

# ALGÈBRE I

## CHAPITRE 2 : RELATIONS BINAIRES

MR BOUHAMZA





## I] Notions sur les relations binaires :

1) Définition: Soit  $E$  un ensemble non videon appelle relation binaire dans  $E$  la donnée  $R$  d'un graphe  $G$  de  $E$  vers  $E$ .+ si  $(x, y) \in G$ , on dit que  $x$  et  $y$  sont en relation par  $R$  et on écrit :  $x R y$ 

$$(x R y \Leftrightarrow (x, y) \in G)$$

+ si  $(x, y) \notin G$ , on écrit  $x \not R y$  $G$  s'appelle le graphe de  $R$ .+ une application de  $E$  vers  $E$  est la donnée  $f$  d'un graphe  $G$  de  $E$  vers  $E$ .

$$\forall x \in E, \exists ! y \in E ; (x, y) \in G$$

Exemples: i) Soit  $E$  un ensemble et soit  $f: E \rightarrow E$  une application  
Le graphe de  $f$  est:

$$G = \{(x, f(x)) / x \in E\}$$

 $G$  définit dans  $E$ La relation binaire  $R$  par :

$$x R y \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

$$\Leftrightarrow y = f(x).$$

ii) Dans  $\mathbb{N}$ , soit  $R$  la relation binaire définie par:

$$x R y \Leftrightarrow x \text{ divise } y.$$

iii) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ On considère dans  $\mathbb{Z}$  la relation binaire  $R$  définie par:

$$x R y \Leftrightarrow n \text{ divise } (x - y)$$



iv) Soit  $E$  un ensemble

Dans  $\mathcal{P}(E)$ , on considère la relation binaire  $R$

définie par :  $X R Y \Leftrightarrow X \subset Y$ .

## 2) Réflexivité:

Définition: Soit  $E$  un ensemble

et  $R$  une relation binaire dans  $E$

on dit que  $R$  est réflexive si pour tout élément  $x$  de  $E$ , on a :  $x R x$ .

Exemples: Dans les exemples ii), iii) et iv)  $R$  est réflexive.

Remarque:  $R$  n'est pas réflexive  $\Leftrightarrow \exists x \in E, x \not R x$ .

Exemple:  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$G = \{(1, 1); (2, 2); (3, 4); (2, 5)\}$

$R$  la relation binaire dans  $E$  définie par  $G$ ,

on a  $(3, 3) \notin G$

## 3) Symétrie:

Définition: Soit  $E$  un ensemble et  $R$  une relation binaire dans  $E$ .

on dit que  $R$  est symétrique si pour tout  $(x, y) \in E^2$

tel que  $x R y$  on a  $y R x$ .

Exemples: i) Dans  $\mathbb{N}$ ,  $x R y \Leftrightarrow x/y$

on a  $1 R 2$  mais  $2 \not R 1$

$R$  n'est pas symétrique.

ii) Dans  $\mathbb{Z}$ :

$x R y \Leftrightarrow n \mid x - y$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $x R y$ .



$$\begin{aligned}
 &\text{on a } n \mid x-y \\
 &x-y = nq \\
 &\Rightarrow -(x-y) = -nq \\
 &\Rightarrow y-x = n(-q) \\
 &\Rightarrow n \mid y-x \\
 &\Rightarrow y R x
 \end{aligned}$$

#### 4) Antisymétrie:

Définition: Soit  $R$  une relation binaire dans  $E$

On dit que  $R$  est antisymétrique.

si pour tout  $(x, y) \in E^2$  tel que  $x R y$  et  $y R x$   
alors  $x = y$ .

$R$  est antisymétrique si et seulement si pour tout

$(x, y) \in E^2$  tel que  $x \neq y$

on a  $x \not R y$  ou  $y \not R x$ .

Exemples: i) Dans  $\mathbb{N}$ :  $x R y \Leftrightarrow x \mid y$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  /  $x R y$  et  $y R x$

on a  $x \mid y$  et  $y \mid x \Rightarrow x = y$

ii) Dans  $\mathcal{P}(E)$

$$X R Y \Leftrightarrow X \subset Y$$

Soit  $x, y \in \mathcal{P}(E)$  tel que  $x R y$  et  $y R x$

on a  $x \subset y$  et  $y \subset x$  d'où  $x = y$

alors  $R$  est antisymétrique.

iii)  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$G = \{(1, 1); (2, 2); (3, 5); (4, 2); (5, 3)\}$$



$R$  la relation binaire dans  $E$  définit par :

$$x R y \Leftrightarrow (x, y) \in G$$

on a  $3 R 5$  et  $5 R 3$  mais  $3 \neq 5$

$R$  n'est pas antisymétrique.

