التمرين الأول : (5ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

لكل عدد عقدي z يخالف العدد i، نضع :

$$Z=\frac{-iz+3-4i}{z-i}$$

(1ن) 1° - نضع : $z=x+iy$ مع $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و $(x,y)\neq(0,1)$.

بين أن :

$$\begin{cases} Re(Z)=\dfrac{4x-4y+4}{x^2+(y-1)^2} \\ \\ Im(Z)=\dfrac{-(x^2+y^2+4x+2y-3)}{x^2+(y-1)^2} \end{cases}$$

(1ن) 2° - حدد و مثل في المستوى العقدي، مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا تخيليا صرفا .

(1ن) 3° - حدد و مثل في المستوى العقدي ، مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون Z عددا حقيقيا .

التمرين الثاني : (4ن)

(1ن) 1° - أ- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية .

$$(E):\quad z^2+2\sqrt{3}\,z+4=0$$

نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) بحيث $Im(z_1)>0$.

(1ن) ب - اعط شكلا مثلثيا لكل من العددين z_1 و z_2 .

2° - نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقطتين $A(z_A)$ و $B(z_B)$ بحيث :

$$z_A=2 \quad \text{و} \quad z_B=z_1$$

(0,5ن) أ - حدد z_I لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم احسب معيار z_I .

(0,50) ب - تحقق من أن المثلث OAB متساوي الساقين.

(0,50) ج - استنتج أن: $\arg(z_I) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

(0,50) د - استنتج قيمة كل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

(4,5) التمرين الثالث:

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{5}{4} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{2} \ ; \ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

(0,75) 1 - بين أن: $U_n < 2$: $(\forall n\in\mathbb{N})$

(0,75) 2 - بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

3 - نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $v_n = U_n - 2$; $n\in\mathbb{N}$

(0,75) أ - بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=\frac{-3}{4}$

(0,75) ب - حدد U_n بدلالة n ثم احسب نهاية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ج - نضع:

$$\begin{cases} S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n \\ T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \end{cases} \quad \text{حيث} \quad n\in\mathbb{N}$$

(0,50) a - حدد T_n بدلالة n .

(0,50) b - تحقق من أن: $S_n = T_n + 2(n+1)$

(0,50) c - استنتج S_n بدلالة n ثم احسب نهاية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

التمرين الرابع : (8ن)

I - لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي :

$$g : x \longmapsto 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

1° - تحقق من أن : $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. (0,5ن)

2° - أ - بين أن : $(\forall x \in]0,+\infty[) : g'(x) = -4x \ln x$ (0,5ن)

ب - اعط جدول تغيرات الدالة g . (0,5ن)

ج - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $1,8 < \alpha < 2$ (0,5ن)

(نأخذ : $g(2) \simeq -0,5$ و $g(1,8) \simeq 0,4$) .

د - استنتج أن : (0,5ن)

$$\begin{cases} (\forall x \in]0,\alpha[) : & g(x) > 0 \\ (\forall x \in]\alpha,+\infty[) : & g(x) < 0 \end{cases}$$

II - لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

وليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ : $\|\vec{i}\| = 4cm$) .

1° - احسب النهايتين : $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما . (1ن)

2° - بين أن : $(\forall x \in]0,+\infty[) : f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$. (1ن)

3° - أ - بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha^2}$. (0,5ن)

ب - اعط جدول تغيرات الدالة f . (0,5ن)

ج - اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة $A(1,0)$ (0,5ن)

د - أنشئ (C) . (نأخذ $\alpha \simeq 1,9$ و $f(\alpha) \simeq 0,14$) . (1ن)

4° - ليكن h قصور الدالة f على المجال $]0,\alpha]$.

أ - بين أن h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجموعة نعرفها . (0,5ن)

ب - بين أن h^{-1} قابلة للاشتقاق في 0، ثم احسب $(h^{-1})'(0)$ (0,5ن)

ج - أنشئ في نفس المعلم السابق وبلون مخالف $(C_{h^{-1}})$. (منحنى الدالة h^{-1}) . (0,5ن)