ثانوية آنسي الحرة
عين السبع
الحي المحمدي

الامتحان التجريبي
الثاني في مادة الرياضيات

$\frac{1}{3}$

الشعبة	ع-ح-أ+ع-ف
المستوى	الثاني
مدة الإنجاز: 3س	المعامل: 7

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط: $A(1,1,0)$ و $B(0,1,1)$ و $C(1,-1,1)$.

1° - أ - حدد مثلوث إحداثيات المتجهة: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. (0,75 ن)

ب - بين أن: $2x+y+2z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) . (0,75 ن)

2° - لتكن (S) الفلكة التي مركزها $\Omega(2,3,1)$ ومماسة للمستوى (ABC)

أ - بين أن شعاع الفلكة (S) هو $R=2$. (0,5 ن)

ب - اعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) . (0,5 ن)

ج - نعتبر النقطة $H\left(\frac{2}{3},\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$ ، احسب المسافة ΩH ثم استنتج نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (ABC) . (0,5 ن)

التمرين الثاني : (3 ن)

لتكن $(U_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n - 1}{4U_n + 8} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1° - أ - بين أن $U_n > -\frac{1}{2}$: $(\forall n \in \mathbb{N})$ (0,5 ن)

ب - بين أن المتتالية (U_n) تناقصية، ثم استنتج أنها متقاربة . (0,75 ن)

2° - لتكن $(V_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي: $(\forall n\in\mathbb{N})$: $V_n = \dfrac{2}{2U_n+1}$

أ - بين أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ حسابية أساسها $\frac{2}{3}$. (0,5 ن)

ب - حدد V_n ثم U_n بدلالة n . (0,5 ن)

ج - استنتج نهاية المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$. (0,25 ن)

3° - نعتبر المتتالية العددية $(W_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بمايلي: (0,5 ن)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad W_n = e^{U_n}$$

بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

$\frac{2}{3}$

التمرين الثالث : (4,75 ن)

I - حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ (0,5 ن)

II - نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط A و B و C و O' التي ألحاقها على التوالي هي:

$z_A = -2i$ و $z_B = -\sqrt{3}+i$ و $z_C = \sqrt{3}+i$ و $z_{O'} = -\sqrt{3}-i$.

1° - أ - اعط شكلا أسيا لكل من الأعداد: z_A ، z_B و z_C . (0,75 ن)

ب - استنتج أن النقط A و B و C تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها O وشعاعها 2 . (0,75 ن)

ج - مثل في المعلم $(O,\vec{u},\vec{v})$ الدائرة (Γ) والنقطة A ثم النقطتين B و C . (1 ن)

2° - نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ - بين أن صورة النقطة C بالدوران R هي النقطة B ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC . (0,5 ن)

ب - بين أن صورة الدائرة (Γ) بالدوران R هي الدائرة (Γ') التي مركزها O' وشعاعها 2 ، ثم ارسم في نفس المعلم السابق الدائرة (Γ') (0,75 ن)

ج - استنتج أن النقطتين A و B تنتميان إلى واسط القطعة $[OO']$. (0,5 ن)

التمرين الرابع : (2,25 ن)

1° - تحقق من أن: $(\forall x\in\mathbb{R})$: $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ (0,25 ن)

2° - استنتج أن: (1 ن)

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \frac{e}{2} - 1$$

3° - باستعمال مكاملة بالأجزاء احسب التكامل I التالي: (1 ن)

$$I = \int_0^{\sqrt{e-1}} x \ln(1+x^2)\,dx$$

التمرين الخامس : (07ن)

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$g : x \longmapsto x^2 + 1 - \ln x$$

1° - ادرس تغيرات الدالة g . (0,75)

2° - استنتج أن : $g(x) > 0$ $\forall x \in]0,+\infty[$ (لاحظ أن : $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$) . (0,25)

II - لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f : x \longmapsto x + \frac{\ln x}{x}$$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = 2cm$) .

1° - احسب النهايتين : $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ (0,5)

2° - أ - بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ (0,25)

ب - ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (D) . (0,5)

3° - أ - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$ (0,75)

ب - اعط جدول تغيرات الدالة f . (0,25)

4° - أ - بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} محددا مجموعة تعريفها . (0,5)

ب - استنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. (0,5)

ج - بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $(f^{-1})'(0) = \frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + 1}$ (0,5)

5° - أ - اعط معادلة ديكارتية للمماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة $A(e, f(e))$ (0,5)

ب - مثل في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كلا من (D) و (T) و (C) . (0,75)

6° - أ - بين أن : (0,5)

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}$$

ب - استنتج مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين ب : $x = 1$ و $x = e$ (0,5)