### 5) Transitivité :

Définition : Soit  $R$  une relation binaire dans  $E$   
On dit que  $R$  est transitive si pour  
tous  $x, y, z$  de  $E$  tels que :

$$x R y \text{ et } y R z \text{ on a } x R z$$

Exemples : i) Dans  $\mathbb{N}$ ,  $x R y \Leftrightarrow x/y$

Soit  $x, y, z \in \mathbb{N}$  tel que  $x R y$  et  $y R z$

on a alors :  $x/y$  et  $y/z$

$$y = ax \text{ et } z = by \text{ d'où } z = (ab)x$$

donc  $x/z$

alors  $x R z \Rightarrow R$  est transitive.

ii) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

Dans  $\mathbb{Z}$  :  $x R y \Leftrightarrow n | x - y$

Soit  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  tel que  $x R y$  et  $y R z$

$$x - y = an \text{ et } y - z = bn$$

$$(x - y) + (y - z) = an + bn$$

$$x - z = (a + b)n$$

$$\Rightarrow x R z$$

donc  $R$  est transitive.

iii)  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$G = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 6)\}$$

$$x R y \Leftrightarrow (x, y) \in G \text{ on a :}$$





$2R4$ ,  $4R5$  et  $2 \cancel{R} 5$   
donc  $R$  n'est pas transitive.

## II] Relation d'équivalence:

Définition: Soit  $R$  une relation binaire dans un ensemble  $E$ .  
on dit que  $R$  est une relation d'équivalence si elle  
est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples: i) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

Dans  $\mathbb{Z}$ :  $xRy \Leftrightarrow n|x-y$   
 $R$  est une relation d'équivalence.

ii) Soit  $E$  un ensemble et  $A$  une partie de  $E$ .

Dans  $\mathcal{P}(E)$ :  $XRY \Leftrightarrow AX = AY$   
 $R$  est une relation d'équivalence.

Définition et notation: Soit  $R$  une relation d'équivalence dans  $E$   
et soit  $(x, y) \in E^2$   
Si  $xRy$  on dit que:  
 $x$  et  $y$  sont congrus modulo  $R$  et on  
écrit:  $x \equiv y \pmod{R}$   
 $x$  congru à  $y$  modulo  $R$ .

Exemple: Dans  $\mathbb{Z}$ ,  $xRy \Leftrightarrow 2|x-y$

on a  $2 \equiv 0 \pmod{R}$

$7 \equiv 5 \pmod{R}$

$\forall k \in \mathbb{Z}: 2k \equiv 0 \pmod{R}$

$2k+1 \equiv 1 \pmod{R}$

$4 \not\equiv 3 \pmod{R}$



**Définition:** Soit  $R$  une relation d'équivalence dans  $E$   
et soit  $x \in E$

on appelle classe d'équivalence modulo  $R$  de  $x$ , et

on note:  $\mathcal{C}_R(x)$  ou  $\bar{x}$  ou  $\tilde{x}$  l'ensemble:

$$\{y \in E / x R y\}$$

**Exemple:** Dans  $\mathbb{Z}$ :  $x R y \Leftrightarrow 2 \mid x - y$

$$* \bar{0} = \{y \in \mathbb{Z} / 0 R y\}$$

$$\bar{0} = \{y \in \mathbb{Z} / y R 0\}$$

$$\bar{0} = \{y \in \mathbb{Z} / 2 \mid y\}$$

$$\bar{0} = \{2k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$* \bar{1} = \{2k+1 / k \in \mathbb{Z}\}$$



**Définition:** Soit  $R$  une relation d'équivalence dans  $E$

L'ensemble des classes d'équivalence modulo  $R$  s'appelle

l'ensemble quotient de  $E$  par  $R$  et se note  $E/R$

$$E/R = \{\bar{x} / x \in E\}$$

**Théorème 1:** Soit  $E$  un ensemble  $R$  une relation d'équivalence  
dans  $E$ ,  $X$  et  $Y$  deux éléments de  $E/R$ .

Alors on a:  $X = Y$  ou  $X \cap Y = \emptyset$

**Définition:** Supposons  $X \neq Y$

Soit  $z \in X \cap Y$ , on a  $z \in X$  et  $z \in Y$

En posant:  $X = \bar{x}$  et  $Y = \bar{y}$

on a alors:  $y R x$  et  $z R y$

on en déduit que  $x R y$

$$\Rightarrow y \in \bar{x} \text{ et } x \in \bar{y}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \bar{x}$$

$$\Rightarrow Y = X \text{ contradiction.}$$



Donc  $X \cap Y = \emptyset$

Remarque: Soit  $R$  une relation d'équivalence dans  $E$

Alors pour tout  $X \in E/R$  on a  $X \neq \emptyset$

En effet, soit

Par définition de  $X$ , il existe que  $x \in E$  tel que  $X = \bar{x}$

Comme  $R$  est réflexive, on a  $x R x$ , on déduit que:  $x \in \bar{x} = X$  donc  $X \neq \emptyset$

Théorème 2: Soit  $R$  une relation d'équivalence dans  $E$ .

