

ii) Soit E un ensemble et $A \subseteq E$
 $\mathcal{P}(A) = \{X \in \mathcal{P}(E) / X \subseteq A\}$

$$\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(E)$$

$\mathcal{P}(A)$ est stable pour $\cap$ et pour $\cup$

8) Puissances.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne T admettant un élément neutre e telle que T soit associative et tout élément de E est inversible pour T .

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $x^{n+1} = x^n T x$

$$x^{-n} = (x^{-1})^n$$

on pose : $x^0 = e$

Exemples :

Dans $(\mathbb{Z}, +)$: $2^3 = 2 + 2 + 2 = 6$

$2^0 = 0$

$2^{-3} = (2^{-1})^3 = -2 - 2 - 2 = -6$

Définition et notation : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$.

Si $+$ admet un élément neutre, celui-ci est noté 0

Si x est un élément inversible pour $+$, on dira que x est symétrisable et son inverse x^{-1} pour $+$ se note $-x$.



II] Loi de composition externe :

Définition : Soit E et K deux ensembles

On appelle loi de composition externe dans E à opérateur dans K , toute application :

$$f: K \times E \longrightarrow E$$

$$(\alpha, x) \longrightarrow f(\alpha, x)$$

$f(\alpha, x)$ se note $\alpha \cdot x$ ou αx

Exemples :

i) Soit E l'un des ensembles $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$

$$f: \mathbb{Z} \times E \longrightarrow E$$

$$(n, x) \longrightarrow x^n$$

f est une loi de composition externe dans E à opérateurs dans $\mathbb{Z}$.

ii) Soit E un ensemble et T une loi de composition interne dans E :

$$T: E \times E \longrightarrow E$$

T est une loi de composition externe dans E à opérateurs dans E .

SMIA2