Alors  $E/R$  est une partition de  $E$

Définition:  $F = (E_i)_{i \in I}$

$$E_i \subset E$$

$F$  partition de  $E$  si:

$$i) \forall i \in I, F_i \neq \emptyset$$

$$ii) \forall i \neq j, F_i \cap F_j = \emptyset$$

$$iii) E = \bigcup_{i \in I} F_i$$



Théorème 3: Soit  $E$  un ensemble non vide et  $F = (E_i)_{i \in I}$  une partition de  $E$ .

Alors  $F$  définit une relation d'équivalence dans  $E$ .

Démonstration: Soit  $R$  la relation binaire définie dans  $E$  par:

$$x R y \Leftrightarrow \exists i \in I \text{ tel que } x, y \in E_i$$

$R$  est une relation d'équivalence

Définition: Soit  $R$  une relation d'équivalence dans  $E$  et soit:

$$\gamma: E \longrightarrow E/R$$

$$x \longrightarrow \bar{x}$$



Alors  $\varphi$  est une application surjective qu'on appelle la surjection canonique de  $E$  (dans  $E/\mathcal{R}$ )

x Exemple: Soit  $E$  un ensemble non vide

$f$  une application de  $E$  vers  $E$  et soit  $\mathcal{R}$  la relation binaire définie dans  $E$  par:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in E: \bar{x} &= \{y \in E / x \mathcal{R} y\} \\ &= \{y \in E / f(x) = f(y)\} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \bar{f}: E/\mathcal{R} \rightarrow E$$

$$\bar{x} \mapsto f(x)$$

$\bar{f}$  est une application injective

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E/\mathcal{R} & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ & & \bar{f} \circ \varphi & & \uparrow \end{array}$$

$$\text{on a } f = \bar{f} \circ \varphi.$$

Notation: Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit dans  $\mathbb{Z}$ , la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définit par:  $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow n | x - y$

si  $x \mathcal{R} y$  on note:  $x \equiv y \pmod{n}$  ou:  $x \equiv y[n]$

L'ensemble  $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$  se note  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow n | x - y$$

$$\Leftrightarrow x - y \text{ multiple de } n$$

$$\Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$$

Remarque: Soit  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Alors } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

En effet soit  $x \in \mathbb{Z}$ , on effectue la division euclidienne de

$$x \text{ par } n: \quad x = nq + r \quad ; \quad 0 \leq r \leq n-1$$



$$\text{on a : } x - r = nr$$

$$\Rightarrow n \mid x - r$$

$$\Rightarrow x \equiv r [n]$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{r}$$

**Définition:** L'écriture  $f = \bar{f} \circ \gamma$  s'appelle la décomposition canonique de  $f$ .

### III] Relation d'ordre:

**Définition:** Soit  $E$  un ensemble et  $R$  une relation binaire dans  $E$ .

On dit que  $R$  est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

**Exemples:**

i) Dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $xRy \Leftrightarrow x/y$  ( $/$  est une relation d'ordre dans  $\mathbb{N}^*$ )

ii) Dans  $\mathbb{R}$ ,  $xRy \Leftrightarrow x \leq y$  ( $R$  est une relation d'ordre)

iii) Dans  $\mathcal{P}(E)$ ,  $XRY \Leftrightarrow X \subset Y$  ( $\subset$  est une relation d'ordre dans  $\mathcal{P}(E)$ )

**Définition:** Soit  $E$  un ensemble et  $R$  une relation d'ordre dans  $E$ .

On dit que deux éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  sont comparables par  $R$ , si on a :  $xRy$  ou  $yRx$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

**Exemple:**

Dans  $\mathbb{N}^*$ , 3 et 9 sont comparables par  $/$ .

**Définition:** Soit  $E$  un ensemble muni d'une relation d'ordre  $R$ .

i) On dit que  $E$  est **totale**ment ordonné par  $R$  si pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a :  $xRy$  ou  $yRx$ .

ii) On dit que  $E$  est **partiellement** ordonné par  $R$  s'il n'est pas totalement ordonné par  $R$ .



Exemples: i)  $(\mathbb{N}^*, /)$  partiellement ordonné

ii)  $(\mathbb{R}, \leq)$  totalement ordonné

iii)  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  partiellement ordonné

Définitions: Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $R$  et  $A$  une partie de  $E$ .

i) On dit qu'un élément  $M$  de  $E$  est un majorant de  $A$

si:  $\forall x \in A, x R M$

ii) On dit qu'un élément  $m$  de  $E$  est un minorant de  $A$

si:  $\forall x \in A, m R x$

Exemples:

i)  $(\mathbb{N}^*, /)$

$A$  = l'ensemble des entiers naturels pairs de  $\mathbb{N}^*$

2 est un minorant de  $A$

1 est un minorant de  $A$

$A$  n'a pas de majorant

ii)  $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $A = ]-1, 2[$

-2 est un minorant de  $A$

3 est un majorant de  $A$

iii)  $(\mathcal{P}(E), \subset)$ ,  $A = \mathcal{P}(E)$

$\forall x \in \mathcal{P}(E)$ , on a:  $X \subset E$  et  $\emptyset \subset X$

$E$  est un majorant de  $\mathcal{P}(E)$

$\emptyset$  est un minorant de  $\mathcal{P}(E)$

Définitions: Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $R$  et soit  $A \subset E$

i) On dit que  $A$  est majorée si elle admet un majorant.

ii) On dit que  $A$  est minorée si elle admet un minorant.

iii) On dit que  $A$  est bornée si elle est majorée et minorée.



Exemples:

i) Dans  $(\mathbb{N}^*, /)$

$\mathbb{P}$  = l'ensemble des nombres pairs non nuls

2 est un minorant de  $\mathbb{P}$

$\mathbb{P}$  est minorée

1 est un minorant de  $\mathbb{P}$

$\mathbb{P}$  n'a pas de majorant.

ii)  $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $A = [2, 5[$

2 est un minorant de  $A$

5 est un majorant de  $A$

$\Rightarrow A$  est bornée.

iii)  $E$  un ensemble

$\mathcal{P}(E)$  ordonné par  $\subset$

$\emptyset$  est un minorant de  $\mathcal{P}(E)$

$E$  est un majorant de  $\mathcal{P}(E)$

**SMIA 2**

Définitions: Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $R$  et  $A \subset E$

i) un élément  $M$  de  $E$  est dit plus grand élément de  $A$

si: ①  $M \in A$

②  $M$  est un majorant de  $A$ .

ii) un élément  $m$  de  $E$  est dit plus petit élément de  $A$

si: ①  $m \in A$

②  $m$  est un minorant de  $A$ .

Exemples: i)  $\mathbb{P}$  = l'ensemble des entiers naturels pairs non nuls  $(\mathbb{N}^*, /)$

2 est plus petit élément de  $\mathbb{P}$

ii)  $(\mathbb{R}, \leq)$   $A = [2, 5[$

2 est un plus petit élément de  $A$



$[2,5[$  n'a pas de plus grand élément.

En effet: Si  $M$  était un plus grand élément de  $[2,5[$

alors on aurait pour tout  $x$  de  $[2,5[$

$$x \leq M \text{ et } M \in [2,5[$$

comme  $M < 5$

$$\text{on a } 5 = M + r \text{ avec } r > 0$$

$$\text{soit } \varepsilon \in ]0, r[$$

$$\text{on a } M + \varepsilon < M + r = 5$$

$$\Rightarrow M + \varepsilon \in [2,5[$$

Comme  $M$  est un majorant de  $[2,5[$ , on a  $M + \varepsilon < M$

(Ce qui est absurde)

Remarques: Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $\mathcal{R}$  et  $A \subset E$

i) Si  $A$  admet un plus grand élément, alors celui-ci est unique

ii) Si  $A$  admet un plus petit élément, alors celui-ci est unique.

Définition: Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $\mathcal{R}$  et  $A \subset E$

i) Si l'ensemble des majorants de  $A$  admet un plus petit élément  $M$ , celui-ci s'appelle la borne supérieure de  $A$  et se note:  $\sup_{x \in A} x$  ou  $\sup A$ .

ii) Si l'ensemble des minorants de  $A$  admet un plus grand élément  $m$ , celui-ci s'appelle la borne inférieure de  $A$  et se note  $\inf_{x \in A} x$  ou  $\inf A$ .

Exemples: i)  $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $A = [2,5[$

$$2 = \inf A$$

$$5 = \sup A$$



$$ii) (\mathbb{R}, \leq), A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]n, n+1[$$

$$0 = \inf A$$

A n'a pas de  $\sup A$

Remarques: Soit  $E$  un ensemble ordonné par  $\mathcal{R}$ ,  $A \subset E$

i) Si  $A$  admet un plus grand élément  $M$  alors :  $\sup A = M$

ii) Si  $A$  admet un plus petit élément  $m$  alors :  $m = \inf A$ .

